ENAD ONLINE
EĞİTİMDE NİTEL ARAŞTIRMALAR DERGİSİ
Journal of Qualitative Research in Education
Cilt 5 / Sayı 3, 2017
Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi - ENAD
Journal of Qualitative Research in Education - JOQRE

Matematik Öğretmen Adaylarının Örüntüler Bağlamında Genelleme ve Doğrulama Bilgileri*

Preservice Mathematics Teachers' Knowledge of Generalization and Justification about Patterns

Dilek Tanışlı**
Nilüfer Yavuzsoy Köse
Faik Camci

To cite this acticle/ Atıf için:
Tanışlı, D., Yavuzsoy Köse,N., & Camci, F. (2017). Matematik öğretmen adaylarının örüntüler bağlamında genelleme ve doğrulama bilgileri. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi - Journal of Qualitative Research in Education, 5(3),* 195-222. www.enadonline.com DOI: 10.14689/issn.2148-2624.1.5c3s9m

Makale Hakkında
Gönderim Tarihi: 21.08.2017
Düzeltme: 25.10.2017
Kabul Tarihi: 11.11.2017

Öz. Bu çalışmanın amacı ortaokul matematik öğretmen adaylarının örüntüler bağlamında genellemelerini incelemek, genellemeler için ortaya koydukları doğrulamalarını keşfetmek ve yapılan genelleme ile doğrulama arasındaki ilişkiyi saptamaktır. Temel nitel araştırma yaklaşımının benimsendiği ve sekiz öğretmen adayı ile gerçekleştirilen bu çalışmada, verilerin toplanması klinik görüşme tekniği aracılığıyla gerçekleştirilmiş ve veri toplama aracı olarak doğrusal ilişki içeren ve içermeyen örüntü görevleri kullanılmıştır. Klinik görüşme verileri tematik analiz yöntemi kullanılarak analiz edilmiştir. Çalışma bulguları öğretmen adaylarının örüntüleri genelleme sürecinde belirgin ve belirgin olmayan muhakemeleri kullandıklarını ve doğrulama sürecinde ise tümdengelim ve tümevarım yöntemlerini benimsediklerini ortaya koymuştur. Belirgin muhakemeyi kullanan adayların doğrulama sürecinde genel olarak tümdengelim ve tümevarım yöntemlerini kullanırken, belirgin olmayan muhakemede bulunan adayların ise sadece tümevarım yöntemini kullandıkları bazı adayların da doğrulamalarının deneysel deliller ve dış otoriteden destek alma düzeyinde kaldıklarını göstermiştir. Çalışmada önemli görülen iki sonucun şekil aracılığıyla verilen örüntü görevlerinin genelleme ve doğrulama süreçlerini desteklemesi ve doğrulama yapmanın genelleme yapmayı katkı sağlaması olduğu söylenebilir. Öğretmen eğitiminde alan bilgisi ve alan öğretimine yönelik derslerde genelleme ve doğrulama süreçleri üzerinde adayların daha derin bir anlayış kazanmaları sağlanması önerilebilir.

Anahtar Kelimeler: Genelleme, doğrulama, örüntüler, matematik öğretmen adayları

Abstract. The purpose of this study is to examine preservice elementary school mathematics teachers' knowledge of generalization within the context of patterns, to elaborate their justifications for generalizations and to identify the relationships between the generalizations and justifications. In this study, which was conducted with eight preservice teachers using the basic qualitative research design, the research data were collected with the clinical interview technique. As the data collection tool, linear and non-linear pattern tasks were used. The data coming from clinical interview were analyzed through thematic analysis method. The research findings revealed that the preservice teachers used explicit and implicit reasoning in the process of generalizing the patterns, and applied deductive and inductive methods in the process of justifying their reasoning. In the study, the preservice teachers who prefer explicit reasoning generally used deductive and inductive methods in the justification process, while those also used implicit reasoning applied only the inductive method. It was also found that some of the preservice teachers' justifications were limited to using empirical evidence and taking support from external authority. One important result obtained in the study was that the given figural pattern tasks supported the processes of generalization and justification. In addition, another important result was that justification contributed to generalization. Preservice teachers could be provided with the opportunity to develop a more in-depth understanding of the processes of generalization and justification in the profession-related courses in the field of teacher training.

Keywords: Generalization, justification, patterns, preservice elementary mathematics teachers

---

* Bu çalışma 11-14 Mayıs 2017 tarihlerinde Denizli'de düzenlenen IV. Uluslararası Avrasya Eğitim Araştırma Kongresi'nde – EJER2017 (IV. International Eurasian Educational Research Congress) sözlü olarak sunulmuştur.

** 2 *Sorumlu Yazar:* Doç. Dr. Dilek TANIŞLI, Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, 26210, Eskişehir; Türkiye, e-posta: dtanisli@anadolu.edu.tr

Giriş

Matematiksel düşünmenin temel bileşenlerinden birinin genelleme olduğu söylenebilir. Genelleme olmaksızın matematiksel düşünmeden söz edilemeyeceği gibi (örn., Mason, 1996), cebirsel düşünmenin gelişiminde de genellemenin önemi büyüktür. Genelleme, öğrencilerin aritmetikten cebire geçiş yapmalarına yardımcı olan önemli bir yaklaşımdır (Blanton ve Kaput, 2011; Kaput, 1999; Lee, 1996; Lannin, 2005). Doğrulama ise matematiksel bilginin oluşumunda, gelişiminde ve iletilmesinde gerekli olan temel kavramlardan biridir. Aynı zamanda matematik yapma ve anlamanın en temel faktörüdür (Carpenter, Franke ve Levi, 2003; Hanna, 2000). Doğrulama bir bakıma genellemenin ayrılmaz ikizidir ve genellemeyi destekleyen (Lannin, 2005; Radford, 1996) yani genelleme becerilerini etkileyen bir süreçtir (Ellis, 2007a). Carpenter ve Levi'nin (2000) ifade ettiği gibi, bir gerçeğin arkasındaki nedenlerin doğrulanması ve incelemesi öğrencileri daha geneli ifade etmeye yönlendirmektedir. Doğrulama aynı zamanda öğretmenlerin de öğrencilerinin genellemelerini anlamalarını sağlayan bir araçtır (Lannin, 2005). Radford'un (1996, s. 111) "*genellemenin altında yatan mantık sonucun doğrulanmasıdır"* düşüncesi de genelleme ve doğrulama ilişkisini anlatan önemli bir ifadedir. Bu düşüncelere paralel olarak, öğrencilerin genelleme ve doğrulama yapma çalışmalarının, matematiksel düşünme gelişimleri için önemli olduğu söylenebilir. Bu durum öğretmenlerin genellemenin ve doğrulamanın farkında olmalarını, ayrıca öğrencilerinin de bunlara ilişkin düşüncelerini anlamalarını ve yorumlamalarını gerektirmektedir. Öte yandan öğrencilerin düşüncelerini anlamak ve yorumlamak pek çok öğretmen için zordur (Maher ve Davis, 1990). Dolayısıyla öğretmenlerin öncelikle genelleme ve doğrulama yapma ile ilgili öğrenci bilgisi kazanımını destekleyen bir lisans eğitiminden geçmelerinin önemli olduğu düşünülmektedir. Bu önem öğretmen adaylarını ve onların öğretmen bilgilerini gündeme getirmektedir.

Öğretmen bilgisi etkili bir öğretim ve öğrenmede en temel faktördür ve pek çok bilgiye sahip olmayı gerektirir. Bu bilgilerin başında öncelikle konu alan bilgisinde uzmanlaşmış olmak önemlidir. Her ne kadar bu bilgi tek başına yeterli olmasa da derin konu alan bilgisine sahip olmayan bir öğretmenden öğrencilerin öğrenmesini sağlayabileceğini beklemek de doğru değildir (Ball, Thames ve Phelps, 2008). Ball vd. (2008) Öğretme için Matematik Bilgisi Modeli (ÖMBM) kapsamında konu alan bilgisini, *genel alan bilgisi, uzmanlık alan bilgisi* ve *kapsamlı alan bilgisi* olmak üzere üç alt bileşene ayırmışlardır. Bu bileşenlerden uzmanlık alan bilgisi pedagojik bilgi içermeyen ancak öğretmenliğe özgü olup sınıf içerisinde sıklıkla kullanılan matematik bilgisidir. Uzmanlık alan bilgisi etkin öğretim için kavramsal bilginin salt olarak bulunması değil, matematiksel fikirlerin nedenlerini açıklamayı, ilişkilendirmeyi ve değerlendirmeyi gerektirmektedir (Ball vd., 2008; Aslan-Tutak ve Köklü, 2016). Çalışma kapsamında ise matematik öğretmen adaylarının genelleme yapmalarına ve bu genellemelerini doğrulamalarına yanı sıra genelleme ile doğrulama bilgilerinin nasıl ilişkilendirildiğine odaklanılmıştır. Bu bağlamda adayların konu alan bilgileri bu modelin uzmanlık alan bilgisi bağlamında incelenmektedir.

Alanyazın incelendiğinde öğretmen ve öğretmen adayları üzerinde genelleme ve doğrulamaya ilişkin az sayıda araştırmaya rastlanmaktadır (örn., Kirwan, 2015; Richardson, Berenson ve Staley, 2009; Tanışlı, 2016). Bununla birlikte genelleme ve doğrulama arasındaki ilişkiye dikkat çeken çalışmaların da sınırlı sayıda olduğu görülmektedir (Ellis, 2007a; Kirwan, 2015; Lannin, 2005). Örneğin, matematik öğretmen adaylarının genelleme ve doğrulama yapma becerilerinin incelendiği bir çalışmada, adayların genel olarak sembolik notasyonları kullanarak cebirsel kuralları genelleyebildikleri ancak doğrulama yapmada başarılı olamadıkları görülmüştür (Richardson vd., 2009). Öte yandan lise matematik öğretmen adaylarının genelleme ve doğrulama yapma becerilerinin gelişiminin incelendiği bir diğer çalışmada ise, öğretim deneyi sonucunda adayların şekil, sayı ve sembolik özellikler içeren çeşitli fonksiyonel, yinelemeli ve pragmatik kurallar geliştirdikleri ve genellemelerini sayısal, şekilsel ve sembolik argümanlarla açıklayarak ve doğrulayarak savundukları görülmüştür. Aynı zamanda şekilsel özelliklerin adayların genelleme yapabilmelerinde daha başarılı olmalarını sağladığı ve sayısal bir bakış açısıyla genellemelerini doğruladıkları da belirlenmiştir (Kirwan, 2015). İki matematik öğretmeninin ve bunların öğrencilerinin matematiksel ifadeleri genellemelerine ve doğrulamalarına ilişkin gerçekleştirilen bir başka araştırmada, öğretmenlerin genelleme yaparken deneme yanılma, yinelemeli ya da belirli bir kurala odaklı muhakemede bulunabildikleri görülmüştür. Aynı zamanda bu genellemelerini doğrulama sürecinde ise genel olarak açıklama düzeyinde kaldıkları ve deneysel delilleri de doğrulama yaparken kullanabildikleri belirlenmiştir (Tanışlı, 2016).

Genelleme ve doğrulama yapmanın erken yaşlardan itibaren gelişiminin sağlanması ve her iki bileşenin de matematik öğretiminin temel amaçlarından olması gerektiği uluslararası standartlarda ve öğretim programlarında vurgulanmaktadır (örn., CCSSM, 2010; MEB, 2013; NCTM, 2000). Bu becerilerin erken yaşlardan itibaren gelişimi ise belirlenecek uygun öğretim perspektifli çalışmalara bağlıdır. Bu çalışmalardan biri de *örüntüleri genelleme*dir. Örüntüleri genellemede, öncelikle değişmeyen özellik ya da ilişki keşfedilir, buna ilişkin bir varsayım oluşturulur ve varsayım test edilir (Blanton, 2008). Varsayım mantıklı görünen ancak henüz doğruluğu kanıtlanmamış iddialardır. Bir varsayımın doğruluğunu araştırma ise niçin doğru olduğunu açıklama ve genelleme koşullarını kontrol etme aşamalarından oluşan bir süreçtir. Dolayısıyla bir varsayım oluşturmada önemli bir eylem de, sunulan varsayımları doğrulamadır (Akkan, 2016). Sonuç olarak örüntü genellemenin erken yaşlardan itibaren genelleme ve doğrulama yapabilme gelişiminde anahtar bir kavram olduğu söylenebilir. Bu düşünce, çalışmanın bağlamının örüntüler üzerine olmasında etkili olmuştur.

Farklı sınıf düzeylerinde öğrencilerin örüntüleri genelleme ve doğrulama becerilerini inceleyen çalışmalarda ise, öğrencilerin genelleme ve doğrulama yapmada zorluk yaşadıkları görülmektedir (Chazan, 1993; English ve Warren, 1995; Kieran, 1992; Knuth, Slaughter, Choppin, ve Sutherland, 2002; Lee ve Wheeler, 1987). Örneğin, örüntü çalışmalarında öğrencilerinin çoklu örüntüleri fark ettikleri buna karşın genellemede zorlandıkları (Blanton ve Kaput, 2002; English ve Warren, 1995; Lee, 1996; Lee ve Wheeler, 1987; Orton ve Orton, 1994; Stacey, 1989; Tanışlı ve Özdaş, 2009), genelleme sürecinde ise fonksiyonel ilişkiden ziyade daha çok yinelemeli ilişkilere odaklandıkları görülmüştür (Blanton ve Kaput, 2002; Pegg ve Redden, 1990; Schliemann, Carraher, ve Brizuela, 2001; Tanışlı ve Özdaş, 2009). Yanı sıra geçerli bir sayı örüntüsü algılarının onların genelleme yapmalarını garantilemediği de belirlenmiştir (English ve Warren, 1995; Orton ve Orton, 1994; Stacey ve MacGregor, 1997). Bir kuralı ya da örüntüyü genelleyen öğrencilerin ise nasıl genellediğini ya çok az açıkladığı ya da açıklayamadığı (Coe ve Ruthven, 1994; Tanışlı, 2016), doğrulama yaparken de daha çok örnek verme yoluna gittikleri saptanmıştır (Coe ve Ruthven, 1994; Knuth vd., 2002; Koedinger, 1998; Tanışlı, 2016).

