PressAcademia
Journal of Economics, Finance and Accounting
Year: 2014 Volume: 1 Issue: 3

CURRENCY EXCHANGE RATE ESTIMATION USING THE GREY MARKOV PREDICTION MODEL

Omer Onalan[1]

[1]Marmara University. omeronalan@marmara.edu.tr

Keywords
Grey system theory, GM(1,1) model, Grey Markov Model, currency exchange rate

JEL Classification
C02,C32,G15

ABSTRACT
In an economy that applying the free currency rate regime, the Exchange rate is not constant, it represents the fluctuations with time. In this study, the analysis completely based on the historical Exchange rate data. Therefore Exchange rate data can be considered as grey value. Traditional grey models try to describe the evaluation the original data. But those models are not a suitable tool for non-stationary random data. For this reason, in this study, we use the grey Markov model. A Markov chain which the future evaluation only depend on present state it's no dependency to previous states, so a Markov chain can be used to model the unstable systems. The future values of system can be predicted using the grey model. In the grey Markov model approximation, firstly Exchange rate estimated by GM(1,1) model and the error is obtained as difference between the estimated value and real data. This new series is divided into finite state. Then observing the transients between the states Markov probability matrix is obtained. The future values time series are predict by this matrix. Grey Markov model which is constructed by GM (1,1) model and Markov chain, allow us to make the beter estimation for exchange rate. In this study, daily TL/USD Exchange rate data is used. The data is collected from TCMB. Finally it has determined that the grey Markov model is a good approximation to predict the currency Exchange rate.

GRİ MARKOV KESTİRİM MODELİ KULLANILARAK DÖVİZ KURU TAHMİNİ

Anahtar Kelimeler
Gri sistem teorisi, GM(1,1) modeli, Gri Markov modeli, Döviz kuru

JEL Sınıflandırması
C02,C32,G15

ÖZET
Serbest kur rejimi uygulayan bir ekonomide döviz kuru sabit olmayıp zamanla değişkenlik göstermektedir. Bu çalışmada analizler tamamen geçmiş döviz kuru verilerine dayanmaktadır. Bu nedenle kur verileri gri bir değer olarak alınabilir. Geleneksel gri modeller orijinal verideki gelişimi tanımlamaya çalışır. Fakat durağan olmayan rastsal veriler için uygun bir modelleme aracı değildirler. Bu nedenle çalışmada Gri- Markov modeli kullanılmıştır. Bir Markov zincirinin gelecek değişimi geçmişten bağımsız olup sadece şu anda bulunulan duruma bağımlı olduğundan Markov zincirleri dalgalı yapıya sahip sistemleri modellemek için kullanılabilir. Gri model kullanılarak sistemin gelecek değerleri tahmin edilir. Gri Markov modeli yaklaşımında, önce GM(1,1) modeli kullanılarak kur için değerler tahmin edilir ve bu değerler ile gerçek kur değerleri arasındaki fark serisi elde edilir. Bu seri sonlu sayıda duruma bölünür. Sonra bu durumlar arasındaki geçişlere bakılarak Markov zincirinin geçiş olasılıkları matrisi elde edilir. Döviz Kuru nun gelecek değeri ise bu geçiş olasılıklarından faydalanılarak tahmin edilir. GM(1,1) modeli ve Markov zinciri bir araya getirilerek oluşturulan Gri Markov modeli döviz kuru için daha doğru kestirimler yapılmasına olanak verir. Bu çalışmada, TCMB tarafından günlük olarak tutulan TL/USD kur değerleri kullanılmıştır. Sonuç olarak gri Markov modelinin döviz kuru kestirimi için iyi bir yaklaşım olduğu tespit edilmiştir.

1. GİRİŞ

Bir ülke parasının bir başka ülke parası cinsinden fiyatı *döviz kuru* olarak adlandırılmaktadır. Döviz kurlarının seyri genel ekonomiyi ve bireysel günlük hayatı büyük ölçüde etkiler. Uluslararası ticaret yapıldığı zaman ülke paralarının bir birleri ile değişimi söz konusu olur. Genelde spot kur ve vadeli kur olmak üzere iki tür kur kullanılır. Döviz kurları yerli ve yabancı malların göreli fiyatlarını da etkiler. Bir ülke parasının diğer ülke paralarına göre değeri yükseldiğinde o ülkenin malları diğer ülkelerde daha pahalı hale gelirken, ülkedeki yabancı mallar ucuzlar, buda ülkedeki yabancı mallar arasındaki rekabetin artmasına sebep olur. Ülkenin parasının değer kaybetmesi durumunda ise bunun tam tersi gerçekleşir. Döviz piyasası tezgâh üstü piyasa olarak örgütlenmiş olup çok sayıda alıcı ve satıcı telefon, internet yoluyla iletişim kurmaktadırlar. Döviz kurları da serbest piyasadaki arz ve taleple belirlenmektedir. Döviz kurlarını açıklamak için faklı yaklaşımlar geliştirilmiştir, tek fiyat kanunu, satın alma gücü paritesi, faiz paritesi ve Fisher etkisi bunlardan birkaçıdır. Yatırımcıların temel amaçlarından bir tanesi de döviz kurlarının doğru bir şekilde tahmin edilmesidir. Fakat bu amacı gerçekleştirmek kolay bir iş değildir.

