ISSN 2757-5543 GÜFFD 5. Cilt (1): 131-148 (2024)

Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi

https://dergipark.org.tr/tr/pub/guffd

GÜFFD GAZİ ÜNİVERSİTESİ FEN FAKÜLTESİ DERGİSİ

Modifiye Bernstein-Durrmeyer-Stancu Operatörleri İçin Voronovskaya Tip Yaklaşım Teoremi

Mehmet Hanefi Altun[1,2], Ülkü Dinlemez Kantar[3,*]

[1]*Milli Eğitim Bakanlığı, Faruk Nafiz Çamlıbel Anadolu Lisesi, Ankara Türkiye*
[2]*Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, 06500, Ankara, Türkiye*
[3]*Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06500, Ankara, Türkiye*

Öne Çıkanlar

- Modifiye Bernstein-Durrmeyer-Stancu tip operatörlerin, klasik Bernstein-Durrmeyer operatörlerinden daha iyi sonuç verdiği araştırılmıştır.
- Modifiye Bernstein-Durrmeyer-Stancu tip operatörlerin düzgün yakınsaklığı incelenmiştir.
- Bu çeşit operatörlerin Voronovskaja-tip teorem yardımıyla asimptotik yaklaşımı incelenmiştir.

Makale Bilgileri

Geliş: 23/02/2024
Kabul: 29/07/2024

Anahtar Kelimeler

Modifiye Bernstein-Durrmeyer operatörler, Korovkin teorem, Voronovskaja tip teorem

Öz

Bu makalede, Modifiye Bernstein-Durrmeyer-Stancu tip operatörler tanımlanmıştır. Bu operatörlerin klasik olan Bernstein-Durrmeyer operatörlerden daha iyi sonuçlara sahip olduğu gösterilmiştir. Modifiye Bernstein-Durrmeyer-Stancu tip operatörler için momentler ve merkezi momentler hesaplanmıştır. Sonra bu operatörlerin Korovkin teoremi yardımıyla düzgün yakınsaklığı incelenmiştir. Daha sonra Voronovskaja tip teorem verilerek ele alınan operatörlerin asimptotik yaklaşımları incelenmiştir. En son olarak elde edilen teorik sonuçların grafik analizle incelemesi yapılmıştır.

Voronovskaya type approximation theorem for modified Bernstein-Durrmeyer-Stancu operators

Highlights

- This study shows that Modified Bernstein-Durrmeyer-Stancu type operators give better results than classical Bernstein-Durrmeyer operators.
- Uniform convergence of modified Bernstein-Durrmeyer-Stancu type operators has been investigated.
- The asymptotic approach of such operators has been examined with the help of Voronovskaja-type theorem.

Article Info

Received: 23/02/2024
Accepted: 29/07/2024

Keywords

Modified Bernstein-Durrmeyer operators, Korovkin theorem, Voronovskaja type theorem

Abstract

In this article, Modified Bernstein-Durrmeyer-Stancu type operators are defined. It has been shown that these operators have better results than the classical Bernstein-Durrmeyer operators. Moments and central moments were calculated for modified Bernstein-Durrmeyer-Stancu type operators. And, uniform convergence was examined with the help of Korovkin's theorem. Additionally the asymptotic approximations of the operators considered were examined by giving the Voronovskaja type theorem. Finally, the theoretical results obtained were examined with graphical analysis.

Araştırma Makalesi

* Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Ülkü Dinlemez Kantar, ulku@gazi.edu.tr

1. GİRİŞ

Weierstrass, 1885 yılında, kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli bir fonksiyona, polinom ile yaklaşılabildiğini göstermiştir [1]. Ancak Weierstrass teoreminin ilk ispatı uzun ve karmaşık yapıda olduğundan daha kısa ve anlaşılır bir ispat yapmak için bu konu ile ilgilenen pek çok bilim insanı tarafından çalışmalar yapılmıştır.