Sonuç olarak gerçekleştirilen çalışmalarda her sınıf düzeyinde genel olarak doğrusal ilişki içeren örüntü etkinliklerine odaklanıldığı dikkati çekmektedir. Araştırmalarda belli başlı genelleme stratejileri (yinelemeli, fonksiyonel, sayma, tahmin ve kontrol gibi) belirlenmiştir (örn., Lannin, 2003). Diğer yandan özellikle öğretmen adayları üzerinde gerçekleştirilen ve doğrusal ilişki içermeyen örüntü etkinliklerinin daha az sayıda çalışmada kullanıldığı görülmektedir (örn., Chua ve Hoyles, 2010; Li, 2011; Yeşildere ve Akkoç, 2011; Zazkis ve Liljedahl, 2002). Dolayısıyla bu tür örüntü çeşitlerinin farklı biçimlerde genellenebilmesi söz konusu olabilir. Öte yandan sayı ve şekil olarak verilen örüntülerin genelleme ve doğrulama yapmaya etkisinin karşılaştırılması da yapılabilir.

Bu düşünceler çalışmada farklı örüntü çeşitleri ve temsillerini genelleme ve doğrulama bağlamında incelemeyi gerekli kılmış, böylece doğrusal ve doğrusal olmayan ilişki içeren sayı ve şekil örüntülere odaklanılmasına yol açmıştır.

Amaç

Bu çalışmanın genel amacı ortaokul matematik öğretmen adaylarının örüntüler bağlamında genellemelerini incelemek, genellemeler için ortaya koydukları doğrulamalarını keşfetmek ve yapılan genelleme ile doğrulama arasındaki ilişkileri saptamaktır. Bu genel amaç kapsamında aşağıdaki sorulara yanıt aranmıştır:

1. Ortaokul matematik öğretmen adayları, sayı ya da şekil temsili ile verilen doğrusal ve doğrusal olmayan ilişki içeren örüntüleri nasıl genellemektedir?
2. Ortaokul matematik öğretmen adayları, sayı ya da şekil temsili ile verilen doğrusal ve doğrusal olmayan ilişki içeren örüntüleri genellemeye yönelik nasıl doğrulama yapmaktadır?

Bu çalışmanın önemi bağlamında birkaç nokta öne çıkmaktadır. Birincisi bir öğretmenin konu alan bilgisi öğretimi için vazgeçilmez bir bileşendir (Ball vd., 2008). Dolayısıyla, bu yaklaşım, bir öğretmen adayı içinde söz konudur. Genelleme ve doğrulama ise matematik konu alan bilgisi bağlamında sahip olunması gereken önemli bileşenlerinden ikisidir ve sınıf uygulamalarında kullanımı araştırmalarda, reform belgelerinde ve programlarda vurgulanmaktadır (örn., NCTM, 2000; CCSSM, 2010; MEB, 2013). Aynı zamanda erken yaşlardan itibaren gelişiminin sağlaması üzerinde durulmaktadır. Örüntüler ise bu gelişimin sağlamasında iyi bir bağlamdır. Giriş bölümünde özetlendiği üzere, öğretmen adayları üzerinde konuya ilişkin az sayıda çalışma yer almaktadır. Özellikle doğrusal olmayan ilişki içeren örüntüleri genelleme üzerinde çalışmalar sınırlıdır. Diğer yandan genelleme ile doğrulama ilişkili yapılardır ancak bu ilişkinin incelendiği çalışmaların sayısı da azdır. Tüm bu gerekçelerin çalışmayı gerekli kıldığı düşünülmektedir. Çalışma sonunda elde edilecek sonuçların hem ulusal hem de uluslararası matematik eğitimine önemli katkılar getireceği düşünülmektedir.

Kavramsal Çerçeve

Bu bölümde öncelikle genelleme ve doğrulamaya ilişkin alanyazın destekli genel bir çerçeve sunulmuş, daha sonra çalışmada benimsenen bakış açıları açıklanmıştır.

Genellemenin Tanımı ve Özellikleri

Genellemenin alanyazında çok yönlü tanımlarına rastlanmaktadır. Örneğin genelleme belli bir argümanın daha geniş bağlamda uygulama süreci olarak ifade edilmektedir (Harel ve Tall, 1989, s. 38). Kaput (1999, s. 137) ise genellemeyi olaylar ya da durumların kendilerine değil onlar arasındaki örüntülere, işlemlere, yapılara ve ilişkilere odaklı muhakeme yapma olarak tanımlamaktadır. Ellis (2007b, s. 197) de genelleme için üç etkinlikten en azından biriyle meşgul olunması gerektiği belirtilmektedir. Bunlar (a) olaylar arasındaki özellikleri belirlemek, (b) kişinin muhakemesini yönlendirilmiş aralığın ötesine genişletmek, (c) belirli olaylardan daha geniş sonuçlara ulaşmaktır.

Genellemenin yapısına vurgu yapan bu tanımların yanı sıra dört özelliğinden de söz edilebilir. Bu özelliklerinden biri *genişletme*dir. Yani, verilen bir argümanın ya da muhakemenin sınırlarını yükseltmektir. İkinci özelliği ise soyutlamadır. Diğer bir deyişle, nesnelerin tümü arasında ortak ya da değişmeyen özelliklerin tanımlanmasıdır. Soyutlama olarak genelleme, belirli bir grup durum için mevcut ortak noktaların sentezlenmesidir. Genellemenin üçüncü özelliği süreç özelliğidir. Genelleme bir nesne değil, bir eylem ya da etkinliktir. Bu özelliğin tersine dördüncü özellik ise nesne özelliğidir. Diğer bir deyişle, genelleme bir sürecin sonunda elde edilen bir ürün olarak da görülebilir (Kirwan, 2015).

Adı geçen bu farklı özelliklerinin bir sonucu olarak genelleme çalışmalarında farklı varsayımlar da yapılmaktadır. Bazı araştırmacılar genellemeyi içsel bir yapı yani zihinsel bir süreç olarak ele almakta ve kişinin zihinsel etkinlikleri tanımlanmaktadır. Bazı çalışmalarda ise bu durum *süreç olarak genelleme* şeklinde ifade edilmektedir (örn., Becker ve Rivera, 2006; Radford, 2003). Bazı araştırmacılar da genellemeyi dışsal bir yapı yani zihinsel süreç sonucundaki sözel ya da yazılı ifadeler olarak ele almaktadır (Ellis, 2007b). Bazı çalışmalarda ise bu durum *ürün olarak genelleme* şeklinde ifade edilmektedir (Chua ve Hoyles, 2010). Genellemenin dışsal bir yapı olduğu varsayımında, deneysel olarak bulunan kurallar, ortak özellikler, tanımlar ya da diğer ifadeler genelleme olduğu anlaşılan nesnelerdir. Deneysel genellemeler, belirli bir nesne kümesi arasındaki ortak noktaları belirlemeye dayanmaktadır. Bu dışsal genellemelerin en önemli özelliği, genellemenin soyutlanmamasıdır (Kirwan, 2015).

Tüm bu ifade edilenler genellemenin tanımları ve özellikleri arasındaki ortak noktaları ve farklılıkları saptamaya yardımcı olmaktadır. Bu çalışmanın amacı bağlamında, genelleme için Kaput'un (1999) tanımı benimsenmiş ve genellemeye, bir sürecin sonucu olarak *ürün olarak genelleme* (Chua ve Hoyles, 2010) bakış açısı çerçevesinde ele alınmıştır.

Bağlam: Örüntüler ve Örüntüleri Genellemede Kullanılan Muhakeme Türleri

Belirli bir örüntüyü genelleme sonucunda elde edilen cebirsel kurallar sıklıkla ürün olarak genelleme kapsamında ele alınır (örn., English ve Warren, 1995; Lee, 1996; Stacey, 1989). Bu kurallar, katılımcılar tarafından yapılan yazılı ya da sözlü ifadelerle tanımlanır (Ellis, 2007b). Bazı araştırmacılar, sembolik olarak genellemeleri ifade etmenin önemini savunurken (örn., Kieran, 1989; Kinach, 2014), diğer araştırmacılar sembolik olmayan ya da sözlü açıklamaları da eşit derecede geçerli genellemeler olarak görmektedir (örn., Zazkis ve Liljedahl, 2002).

Yapılan araştırmaların bir sentezi sonucunda, örüntü genellemede kullanılan muhakeme türlerinin de çeşitlendiği görülmektedir. Tablo 1'de bu muhakeme türlerinin bir özeti sunulmaktadır (örn., Becker ve Rivera, 2005; Becker ve Rivera, 2006; Chua ve Hoyles, 2010; Lannin, 2003; Stacey, 1989; Tanışlı, 2011; Townsend, Lannin, ve Barker, 2009).

Tablo 1.
Örüntüleri Genellemede Kullanılan Muhakeme Türleri

Muhakeme Türleri	Açıklaması
Yinelemeli Muhakeme	Bir dizide sonraki terimi/şekli bulmak için, önceki terimin/şeklin kullanılmasıdır.
Belirgin Muhakeme	İki ya da daha fazla değişen nicelikleri genellikle bir kural ya da formül ile doğrudan ilişkilendirmedir.
Şekilsel Muhakeme	Şekilleri ve diğer görselleri kullanarak nesnelerdeki değişen ve değişmeyen özellikleri ya da yapıları tanımlamaktır.

Şekilsel Sayma	Bir resim çizme ya da durumu temsil eden bir model oluşturma ve istenilen niteliği saymadır.
Sayısal Muhakeme	Kuralı belirlemek için sayısal ipuçları kullanmaktır.
Pragmatik (Sayısal+Şekilsel) Muhakeme	Hem sayısal hem de şekilsel muhakemenin kullanılmasıdır.
Orantısal Muhakeme	Bir birimin tanımlanması sonra bir çarpanla bu birimin ölçülmesidir.
Oran-Düzenleme Muhakemesi	Orantısal muhakemenin en genel yollarından biridir. Birim olarak değişim oranını tanımlama ve bir çarpanla bu birimin ölçülmesidir.
Bütüne Genişletme	Birim olarak değişim oranının olmayan bir çarpanını kullanmak ve sonra bir çarpanla bu birimi ölçmektir.
Tahmin ve Kontrol	Kuralın neden işe yaramadığına bakmaksızın bir kural tahmin etmektir.
Parçalama Muhakemesi	İstenen özelliğin bilinen değerleri üzerine bir birim kurarak yinelemeli örüntü oluşturmaktır.
Bağlamsal Muhakeme	Problem durumuyla belirlenen bir ilişkinin temelinde bir kural oluşturmaktır.
Araç Örüntü	Girdi çıktı tablosunda, girdi ve çıktı değerleri arasındaki farkları alarak yeni bir örüntü oluşturmaktır.

Çalışmada söz konusu bu muhakeme türleri verilerin analizinde ve bulguların yorumlanmasında etkili olmuş, bu muhakeme türleri dışında farklı muhakemeler de araştırılmıştır.

Doğrulamanın Tanımı ve Anlamı

Alanyazında doğrulama (justification) kelimesinin her zaman kullanılmadığı söylenebilir. Çoğu araştırmada bu kelime "kanıtlama" (proving) kelimesiyle aynı anlamda kullanılmaktadır (Harel ve Sowder, 2007). Bu çalışmada da "doğrulama" ve "kanıtlama" eş anlamlı olarak kabul edilmiştir.

Doğrulama, kabulleri ve matematiksel muhakeme türlerini kullanarak bir iddianın doğruluğunu (ya da reddini) gösteren bir argüman olarak açıklanabilir (Staples, Bartlo, ve Thanheiser, 2012, s. 448). Benzer şekilde kanıtlamada bir kişinin (ya da topluluğun) bir iddianın doğruluğu hakkındaki kuşkuları gidermek için işlettiği bir süreç olarak ifade edilebilir (Harel ve Sowder, 2007, s. 808). Her iki tanımın ortak noktası bir ifadenin doğruluğunu gösterme ile ilgilidir. Lo, Grant ve Flowers (2008) ise doğrulamayı (ya da kanıtlamayı) bir ifadenin neden doğru olduğunu açıklayan ikna edici bir argüman olarak tanımlamışlardır.

Bu açıklamalar ışığında doğrulamanın, doğruluğu gösterme ve neden doğru olduğunu açıklama şeklinde iki temel rolünün öne çıktığı söylenebilir (Hanna, 2000). Bu çalışmada da doğrulama tanımında bu iki temel nokta benimsenmiştir.

Doğrulama ile İlişkili Araştırma Gelenekleri

Doğrulamanın ifade edilen farklı tanımlamalarının bir sonucu doğrulama üzerine yapılan araştırmaların da odak noktasını farklılaştırmıştır. Bu farklı odak noktaları *tümdengelimle ilişkili doğrulama* ve *tümevarımla ilişkili doğrulama* şeklinde iki temel araştırma geleneğini doğurmuştur. Tümdengelimle ilişkili doğrulama genel olarak kanıt ile eş anlamlıdır ve bilinen bir bilgi kümesinden bir sonuca varma olarak tanımlanmaktadır (de Castro, 2004). Tümdengelimli doğrulamanın temel özelliği herhangi bir çıkarımda bulunmamaktır. Diğer bir değişle belirli bir olay ile çalışılıyorsa bu olayın ötesine geçilmesi söz konusu değildir (Kirwan, 2015). Tümdengelimle ilişkili doğrulamaya, kanıt şemalarının sınıflandırıldığı teorik çerçevelerden Harel ve Sowder'ın (1998) analitik kanıt şemaları altında ele aldığı dönüşümsel ve aksiyomatik şemalar, Balacheff'in (1988) entelektüel kanıt altında ele aldığı *düşünce deneyi* örnek olarak verilebilir.

Tümevarımla ilişkili doğrulama ise özel örneklerin sonlu bir örnekleminden bilgiyi genelleme olarak ifade edilmektedir (Rivera ve Becker, 2003, s. 63). Tümevarımla ilişkili doğrulama genel bir duruma dayalı bir varsayımı açıklamak için özel bir durumu gözlemleme üzerine kurulmuştur. Temel özelliği ise bir çıkarımda bulunulmasıdır. Diğer bir ifadeyle belirli bir olay ile çalışılıyorsa, bu olayların incelenmesiyle tüm olayları kapsayan genel bir duruma genişletme yapılır. Örneğin bir örüntüyü genellerken bir öğrenci varsayılan genel kuralın neden doğru olduğunu gerekçelendirmek için özel bir duruma başvurabilmektedir. Tümevarımla ilişkili doğrulamaya Harel ve Sowder'ın (1998) dışsal (otoriter, alışkanlık edinilmiş, sembolik) ve deneysel (algısal, örnek temelli) kanıt şemaları, Balacheff'in (1988) entelektüel kanıt altında kapsamlı örnek, pragmatik kanıt altında ise acemi deneycilik ve kritik deneyim örnek olarak verilebilir.