Karmaşık ekonomik sistemler ve finansla piyasalardaki dalgalanmaların istatistiksel analizi birçok araştırmacının ilgisini çekmektedir (ayrıntılar için bakınız Mantegna ve Stanley(2000)). Literatürde fiyatlardaki dalgalanmalar genellikle rastsal değişkenler olarak ele alındığı görülmektedir. Sistemler araştırıldığı zaman, sistemi etkileyen birçok içsel ve dışsal faktör ile karşılaşılır. Ayrıca sistemin tam olarak kavranmasındaki sınırlılığımız ile yüz yüze geliriz. Ayrıca sistemle ilgili elde edilebilir enformasyon belirsizlik ve gürültü içerir(Liu ve Lin(2010)). Kontrol teorisinde bir sistem hakkında elde edilebilir tam bilgi seviyesine göre bir renk ataması yapılır. Bu açıdan enformasyon sistemleri genel olarak üç sınıfa ayrılabilir. Bunlar beyaz sistem, gri sistem ve siyah sistemdir. Eğer sistemi tanımlayan matematiksel modeller elde edilemiyorsa sistem siyah sistem(kara kutu) olarak adlandırılır. Eğer sistemin matematiksel modeli tam olarak belirlenebiliyorsa sistem beyaz sistem olarak adlandırılır. Beyaz sistem ise tam olarak belirlenebilen bir sistemi temsil eder. Gri sistem ise ne siyah ne de beyaz bir sistemdir. Bu durumda sadece kısmi enformasyon elde edilebilir. Olasılık, istatistik ve fuzzy matematiği belirsiz sistemlerin araştırılması için en çok kullanılan üç araştırma metodudur. Fuzzy matematiği bilişsel belirsizliğe sahip problemler üzerinde yoğunlaşmaktadır. Burada araştırılan olaylar açık olmayan uzantılara sahiptirler. Olasılık ve istatistik ise stokastik belirsizlik fenomeni üzerinde çalışırlar. Onlar stokastik belirsiz bir fenomenin her bir mümkün sonucunun şansını araştırırlar. Onlar çok sayıda örneğin elde edilebileceğini ve bunların bir teorik dağılıma uyacağını varsayarlar.

Bu çalışmada stokastik olarak kabul edebileceğimiz TL/USD günlük kur verilerini analiz ederek döviz piyasalarını idare eden stokastik süreç hakkında bilgi edinmeye çalışıyoruz. Genelde finansal zaman serileri sadece stokastik dalgalanmalar göstermez. Bunlar bir dereceye kadar stokastik olarak düşünülebilirler. Uygulamada döviz kurlarındaki dalgalanmaya etki eden tüm faktörleri kesin olarak bilemeyiz veya belirleyemeyiz. Bu nedenle döviz kuru sistemi bir gri sistem olarak ele alınabilir. Bu çalışmada döviz kurlarının gelişiminin modellenmesi ve tahminlerinin elde edilebilmesi için Gri Markov modeli kullanılmıştır.

2. LITERATÜR TARAMASI

Gri sistem teorisi ise küçük örnek ve az veriye sahip belirsiz problemler üzerine odaklanır. Gri sistemi fuzzy matematiğinden farklı kılan şey açık ve açık olmayan uzantılı problemler üzerine vurgu yapmasıdır(Liu ve Lin(2010),s.10). Gri sistem teorisi ilk olarak 1982 de Çinli matematikçi Julong Deng tarafından ortaya konmuştur(Deng(1982a),Deng(1982b). (Deng(1989)) belirli bir zaman ufku için belirli bir aralıkta belirli büyüklükte değişen rastsal değişkenlerden oluşan herhangi bir stokastik süreci Gri rastsal süreç olarak adlandırmıştır. Bu teori küçük örnekler ve az enformasyon içeren problemlerin çalışılması üzerinde yoğunlaşır. Teori kısmi bilgiye sahip belirsiz sistemler ile ilgilenir. Esas olarak gri sistem teorisi, bir sistemin dinamik davranışına yaklaşmak için elde edilebilir enformasyonu kullanarak bir gri model oluşturulması üzerine odaklanır. Gri model genelde $GM(n,m)$ ile ifade edilir. Burada n, diferansiyel denklemin mertebesini m de değişken sayısını göstermektedir(Wen(2004)). Gri sistem verilen bir zaman serisinde mevcut olan rastsal dalgalanmaları düzeltmeyi amaçlamaktadır. Gri kestirimde düzeltme *birikim işlevi ve ortalama* alınarak gerçekleştirilir Çeşitli tipte Gri modeller geliştirilmiş olmasına rağmen uygulamada yoğun olarak kullanılanı $GM(1,1)$ modelidir. Çünkü bu modelin kestirimleri hesapsal olarak etkindir. Gri sistem teorisi genelde sürekli şekilde ölçülmüş zaman serileri ile ilişkili olarak ifade edilir. Hâlbuki gerçek hayattaki gözlemler kesikli zaman aralıklarında gözlenir. Ham verideki belirsizliği azaltmak için birikim yaratma işlevi kullanılır.

