



MEASURING TOTAL LOSS AMOUNT OF A PUBLIC INSURANCE COMPANY BY COLLECTIVE RISK MODEL

Elif Makbule Cekici¹, Elyase Iskender², Buket Alkan³

¹Marmara University. eccekici@marmara.edu.tr

²Hakkari University. elyaseiskender@hakkari.edu.tr

³VakıfBank. bukete@gmail.com

Keywords

Panjer recursion, collective risk model, non-life insurance, total loss amount, insurance.

JEL Classification

C51,G22,M10

ABSTRACT

In terms of sustainability of insurance firms' existence, fitting the total loss distribution of non-life branches is an important issue. Damage amount and damage frequency distributions which are consisting the total damage must be known to determine this total loss distribution. In this paper, we have used an insurance firm's quarterly data set of 2009-2013 years period regarding to accident branch which is a kind of non-life insurance branch and tried to calculate total loss probabilities. The recursive method (Panjer Method) first studied out by Panjer have been used to calculate total loss probabilities. In consequence of all calculations the total loss level of the firm have been determined.

KOLEKTİF RİSK MODELİ İLE HALKA AÇIK BİR SİGORTA ŞİRKETİNİN TOPLAM HASAR MİKTARININ ÖLÇÜLMESİ

Anahtar Kelimeler

Panjer özyineleme yöntemi, kolektif risk modeli, hayat dışı sigortalar, toplam hasar miktarı, sigorta şirketi.

JEL Sınıflandırması

C51,G22,M10

ÖZET

Sigorta şirketlerinin varlıklarını sürdürebilmeleri açısından hayat dışı branşlarda toplam hasarın dağılımının bulunması önemli bir konudur. Bu dağılımın belirlenebilmesi için toplam hasarı meydana getiren hasar miktarları ve hasar sayılarının dağılımlarının belirlenmesi gerekmektedir. Bu çalışmada bir sigorta şirketinin hayat dışı branşlarından biri olan kaza branşına ilişkin olarak 2009-2013 yıllarına ait çeyrek dönemlik verileri kullanılarak toplam hasar olasılıkları hesaplanmaya çalışılmıştır. Toplam hasar olasılıklarını hesaplamak için Panjer tarafından ortaya atılan özyineleme yöntemi (Panjer Yöntemi) kullanılmıştır. Yapılan hesaplamalar neticesinde şirketin toplam hasar seviyesi belirlenmiştir.

1. GİRİŞ

Sigorta şirketleri açısından en önemli risk, toplanan primlerin hasar ödemelerini karşılamaması sonucu ortaya çıkmaktadır. Reasürans şirketleri aracılığı ile riski transfer etmeye çalışan şirketler için önemli olan toplam hasar miktarının doğru tahmin edilebilmesidir. Doğal afetler (deprem, sel, heyelan gibi), salgın hastalıklar, savaş gibi ender görülen ancak büyük kayıplara yol açan risklere ve finansal risklere karşı önlem almak, sigorta şirketinin devamlılığı açısından büyük önem taşımaktadır.

Cramer (Cramer, 1930), savaş, salgın doğal afet vb. sebeplerden gerçekleşen aşırı ölümler gibi dış riskler ve herhangi bir belirli sebebe bağlanamayan ve yüksek kayıplara yol açan rassal dalgalanmaları sigorta riski olarak tanımlamıştır. Bu rassal riskten korunabilmek için gerekli olan hesaplar risk teorisinin doğmasını sağlamıştır. Risk teorisi için bireysel risk modeli (Klasik) ve kolektif risk modeli olmak üzere iki farklı anlayış ortaya çıkmıştır. Bireysel risk modeli, portföyün toplam kayıp veya kazancını hesaplamak için her bir sigortalının kayıp/kazancının ayrı ayrı değerlendirilerek toplanması ile portföy için kayıp/kazanç tahminini yapmaktadır. Kolektif risk modeli ise toplam riski bir bütün olarak ele almaktadır.