Yapılan bazı araştırmalarda ise doğrulama yapabilme gelişimlerinin düzeylere atandığı çerçeveler de söz konusudur (örn., Lannin, 2005; Simon ve Blume, 1996; Waring, 2000). Bu düzeylerde yer alan kategoriler de doğrulamaya ilişkin tanımlanan teorik çerçevelerdeki sınıflamalar ile örtüşmektedir. Örneğin Tablo 2'de verilen doğrulama çerçevesi Lannin (2005, s. 236) tarafından çeşitli çalışmalardan adapte edilerek oluşturulmuştur.

Tablo 2.
Doğrulama Çerçevesi

Doğrulama Düzeyleri	*Tanımları*
Düzey 0: Doğrulama yok	Yanıtların doğrulamaya hitap etmemesi
Düzey 1: Dış otoriteden destek arama	Bir kişinin ya da referans materyalin ifade ettiği doğruluğa atıfta bulunulması
Düzey 2: Deneysel deliller	Doğrulamanın belirli örneklerin doğruluğuyla sağlanması
Düzey 3: Kapsamlı örnekler	Belirli bir örnek üzerinden ifade edilen tümdengelim doğrulama
Düzey 4: Tümdengelimli doğrulama	Belirli örneklerden bağımsız tümdengelim bir argüman yoluyla yapılan doğrulama

Doğrulama ile ilişkin araştırma geleneklerinin bir sentezi sonunda bu çalışmada da doğrulama yöntemlerinde tümevarım ve tümdengelim ile doğrulama şeklinde iki temel başlık benimsenmiş ve bu başlıklar altında Tablo 2'de tanımlanmış düzeylere atıfta bulunulmuştur.

Yöntem

Araştırma Deseni

Bu çalışmada temel nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir. Bu yaklaşım ile bir olgu, bir süreç ya da ilgili kişilerin perspektifleri ve dünya görüşleri keşfedilmeye ve anlaşılmaya çalışılır. Temel nitel araştırmada görüşmeler, gözlemler ve doküman incelemelerinde kullanılan sorular, belirlenen odak noktaları ve kurulan ilişkiler araştırmanın kuramsal çerçevesine bağlı olarak gerçekleştirilmektedir (Merriam, 2009). Çalışma kapsamında ise ortaokul matematik öğretmen adaylarının görüşleri doğrultusunda örüntüler bağlamında genellemelerini incelemek, genellemeler için ortaya koydukları doğrulamalarını keşfetmek ve yapılan genelleme ile doğrulama arasındaki ilişkileri saptamak amaçlanmıştır.

Katılımcılar

Çalışmanın katılımcıları bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği dördüncü sınıfına devam eden gönüllü sekiz öğretmen adayından oluşmaktadır. Katılımcıların seçiminde amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Bu bağlamda belirlenen ölçüt adayların dördüncü sınıfa devam ediyor olmalarıdır. Çalışma kapsamında adayların öğretmen bilgileri konu alan bilgisi bağlamında sorgulanacağı için adayların hem alan bilgisi (örn. soyut matematik, cebir gibi) hem de alan öğretim bilgisi (örn. Özel öğretim yöntemleri, ilköğretimde cebirsel düşünmenin gelişimi, problem çözme gibi) kapsamında zorunlu ve seçmeli pek çok dersi almış olmaları gerekliliği katılımcıların dördüncü sınıftan seçilmesine yol açmıştır.

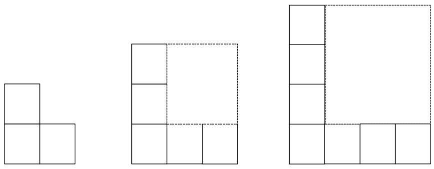
Verilerin Toplanması

Çalışmada öğretmen adaylarının örüntüler bağlamında genelleme sürecindeki muhakemelerini belirlemek ve bu genellemelerini nasıl doğruladıklarını keşfetmek amaçlanmıştır. Amaca bağlı olarak da adayların muhakeme süreçlerini ve düşüncelerini derinlemesine incelemek gerekliliği doğmuştur. Bu nedenle amacı destekleyen ve matematik eğitiminde sıklıkla kullanılan klinik görüşme tekniği çalışma kapsamına alınmıştır (Clement, 2000). Çalışmada, Waring, Orton ve Roper (1999) tarafından geliştirilen ve Tablo 4'te sunulan üç açık uçlu sorudan/problemden oluşan örüntü görevi veri toplama aracı olarak kullanılmıştır. Problemlerden biri adayların genelde aşina oldukları doğrusal ilişki içeren bir örüntüden oluşurken, diğer ikisi problem bağlamından çıkarılan ve doğrusal ilişki içermeyen örüntü çeşitlerinden oluşmaktadır. Problemlerde alt maddeler yer almaktadır ve çözümlerinde yanıtların gerekçelendirilmesi de istenmiştir.

Hazırlanan problemlerin ölçme amacına uygunluğunun tespiti için iki alan uzmanının görüşüne başvurulmuş, daha sonra ilköğretim matematik öğretmenliği dördüncü sınıfa devam eden bir öğrenci üzerinde ölçme aracının pilot çalışması gerçekleştirilmiştir. Dönütler değerlendirilmiş ancak problemlerde herhangi bir düzenlemeye gidilmemiştir. Klinik görüşmeler adayların kendilerini rahat hissettikleri, sessiz bir ortamda yapılmış ve görüşmeler video kamerayla kaydedilmiştir. Adaylara çözümlerini gerçekleştirebilmeleri için yeterince süre tanınmış ve görüşmeler 60-90 dakika arasında sürmüştür.

Tablo 4.
Örüntü Problemleri

Problem 1 (L Şekil Örüntüsü)



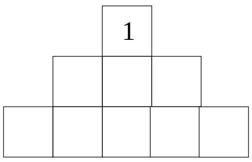
Yukarıda L-şekil örüntüsü kibrit çöpleri kullanılarak yapılmıştır.

1. Aşağıdaki tabloyu n=2, 3, 4, 5, 6 için tamamlayınız.

En geniş kenarlı kare sayısı (n)	2	3	4	5	6	10	100
Küçük karelerin sayısı (k)	3						
L-şeklinin çevresi (ç)	8						
Kibrit çöpü sayısı (m)	10						

2. Görebildiğiniz örüntüleri tanımlayınız.
3. n yardımıyla aşağıdaki maddelerin formülünü bulunuz.
    a) Küçük karelerin sayısı (k)
    b) L-şeklinin çevresi (dışarıdaki kibrit çöpü sayısı) (ç)
    c) Kullanılan kibrit çöpü sayısı (m)
4. Formüllerin verilen şekiller ile nasıl ilişkili olduğunu açıklayarak formüllerin doğruluğunu ispatlayınız (kontrol etme ispat ile aynı değildir).
5. n=10 ve n=100 için k, ç ve m'nin değerlerini bulmak için bulduğunuz formülleri kullanınız ve tabloyu doldurunuz.

Problem 2 (Merdiven Sayı Örüntüsü)



Onur'un kız kardeşi Elif yukarıda görüldüğü gibi bir sayı dizisini araştırmak için verilen şekli kullanıyor.

1) Örüntüye üç satır daha ekleyin.
2) 9. satır ne olur? Neden?
3) 10. satır aynı örüntüyü takip eder mi? Neden/Neden değil?

Problem 3 (Ardışık Sayılar Problemi)

Ardışık 5 tamsayıdan oluşan {9,10,11,12,13}kümeyi dikkate alınız. Buna göre;

1) 2, 3, 4 ve 5'in kaç çarpanı vardır?
    a) Herhangi beş ardışık tamsayı kümesinde 2, 3, 4 ve 5'in maksimum çarpan sayısı nedir? Neden?
2) 2x3x4=24 üç ardışık tamsayının bir çarpanıdır.
    a) Farklı üç ardışık tamsayı çarpanı da siz bulunuz.
    b) Hangi durum her zaman doğru gibi görünüyor? Neden?
    c) Bir örüntü görene kadar tekrar ediniz.
    d) Üç ardışık tamsayı çarpıldığında bu durumun daima neden olduğunu açıklayınız.

Kaynak: (Waring, Orton ve Roper, 1999)

Verilerin Analizi

Çalışmada verilerin analizinde tematik analiz yöntemi kullanılmıştır. Tematik analizde temalar ve örüntüler veri içinden çıkarılabileceği gibi çeşitli modellerde kullanılan mevcut temalardan da yararlanılabilir (Liamputtong, 2009). Bu çalışmada, kodlar ve temalar kuramsal çerçeve bağlamında incelenmiş ve temalar-alt temalar oluşturulmuştur.

Veri analiz süreci iki adımda gerçekleştirilmiştir. Birinci adımda verilerin dökümleri yapılmış ve veriler tekrar tekrar okunarak katılımcılar tarafından ifade edilen düşünceler anlamlandırılmaya çalışılmıştır. İkinci adımda ise kodlamaya ve temalaştırmaya geçilmiştir. Bu süreçte problemlerin yapıları birbirinden farklı olduğu için her problem türü ayrı ayrı analiz edilmiştir. Analiz sürecinde her problem için muhakeme türleri ve doğrulama yöntemleri olmak üzere iki ana tema belirlenmiştir. Örneğin şekil örüntüsünden oluşan birinci problemde muhakeme türleri teması altında şekilden sayma, belirgin ve belirgin olmayan şeklinde üç ayrı alt tema oluşturulmuştur. Bu örüntünün çözümünde sayısal, şekilsel ve hem sayısal hem de şekilsel-pragmatik (bkz. Tablo 1) olmak üzere üç yaklaşım izlediği için üç alt tema bu yaklaşımlar altında sınıflandırılmıştır. Daha sonra bu sınıflandırma altında da dokuz muhakeme türü tanımlanmıştır (bkz. Tablo 1). Birinci problemin doğrulama yöntemleri teması altında ise tümdengelim ve tümevarım olmak üzere iki alt tema oluşturulmuştur. Tümdengelim alt teması altında şekille ilişkilendirme (bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki ilişkinin şeklin yapısal özelliği ile ilişkilendirilerek kuralın ifade edilmesi) ve farklı alternatif yollar bulma (şeklin yapısal özelliğini farklı bir bakış açısı ile analiz ederek kuralı ifade etme) olmak üzere iki kod tanımlanmıştır. Tümevarım alt teması altında ise deneysel deliller (bkz. Tablo 2) ve şekille ilişkilendirememe (bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki ilişkinin şeklin yapısal özelliği ile ilişkilendirilememesi) şeklinde iki kod ifade edilmiştir. Benzer şekilde ikinci problemde de muhakeme türü teması altında belirgin ve belirgin olmayan şeklinde iki alt tema ve bu alt temalar altında da dört muhakeme türü tanımlanmıştır (bkz. Tablo 1). Doğrulama yöntemleri teması altında ise tümdengelim ve tümevarım alt temaları oluşturulmuş ve bu alt temalar altında deneysel deliller, otoriter, kapsamlı örnekler ve hatalı doğrulama şeklinde dört kod belirlenmiştir (bkz. Tablo 2). Üçüncü problem ise ikiye ayrılarak analiz edilmiştir. İlk adımı için muhakeme türü teması altında belirlenen alt tema belirgin teması olmuştur. Bu tema altında katlarını dikkate alma, bölenlerini dikkate alma ve sadece 3'e bölünebilmeyi düşünebilme şeklinde üç kod tanımlanmıştır. İkinci adım için muhakeme türü teması altında ise belirgin olmayan ve belirgin olmak üzere iki alt tema ve bu temalar altında da iki muhakeme türü belirlenmiştir (bkz. Tablo 1). Üçüncü problemin iki adımı için doğrulama yöntemleri teması benzer şekilde tümevarım ve tümdengelim şeklinde iki alt temaya ayrılmıştır. İlk adımı için tümevarım alt teması altında otoriter, deneysel deliller (rastgele örnekler ve özel örnekler), tümdengelim alt teması altında ise kapsamlı örnekler ve tümdengelimli doğrulama kodları tanımlanmıştır. İkinci adımı için tümevarım alt teması altında deneysel deliller, tümdengelim alt teması altında ise kapsamlı örnekler kodları belirlenmiştir (bkz. Tablo 2).

Kodlama ve temalaştırma süreci ilk iki yazar tarafından birbirinden bağımsız olarak yürütülmüş ve güvenirlilik hesaplaması yapılarak %80 güvenirlik sağlanmıştır (Miles ve Huberman, 1994, s. 64). Temalar ve alt temalar bulgularda diyagramlarla sunulmuş, adaylar için takma isimler (Derya, Emel, Işık, …) kullanılmıştır.