$GM(1,1)$ birinci mertebeden tek değişkenli gri modeldir. Gri kestirim modelinin esası orijinal veriyi kümüle ederek bir üstel kanun oluşturmaktır. Geleneksel gri modeller büyük oynaklıklara sahip bir dizinin kestirimi için kullanıldığında büyük hatalar üretebilir. Bu hatalar ise kestirimin başarısız olmasına yol açar. Oynaklığı azaltmak için hesaplamaya geçmeden önce orijinal dizinin logaritması alınabilir. Sonrada bu yeni diziye Markov kestirimi uygulanır.

3. METODOLOJİ

3.1 GM(1,1) Kestirim Modeli

$GM(1,1)$ olarak adlandırılan geleneksel gri kestirim modeli sistem analizi, modelleme, kestirim, karar verme, kontrol ve diğer birçok farklı alanda yoğun olarak uygulanmaktadır. Regresyon analizi gibi genel olarak kullanılan bazı kestirim metotları büyük ölçüde tarihsel veriye dayanır ve verilerin dağılımının belirli tipik bir forma uyması istenir. Bir gri kestirim modeli düşük oynaklığa sahip, küçük çaplı bir örnek için kısa vadeli kestirimler yapmak için iyi bir yaklaşımdır. Süre uzadıkça kestirimin doğruluğu azalır. Gri modelleme yaklaşımı tarım, endüstri, finans, askeriye, enerji, kaza vb. birçok alanda uygulanmıştır. Fakat oynaklık ve rastsal hata faktörlerinin etkisi gri modelinin kestirim gücünü zayıflatmaktadır. Bu göreceli hatalar azaltılarak modelin kestirim sonuçları iyileştirilebilir. GM(1,1) modeli gri sistem teorinin önemli bir kestirim metodudur. Bu model az sayıda veri ve yarı-üstel veri serilerinin kestirimi için oldukça uygundur. Yüksek oynaklığa sahip veriler için kestirimin duyarlılığı zayıflamaktadır. Fakat çeşitli yöntemlerle hataların düzeltilmesi ile modelin geçerliliği arttırılmaktadır. GM(1,1) Birinci mertebeden lineer gri modelin bir türüdür. Bu model katsayıları zamanın bir fonksiyonu olan bir diferansiyel denklemi gösterir. Yani yeni bilgiler geldikçe model kendini yenilemektedir. Gri kestirim modeli üç temel işleme sahiptir. Bunlar $i)$ Birikimli değerler oluşturma işlemi $ii)$ Ters birikimli değerler oluşturma işlemi ve $iii)$ Gri modelleme işlemidir. Şimdi bu aşamaları daha detaylı olarak açıklayalım.

1) *Orijinal veri serisi* negatif olmayan tarihsel bir zaman serisidir.

$$x^{(0)} = \left\{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \ldots, x^{(0)}(n)\right\} \quad , n \geq 4$$

Burada $x^{(0)}(k)$ zaman serinin k zamanındaki değerini, n serideki toplam veri sayısını göstermektedir.

$x^{(0)}$ dizisinin düzgünlük derecesi aşağıda tanımlanan oran kullanılarak test edilir.

$$\sigma(k) = \frac{x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k-1)} \quad , k = 2,3,\ldots,n$$

Eğer $\sigma(t)$ değerleri $(0.1345 \, , 7.389)$ aralığı içerisine düşüyorsa seri testi geçmiştir ve ikinci adıma geçilebilir. Eğer test başarısız ise orijinal seriye dönüşüm uygulanarak seri düzgünleştirilir ve tekrar teste tabi tutulur.

2) *Birikim yaratma işlemi*, gri kestirim modeli bu işlemi diferansiyel denklemleri oluşturmak için kullanmaktadır. Birinci mertebeden birikim oluşturma işlevi kullanılarak, kaotik zaman serisi $x^{(0)}$ monoton artan $x^{(1)}$ serisine dönüştürülür.

$$x^{(1)} = \left\{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \ldots, x^{(1)}(n)\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{1} x^{(0)}(i), \sum_{i=1}^{2} x^{(0)}(i), \ldots, \sum_{i=1}^{n} x^{(0)}(i)\right\}$$

Birikimli seri orijinal seri ile kıyaslandığında rastsal dalgalanmaların büyük ölçüde bertaraf edildiği görülecektir. Bu yeni seri monoton artandır. Bu yeni serinin bir üst limite yakınsadığı görülür.