Kolektif risk modeli ilk olarak İsviçreli aktüer Filip Lundberg tarafından önerilmiş sonrasında Cramer (1930), Arfwedson (1955), Segerdahl (1939), Saxen (1948), Esscher (1964), Ammeter (1948), O. Lundberg (1930), de Finetti (1937), Thepaut (1933), Wyss (1953) ve Pentikainen (1947) tarafından geliştirilmiştir. Kolektif risk modeli iki problemi gözönüne alır: toplam kazancın veya bir portföyün toplam hasar sayısının dağılım fonksiyonunu bulmak ve toplam riske ait risk rezervinin kullanılacağı olasılığını bulmaktır (Kahn, 1962). Kolektif risk modelinin şirket verilerine uygulanabilmesi için Esscher metodu, Normal etkili seriler metodu, Erlang Modeli, Panjer yöntemi gibi matematiksel modeller önerilmiştir.

Bu çalışmanın amacı, Türkiye’de faaliyet gösteren bir sigorta şirketinin kaza sigortası için toplam hasar miktarını, şirketin 2009- 2013 dönemine ait verileri kullanılarak Panjer yöntemi yardımıyla belirlemektir. Bunun için ilk olarak kolektif risk modeli ele alınacak devamında ise Panjer yöntemi hakkında bilgi verilecektir

2. KOLEKTİF RİSK MODELİ

Bir sigorta şirketi için karşılaşılabilecek toplam hasarın tahmin edilmesi şirket için hayati önem arz etmektedir. Çünkü tahmin edilemeyen yüksek hasarlar sigorta şirketini iflasa sürükleyebilir.

Toplam hasarın tahmin edilmesinde kolektif risk modellemesi yaygın olarak kullanılmaktadır. Kolektif risk modelinde N toplam hasar sayısını ve X_i 'ler ($i=1,2,3,...N$) sigorta riskine ait belirli bir zaman aralığında bir portföyde meydana gelen hasar miktarını göstermek üzere, toplam hasar miktarı

$$S = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N = \sum_{i=1}^N X_i \quad (1)$$

şeklinde ifade edilmektedir (Dickson, 2006).Kolektif risk modelinin varsayımları aşağıdaki gibidir:

1. X_i 'ler aynı dağılıma sahip rassal değişkenlerdir.
2. X_i rassal değişkenlerinin ortak dağılımı N 'ye bağlı değildir.
3. N 'nin dağılımı $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ değerlerine bağlı değildir (Klugman, 2012).

Belirli bir zaman aralığında karşılaşılabilecek toplam hasarın tahmin edilebilmesi için toplam hasarın tahmin edilebilmesi için toplam hasar dağılımının belirlenmesi gerekir. Toplam hasar dağılımının belirlenmesinde izlenecek yaklaşım,

- Verilere dayanan N için bir dağılım önermek
- Verilere dayanan X_i 'ler ($i=1,2,3,\dots,N$) için bir dağılım önermek
- Bu iki dağılımı kullanarak toplam hasar S nin dağılımını bulmak için gerekli hesaplamaları elde etmek

şeklinde sıralanabilir (İrven, 2011).

3. PANJER YÖNTEMİ

Panjer tarafından keşfedilen bu yaklaşım, hasar olasılıklarını hesaplamak için yaygın olarak kullanılan bir yöntem olmuştur. Bu yaklaşımın, şimdiye kadar olan yaklaşımlardan çok daha üstün ve gerçekçi bir alternatif olmasının yanı sıra programlanması da kolaydır (İrven, 2011).