Bu bilim insanlarından Bernstein, $f \in C[0,1]$ olmak üzere f için n. dereceden Bernstein operatörlerini $x \in [0,1]$ için

$$B_m(f,x) = \sum_{i=0}^{m} b_{m,i}(x) f\left(\frac{i}{m}\right) \tag{1}$$

şeklinde tanımlar [1-9]. Burada $b_{m,i}(x) = \binom{m}{i} x^i (1-x)^{m-i}$, $i = 1,2,3,\dots,m$ ve eğer $i < 0$ veya $i > m$ ise $b_{m,i}(x) = 0$ ′dır. Bununla birlikte

$$b_{m,i}(x) = (1-x) b_{m-1,i}(x) + x b_{m-1,i-1}(x), \quad 0 < i < m \tag{2}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

1960'ta Durrmeyer, sürekli fonksiyonlar kümesini genişletmek için $[0,1]$ aralığı üzerinde integrallenebilen Lebesque fonksiyonlarını

$$D_m(f,x) \coloneqq (m+1) \sum_{i=0}^{m} b_{m,i}(x) \int_0^1 f(t)\, b_{m,i}(t) dt$$

şeklinde genelleştirmiştir [2].

Stancu, 1969' da Bernstein polinomlarını

$$B_{m,\alpha,\beta}(f,x) \coloneqq \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i (1-x)^{m-i} f\left(\frac{i+\alpha}{m+\beta}\right), \qquad 0 \le \alpha \le \beta$$

şeklinde genelleştirmiştir [3].

2018 yılında Khosravian-Arab ve arkadaşları daha iyi bir yaklaşım yapabilmek için, bir çeşit modifiye Bernstein operatörlerini

$$B_m^M(f,x) = \sum_{i=0}^{m} b_{m,i}^M(x) f\left(\frac{i}{m}\right), \qquad x \in [0,1], \tag{3}$$

$$b_{m,i}^M(x) = c(x,m) b_{m-1,i}(x) + c(1-x,m) b_{m-1,i-1}(x), \;\; 1 \le i \le m-1,$$

$$b_{m,0}^M(x) = c(x,m)(1-x)^{m-1}, \quad b_{m,m}^M(x) = c(1-x,m) x^{m-1}, \tag{4}$$

ile tanımlamışlardır. Burada $c_1(m)$ ve $c_0(m)$ uygun bir şekilde belirlenen diziler olmak üzere;

$$c(x,m) = c_1(m)x + c_0(m), \qquad m = 0,1,2,\dots \tag{5}$$

olarak alınmaktadır [4]. Eğer $c_1(m) = -1$ ve $c_0(m) = 1$ alınırsa (4)' ten (2) elde edilir.

2019 yılında Acu ve arkadaşları daha iyi bir yaklaşım elde etmek için (3)-(4) ile tanımlı modifiye Bernstein operatörlerinin bir Durrmeyer çeşidini aşağıdaki gibi tanımlamışlardır [5].

$$D_m^M(f,x) = (m+1)\sum_{i=0}^{m} b_{m,i}^M(x)\int_0^1 b_{m,i}(t)\, f(t)dt\,,\ \ x \in [0,1] \tag{6}$$

Burada $b_{m,i}^M(x)$, (4), (5)' te olduğu gibidir.

Bu makalede (6) denkleminin Stancu tipten operatörleri incelendi. Modifiye Bernstein-Durrmeyer-Stancu (MBDS) tipten operatörleri;

$$H_{m,\alpha,\beta}^M(f,x) = (m+1)\sum_{i=0}^{m} b_{m,i}^M(x)\int_0^1 b_{m,i}(t) f\left(\frac{mt+\alpha}{m+\beta}\right)dt, \quad x \in [0,1] \tag{7}$$

(4) ve (5) kabulleriyle birlikte ele alındı. Bu operator dizisi için momentler ve merkezi momentleri bulundu. Ardından Korovkin teoremi [6] yardımıyla düzgün yakınsaklığı incelendi. Daha sonra Voronovskaja tip teorem [7] verilerek ele alınan operatörlerin asimptotik yaklaşımları incelendi. Son olarak MBDS operatör dizisinin ele alınan fonksiyonlara yaklaşımları grafik analiz yardımıyla gösterildi.

Bu tür çalışmalar literatürde [8, 9] makaleleri tarafından ele alınmıştır.

2. MBDS OPERATÖRLERİ İÇİN BAZI ÖNEMLİ SONUÇLAR

Şimdi Korovkin test fonksiyonları için aşağıdaki lemma verilsin.