3) $x^{(1)}$ *serisinin komşu değerlerinin ağırlıklı ortalamaları serisi* $z^{(1)}$ in oluşturulması

$$z^{(1)} = \left\{z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \ldots, z^{(1)}(n)\right\}$$

Burada

$$z^{(1)}(k) = \left\lfloor \lambda x^{(1)}(k) + (1-\lambda) x^{(1)}(k-1) \right\rfloor \quad , k = 2,3,\ldots,n \, , \lambda > 0$$

Eğer özel olarak $\lambda = 0{,}5$ alınırsa, iki komşu değerin aritmetik ortalaması elde edilir.

$$z^{(1)}(k) = \left\lfloor 0.5 x^{(1)}(k) + 0.5 x^{(1)}(k-1) \right\rfloor \quad , k = 2,3,\ldots,n$$

4) *Diferansiyel denklemin oluşturulması*; Gri sistemin sürekli doğası yüzünden GM(1,1) modeli aşağıdaki 1. mertebeden diferensiyel denklemle tanımlanabilir. Bu denklem beyazlatma denklemi olarak da adlandırılır ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\frac{dx^{(1)}(k)}{dk} + a x^{(1)}(k) = b$$

Kesikli verilerin uygun bir şekilde modellenmesi için yukarıdaki denklemin sol tarafındaki değişken, birim zaman periyodundaki değişim ile yer değiştirir.

$$x^{(0)}(k)+ax^{(1)}(k)=b$$

GM(1,1) modelinin orijinal formu olarak adlandırılır.

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$$

GM(1,1) modelinin temel formu olarak bilinir. Burada a parametresi $x^{(1)}$ dizisinin eğilimindeki gelişmeyi yansıttığından, *gelişim parametresi* olarak adlandırılır. b parametresi verideki değişim ilişkisini yansıttığından bu para metre *kordinasyon parametresi* olarak adlandırılır.

5) $x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$ GM(1,1)' in *gri fark denkleminin* a ve b parametrelerinin en küçük kareler tahmini aşağıdaki gibidir.

$$\left[\hat{a},\hat{b}\right]^T=\left(B^TB\right)^{-1}\left(B^TY\right)$$

$$Y=\begin{bmatrix}x^{(0)}(2)\\x^{(0)}(3)\\\vdots\\x^{(0)}(n)\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(2)&1\\-z^{(1)}(3)&1\\\vdots&\vdots\\-z^{(1)}(n)&1\end{bmatrix}$$

Burada T matrisin transpozesini, $\hat{a}$ ve $\hat{b}$ ise a ve b parametrelerinin verilerden elde edilen tahmincilerini göstermektedir.

6) *Kestirim modelinin elde edilmesi*; $\frac{dx^{(1)}(k)}{dk}+ax^{(1)}(k)=b$ beyazlatıcı denklemi çözülerek GM(1,1) kestirim modeli aşağıdaki gibi elde edilir. a ve b parametreleri tahmin edildikten sonra bu tahminler $x^{(1)}(k)$ ve $x^{(0)}(k)$ nın h zaman periyoduna kadarki kestirimleri içinde kullanılabilir.

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\left[x^{(0)}(1)-\frac{\hat{b}}{\hat{a}}\right]e^{-\hat{a}k}+\frac{\hat{b}}{\hat{a}}\quad,k=1,2,\ldots,n\quad,\quad\hat{x}^{(1)}(1)=x^{(0)}(1)$$

h *periyot sonrasındaki değerin tahmini,*

$$\hat{x}^{(1)}(n+h)=\left[x^{(0)}(1)-\frac{\hat{b}}{\hat{a}}\right]e^{-\hat{a}(n+h)}+\frac{\hat{b}}{\hat{a}}$$

7) *Ters birikim oluşturma işlevi* kullanılarak orijinal veri serisine geri dönülür. Orijinal verinin $(k+1)$ zaman noktasındaki kestirim değeri;

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k)=\left(1-e^{\hat{a}}\right)\left[x^{(0)}(1)-\frac{\hat{b}}{\hat{a}}\right]e^{-\hat{a}k}\quad,k=1,2,\ldots,n$$

$$\hat{x}^{(0)}(n+h) = \left(1 - e^{\hat{a}}\right)\left[x^{(0)}(1) - \frac{\hat{b}}{\hat{a}}\right] e^{-\hat{a}(n+h)} \quad , \quad \hat{x}^{(0)}(1) = x^{(0)}(1)$$

3.2. Modelin Uygunluğunun Test Edilmesi

Uygulamaya geçmeden önce modelin uygunluğu ve etkinliğinin test edilmesi gerekmektedir. Bu test işlemi için mutlak ortalama hata, varyans oranı ve küçük hata olasılığı kullanılır.

$x^{(0)}(k)$, $k = 1,2,\ldots,n$ Orijinal veriler, $\hat{x}^{(0)}(k)$, $k = 1,2,\ldots,n$ ise gri kestirim modeli kullanılarak tahmin edilen değerler olsun.

Orijinal verilerin ortalaması : $\bar{x}^{(0)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x^{(0)}(k)$

Tahminin hatası: $\varepsilon(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)$, $k = 1,2,\ldots,n$

Ortalama hata: $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon(k)$

S_1 : Orijinal verilerin standart sapması S_2 : Hata değerlerinin standart sapması

Hata oranı $C = \frac{S_2}{S_1} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\varepsilon(k) - \bar{\varepsilon}\right)^2} \Big/ \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x^{(0)}(k) - \bar{x}^{(0)}\right)^2}$

C nin daha küçük değerleri modelin daha iyi olduğunu gösterir. Bu değer aslında kestirim hatasının değişim oranını ifade eder.