Panjer metodu daha geleneksel olan Monte Carlo simülasyon yöntemlerine bir alternatif olarak düşünülebilir. Aynı zamanda risk teorisi metotlarına da bir alternatiftir. Panjer yönteminin en büyük avantajı, bir blok halindeki poliçelere ilişkin verilen hasarların dağılımlarının toplam birleştirilmiş halleri daha çabuk ve direkt olarak hesaplayabilmektir. Dolayısıyla Panjer metodu bir sigorta şirketinin konservasyon seviyesini belirlemede ve reasürans politikalarını oluşturmada oldukça kullanışlıdır. (Spencer, 2000)

Bu yöntemde önceden hesaplanmış toplam hasar şiddetinin 0 olma olasılığı vardır. Büyük portföyler için bu olasılık çok küçüktür, hatta o kadar küçüktür bilgisayarların tanıdığı en küçük rakamın altında kalmaktadır ve bu bilgisayar ortamında yapılan hesaplamalarda sorunlar yaratmaktadır. Çünkü bilgisayar tanımadığı bu küçük rakam için mecburen 0 değerini almaktadır. Bu sorunu ortadan kaldırmak için bir kaç farklı çalışma yapılmıştır. Bunun yanında bu yöntemde ortaya çıkan başka bir sorun ise değerlerin yuvarlanmasıdır. Bilgisayar ortamında virgülden sonra tanınan hane sayısı belirlidir ve bu yöntemin ihtiyaçlarını karşılayabildiği durumlar ortaya çıkmaktadır. Yuvarlamalar sonucunda belli bir hata payı ortaya çıkmaktadır ve buradaki en büyük sorun bu hata payının ne kadar hızlı büyüdüğüdür. Hata payları ayrı bir inceleme konusudur ve üzerine bir çok çalışma yapılmıştır (Doğan, 2010).

Panjer yöntemi, hayat dışı aktüeryal gerçek yaşamda görünen hasar olasılıklarının bütün parametrik versiyonları X_k 'lerin dağılımının, yaklaşık olarak kesikli hale getirilerek , özinyeli olarak hesaplanabilmesi esasına dayanmaktadır. X_k 'lerin dağılımı sürekli bir dağılım olduğunda, bu dağılım kesikli hale getirilmelidir ki bunun için en kolay yaklaşım, dağılım açıklığı olan uygun bir h ölçüm birimi üzerinden yuvarlama yöntemi uygulayarak kesikli hasar miktarı dağılımını oluşturmaktır. Yuvarlama yöntemi, $(j+1)h$ ile jh arasındaki olasılığı bölüp, en yakın uygun olan dağılım açıklığına bütün miktarları yuvarlamaktadır. (İrven,

2011) Nitekim bu yöntem aracılığıyla, sürekli olan hasar miktarı dağılımı, belirli aralıklar dahilinde

$$f_0 = P\left(X < \frac{h}{2}\right) = F_X\left(\frac{h}{2} - 0\right)$$

$$f_j = P\left(jh - \frac{h}{2} \leq X < jh + \frac{h}{2}\right)$$

$$= F_X\left(jh + \frac{h}{2} - 0\right) - F_X\left(jh - \frac{h}{2} - 0\right), \quad j = 1, 2, \dots$$

olacak şekilde kesikli hale getirilerek $j=0,1,2,\dots$ için jh' 'de yer alan f_j olasılıkları bulunmaktadır (Klugman, 2004).

Hayat dışı sigortalarda kolektif risk modellemesiyle toplam hasar değişkeninin dağılımının belirlenmesinde, toplam hasar sayısı olan K 'nin dağılımına ilişkin öne çıkan en önemli dağılımları $(a, b, 0)$ sınıfı üyeliğinde olan dağılımlar oluşturmaktadır. Frekans dağılımı olan , kesikli bir rassal değişkenin olasılık fonksiyonu olup p_k

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

ifadesine göre a ve b sabitlerinin var olmasını sağlayan iki parametrelili $(a, b, 0)$ dağılımlar sınıfının bir üyesidir (Klugman, 2004).