Lemma 2.1.

$H_{m,\alpha,\beta}^M$ MBDS operatörlerinin $e_i(t) = t^i$, $i = 0,1,2,3,4$ için momentleri aşağıdaki gibi elde edilir.

(i) $H_{m,\alpha,\beta}^M(e_0,x) = 2c_0(m) + c_1(m)$,

(ii) $H_{m,\alpha,\beta}^M(e_1,x) = \frac{m}{m+\beta}\left[\big((2c_0(m)+c_1(m)\big)x + \frac{(1-2x)\big(3c_0(m)+2c_1(m)\big)}{m+2}\right] + \frac{\alpha}{m+\beta}\big(2c_0(m)+c_1(m)\big)$,

(iii) $H_{m,\alpha,\beta}^M(e_2,x) = \frac{m^2}{(m+\beta)^2}\{(2c_0(m)+c_1(m)\big)x^2 - \frac{2m}{(m+2)(m+3)}[(8x^2-5x)c_0(m)$

$$+(5x^2-3x)c_1(m)] - \frac{2(x^2+5x-3)c_1(m) + 2(4x^2+5x-4)c_0(m)}{(m+2)(m+3)}\Bigg\} + \frac{2m\alpha}{(m+\beta)^2}\ [(2c_0(m)$$

$$+c_1(m))x + \frac{(1-2x)\big(3c_0(m)+2c_1(m)\big)}{m+2}\Bigg] + \frac{\alpha^2}{(m+\beta)^2}\big(2c_0(m)+c_1(m)\big),$$

(iv) $H^{M}_{m,\alpha,\beta}(e_3,x)=\frac{m^3}{(m+\beta)^3}\Big[(2c_0(m)+c_1(m))x^3+\frac{3m^2}{(m+2)(m+3)(m+4)}\big((7x^2-10x^3)c_0(m)+(4x^2-6x^3)c_1(m)\big)+\frac{3m}{(m+2)(m+3)(m+4)}\big((-10x^3-21x^2+18x)c_0(m)+(-2x^3-18x^2+12x)c_1(m)\big)+\frac{6}{(m+2)(m+3)(m+4)}((-10x^3+7x^2-9x+5)c_0(m)+(-6x^3+7x^2-9x+4)c_1(m))\Big]+\frac{3m^2\alpha}{(m+\beta)^3}\Big\{\big((2c_0(m)+c_1(m)\big)x^2-\frac{2m}{(m+2)(m+3)}[(8x^2-5x)c_0(m)+(5x^2-3x)c_1(m)]-\frac{2(x^2+5x-3)c_1(m)+2(4x^2+5x-4)c_0(m)}{(m+2)(m+3)}\Big\}+\frac{3m\alpha^2}{(m+\beta)^3}\Big[\big((2c_0(m)+c_1(m)\big)x+\frac{(1-2x)(3c_0(m)+2c_1(m))}{m+2}\Big]+\frac{\alpha^3}{(m+\beta)^3}\big(2c_0(m)+c_1(m)\big)$