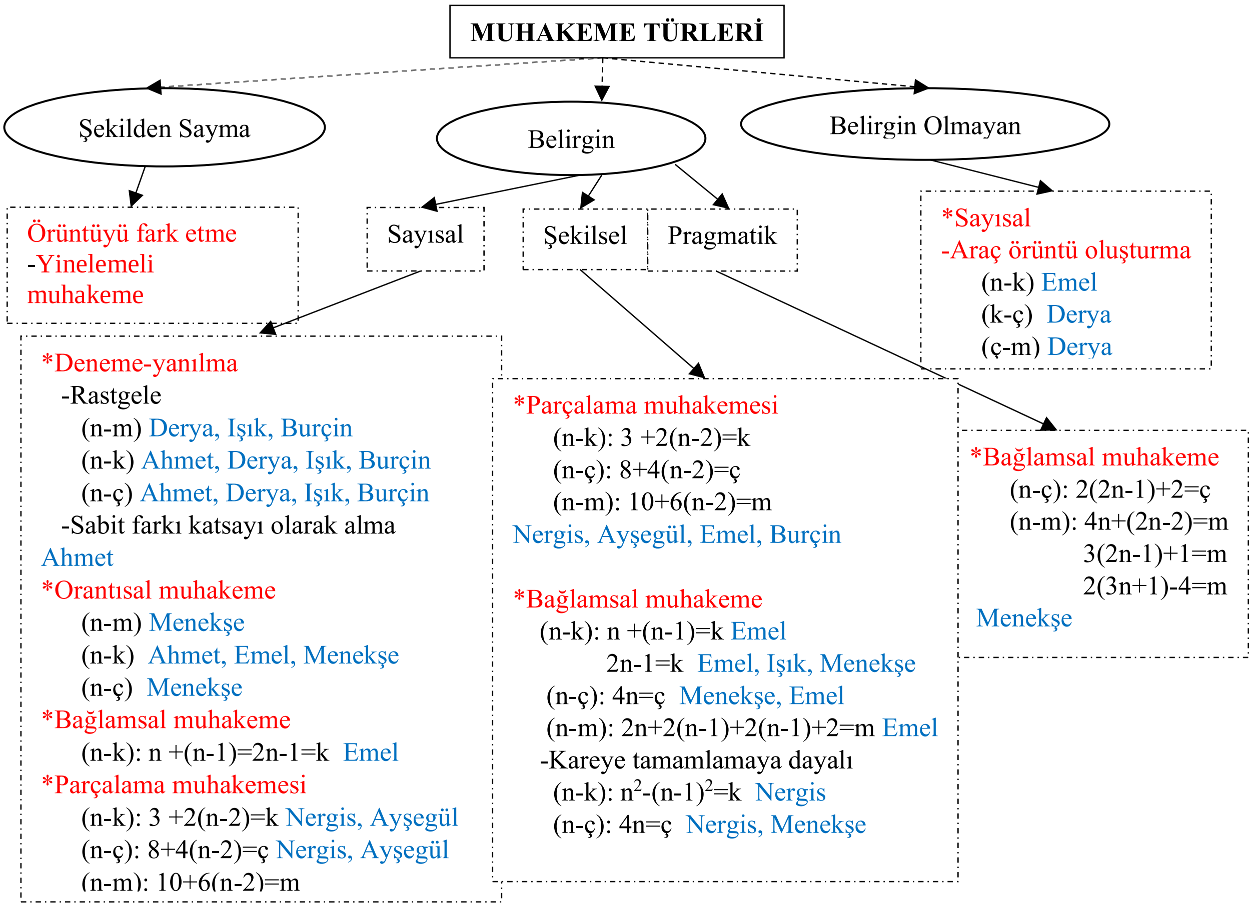
Bulgular

Ortaokul matematik öğretmen adaylarının genelleme yapmalarına ve bu genellemelerini doğrulamalarına yanı sıra genelleme ile doğrulama bilgilerinin nasıl ilişkilendirildiğine odaklanıldığı bu çalışmada bulgular her bir soru bağlamına özel olarak sunulmuştur.

L şekil örüntüsünü genellemede kullanılan muhakeme türleri ve doğrulama yöntemleri

Öğretmen adaylarının L şekil örüntüsünü genellemede Şekil 1'de sunulduğu gibi "şekilden sayma", "belirgin" ve "belirgin olmayan" olmak üzere üç muhakeme türünden yararlandıkları söylenebilir.

Öncelikle tüm adaylar örüntünün 2., 3., 4., 5. ve 6. adımındaki küçük kare sayılarını (k), çevreleyen kibrit çöpü sayılarını (ç) ve toplam kibrit çöpü sayılarını (m) şekilden sayarak belirlemişlerdir. Bu süreçte iki öğretmen adayı araç örüntü (Tanışlı, 2011) de oluşturmuştur. Ardından adaylar adım sayısı ile k, ç ve m arasındaki ilişkinin keşfi için belirgin, yani fonksiyonel muhakemeden yararlanmış ve bu muhakeme kapsamında sayısal, şekilsel ya da pragmatik olmak üzere üç muhakeme türünü kullanmışlardır.



Şekil 1. Öğretmen Adaylarının L Şekil Örüntüsünde Kullandıkları Muhakeme Türleri

Sayısal muhakeme kapsamında adayların dört ayrı muhakemede bulundukları saptanmıştır. Bu muhakemelerden biri olan ve dört öğretmen adayı tarafından kullanılan deneme yanılma muhakemesinde bazı adaylar rastgele ya da örüntünün sabit farkını katsayı olarak almış, adım sayısı ile k, ç ve m arasındaki ilişkiye ulaşmışlardır. Diğer bir sayısal muhakeme olan orantısal muhakeme ise üç öğretmen adayı tarafından kullanılmış ve adaylar adım sayısı ile k, ç ve m arasındaki kat ilişkisine odaklanarak genellemelere ulaşmışlardır. Sayısal muhakeme kapsamında bir öğretmen adayının adım sayısı ile küçük kare sayıları arasındaki (n-k) örüntüye odaklanarak ilişkiye dayalı bir kural oluşturduğu yani bağlamsal muhakemeyi kullandığı saptanmıştır. Emel bu süreçte önce bir t tablosu oluşturmuş, tablo üzerinden keşfettiği kurala dayalı genellemesini ifade etmiştir. Emel'in düşünme süreci Şekil 2'de sunulmuştur.

n	k
2	3
3	5
4	7
5	9
6	11

n	k
2	2+1
3	3+2
4	4+3
5	5+4
6	6+5
…	…
n	n+(n-1)

Emel *: Adım sayısına bir eklemişiz, 2+1* [n=2 için]
Adım sayısına 2 eklemişiz, 3+2 [n=3 için]
Adım sayısına 3 eklemişiz, 4+3 [n=4 için]
Adım sayısına 4 eklemişiz, 5+4 [n=5 için]
Yani hep adım sayısı var, adım sayısının 1 eksiği kadar ekleyince o bana k'yı vermiş.

Araştırmacı: *Yani?*

Emel *: Yani n tane olsaydı, n olacak adım sayısı ve onun bir eksiği kadar ekleyecektik. O zaman 2n-1, k'ya eşit.* [2n-1=k yazdı]

Şekil 2. Emel'in Sayısal Muhakeme Kapsamında Kullandığı Bağlamsal Muhakeme

Sayısal muhakeme kapsamında adayların son olarak kullandıkları muhakeme parçalama muhakemesidir. Parçalama muhakemesinde üç aday birinci adıma karşılık gelen kare sayısını (3), örüntüyü çevreleyen kibrit çöpü sayısını (8) ve tüm kibrit çöpü sayısını (10) sabit tutarak örüntünün sabit farkını eklemişler ve Şekil 3'de sunulduğu gibi her bir ilişki için yinelemeli bir örüntü oluşturmuşlardır. Adayların daha sonra bu örüntüde tekrar eden birimleri adım sayısı ile ilişkilendirdikleri ve $k = 3 + 2(n - 2)$, $ç = 8 + 4(n - 2)$ ve $m = 10 + 6(n - 2)$ genellemelerine ulaştıkları da saptanmıştır.

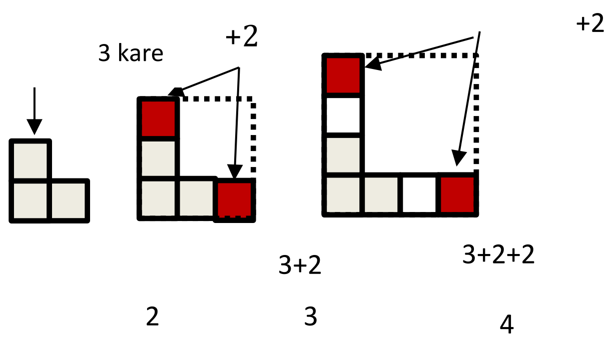
n	k	
2	3= 3	=3+2.0
3	5=3+2	=3+2.1
4	7=3+2+2	=3+2.2
5	9=3+2+2+2	=3+2.3
6	11=3+2+2+2+2	=3+2.4

n	ç	
2	8=8	=8+4.0
3	12=8+4	=8+4.1
4	16=8+4+4	=8+4.2
5	20=8+4+4+4	=8+4.3
6	24=8+4+4+4+4	=8+4.4

n	m	
2	10=10	=10+6.0
3	16=10+6	=10+6.1
4	22=10+6+6	=10+6.2
5	28=10+6+6+6	=10+6.3
6	34=10+6+6+6+6	=10+6.4

Şekil 3. Sayısal Muhakeme Kapsamında Kullanılan Parçalama Muhakemesi

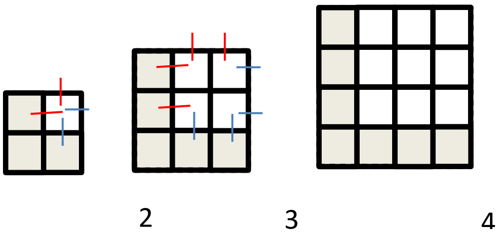
Şekilsel muhakeme kapsamında bağlamsal ve parçalama olmak üzere iki muhakeme adaylar tarafından kullanmıştır. Özellikle sayısal muhakemedeki parçalama muhakemesini kullanan adayların (Nergis, Ayşegül, Emel) ulaştıkları genellemeleri aynı muhakeme ile şekil üzerinden de ifade edebildikleri görülmüştür. Örneğin Şekil 4'de Nergis'in kare sayılarına ilişkin şekil üzerinde oluşturduğu muhakemesi sunulmuştur.



Nergis: *3 tane küçük kare var* [2. adımda]. *Diğeri de* [3. adım] *üste 1 kare yana 1 kare gelmiş. Yine 3 tane kare var ama 2 tane daha eklenmiş. Burada üçler sabit, değişen ikiler var, bu ikilerin de şu tabandaki kare sayılarına göre değiştiğini görüyoruz. Burada* [4. adımda]. *4 tane kare var ama burada* [(3+2+2) ifadesini göstererek] *2 tane 2 var. Burada* [3. adımda] *3 tane var ama* [(3+2) ifadesini göstererek] *1 tane 2 var. Yani yine adım sayısının 2 eksiği kadar gidiyor.*

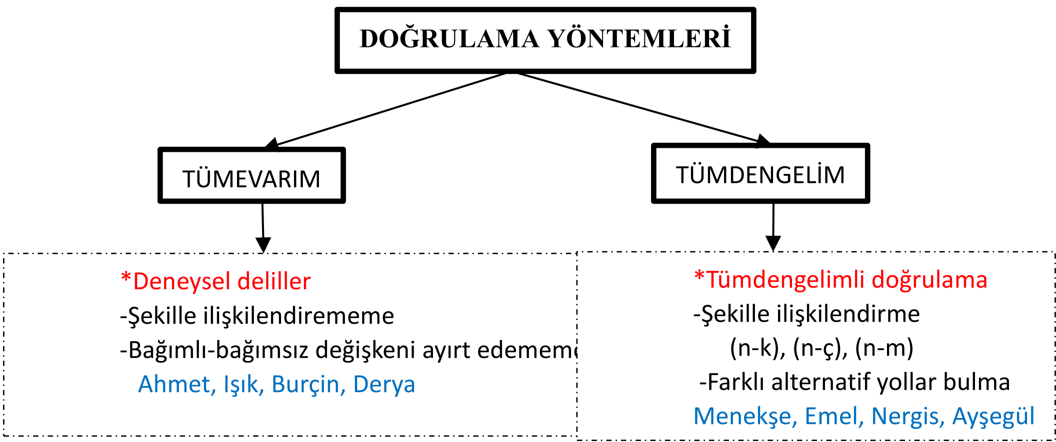
Şekil 4. Nergis'in Şekilsel Muhakeme Kapsamında Kullanılan Parçalama Muhakemesi

Şekilsel muhakeme kapsamında son olarak 4 öğretmen adayı bağlamsal muhakemeyi kullanmışlardır. Öğretmen adayları, şeklin yapısal özelliklerine dayalı olarak adım sayısı ile kare sayısı arasında üç farklı stratejiden, adım sayısı ile çevreleyen kibrit çöpü sayısı arasında iki farklı stratejiden ve adım sayısı ile toplam kibrit çöpü sayısı arasında bir stratejiden yararlanarak kurallara ulaşmışlardır. Bu stratejilerden en ilginci kareye tamamlamadır. İki öğretmen adayı tarafından kullanılan bu stratejide şekil önce kareye tamamlanmış, ardından küçük kare sayısı için toplam kare sayısından (4, 9, 16,…) içteki kare sayıları (1, 4, 9,…) çıkarılarak $n^2-(n-1)^2=k$ genellemesine ulaşılmıştır. Çevreleyen kibrit çöpü sayısında ise örüntünün kenarlarındaki kibrit çöpleri Şekil 5'de verildiği gibi büyük karenin kenarlarına taşınarak 4n=ç genellemesine ulaşılmıştır.



Şekil 5. Şekilsel Muhakeme Kapsamında Kullanılan Bağlamsal Muhakeme

Belirgin muhakeme kapsamında hem sayısal hem de şekilsel muhakemenin ise sadece bir öğretmen adayı tarafından kullanıldığı saptanmıştır. Öğretmen adaylarından ulaştıkları bu genellemeleri doğrulamaları istendiğinde ise Şekil 6'da sunulduğu gibi dört öğretmen adayının tümevarım muhakemesi ile belirli örneklerin doğruluğuna odaklandıkları ve deneysel deliller düzeyinde kaldıkları görülmüştür. Dört öğretmen adayı ise tümdengelim muhakeme ile ulaştıkları genellemelerini şekil ile ilişkilendirmişlerdir. Bu doğrulama süreçleri onları farklı genelleme yollarına da yönlendirmiş, adayların örüntüleri genellemede alternatif yollar buldukları görülmüştür.