Panjer'in özyinelemesi, dağılımdaki başarılı olasılıkların nispi büyüklüklerini tanımlar. Sıfırdaki olasılık, p_0 , özyineleme formülünden elde edilebilir, çünkü olasılıklar 1'e tamamlanmalıdır. Bu bir sınırlama koşulu sağlamaktadır. Bir $(a, b, 0)$ sınıf dağılımı, parametreleri a ve b olan iki parametrelili sınıftır. Poisson, Binom ve Negatif Binom, için olasılık fonksiyonunda sol taraftaki değerler yerine konularak, bu üç dağılımın her birinin özyinelemeyi sağladığı görülmektedir. a ve b değerleri tabloda verildiği şekilde elde edilmektedir. Aynı zamanda tabloda, özyineleme için başlangıç değeri olan p_0 değerleri de yer almaktadır. Tabloda yer alan Geometrik dağılım negatif binom dağılımının $r=1$ olması durumundaki özel halidir. Aşağıdaki tabloda söz konusu özyineleme formülünü sağlayan olası dağılımlar yer almaktadır.

Tablo 1: (a,b,0) Sınıfındaki Dağılımlar için a, b ve Başlangıç Değerleri

Distribution	a	b	p ₀
Poisson	0	λ	e ^{-λ}
Binomial	$-\frac{q}{1-q}$	$(m+1)\frac{q}{1-q}$	(1-q) ^m
Negative binomial	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(r-1)\frac{\beta}{1+\beta}$	(1+β) ^{-r}
Geometric	$\frac{\beta}{1+\beta}$	0	(1+β) ⁻¹

Özyineleme formülü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$k \frac{p_k}{p_{k-1}} = ak + b, \quad k = 1,2,3, \dots$$

Eşitliğin sol tarafı, k'ya bağlı bir lineer fonksiyondur. Tabloda Poisson dağılımı için düz çizginin eğimi yani a'sı 0 dır. Binom dağılımı için negatif, Negatif Binom dağılımı ve Geometrik dağılım için ise pozitifdir. Bu bize hangi dağılımın daha iyi uyacağına karar verme açısından grafiksel bir gösterim sunmaktadır. Eğer bu modellerden biri seçilecekse gözlemlenen değerler yaklaşık bir düz doğru oluşturmalıdır ve eğimin değeri hangi modelin seçilmesi gerektiğine dair bir gösterge olacaktır. Aşağıdaki gösterimler dikkate alınarak toplam hasar miktarlarının dağılımları N'in dağılımına göre değişen şekilde verilecektir: (Klugman, 2004). Gösterimler;

$$P(X=k) = x(k), \quad k \in \mathbb{N}$$

$$P(Z=j) = z(j), \quad j \in \mathbb{N}_0$$

N~P(λ) için Panjerin özyinelemeli formülü aracılığıyla toplam hasar miktarı Z'nin dağılımı,

$$z(j+1) = \frac{\lambda}{j+1} \sum_{i=0}^j z(j-i)x(i+1)(i+1), \quad j \in \mathbb{N}_0; \quad z(0) = e^{-\lambda}$$

N~NB(r,p) için Panjerin özyinelemeli formülü aracılığıyla toplam hasar miktarı Z'nin dağılımı,