Küçük hata olasılığı $p = P\left\{\left|\varepsilon(k) - \bar{\varepsilon}\right| < 0.6745\, S_1\right\}$

Bu p değeri 0,6745 değerinden daha küçük olan kestirim hatasının göreceli yanlılığının olasılığı dır. Genelde p nin 0,95 den daha büyük olması istenir. Kestirimin doğruluğu için p ve C çifti aşağıdaki dört grupta karakterize edilebilir.

Tablo 1: Kestirimin Doğruluk Kategorileri

	Kestirim İndeksi	
Kategori	p	C
İyi	$> 0{,}95$	$< 0{,}35$
Vasıflı	$> 0{,}8$	$< 0{,}5$
Makul	$> 0{,}7$	$< 0{,}65$
Kötü	$\leq 0{,}7$	$\geq 0{,}65$

3.3. Gri Markov Modeli

Kestirim amacı ile tarihsel verilerin kullanılması durumunda ortam koşullarındaki ani değişimler gerçek değer ile kestirim değeri arasında büyük farklılıklara sebep olabilir. GM(1,1) modeli az sayıda veriye sahip bir veri dizisi ile ilgilenmek için etkili bir yöntem olabilir. Fakat büyük dalgalanmalara sahip bir veri dizisi için aynı şeyi söyleyemeyiz. Gri kestirim modelinin yeteri kadar doğru olmamasının bir sonucu olarak, kestirimin doğruluğunu artırmak için Gri model ile Markov zinciri birleştirilecektir. Bu çalışmada incelenen sistemi bu tür göreceli hatalardan kurtarmak için homojen Markov zincirlerinden faydalanılacaktır. Gri Markov kestirim modelini daha da iyileştirmek için analizden önce gözlem verilerine hareketli ortalama uygulanarak dizi uç değerlerin etkisinden arındırılır. Sonrada GM(1,1) modeline dayanan Markov kestirim modeli uygulanır. Gri Markov modeli gri model ve Markov zincirinin bir kombinasyonudur. Bu model iki avantaja sahiptir. İlki tarihsel verilerle gri model kullanılarak düzgün bir dizi elde edilir. İkincisi gri kestirim ile elde edilen dizi birkaç duruma bölünür ve sonra Markov zinciri ile kestirim sonuçları elde edilir. Markov zinciri metodu sistemin gelecek durumunu, sistemin farklı durumları arasındaki geçiş olasılıklarını kullanarak kestirir. Bu şekilde o aralık kanunu ve rastsal faktörlerin etkisini yansıtabilir. Bu çalışmada hataların etkisini azaltmak için gri sistem içerisine Markov zinciri modeli dâhil edilmiştir(Asrari(2012)).

Markov zinciri stokastik süreçlerin özel bir türüdür ve o fizikten finansa kadar birçok farklı bilim alanında stokastik davranışı modellemek için kullanılmıştır. Aşağıdaki Markovian özelliği sağlayan bir $X = \{X_n ; n \geq 1\}$ stokastik sürecine Markov zinciri denir.

$$P\left(X_{n+k} = i_{n+k} \middle| X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n\right) = P\left(X_{n+k} = i_{n+k} \middle| X_n = i_n\right)$$

T parametre uzayı, E durum uzayını göstermek üzere $n, k \in T$ ve $i_1, i_2, \ldots, i_n \in E$. X_n zincirin n zamanındaki durumunu gösterir.

$$p_{i,j}(n, n+k) = P\left(X_{n+k} = j \middle| X_n = i\right), \quad 1 \leq i, j \leq N$$

Yukarıdaki denklem N durumlu X_n Markov zincirinin k – adım geçiş olasılığını ifade eder.

$p_{i,j}(n, n+k)$ nin n den bağımsız olması durumunda X_n'e *homojen Markov zinciri* adı verilir.

$$p_{i,j}(k) = P\left(X_{n+k} = j \middle| X_n = i\right), \qquad P(k) = \left\lfloor p_{ij}(k) \right\rfloor_{N \times N}$$

Böyle bir zincirde $k = 1$ ise $p_{ij}(1) = p_{ij} = P\left(X_{n+1} = j \middle| X_n = i\right)$ olur ve 1-adım geçiş olasılığı olarak adlandırılır. Bu çalışmada, Markov zincirini kullanarak gri modelin hatalarını kestireceğiz. Markov zincirinin geçiş olasılıkları gri ise Markov zincirine *Gri Markov zinciri* adı verilir. Uygulamada enformasyon eksikliği yüzünden geçiş olasılık değerlerini elde etmek zordur. Bunun yerine gri geçiş olasılıkları ile çalışılarak gri geçiş olasılıkları matrisi elde edilir. Bu durumda beyazlatıcı matris aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$Q(\Theta) = \left\lfloor q_{ij}(\Theta) \right\rfloor_{N \times N}$$

Bu matris $i)$ $q_{ij}(\Theta) \geq 0$, $i, j \in E$ ve $ii)$ $\sum_{j=1}^{N} q_{ij}(\Theta) = 1$ $, i \in E$ koşullarını sağlar.