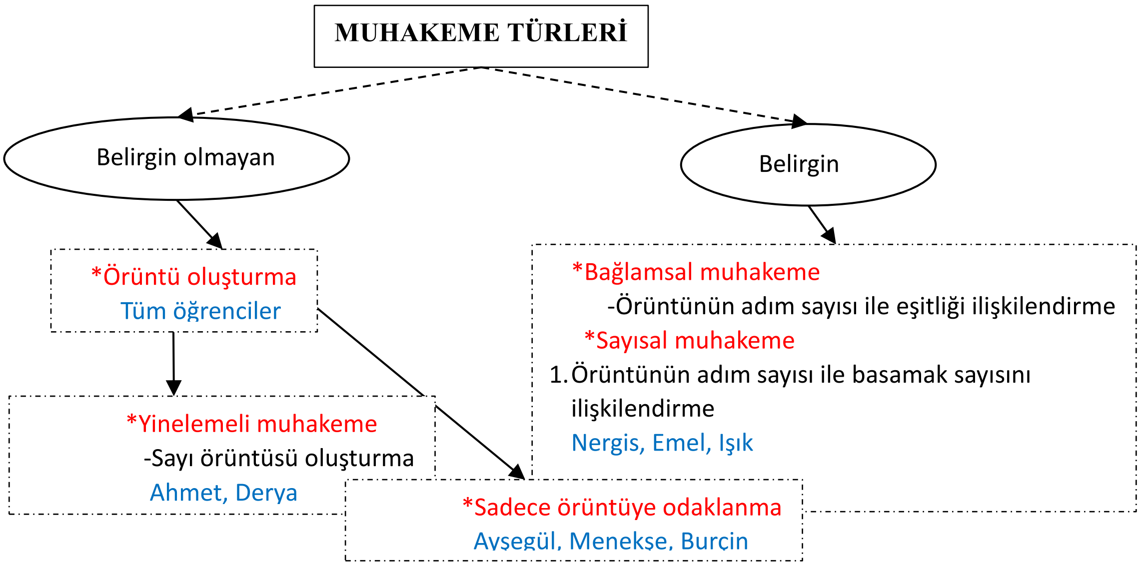


Şekil 6. Öğretmen Adaylarının L Şekil Örüntüsünde Ulaştıkları Genellemeleri Doğrulama Yöntemleri

Tümevarım muhakeme sürecinde özellikle sayısal stratejileri kullanan adayların ulaştıkları genellemelere ilişkin şekildeki kare sayısını (k), örüntüyü çevreleyen kibrit çöpü sayısını (ç) ve tüm kibrit çöpü sayısını (m) adım sayısı ile ilişkilendiremedikleri saptanmıştır. Bu durumun birinci nedeni adayların adım sayısını birden başlatarak ilişki aramalarıdır. Diğer bir neden ise adayların yinelemeli düşünmeleri, diğer bir deyişle örüntünün sabit farkına odaklanarak muhakemede bulunmaları ve adım sayısı ile k, ç ve m arasında şekil üzerinde fonksiyonel bir ilişki kuramamalarıdır. Dolayısıyla adayların örüntünün bağımlı ve bağımsız değişkenini doğru belirleyemedikleri söylenebilir.

Merdiven sayı örüntüsünü genellemede kullanılan muhakeme türleri ve doğrulama yöntemleri

Öğretmen adaylarının verilen örüntüyü genellemede Şekil 7'deki gibi "belirgin" ve "belirgin olmayan" iki muhakeme türünden yararlandıkları söylenebilir.

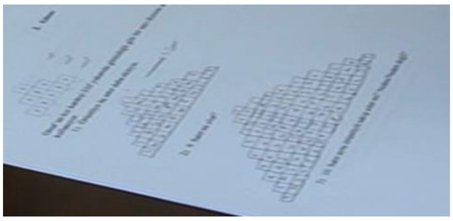


Şekil 7. Öğretmen Adaylarının Örüntüde Kullandıkları Muhakeme Türleri

Adayların tamamı ilk olarak verilen örüntünün kuralını fark etmiş ve diğer adımları (9. satıra kadar) da oluşturmuşlardır. Bu süreçte iki aday örüntüyü oluştururken her bir satırdaki basamak sayısının 1, 3, 5, 7, 9 biçiminde giden bir sayı örüntüsü olduğunu ve kuralının $2n-1$ olarak ifade edilebileceğini, sütunların ise yinelemeli olarak arttığını vurgulamıştır. Böylece bu iki aday 9. satırda 17 kare olacağını ifade etmiş, ancak 10. satır için örüntünün nasıl devam edeceğine yönelik herhangi bir muhakemede bulunamamışlardır. Belirgin olmayan muhakemede bulunan diğer üç aday (Ayşegül, Menekşe, Burçin) ise sadece örüntünün kuralına odaklanmışlardır. Bununla birlikte adaylardan Ayşegül ve Menekşe 10. satırı oluşturan sayıların değişiminin ne olacağını çıkaramamışlardır. Burçin ise örüntüye odaklanmasına karşın 10. satırda sıfırın gelmesi gerektiğini ifade etmiş ancak nereye ve nasıl geleceğine ilişkin bir muhakemede bulunmadan eşitliğin bozulacağına karar vermiştir. Adaylardan Ayşegül'ün görüşmesi örnek olarak verilebilir:

> *Ö: Bu ortadaki sütun en uzun sütun 1'den 9'a kadar gitmiş.*[Sütunu çizdi]. *Yanındaki sütunu incelediğimde buradaki sayı (En uzun sütundaki 1. kutusu) buraya gelmiş (1. sütunun sağ yanındaki sütunun 1. kutusuna) ve bunun (9. satırdaki 9'un yanına) 1 eksiği gelmiş, yani buraya 8,7,6,5,4,3,2,1 şeklinde olacak, buraya da aynısı zaten (diğer sütun) ..*[örüntüyü çizerek tamamladı]

EĞİTİMDE NİTEL ARAŞTIRMALAR DERGİSİ
Journal of Qualitative Research in Education
Cilt 5 / Sayı 3, 2017
Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi - ENAD
Journal of Qualitative Research in Education - JOQRE



A: Eşitlikten neden emin değilsin?
Ö: Çarpardım emin olmak için [111x111=12321 işlemini yaptı].
A: Böyle bir ilişki var mıdır?
Ö: Diğer adım için denesem?[1111x1111=1234321 işlemini yaptı] *Peki deneyeyim, çıkıyor galiba,*
A: Ne yaptın?
Ö: 111 için denemiştim. O 3. satıra karşılık geliyor. 4. satır için de 1111'in karesi oldu.
A: Diğer satırlar için ne söyleyebilirsin?
Ö: Onlarda doğru olur bence. Yani ben sütunları yazdığımda böyle bir ilişki ile gidiyormuş.
A: 9. satır?
Ö: 9 tane 1'in karesi olur.
A: 10. satır? Aynen örüntüyü takip eder mi?
Ö: Eder.
A: Neden?
Ö: Çünkü hep bir düzen var. 10. satır için niye değişsin ki? Yine devam eder. Düzenli olduğu için 10.satırda da n. satırda da devam edecek.

Belirgin muhakeme ile ilişkilendirme yapan üç aday (Nergis, Emel, Işık) ise bağlamsal ve sayısal olmak üzere iki muhakemede bulunmuşlardır. Bu adayların öncelikle sayısal muhakeme kapsamında örüntünün adım sayısı ile basamak sayısı arasında bir ilişkilendirme yaptıkları görülmüştür. Adayların bağlamsal muhakeme ile 9. satıra kadar örüntüyü genişlettikleri, 10. satıra gelecek sayılar için eldeyi dikkate aldıkları ve elde edilen satır ile eşitliği de ilişkilendirdikleri saptanmıştır. Emel'in görüşmesi örnek olarak verilebilir:

A: 10. satır aynı örüntüyü takip eder mi?
Ö: Burası 10 olacak (9. satırdaki 9'u göstererek) elde 1 gitmesi lazım.
A: Takip eder mi etmez mi?
Ö: Bu durumda takip etmez.
A: Neden?
Ö: Ya mesela 1'ler toplayınca burası 9 oluyordu. Hepsinin alt alta geldiği yer. Bu sefer 10 olacak. 0 yazacağız elde var 1 diye gidecek.

12345678900097654321

A: Emin misin?
Ö: Şeyden eminim hani, bu düzende gitmeyecek. 10 tane 1 alt alta yazınca buraya 0 gelecek (tam ortadaki sayı). Sonra toplama göre 9 olacaktı şuradaki sayı (tam ortadaki sayının sağını göstererek) elde geleceği için o da 10 olacak oraya da 0 yazacağım, gene elde birim kalacak, 8 tane birim gelecek o zaman da 8 tane 1, bir de elde 1, 9 olacak, diğerleri 7,6,5,4 diye gidecek.
A: Sence 10. satırda kaç terim olur bu durumda?

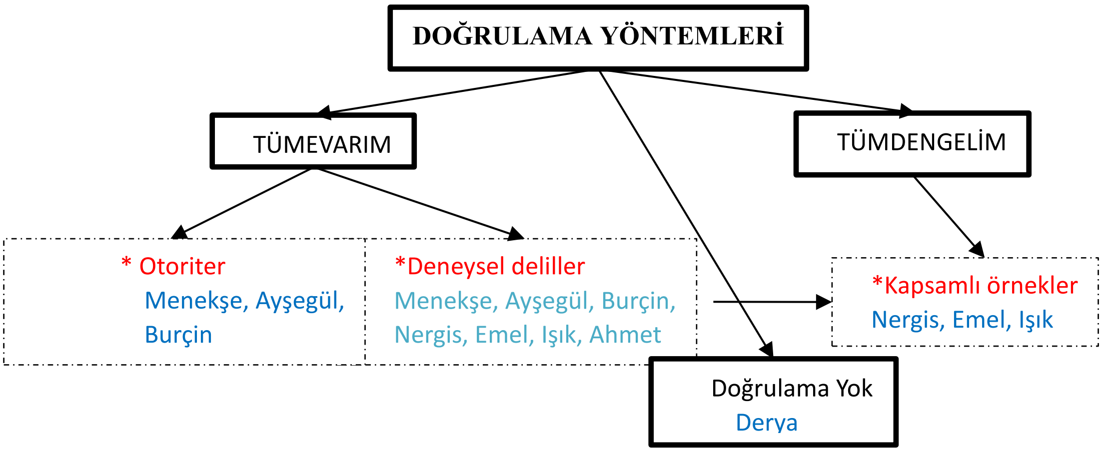
ENAD ONLINE
EĞİTİMDE NİTEL ARAŞTIRMALAR DERGİSİ
Journal of Qualitative Research in Education
Volume 5 / Issue 3, 2017
Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi - ENAD
Journal of Qualitative Research in Education - JOQRE

Ö: 1. kutuda 1 tane, 2. de (1+2), 3. adımda 3+2,... o zaman 10. adımda 10+9, bende terim sayısı fazla çıktı. ...Ay kendimle çeliştim. Çarpımı düşünüyorum, kenarlar 1 olacak, diğerleri de farklı gelecek…. Bir dakika bu tarafa ekliyorum ben ters ekledim.

1234567900987654321

Yani 9'a 1 ekledim 0, elde 1 var yandaki (sol taraftaki) 8'e ekliyorum 9 olacak eldeler bitti. 7 *kaldı. Terim adım sayısı kadar ve onun 1 eksiği kadar daha olacak. 19 terim bu şekilde olur.*

Öğretmen adaylarından merdiven sayı örüntüsünde ulaştıkları genellemeyi doğrulamaları istendiğinde ise Şekil 8'de verildiği gibi tümevarım ve tümdengelim muhakeme yöntemlerini kullandıkları görülmüştür. Adayların tamamı öncelikle tümevarım muhakemesi ile belirli örneklerin doğruluğuna odaklanmışlar ve deneysel deliller düzeyinde doğrulama yapmışlardır.



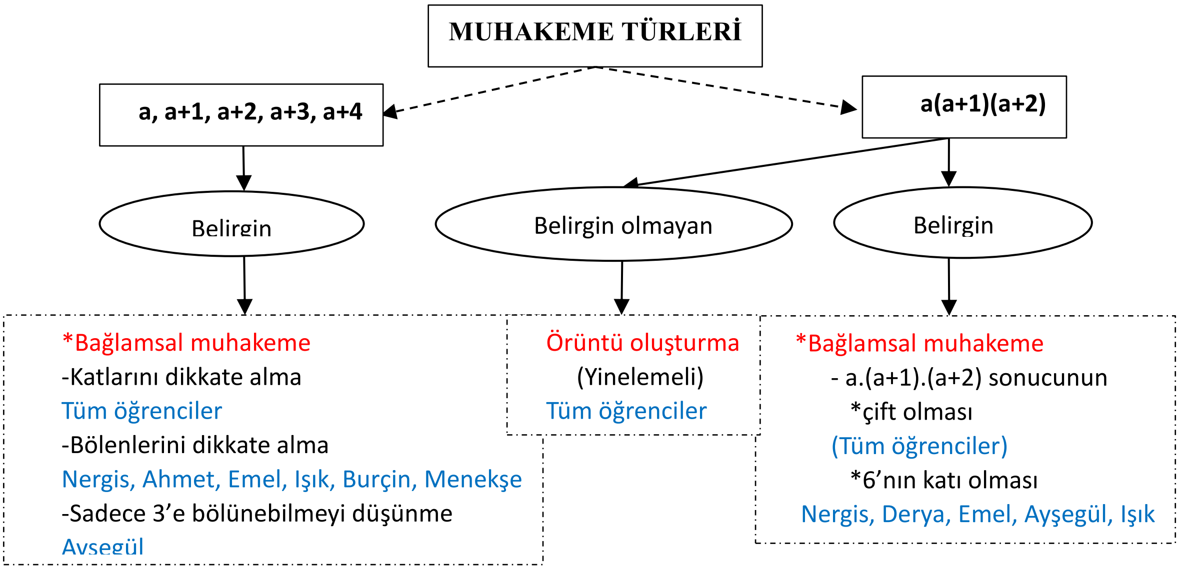
Şekil 8. Öğretmen Adaylarının Merdiven Sayı Örüntüsünde Kullandıkları Doğrulama Yöntemleri

Tümevarım muhakeme sürecinde üç adayın (Menekşe, Ayşegül ve Burçin) sadece örüntüye odaklanmalarından dolayı örüntünün nasıl genişlediğine ilişkin bir sorgulama yapamadıkları ve "*Şu ana kadar yaptığımız her şey doğru çıktı. İlk dört basamakta doğruysa 10. basamakta da doğrudur*", "*Hep bir düzen var, 10. satır için niye değişsin ki? Yine devam eder.*" ve "*Örüntü tutarlı olduğu için doğrudur*" biçiminde açıklamalarla otoriter doğrulama yaptıkları görülmüştür. Bir aday (Derya) da eşitliğin bozulduğunu açıklamış ve bu düşüncesine ilişkin herhangi bir doğrulama yapamamıştır. Bu problemde tümdengelim muhakemede bulunan sadece üç öğretmen adayının 10. satıra odaklanarak bu kapsamlı örnek üzerinden açıklamalarda bulundukları ve doğrulama yaptıkları belirlenmiştir.