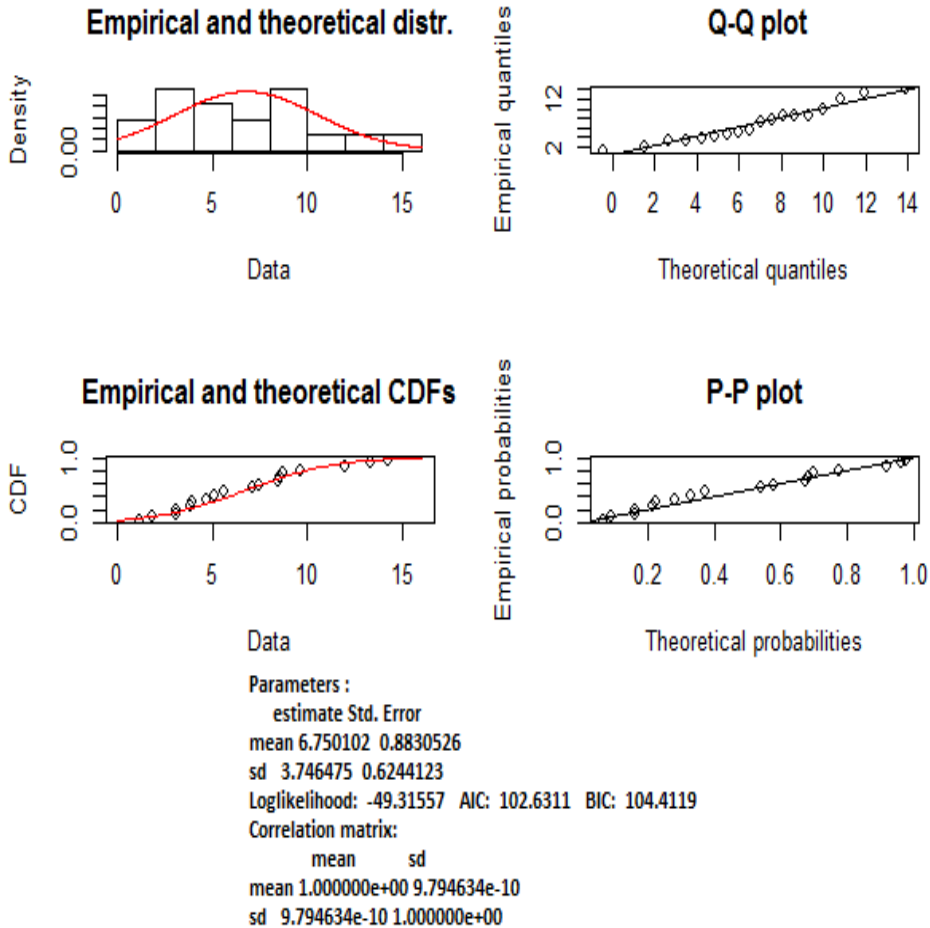
$$z(j+1) = \frac{1}{j+1} \sum_{i=0}^j z(j-i)x(i+1)(1-p)((j-i)+r.(i+1)), \quad j \in \mathbb{N}_0; \quad z(0) = p^r$$

4. HASAR MİKTARININ BELİRLENMESİ

Halka açık bir sigorta şirketinin 2009 – 2013 dönemine ait kaza sigortası verileri kullanılarak toplam hasarın dağılımı bulunmaya ve toplam hasarın belirlenmesine çalışılmıştır. Uygulama dört aşama şeklinde gerçekleştirilmiştir.

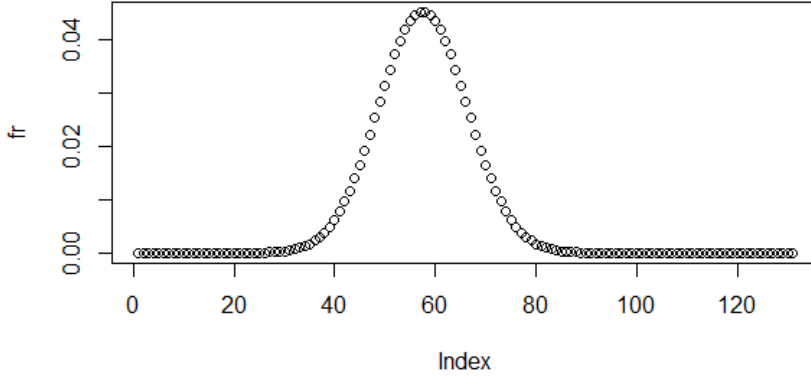
- a. **Hasar miktarlarının dağılımının bulunması** - Öncelikle kaza sigortasına ait verilerin dağılımı incelenmiş ve normal dağılıma uyduğu tespit edilmiştir. İşlemler R’de “*fitdistrplus*” paketi kullanılarak yapılmıştır (Delignette-Muller, 2013).