Markov zincirinin başlangıç dağılımı $\Pi(0) = (p_1, p_2, ..., p_N)$ olduğunda, zincirin sonraki adımlardaki dağılımı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$P(1) = \Pi_0 Q(\Theta), \quad P(2) = P(1)Q(\Theta) = \Pi_0 Q^2(\Theta), \quad P(k) = \Pi_0 Q^k(\Theta)$$

Şu halde zincirin başlangıç dağılımı ve gri geçiş olasılıkları matrisi biliniyorsa zincirin herhangi bir gelecek dağılımı kolayca belirlenebilir. *Markov kestirim süreci aşağıdaki adımlardan oluşur.*

1) *Hataların durumlara bölümlenmesi:* Orijinal veri serisi $x^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), ..., x^{(0)}(n)\}$ ve gri model kullanılarak elde edilen simülasyon dizisi $\hat{x}^{(0)} = \{\hat{x}^{(0)}(1), \hat{x}^{(0)}(2), ..., \hat{x}^{(0)}(n)\}$ olsun. O zaman $\hat{x}^{(0)}$ dizisi bir Markov zinciridir. $GM(1,1)$ modelinin hatalarını tanımlayalım. e_i, i. hatayı göstermek üzere, $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ ve $e_i = x^{(0)}(i) - \hat{x}^{(0)}(i)$ olmak üzere, Gri modelin hataları m tane duruma bölünebilir.

$$\left\{ \min e_i + \frac{(\max e_i - \min e_i)}{m} +, \cdots, + \min e_i + (m-1) * \frac{(\max e_i - \min e_i)}{m} \right\}$$

Θ_i orijinal veri serisinin kestirim dizisine göre sapma derecesini göstersin. Bu yeni süreç bir Markov zinciridir. Şimdi bu Markov zincirini m tane duruma bölelim. Herhangi bir Θ_i durumu,

$\Theta_i = [\Theta_{1i}, \Theta_{2i}]$ $, i = 1,2,...,m$ şeklinde ifade edilir. $\Theta_{1i} = \hat{x}^{(0)}(k) + A_i$, $\Theta_{2i} = \hat{x}^{(0)}(k) + B_i$

Burada $m, A_i \, ve B_i$ kestirim ihtiyaçlarına göre kullanıcı tarafından belirlenir.

2) *Geçiş olasılıkları matrisinin oluşturulması:* N_{ij}, Θ_i durumundan k-adım sonra Θ_j durumuna geçen gözlem verilerinin sayısı, N_i, Θ_i durumundaki gözlem verilerinin sayısı olsun. Zincirin Θ_i durumundan k-adım sonra Θ_j durumuna geçiş olasılığı,

$p_{ij}(k) = \frac{N_{ij}(k)}{N_i}$ $, i = 1,2,...,m$ $k-$ adım geçiş olasılık matrisi

$$P(k) = \begin{bmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) & \dots & p_{1m}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) & \dots & p_{2m}(k) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{m1}(k) & p_{m2}(k) & \dots & p_{mm}(k) \end{bmatrix} \quad \text{Burada} \quad \sum_{i=1}^{m} p_{ij}(k) = 1$$

3) *Kestirim sonuçlarının hesaplanması:* Dizinin sonraki geçiş yapacağı durum bilinmemesine rağmen, $P(k)$ geçiş olasılıkları matrisini çalışarak Markov zincirinin gelecek durumu kestirilebilir. Zincirin şuanda Θ_i durumunda olduğunu kabul edelim. O zaman $P(1)$

matrisinde $i.$ satır araştırılır. Eğer $\underset{j}{Mak}\{p_{ij}(1)\} = p_{il}(1)$ denklemi sağlanıyorsa zincirin sonraki periyotta Θ_l durumuna geçiş yapacağı sonucuna varılır. Eğer $P(1)$ matrisinde, l satırındaki olasılık değerleri biri diğerinin aynısı veya birbirlerine çok yakın ise o zaman $P(2)$ veya $P(k), k \geq 3$ matrislerindeki l satırına bakılır. Sonuç olarak kestirim değeri bu gri aralığın orta noktasıdır (Zhang (2010)). Seçilen durumun medyanı alındıktan sonra kestirim sonucu aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\hat{e}_i = \frac{1}{2}(\Theta_{1i} + \Theta_{2i})$$

Burada Θ_{1i} ve Θ_{2i} , Θ_i durumunun değişim aralığıdır.

$$\hat{x}^{(0)}_{GriMarkov}(i) = \hat{x}^{(0)}(k) + \hat{e}_i = \hat{x}^{(0)}(k) + (A_i + B_i)/2$$