Ardışık sayılar problemini genellemede kullanılan muhakeme türleri ve doğrulama yöntemleri

Ardışık sayılar problemi herhangi beş ardışık sayı kümesindeki 2, 3, 4 ve 5'in maksimum çarpan sayısını belirleme ve üç ardışık sayının çarpımının özelliklerini genelleme olmak üzere iki alt problem olarak ele alınmıştır. Bu problemlerdeki ilişkiyi genellemede adayların Şekil 9'deki gibi "belirgin" ve "belirgin olmayan" iki muhakeme türünden yararlandıkları söylenebilir.

EĞİTİMDE NİTEL ARAŞTIRMALAR DERGİSİ
Journal of Qualitative Research in Education
Cilt 5 / Sayı 3, 2017
Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi - ENAD
Journal of Qualitative Research in Education - JOQRE



Şekil 9. Öğretmen adaylarının ardışık sayılar probleminde kullandıkları muhakeme türleri

Öğretmen adaylarının tamamı problemin ilk aşamasında seçtikleri 5 ardışık sayı içinde 2'nin, 3'ün, 4'ün ve 5'in katlarına odaklanarak maksimum çarpan sayısına ulaşmışlardır. Adaylar 2, 3, 4 ve 5 için maksimum çarpan sayısını araştırırken kümenin hangi sayıyla başladığına dikkat etmişler ve beş ardışık sayı içerisinde diğer çarpanın nerede geleceğine dair ifadeler kullanmışlardır. Adaylardan Emel'in görüşmesi örnek olarak verilebilir.

A: Bir daha açıklar mısın?
Ö: Şimdi 5 tane ardışık sayı, bunlar bir tek bir çift olacak ardışık olduğu için, 5 içinde en az 2 tanesi tek, o zaman 2'nin en fazla üç tane katı-çarpanı var.
A: Bunu derken neye dikkat ettin?
Ö: Çift olmasına.
A: 3 için?
Ö: 3 için de maksimum 2 olur.
A: Neden?
Ö: Çünkü bir sayının 3'e bölünebilmesi için toplamlarının 3'ün katı olması gerekiyordu. İlk sayı olsa bile 3'e tam bölünen, arkasındaki iki sayı bölünmeyecek, diğer 5. terim de bölünmeyecek. O yüzden 2 tane olur maksimum.

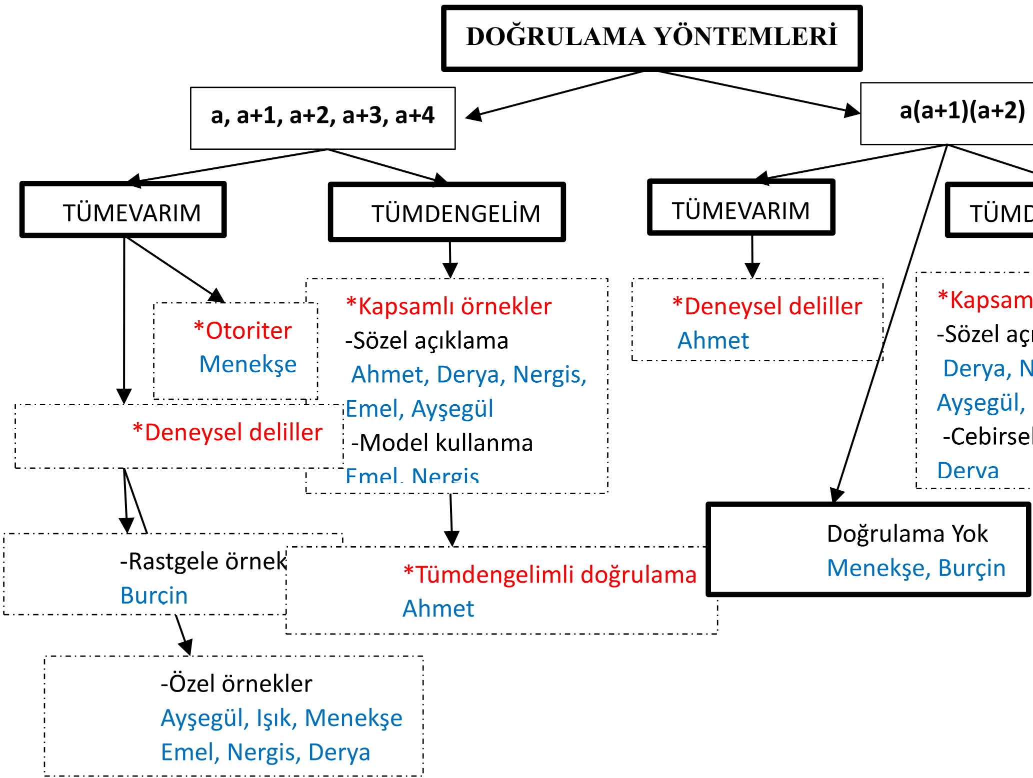
Bu problemde görüşme örneği verilen aday gibi bazı adayların da (Nergis, Ahmet, Emel, Işık, Burçin, Menekşe) katlarına odaklanmanın yanı sıra her bir çarpan sayısını bulurken bölenlere de dikkat ettikleri belirlenmiştir. Sadece bir aday tüm bölenler yerine sadece üçe bölünebilmeyi 3'ün maksimum çarpan sayısını araştırırken ifade etmiştir.

Problemin ikinci aşamasında üç ardışık sayının çarpımının özellikleri için adayların tamamı öncelikle yinelemeli olarak örüntü oluşturmuşlardır. Bu bağlamda tüm adayların aşağıdaki sayıları seçtikleri ve sayılar arasında ilişki aradıkları görülmüştür.

$$1x2x3=6$$
$$2x3x4=24$$
$$3x4x5=60$$
$$4x5x6=120$$
$$5x6x7=210$$

Adayların belirgin muhakeme ile oluşturdukları bağlamda üç ardışık sayının "tek, çift ve tek" ya da "çift, tek ya da çift" olabileceğini belirttikleri ve çarpımın kesinlikle bir çift sayı olacağını söyledikleri görülmüştür. Bu ilişkilendirmeyi yapan adaylardan beşi çarpımın ayrıca 6'nın katı olduğunu da belirtmişlerdir.

Öğretmen adaylarının bu iki alt problem için doğrulama yöntemleri de Şekil 10'da sunulduğu gibi birbirlerinden ayrılmaktadır. Herhangi beş ardışık sayı kümesindeki 2, 3, 4 ve 5'in maksimum çarpan sayısını belirleme probleminde Ahmet dışındaki adayların tamamının öncelikle tümevarım muhakemesi ile deneysel delillere dayalı doğrulama yaptıkları görülmüştür. Bu süreçte bazı adayların özel örneklere odaklanarak {3, 4, 5, 6, 7}; {120, 119, 118, 117, 116}; {2, 3, 4, 5, 6};{5, 6, 7, 8, 9}; {20, 21, 22, 23, 24} kümelerini seçtikleri saptanmıştır. Adayların bu seçimde kümenin çift ya da tek olmasına, 2'nin, 3'ün, 5'in katı olarak başlamasına ya da 2, 3, 4 ve 5'in ortak katı olmasına odaklandıkları görülmüştür. Bununla birlikte bir adayın ise rastgele olarak {50, 51, 52, 53, 54} kümesini seçtiği de belirlenmiştir. Adayların seçtikleri bu özel ya da rastgele örnekler üzerinden ulaştıkları genellemel eri doğrulamaya çalışmaları çarpıcıdır. Bu aşamada bir aday da dış otoriteden destek ile ulaştığı genellemeyi bölünebilme kurallarına göre doğrulamaya çalışmış ancak başarılı olamamıştır.



Şekil 10. Öğretmen Adaylarının Ardışık Sayılar Probleminde Kullandıkları Doğrulama Yöntemleri

Araştırmacının yönlendirmesi ile adayların tümdengelim muhakemeye yöneldiği, bu bağlamda sözel açıklamalar ve model kullanarak belirli örnekler üzerinden (kapsamlı örnek düzeyinde) doğrulama yapabildikleri görülmüştür. Adaylardan Nergis'in sözel açıklamalar ve model kullanarak yaptığı doğrulama örnek olarak verilebilir:

Ö: 2'nin 3 tane (çarpanı) olabilir. Çünkü 5'in içinde bir tane 2'nin katı olacak, olmayan, sonra 2'nin katı olacak yani bir tane sayı yazıyorum. (Yandaki 1. modeli çizdi.) Bu 2'nin katı (ilk X), diğeri değil (ilk nokta), bu 2'nin katı (ikinci X), bu değil (ikinci nokta). Bu 2'nin katı (üçüncü X)

X . X . X

Eğer 2'nin katı olmayan bir sayıdan başlarsam (Yandaki 2. modeli çizdi), 2 tane olur (X' leri göstererek)

. X . X .

Bu problemde sadece bir adayın (Ahmet) belirli örneklerden bağımsız tümdengelimli doğrulama yapabildiği saptanmıştır. Örnek olarak Ahmet'in muhakeme süreci şu şekilde verilebilir:

A: Örnek vermeden de bulabilir misin maksimum çarpan sayısı?
Ö: İspatı yapılabilir. Ardışık sayılar alırız. Mesela bu beşini alalım. [n (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) yazdı] *Buradaki sayılardan biri beşin katı olsun. n'i alalım mesela.* $n \in Z/_5$ *dersek, 5'e bölünebilen bir sayı dersek, buna 5 ekleyip çıkarabileceğimiz için n-5, n+5 en yakın olarak bunlar* $Z/_5$ *kümesinde olabilir. Bu küme (n+5, n-5) içermediği için de başka sayıya bölünmez.*
A: Bu şekilde gösterebilirim diyorsun. Diğerleri için ne söyleyebilirsin?
Ö: Mesela 4 diyelim. Bunlardan biri (n, n+1, n+2, n+3, n+4 kümesini göstererek) *4'e bölünsün deriz. Mesela n+1 bölünsün.* $n+1 \in Z/_4$*olursa hani buna 4 ekleyip çıkarabileceğimiz için de* $n+5, n-3 \in Z/_4$*bu kümede olsaydı 4'e bölünebilirdi. O da olmadığı için sadece 1 çarpan oluyor. Özel olarak n alsaydık mesela* $n \in Z/_4$ *deseydik o zaman hani 4 fazlasını ve 4 eksiğini alabilecektik n-4 ve n+4, n ve n+4 bu kümede 1 veya 2 tane olur seçtiğimiz aralığa göre.*
A: 3 için?
Ö: Üç için $n \in Z/_3$*olsun. n bölünürse n+3 bölünür, n-3 bölünür, n+3 bu kümede. n ve n+3'ü alabiliriz. Diğerleri için de denememiz lazım tabi. Tam olarak ifade edebilmek için hani.* $n+1$ *için deseydik ne olacaktı?* $n+4 \in Z/_3$ *olacaktı. n+2 için sadece 1 tane olacaktı, o da var.* $n+2 \in Z/_3$ *sadece ortadaki sayı olsaydı sadece 3'e bölünebilen 1 tane sayı olacaktı yani 1 veya 2 çarpanı olur 3'ün.*
A: Peki 2?
Ö: İki için $n \in Z/_2$ *eğer n çift sayı ise 3 tane, eğer n tek sayı olsaydı* $n+1, n+3 \in Z/_2$*olurdu. Ya 2 ya 3.*

Problemin ikinci aşamasında adayların üç ardışık sayının çarpımının özelliklerine ilişkin ulaştıkları genellemeleri doğrulama yöntemleri incelendiğinde ise bir adayın tümevarım muhakeme aracılığıyla sadece özel örneklere dayalı olarak doğrulama yapabildiği, iki adayın ise doğrulama yapamadığı görülmüştür. Diğer beş aday ise kapsamlı örnekler aracılığıyla doğrulama yapmışlardır. Bu adaylardan bazıları sadece sözel açıklamalar yaparken bir aday hem sözel açıklama hem de cebirsel notasyon kullanarak doğrulama yapabilmiştir. Aday "her ardışık 3 tamsayı içinde 2 çift sayı denk gelir. Ç x Ç x T=Ç olur" biçiminde başladığı açıklamasını cebirsel notasyon kullanarak "n.(n+1).(n+2) alalım. n tek ise n=2k+1 yazalım. (2k+1)(2k+2)(2k+3)=(2k+1)2.(k+1).(2k+3) elde edebiliriz. Dolayısıyla sonuç çift olur. n çift ise n=2k olur ve her türlü sonuç çift olur" biçiminde açıklamıştır.

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Ortaokul matematik öğretmen adaylarının genelleme yapmalarına ve bu genellemelerini doğrulamalarına yanı sıra genelleme ile doğrulama bilgilerinin nasıl ilişkilendirildiğine odaklanıldığı bu çalışmada sonuçlar iki araştırma sorusu bağlamında ve her soru da örüntü türleri kapsamında tartışılmıştır.

Genellemedeki Muhakeme Türleri

Doğrusal ilişki içeren L şekil örüntüsünü genelleme sürecinde adayların tamamı belirgin muhakemeden yararlanmışlar ve bu bağlamda alanyazında mevcut sayısal, şekilsel ve pragmatik yaklaşımları kullanmışlardır (örn., Becker ve Rivera, 2005; Chua ve Hoyles, 2010; Tanışlı ve Köse, 2011). Ancak bu süreçte Chua ve Hoyles'un (2010) da ifade ettiği gibi, adayların öncelikle sayısal yaklaşıma yöneldikleri söylenebilir. Benzer sonuca bazı araştırmalarda da rastlanılmıştır (Tanışlı, 2016; Yeşildere ve Akkoç, 2011). Bu üç yaklaşım altında adaylar alanyazında da sıklıkla görülen deneme-yanılma, orantısal (örn., Tanışlı, 2016; Yeşildere ve Akkoç, 2011), bağlamsal ve parçalama muhakeme türlerini kullanmışlardır (örn., Lannin, 2003; Tanışlı, 2016). Bu muhakeme türlerinden parçalama muhakemesine ulusal alanyazında daha az rastlanmıştır (Tanışlı, 2016). Bununla birlikte bu muhakeme türünü kullanan adayların sayısal ve şekilsel yaklaşımda da aynı ilişkilendirmeleri ifade ederek birleştirebilmeleri bu çalışmada önemli bir sonuç olarak görülmüştür.