Şekil 1: Hasar Miktarları Dağılımı



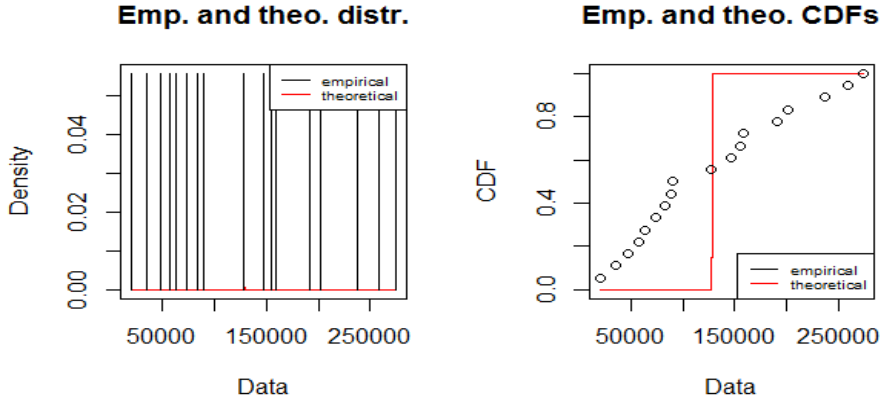
- b. **Hasar miktarı dağılımının kesikileştirilmesi** - Bu aşamada bulunan dağılım kesikileştirilerek panjer uygulamasında kullanılır hale getirilmiştir. Kesikileştirme işlemlerinde R’nin “*actuar*” paketi kullanılmıştır (Dutang, 2008).

Şekil 2: Hasar Miktarı Kesikleştirilmiş Durum



- c. **Hasar Sıklıkları Dağılımının Bulunması** - Hasar sıklıklarının $\lambda=128.352$ olan poisson dağılımına uyduğu tespit edilmiştir.

Şekil 3: Hasar Sıklıkları Dağılımı



Fitting of the distribution ' pois ' by maximum likelihood

Parameters :

estimate Std. Error

lambda 128352.7 82.89721

Loglikelihood: -420941.7 AIC: 841885.4 BIC: 841886.2

- d. Bulunan hasar sıklıkları dağılımı ve kesiklileştirilen hasar miktarı dağılımı kullanılarak Panjer modelinin uygulanması** - Panjer uygulamasında ve kesiklileştirme işlemlerinde R'nin "actuar" paketi kullanılmıştır (Dutang, 2008). Yapılan hesaplamalarda E-332'nin altındaki sayıları 0 olarak aldığından "underflow" problemi ortaya çıkmaktadır ve bu sebeple panjer özinyelemesi başlayamamaktadır. Poisson için Panjer ifadesi,

$$f(0) = e^{-\lambda(1-p(0))};$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \sum_{h=1}^x \lambda h p(h) f(x-h);$$

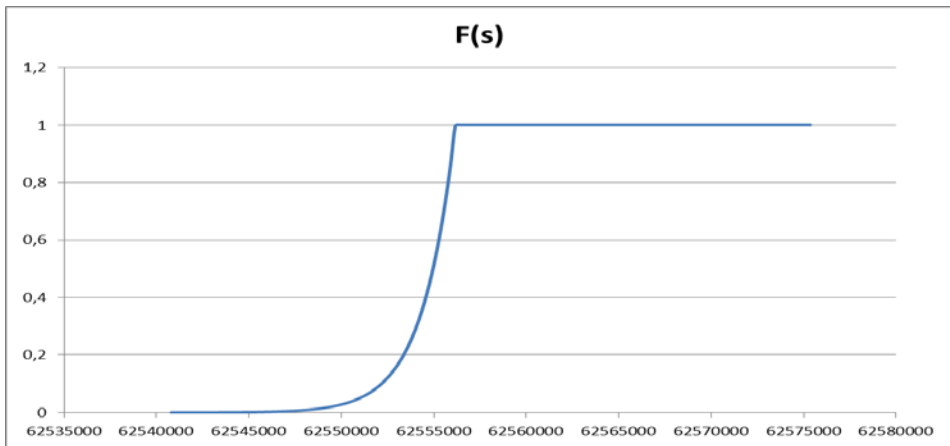
şeklinde olduğundan bilgisayarın kısıtlamalarına takılmamak için $(1-p(0)) > 727$ olacak şekilde işlem yapmak gerekmektedir (Kaas, 2008).