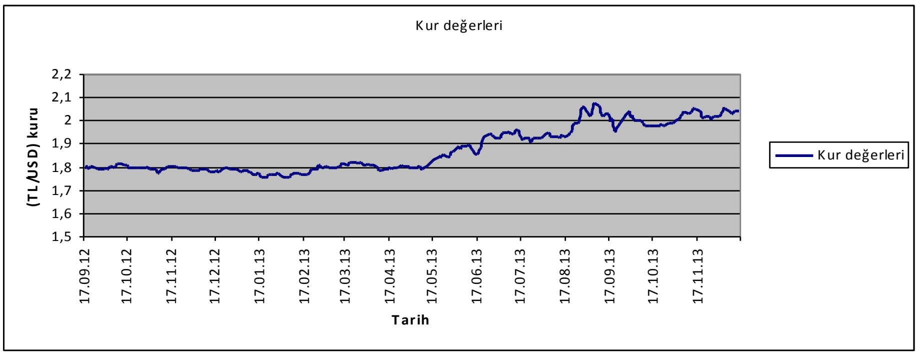
4. DENEYSEL BULGULAR

Önceki bölümde açıklanan GM(1,1) ve Gri Markov kestirim modeli 17.09.2012 – 17.11.2013 tarihleri arasındaki TL-Dolar(TL/USD) alış kuru zaman serisi verilerine uygulanmıştır. Çalışılan dönemdeki kur verileri aşağıdaki şekil 1 de gösterilmiştir. Veri setinin temel istatistiksel özellikleri ise Tablo 2 de özetlenmiştir.

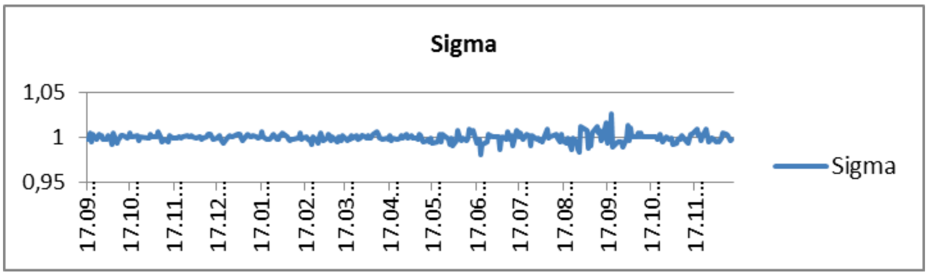
Tablo 2: (TL/USD) Döviz Kuru İçin Tanımsal İstatistikler

	N	Aralık	Min	Max	Ort.	Std.sap	Çarpıklık	Basıklık
TL/USD	312	0,32	1,75	2,06	1,8732	0,0973	0,575	-1,251

Şekil 1:(TL/USD) Döviz Kuru



Şekil 2: Verilerin Düzgünlüğü



Bu çalışmada döviz kurlarının geçmiş ve şuandaki değerleri bir matematiksel model içerisine yerleştirilerek kur için gelecek değer öngörülmüştür. Orijinal kur değerlerine dayanarak gri modelin parametreleri $(\hat{a} = 0{,}0005255)$ ve $(\hat{b} = 1{,}7236)$ olarak tahmin edilmiştir. Bu durumda GM(1,1) kestirim modeli aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \left(1 - e^{\,0{,}0005255}\right)\left(x^{(0)}(1) - \frac{1{,}7236}{0{,}0005255}\right) e^{-(0{,}0005255)k} \quad , \quad k = 1,2,\ldots,n$$

Modelin kestirim değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 3: Kur İçin Gerçek ve Tahmini Değerler

	GM(1,1)		
Tarih	Gerçek Değer	Tahmin	Göreli hata
17.09.2012	1,7948	1,72499637	-0,0724
18.09.2012	1,7974	1,725903094	-0,0760
19.09.2012	1,8019	1,726810295	-0,0656
…	…	…	…
09.12.2013	2,0431	2,024863815	-0,0182
10.12.2013	2,0349	2,025928161	-0,0089
11.12.2013	2,0301	2,026993066	-0,0031

Tablo 3'e bakıldığında gri modelin kestirim için çok uygun bir model olmadığı görülebilir. Bu nedenle bu çalışmada hataların kestirimi için gri Markov modeli kullanılmıştır. Bu sayede kestirimin doğruluğu arttırılabilir. Gri modelin göreli hataları altı duruma bölünmüştür. Bu işlem aşağıdaki adımlardan oluşmaktadır.

1) Önce hatalar altı duruma $\Theta_i \quad (i = 1,2,\ldots,6)$ bölünecektir.

2) Sonra durumlar arası bir adım geçiş olasılıkları matrisi hesaplanacaktır.

Sıklık matrisi

$$F=\begin{bmatrix}3&2&0&0&0&0\\1&32&4&0&0&0\\0&3&56&7&0&0\\0&0&6&83&4&0\\0&0&0&4&35&2\\0&0&0&0&2&29\end{bmatrix}$$

Markov zincirinin durumlar arası geçiş matrisi

$$P^{(1)}=\begin{bmatrix}0{,}6&0{,}4&0&0&0&0\\0{,}027027&0{,}864865&0{,}108108&0&0&0\\0&0{,}045455&0{,}848485&0{,}106061&0&0\\0&0&0{,}064516&0{,}892473&0{,}043011&0\\0&0&0&0{,}097561&0{,}853659&0{,}04878\\0&0&0&0&0{,}064516&0{,}935484\end{bmatrix}$$