Sadece sayısal yaklaşımı kullanan adayların yarısı deneme-yanılma ve orantısal muhakeme ile belirgin kurala ulaşabilmiş şekilsel ya da pragmatik muhakemede bulunamamışlardır. Bu adaylar ağırlıklı olarak deneme-yanılma muhakemesinde rastgele denemeler yapmışlar bir aday ise örüntünün terimler arası sabit farkını adım sayısının katı olarak kullanıp cebirsel bir kurala ulaşmıştır. Bu durum cebirsel aynı zamanda fonksiyonel düşünme gelişimini engelleyen temel etmenlerden biridir. Tanışlı (2016) ile Yeşildere ve Akkoç (2011) tarafından gerçekleştirilen araştırmalarda da bir öğretmenin ve öğretmen adaylarının benzer bir davranış sergilemeleri öğretmenlerin mesleki gelişimlerinde ve öğretmen eğitiminde bu hatanın ele alınmasını zorunlu kılmaktadır. Buna karşın adayların diğer yarısı sayısal yaklaşımlarda kullandıkları muhakemeleri şekil ile ilişkilendirerek bağlamsal ve parçalama muhakemeleri ile belirgin kurala ulaşmışlardır. Bu adayların örüntüde değişen ve değişmeyen özellikleri fark ederek şekli iyi analiz etmeleri bu sonucun bir göstergesidir (Becker ve Rivera, 2005; Chua ve Hoyles, 2010; Tanışlı ve Köse, 2011). Ayrıca bir aday hem sayısal hem şekilsel yaklaşımı içeren pragmatik muhakemede de bulunmuştur (Tanışlı ve Köse, 2011). Diğer yandan şekilsel yaklaşımı kullanan bu adayların sadece sayısal yaklaşımı kullanan adaylara göre daha fazla sayıda muhakeme türünü kullanmaları da ulaşılan bir diğer önemli sonuçtur.

Doğrusal ilişki içermeyen merdiven sayı örüntüsü cebirsel bir kurala ulaşmaktan ziyade örüntünün genel yapısını analiz etmeye ve genişletmeye dayanmaktadır. Bu örüntüyü genelleme sürecinde ise adaylar belirgin ve belirgin olmayan muhakemede bulunmuşlardır (Tanışlı, 2016; Yeşildere ve Akkoç, 2011). Adayların sadece üçü bağlamsal ve sayısal muhakeme aracılığıyla oluşturdukları örüntünün adım sayısını hem eşitlik hem de basamak sayısı ile ilişkilendirmişlerdir. Buna karşın diğer adaylardan üçü belirli bir adımda farklı bir yapıya dönüşen örüntüyü 9. satıra kadar devam ettirmişler, 10. satırdan itibaren örüntünün benzer yapıda devam edeceğini düşünerek hatalı bir muhakemede bulunmuşlardır. Diğer iki aday ise 9. satıra kadar devam ettirdikleri örüntünün basamak sayısını yinelemeli muhakeme ile belirlemişler (örn. her bir satırdaki basamak sayısını veren 1, 3, 5, 7,…, 2n-1) ancak 10. satırda ve devamında örüntünün nasıl genişleyeceğine ilişkin bir muhakemede ve açıklamada bulunamamışlardır. Öte yandan belirgin olmayan muhakemede bulunan adaylar merdivenin sütunlarında ortaya çıkan tekrarlayan örüntüyü genişleyen örüntü olarak düşünmüşlerdir.

Doğrusal ilişki içermeyen ve örüntü bağlamında alışılmamış olan ardışık sayılar problemini genelleme sürecinde ise adaylar ağırlıklı olarak belirgin muhakemeyi kullanmışlardır. Adaylar problemin bir boyutunda belirgin olmayan muhakeme ile sadece örüntü oluşturmuşlar, ancak devamında belirgin muhakemeye geçmişlerdir. Problemin yapısına bağlı olarak adaylar bağlamsal muhakeme kapsamında bölenlere ve katlara odaklanmışlardır.

Doğrulama Yöntemleri

Doğrusal ilişki içeren ve içermeyen örüntülere ilişkin genellemeleri doğrulama sürecinde adaylar tümevarım ve tümdengelim olmak üzere temelde iki doğrulama yaklaşımı kullanmışlardır. Tümevarım doğrulamada adaylar alanyazınla da uyumlu (Balacheff, 1988; Harel ve Sowder, 1998; Lannin, 2005; Tanışlı, 2016) deneysel deliller (2. düzey) ve dış otoriteden destek arama (1. düzey) şeklinde yöntemleri benimsemişlerdir. Tümdengelim doğrulamada ise adaylar doğrulama çerçevesinde belirtilen (Lannin, 2005) 3. düzey (kapsamlı örnekler) ve 4. düzey (tümdengelimli doğrulama) kapsamında yer almışlardır. Tüm bu düzeylerden kapsamlı örnekler ve deneysel deliller ağırlıklı olarak adayların bulundukları düzeylerdir (Tanışlı, 2016). En üst düzey olan tümdengelimli doğrulama L şekil örüntüsü ve Ardışık sayılar probleminin birinci boyutunda sınırlı sayıda aday tarafından kullanılmıştır. Merdiven sayı örüntüsü ve Ardışık sayı probleminin ikinci boyutunda ise bazı adaylar doğrulama yapamamıştır. Bu çalışma kapsamında dikkati çeken önemli bir nokta da adayların doğrulama istendiğinde ilk tercih ettikleri yöntemin deneysel deliller olmasıdır. Benzer bir duruma Tanışlı'nın (2016) araştırmasında da rastlanılmıştır. Martin ve Harel'ın (1989) ifade ettikleri gibi, deneysel delillerin doğrulamada kullanılmasının bir nedeni öğretmenlerin doğrulama yaparken sıklıkla örnek verme yolunu kullanmaları ve öğrencilerinde de bu alışkanlığı kazanmalarıdır. Diğer yandan örüntülerin hem doğrusal ilişki içermesi hem de şekil ile temsil edilmesinin doğrulamayı kolaylaştırdığı söylenebilir.

Genelleme ve Doğrulama İlişkisi

Doğrusal ilişki içeren L şekil örüntüsünü adayların tamamı belirgin muhakemede bulunarak şekilsel, sayısal ve paragmatik yaklaşımlarla genellemişlerdir. Ancak örüntüyü şekilden bağımsız sayı örüntüsüne dönüştürerek cebirsel bir kurala ulaşan adayların yarısı ulaştıkları bu genellemeleri doğrulama sürecinde deneysel deliller düzeyinde kalarak tümevarım doğrulama yapmışlardır. Bu sonuç Richardson vd. (2009) ve Kirwan'nın (2015) matematik öğretmen adayları üzerinde gerçekleştirdikleri araştırmalar ile paralellik göstermektedir. Örneğin Richardson ve arkadaşlarının araştırmasında benzer şekilde adayların genel olarak örüntüleri sembolik notasyonlar kullanarak genelleyebildikleri ancak doğrulama yapmada başarılı olamadıkları görülmüştür. Öte yandan L şekil örüntüsünü genelleme sürecinde genellemelerini şekil ile ilişkilendiren diğer öğretmen adayları tümdengelim doğrulama yapmışlardır. Yanı sıra bu süreçte farklı alternatif genellemelere de ulaşmışlardır. Şekil örüntüsü görevleri üzerinden farklı sınıf düzeylerinde ve farklı katılımcılarla genelleme ve doğrulama ilişkisinin incelendiği bazı araştırmalarda da benzer bir sonuca ulaşılmıştır. Bu araştırmalarda daha çok genellenen kuralın ilişkili olduğu şekil üzerinden doğrulandığı ortaya çıkmıştır (Kirwan, 2015; Lannin, 2005; Richardson ve diğerleri, 2009; Rivera ve Becker, 2003; Stacey, 1989). Örneğin Lannin (2005) altıncı sınıf öğrencileri üzerinde yaptığı araştırmasında kurallarını problem bağlamındaki şekiller ile ilişkilendiren öğrencilerin geçerli doğrulamalar yaptıklarını buna karşın, deneysel doğrulama yapan öğrencilerin genellemelerini şekil ile ilişkilendiremediklerini tespit etmiştir. Bu soru kapsamında iki önemli sonuç ortaya çıkmıştır. Birincisi şekil aracılığıyla verilen örüntü görevlerinin genelleme ve doğrulama süreçlerini desteklemesidir (Kirwan, 2015; Lannin, 2005; Richardson ve diğerleri, 2009; Rivera ve Becker, 2003). Şeklin yapısını analiz ederek genelleyen adayların zorlanmadan tümdengelim doğrulama yapabilmeleri bu sonucun bir göstergesidir. Aynı zamanda bu adayların şekilsel muhakemelerini sayısal muhakemeleri ile ilişkilendirmeleri bu sonucu da desteklemektedir. Diğer bir sonuç ise, doğrulama yapmanın genelleme yapmayı desteklemesidir (Ellis, 2007a; Lannin, 2005; Radford, 1996). Adaylardan ulaştıkları genellemeleri doğrulamaları istediğinde tümdengelim doğrulama yapan adayların 6 ile 10 arası farklı geneleme stratejisi kullanmaları bu durumun bir göstergesidir.

Merdiven sayı örüntüsünü sadece üç aday belirgin muhakemede bulanarak genellemiş, tümdengelim yöntemi altında kapsamlı örnekler ile ulaştığı bu genellemeyi doğrulamıştır. Belirgin olmayan muhakemede bulunan diğer adayların çoğunluğu doğrulama sürecinde tümevarım yöntemi altında deneysel deliller ve dış otoriteden destek arama doğrulama yöntemlerini kullanmışlar bir aday ise doğrulama yapamamıştır. Bu sonuç Kirwan'nın (2015) matematik öğretmen adayları üzerinde gerçekleştirdikleri araştırma sonucu ile tutarlıdır.

Ardışık sayılar problemindeki iki alt boyutta da adaylar belirgin muhakeme ile çeşitli ilişkilere ulaşmışlar doğrulama sürecinde doğrusal ilişki içeren L şekil örüntüsünde de olduğu gibi tümevarım ve tümdengelim doğrulama yöntemlerini kullanmışlardır.

Çalışmanın başında genelleme ve doğrulama çerçeveleri arasında nasıl bir ilişkinin olduğu, bu ilişkinin yapısı ve bunlar arasında ortak noktaların olup olmadığı araştırma kapsamında ele alınması düşünülmüştü. Ancak araştırma sonunda yukarıda tartışılanların dışında genelleme ve doğrulama arasında çok net ve açık bir ilişki ortaya çıkarılamamıştır. Bu durumun en önemli nedenlerinden biri de örüntülerin yapısındaki farklılıklar olduğu söylenebilir. Benzer şekilde Kirwan'nın (2015) araştırma sonucu da bu düşünceyi desteklemektedir. İlaveten her bir örüntü görevinde adayların kullandıkları muhakeme türleri ve doğrulama yöntemlerinin değişiklik göstermesi bu durumun göstergesi de olabilir. Bir adayın ardışık sayılar probleminin ilk aşamasında tümdengelimli doğrulama yaparken ikinci aşamasında doğrulamanın deneysel deliller düzeyinde kalması bu duruma örnek olarak verilebilir.

Genelleme sürecinde adayların bazılarının muhakemelerinde deneme-yanılma stratejilerini kullanmaları, bu muhakemelerini doğrulama sürecinde ise deneysel delillere ve dış otoriteye yönlenmeleri irdelenmesi gereken önemli bir sorundur. Bu sorunun reçetesi ise öğretmen eğitimindedir. Dolayısıyla öğretmen eğitiminde alan bilgisi ve alan öğretimine yönelik derslerde genelleme ve doğrulama süreçleri üzerinde adayların daha derin bir anlayış kazanmaları sağlanmalıdır. Bu noktada derslerde sadece problemlerin çözümü değil, çözüm sürecinin neden doğru olduğu, doğrulamada özel örneklerin neden geçerli olamadığı sorgulanmalıdır. Bu bağlamda doğrulamanın genellemeyi desteklemesi sonucu dikkate alındığında doğrulama şemaları gelişen adayların daha iyi genelleme becerisine sahip olmaları da söz konusu olabilecektir. Bu öneri pek çok araştırmacı tarafından da ifade edilmektedir (örn., Ellis, 2007a; Kirwan, 2015; Lannin, 2005; Radford, 1996).

Sonuç olarak doğrulama sürecinde zorlanan ve deneysel deliller ile dış otoriteye yönelme gibi doğrulama şemalarını kullanan adaylar dikkate alındığında, matematiksel çalışmalarda öğrencilerde doğrulama yapma becerisinin erken yaşlardan itibaren alışkanlık haline getirilmesi önerilebilir. Bu durum aynı zamanda doğrulamanın genellemeyi desteklediği sonucu ile öğrencilerin erken yaşlarda genelleme becerilerinin gelişimini de etkileyecektir. Ayrıca araştırmada genelleme ve doğrulama ilişkisine yönelik daha açık ve net bir sonuca ulaşılamadığından bu konuya yönelik daha kapsamlı, farklı bağlamlar içeren ve farklı katılımcıların seçildiği ileri araştırmalar yapılabilir.

Kaynaklar / References

Akkan, Y. (2016). Cebirsel düşünme. E. Bingölbali, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Edt.), *Matematik Eğitiminde Teoriler* içinde (ss. 43-64). Ankara: Pegem Akademi.

Aslan-Tutak, F. ve Köklü, O. (2016). Öğretmek için matematik bilgisi. E. Bingölbali, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Edt.), *Matematik Eğitiminde Teoriler* içinde (ss. 701-719). Ankara: Pegem Akademi.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics Teachers and Children* (pp. 216–235). London: Holdder ve Stoughton.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In H. L. Chick, ve J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 121–128). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2006). Establishing and justifying algebraic generalization at the sixth grade level. In J.Novotna, H. Moraova, M. Kratka, ve N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 465–472). Prague: Charles University.