Bu problemi aşmak için hesaplamaların daha küçük bir λ için yapılması ve sonrasında bulunan sonucun konvolüsyona tabi tutulması gerekmektedir. Yani burada λ 'nın 2^n 'e bölünmesi ve sonrasında sonucun elde edilmesi için n kez konvolüsyon uygulanması önerilmektedir (Panjer, 2006). n ve λ^* ,

$$\lambda^* = \frac{\lambda}{2^n} = \frac{128350}{2^8} = 501,37$$

şeklinde bulunabilir. $\lambda^* = 501,37$ alınır ve n=8 kez konvolüsyon uygulayarak hesaplamalar yapıldığında aşağıdaki sonuç bulunmuştur.

Şekil 1: Toplam Hasar Miktarı Birikimli Olasılık Dağılımı



5. SONUÇ

Yapılan bu çalışmada kaza sigortası için bulunan konvolüsyon değerine göre hesaplanan toplam hasarın 62.556.160 TL seviyesine çıkabileceği gözlemlenmiştir. Dolayısıyla sigorta şirketinin bu hasar miktarını göz önünde bulundurarak rezervlerini dengelemesi gerekmektedir. Bu çalışma şirketin çok sayıdaki sigorta branşından biri için yapılmış olup diğer sigorta branşları için de yapılarak sigorta şirketinin tüm portföyünün toplam hasar beklentisi hesaplanabilecektir. Böylece şirket açısından risk azaltılabilecektir.

KAYNAKÇA

- Cramér, H. (1930), On the Mathematical Theory of Risk. Skandia Jubilee Volume, Stockholm,p.1-8
- Dutang, C., Goulet, V., Pigeon,M. (2008), Actuar:An R package for Actuarial Science, Journal of Statistical software, p.1-37.
- Dickson, D. C. (2006), Collective Risk, Insurance Risk And Ruin, Cambridge: CambridgeUniversity Press,p.53
- Doğan, U. (2010), Sigorta Şirketlerinde Hasar Modellemesi, Marmara Üniversitesi Bankacılık ve Sigortacılık Enstitüsü, Sigortacılık Anabilim Dalı, p.33
- Kahn, P. M. (1962), An Introduction To Collective Risk Theory And Its Application To Stop-Loss Reinsurance,Transactions Of Society Of Actuaries 1962 Vol. 14 Pt. 1 No. 40, p.1-12
- Delignette-Muller,M.L. (2013), fitdistrplus:help to fit of a parametric distribution to non-censored or censored data, p.1-22
- İrven,P.B.,Güçyapar, G. (2011), “Kollektif risk modellemesinde Panjer Yöntemi”, Dokuz Eylül Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi, p.139-149.
- Panjer, H. H. (2006), Operational Risk Modelling Analytics., John Wiley & Sons, Inc. Publication, p.75-77
- R. Kaas, Goovaerts, M., Dhaene, J., Denuit, M. (2008), Modern Actuarial Risk Theory Using R., Springer, p.48
- S. A. Klugman, Panjer, H. H. (2012), Loss Models: From Data to Decisions, Wiley, p.210
- Spencer L., Re, L. (2000), “An Overview of The Panjer Method For Deriving The Aggregate Claims Distribution.”, Lincoln National Reassurance Company, p.15-23
- Stuart A. Klugman, Panjer, H. H., Willmot, G.E. (2004), Loss Models. New Jersey,Wiley, p.84