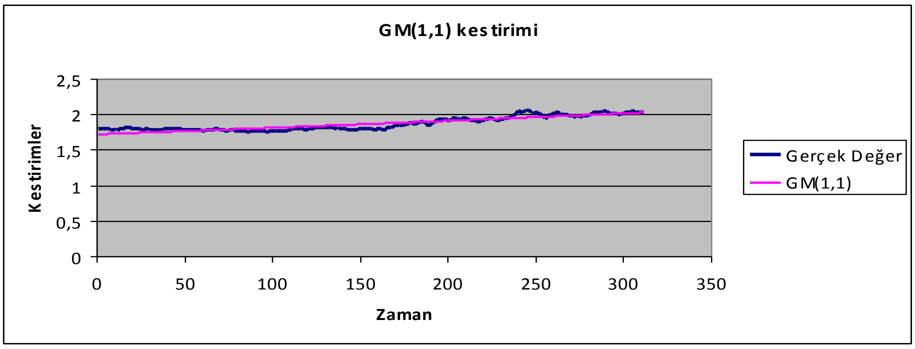
Hataların altı durumu:

$$\Theta_1:\ [-0{,}11601,-0{,}0825)\ \Theta_2:\ [-0{,}0825,-0{,}04898)\ \Theta_3:\ [-0{,}04898,-0{,}01547)$$

$$\Theta_4:\ [-0{,}01547,0{,}018048)\ \Theta_5:\ [0{,}018048,0{,}051563)\ \Theta_6:\ [0{,}051563,0{,}085079)$$

Gri Markov modelinin etkinliğini göstermek için elde edilen kestirim değerleri Gri modelin kestirim değerleri ile karşılaştırılmıştır.

Şekil 3: GM(1,1) Modeli ile Döviz Kuru Kestirimi



Şekil 4: Döviz Kurunun Gri Markov Modeli ile Kestirimi

Tablo 4: Kestirim Modelleri için Hata Analizi

Modeller	MSE
GM(1,1) Modeli	0,001747
Gri Markov Modeli	0,001178

Hata analizinden de görüleceği gibi Gri Markov modelinin doğruluğu Gri modelden daha iyidir. GM(1,1) modelinin kestirim doğruluğunu değerlendirmek için mutlak yüzde hata ortalamasını kullanacağız.

Tablo 5: Hata Sınıfları

MAPE	$\leq 10\%$	$(10\%,20\%)$	$(20\%,50\%)$	$> 50\%$
Tercih	Yüksek	iyi	orta	kötü

GM(1,1) modeli için hata istatistikleri Tablo 6' da verilmektedir.

Tablo 6: GM(1,1) Hata İstatistikleri

Küçük hata olasılığı	p=0,86452
Hata Oranı	C=0,429313
MAPE	1,8493

5. SONUÇ

Bu çalışmada döviz kurlarındaki rastsal dalgalanmaların daha doğru bir şekilde kestirimi için Gri Markov modeli kullanılmıştır. Bu model Gri sistem teorisi ve Markov zincirlerinin güçlü modelleme yaklaşımlarını bir araya getirmektedir. Kullanılan model kısa zaman periyotları için oldukça doğru kestirimler sunmaktadır. Hata kabul edilebilir sınırlar içerisinde kalmaktadır. Gri Markov modeli daha doğru sonuçlar vermektedir. Bu model büyük oynaklığın etkisini oldukça azaltmaktadır. Bu ise kestirimin doğruluğunu arttırmaktadır. Kestirim ufku uzadıkça modelin doğruluğu zayıflamaktadır. Kullanılan model durum aralık dağılımına büyük ölçüde bağımlılık göstermektedir. Eğer çok sayıda veri elde edilebilirse Markov zincirindeki durumların sayısını arttırmak mümkün olabilir. Buda daha duyarlı kestirimler elde etmemize imkan verir. Gri modeller herhangi bir matematiksel modele gereksinim olmaksızın sistemin geleceğini yüksek bir doğruluk derecesi ile öngörebilir.

KAYNAKÇA

Asrari, A., et al (2012), Application of Gray-Fuzzy-Markov chain method for day-ahead electric load forecasting ,Prezeglad Elektrotechniczny,R.88,Nr 3b.

Deng, J.L.(1982a), Control problems of grey system ,Systems & Control Letters,1,288-294.

Deng, J.L.(1982b), Grey system fundamental method. Wuhan, China: Huazhong University of Science and

Technology.

Deng, J.L.(1989), Introduction to gray system theory, Journal of grey system,1,No.1,p.1-24.

Farahpour, F.,et al.(2007), A Langevin equation for the rates of currency Exchange based on the Markov analysis , Physica A 385, p. 601-608.

Liu, S., Lin, Y.(2010) ,Grey Systems: Theory and Applications, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Li Juan, et al. (2012), An improved grey Markov forecasting model and its application, 2012, International conference on digital manufacturing &automation.

Mantegna, R., Stanley, H.E.(2000), An introduction to Econophysics: Correlations and complexities in finance , Cambridge University Press, New York.

Wen, K.L.(2004),Grey Systems, Tucson, USA, Yang's Scientific Press.

Zhang Yinpeng (2010), Prediction model of traffic volume based on Grey-Markov, Modern Applied Science, Vol.4,no.3,p.46-50.