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. New York: Pearson Education.

Blanton, M., & Kaput, J. (2002). *Developing elementary teachers' algebra "eyes and ears": Understanding characteristics of professional development that promote generative and self-sustaining change in teacher practice*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai ve E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5–23). Heidelberg, Germany: Springer.

Carpenter, T.P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating algebra and arithmetic in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. P. & Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades*. Research Report. Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED470471.pdf adresinden Aralık 2010'da ulaşılmıştır.

Common Core State Standards Initiative. (2010). Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM). Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 359–387.

Chua, B. L., & Hoyles, C. (2012). The effect of different pattern formats on secondary two students' ability to generalize. In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 2, pp. 155–162). Taipei, Taiwan: PME.

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. In A. E. Kelly ve R. A. Lesh (Eds), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 547–589). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Coe, R., & Ruthven, K. (1994). Proof Practices and Constructs of Advanced Mathematics Students. *British Educational Research Journal, 20*(1), 41-53.

de Castro, B. (2004). Pre-service teachers' mathematical reasoning as an imperative for codified conceptual pedagogy in algebra: A case study in teacher education. *Asia Pacific Education Review, 5*(2), 157–166.

Ellis, A. B. (2007a). Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 194–229.

Ellis, A. B. (2007b). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflective generalizations. *The Journal of the Learning Sciences, 16*(2), 221–262.

English, L., & Warren, E. (1995). General reasoning processes and elementary algebraic understanding: Implications for instruction. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 17*(4), 1–19.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 5-23.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, ve E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234–283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805–842). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Harel, G., & Tall, D. (1989). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics, 11*(1), 38–42.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema, ve T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133–155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kieran, C. (1989). A perspective on algebraic thinking. In G. Vernand, J. Rogalski, ve M. Artigue (Eds.), *Procedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 163 171), Paris.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.),*The Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390–419). New York: Macmillan.

Kinach, B.M. (2014). Generalizing: The core of algebraic thinking. *The Mathematics Teacher*, *107*(6), 432 439.

Kirwan, J. V. (2015). *Preservice secondary mathematics teachers' knowledge of generalization and justification on geometric numerical patterning tasks* (Doctoral dissertation). Illinois State University, USA.

Knuth, E. J., Slaughter, M., Choppin, J., & Sutherland, J. (2002). Mapping the conceptual terrain of middle school students' competencies in justifying and proving. In S. Mewborn, P. Sztajn, D.Y. White, H.G. Wiegel, R.L., Bryant,veK. Nooney (Eds.), *Proceedings of the 24th Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (Vol. 4, pp. 1693-1700).* Athens, GA.

Koedinger, K. (1998). Intelligent cognitive tutors as modeling tools and ınstructional model. Invited paper for the National Council of Teachers of Mathematics Standarts 2000 Technology Conference.

Lannin, J. K. (2003). Developing algebraic reasoning through generalization. *Mathematics Teaching in the Middle School, 8*(7), 342–348.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(3), 231–258.

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Algebraic generalization strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(3), 3–28.

Li, X. (2011). Mathematical knowledge for teaching algebraic routines: A case study of solving quadratic equations. *Journal of Mathematics Education, 4*(2), 1–16.

Liamputtong, P. (2009). Qualitative data analysis: Conceptual and practical considerations. *Health Promotion Journal of Australia, 20*(2), 133-139.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In N. Bednarz, C. Kieran, ve L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65–86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Lee, L. & D. Wheeler: 1987, Algebraic thinking in high school students: their conceptions of generalisation and justification, Research report, Concordia University, Montreal. Mathematical Association: 1945, The Teaching of Algebra in Schools, London, G. Bell and Sons. (The report was first written in 1929.)

Lo, J.-J., Grant, T. J., & Flowers, J. (2008). Challenges in deepening prospective teachers' understanding of multiplication through justification. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*, 5–22.

Maher, C. A., & Davis, R. B. (1990). Building representations of children's meanings. In R. B. Davis, C. A. Maher, ve N. Noddings (Eds.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Martin, G.,& Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 41-51.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, ve L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65–86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Milli Eğitim Bakanlığı. (2013). *Ortaokul matematik dersi (5-6-7-8. Sınıflar) öğretim programı.* Ankara: MEB Yayınları.

Merriam, S. B. (2009). *Qualitative research and case study applications in education.* San Francisso: Jossey-Bass.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school Mathematics.* USA.

Orton, A., & Orton, J. (1994). Student's perception and use of pattern and generalization. In J. P. da Ponte, ve J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 407-414). Lisbon, Portugal: PME.

Pegg, J., & Redden, E. (1990). Procedures for, and experiences in, introducing algebra in New South Wales. *Mathematics Teacher, 83*, 386-391.

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. In N. Bednarz, C. Kieran, ve L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 107–111). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37–70.

Richardson, K. Berenson, S. & Staley, K. (2009). Prospective elementary teachers use of representation to reason algebraically. *Journal of Mathematical Behavior, 28*, 188–199.

Rivera, F., & Becker, J. R. (2003). The effects of numerical and figural cues on the induction processes of preservice elementary teachers. In N. Pateman, B. Dougherty, ve J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA* (Vol. 4, pp. 63 – 70). Honolulu, HI: University of Hawaii.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. M. (2001). When tables become function tables. In M. v. d. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the Twenty-fifth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 145-152). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Simon, M. A., & Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 3–31.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147–164.

Stacey, K., & Macgregor, M. (1997, February). Building foundations for algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *2* (4), 252–260.

Staples, M. E., Bartlo, J., & Thanheiser, E. (2012). Justification as a teaching and learning practice: Its (potential) multifaceted role in middle grades mathematics classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*, 447–462.

Tanışlı, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary School students. *Journal of Mathematical Behavior*, *30*(3), 206-223.

Tanisli, D. (2016). How do students prove their learning and teachers their teaching? Do teachers make a difference? *Eurasian Journal of Educational Research*, *66*, 47-70.

Tanışlı, D. & Yavuzsoy Köse, N. (2011). Lineer şekil örüntülerine İlişkin genelleme stratejileri: Görsel ve sayısal ipuçlarının etkisi. *Eğitim ve Bilim*, *36*(160), 184-198.

Tanışlı, D. & Özdaş, A. (2009). İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntüleri genellemede kullandıkları stratejiler. *Educational Sciences: Theory & Practice*, *9*(3), 1453-1497.

Townsend, B.E., Lannin, J.K., & Barker, D.D. (2009). Promoting Efficient Strategy Use. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *14*(9), 542-547.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2005). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri (Beşinci baskı).* Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yeşildere, S. ve Akkoç, H. (2011). Matematik öğretmen adaylarının şekil örüntülerini genelleme süreçleri. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *30*, 141-153.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 379-402.

Waring, S. (2000). *Can you prove it? Developing concepts of proof in primary and secondary schools.* Leicester, UK: The Mathematical Association.

Waring, S., Orton, A., & Roper, T. (1999). Pattern and proof. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 104–120). London, Cassell.

Yazarlar

Dr. Dilek TANIŞLI, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi bölümünde öğretim üyesidir. Çalışma alanları arasında öğrenme ve öğretme, cebirsel düşünme ve cebir öğretimi, öğretmen eğitimi ve öğretmenlerin mesleki gelişimi yer almaktadır.

Dr. Nilüfer Yavuzsoy KÖSE Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi bölümünde öğretim üyesidir. İlgi alanları arasında teknolojinin matematik eğitiminde kullanımı, geometrik düşünme ve geometri öğretimi, öğretmen eğitimi ve öğretmenlerin mesleki gelişimi yer almaktadır.

Faik CAMCİ, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı doktora öğrencisidir. Çalışma alanları arasında matematik öğrenme ve öğretme, tahmini öğrenme yol haritaları ve öğretmenlerin mesleki gelişimi yer almaktadır.

İletişim

Doç. Dr. Dilek TANIŞLI, Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Yunusemre Kampüsü, Tepebaşı, 26470, Eskişehir, Türkiye, e-posta: dtanisli@anadolu.edu.tr

Doç. Dr. Nilüfer Yavuzsoy KÖSE, Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Yunusemre Kampüsü, Tepebaşı,
26470, Eskişehir, Türkiye, e-posta: nyavuzsoy@anadolu.edu.tr

Faik CAMCİ, Milli Eğitim Bakanlığı Sabri Kılıçoğlu Ortaokulu, Erenköy Mahallesi,
Odunpazarı, Eskişehir, Türkiye, e-posta: faikcamci02@hotmail.com.tr

ENAD ONLINE
EĞİTİMDE NİTEL ARAŞTIRMALAR DERGİSİ
Journal of Qualitative Research in Education
Cilt 5 / Sayı 3, 2017
Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi - ENAD
Journal of Qualitative Research in Education - JOQRE

Summary

Purpose and Significance. One of basic components of mathematical thinking is generalization, and justification is one of basic concepts necessary to form and transmit the mathematical information. Justification is an inseparable part of generalization and a process supporting generalization. Generalization and justification studies are important for the development of students' mathematical thinking. This importance requires teachers to become aware of generalization and justification and to understand and interpret their students' related thoughts. On the other hand, it is quite difficult for many teachers to understand and interpret students' thoughts. Therefore, it is necessary for teachers to take an undergraduate education supporting students' acquisition of the information about generalization and justification. This necessity puts preservice teachers and their related knowledge on the agenda. In this respect, the overall purpose of the present study was to examine elementary school mathematics preservice teachers' generalization regarding patterns, to discover their justifications for their generalizations and to determine the relationships between their generalization and justification. Several important points come into prominence within the context of the significance of the study. First of all, a teacher's subject matter knowledge is an important factor for the teaching and learning process. This situation is also true for a preservice teacher. Generalization and justification are two important components of mathematical knowledge, and related studies, documents and curricula put emphasis on their use in in-class applications as well as on the development of these two components at early ages. In addition, patterns constitute an important context for this development. However, in literature, there is little related research conducted with preservice teachers. Also, generalization and justification are interrelated structures, but studies examining this relationship are few in number as well. All these reasons made it necessary to conduct the present study. The results to be obtained in the study are thought to make important contributions to mathematics teaching on both national and international basis.

Methodology. In the study, the basic qualitative research design was used. The participants of the study were eight senior volunteering mathematics preservice teachers from the department of elementary school mathematics teaching at a state university. While determining the participants, the criterion sampling method, one of purposeful sampling methods, was used. In order to collect the research data, the clinical interview technique was applied, and linear and non-linear pattern tasks were prepared as the data collection tool. For the analysis of the data, the thematic analysis method was used. In this process, the codes and themes were related to the reasoning types and justification methods within the theoretical context. In addition, codes were obtained via the data.

Result, Discussion and Recommendations. In the process of generalization of the "L" figural pattern including a linear relationship, all the preservice teachers made use of explicit reasoning, and they used the numerical, figural and pragmatic approaches reported in related literature (eg., Becker & Rivera, 2005; Tanışlı & Köse, 2011). However, in this process, as mentioned by Chua and Hoyles (2010), it could be stated that the preservice teachers primarily adopted the numerical approach. In relation to these three approaches, the preservice teachers used the reasoning types of trial-and-error, proportional (eg., Tanışlı, 2016; Yeşildere&Akkoç, 2011), contextual and chunking (Lannin, 2003). Half of the preservice teachers who used only the numerical approach reached the explicit rule using the trial-and-error and proportional reasoning yet failed to use figural or pragmatic reasoning. These preservice teachers mostly did random trials in terms of the trial-and-error reasoning, and one preservice teacher reached an algebraic rule by using the constant difference between the terms of the pattern as the times number of the steps (Tanışlı, 2016; Yeşildere&Akkoç, 2011). In addition, another preservice teacher used pragmatic reasoning including both numerical and figural

approaches (Tanışlı & Köse, 2011). In the process of generalizing the non-linear stair-number pattern, the preservice teachers used explicit and implicit reasoning (Tanışlı, 2016; Yeşildere & Akkoç, 2011). Only three of the preservice teachers related the number of steps of the pattern they formed via contextual and numerical reasoning with equality and with the number of digits. On the other hand, three of the other preservice teachers did incorrect reasoning. As for the other two preservice teachers, they determined the number of the digits of the pattern using recursive reasoning yet failed to provide any reasoning or explanation regarding how the pattern would expand. In addition, the preservice teachers who did implicit reasoning considered the recursive pattern on the columns of the stair to be an expanding pattern. In the process of generalizing the question related to successive numbers, the preservice teachers mostly used explicit reasoning. In relation to one dimension of the question, the preservice teachers only formed a pattern via implicit reasoning yet then used explicit reasoning.

In the process of justifying the generalizations of the linear and non-linear patterns, the preservice teachers made use of two justification approaches: deductive and inductive. In inductive justification, the preservice teachers (Balacheff, 1988; Harel & Sowder, 1998; Lannin, 2005) adopted such methods as empirical evidence and taking support from external authority. In deductive justification, the preservice teachers took part within generic example and deductive justification. Deductive justification was used by only a few of the preservice teachers for the first dimension of the problem of successive numbers and the "L" figural pattern. In the second dimension of the problem of successive numbers and the stair number pattern, some of the preservice teachers did not do any justification. An important striking point within the scope of the present study was that the first method favored by the preservice teachers was the empirical evidence when they were asked to do justification. A similar situation was observed in another study conducted by Tanışlı (2016).

In the study, two important results were obtained. First, the given figural pattern tasks supported the processes of generalization and justification (Kirwan, 2015; Lannin, 2005; Rivera & Becker, 2003). As an indicator of this result, the preservice teachers who did generalization by analyzing the structure of the figure did deductive justification without having any related difficulty. In addition, this result is also supported by the fact that these preservice teachers related their figural reasoning with their numerical reasoning. The other result was that doing justification supported doing generalization (Ellis, 2007; Lannin, 2005; Radford, 1996). The fact that some of the preservice teachers used the trial-and-error strategies for their reasoning in the process of generalization and that their preference of empirical evidence and taking support from external authority in the process of justification of their reasoning was an important problem to focus on. This problem could be solved via teacher training. Therefore, in courses related to field knowledge and field teaching in teacher training, preservice teachers should develop a more in-depth understanding of the processes of generalization and justification.