(v) $H^{M}_{m,\alpha,\beta}(e_4,x)=\frac{m^4}{(m+\beta)^4}\Big\{\big((2c_0(m)+c_1(m)\big)x^4+\frac{m^3}{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}(-48x^4+36x^3)c_0(m)+(-28x^4+20x^3)c_1(m))+\frac{m^2}{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}((-12x^4-168x^3+120x^2)c_1(m)+(-72x^4-216x^3+192x^2)c_0(m))+\frac{m}{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}\big((-248x^4+364x^3-504x^2+240x)a_1(m)+(-408x^4+396x^3-576x^2+336x)c_0(m))+\frac{1}{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}((-72x^4-216x^3+364x^2-336x+120)c_1(m)+(-192x^4-216x^3+364x^2-336x+144)c_0(m))\Big\}\quad+\frac{4m^3\alpha}{(m+\beta)^4}[(2c_0(m)+c_1(m))x^3+\frac{3m^2}{(m+2)(m+3)(m+4)}\big((7x^2-10x^3)c_0(m)+(4x^2-6x^3)c_1(m)\big)+\frac{3m}{(m+2)(m+3)(m+4)}\big((-10x^3-21x^2+18x)c_0(m)+(-2x^3-18x^2+12x)c_1(m)\big)+\frac{6}{(m+2)(m+3)(m+4)}((-10x^3+7x^2-9x+5)c_0(m)+(-6x^3+7x^2-9x+4)c_1(m))\Big]+\frac{6m^2\alpha^2}{(m+\beta)^4}\Big[\big((2c_0(m)+c_1(m)\big)x^2-\frac{2m}{(m+2)(m+3)}[(8x^2-5x)c_0(m)+(5x^2-3x)c_1(m)]-\frac{2(x^2+5x-3)c_1(m)+2(4x^2+5x-4)c_0(m)}{(m+2)(m+3)}\Big]+\frac{4m\alpha^3}{(m+\beta)^4}[(2c_0(m)+c_1(m)x+\frac{(1-2x)\big(3c_0(m)+2c_1(m)\big)}{m+2}\Big]+\frac{\alpha^4}{(m+\beta)^4}\big(2c_0(m)+c_1(m)\big).$

İspat. (i) (7) MBDS operatörlerinde $e_0(t)=1$ yazılırsa;

$$H^{M}_{m,\alpha,\beta}(e_0;x)=(m+1)\sum_{i=0}^{m}b^{M}_{m,\mathrm{i}}(x)\int_0^1 b_{m,\mathrm{i}}(t)dt$$

$$=(m+1)\sum_{i=0}^{m}b^{M}_{m,\mathrm{i}}(x)\int_0^1\binom{m}{i}t^i(1-t)^{m-i}dt \tag{8}$$

elde edilir.

$m, n \in \mathbb{Z}^+$ ve $t \in [0,1]$ olmak üzere; sırasıyla Beta ve Gamma fonksiyonları

$$\beta(m,n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt,$$

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty t^{m-1}e^{-t}dt, \quad \beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, \quad \Gamma(m) = (m-1)! \tag{9}$$

dır. (8) de Beta fonksiyonu ardından Gamma fonksiyonu kullanılırsa

$$H_{m,\alpha,\beta}^M(e_0;x) = \sum_{i=0}^m b_{m,i}^M(x)$$

bulunur. Daha sonra (4) ve (5) kullanılarak,

$$H_{m,\alpha,\beta}^M(e_0;x) = \sum_{i=0}^m b_{m,i}^M(x) = \sum_{i=1}^{m-1} b_{m,i}^M(x) + b_{m,0}^M(x) + b_{m,m}^M(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1}\left[c(x,m)b_{m-1,i}(x) + c(1-x,m)b_{m-1,i-1}(x)\right] + c(x,m)(1-x)^{m-1} + c(1-x,m)x^{m-1}$$

$$= 2c_0(m) + c_1(m)$$

elde edilir. Böylece (i) ispatlanmış olur.

(ii) Benzer şekilde (7) MBDS operatörlerinde $e_1(t) = t$ yazılırsa;

$$H_{m,\alpha,\beta}^M(e_1;x) = (m+1)\sum_{i=0}^m b_{m,\mathrm{i}}^M(x)\int_0^1 b_{m,\mathrm{i}}(t)\left(\frac{mt+\alpha}{m+\beta}\right)dt$$

olur. Gerekli açılım yapılıp sırasıyla Beta ve Gamma fonksiyonları ardından (4), (5) ve (i) kullanıldığında

$$H_{m,\alpha,\beta}^M(e_1,x) = \frac{m}{m+\beta}\left[\big((2c_0(m)+c_1(m)\big)x + \frac{(1-2x)\big(3c_0(m)+2c_1(m)\big)}{m+2}\right]$$

$$+\frac{\alpha}{m+\beta}\big(2c_0(m)+c_1(m)\big)$$

eşitliğine ulaşılır.

(iii) $H_{m,\alpha,\beta}^M$ operatörlerinde $e_2(t) = t^2$ yerine yazılıp (i) ve (ii) de olduğu gibi Beta ve Gamma fonksiyonları sırasıyla uygulanıp, (i) ve (ii) sonuçları sırasıyla kullanıldığında bulunur. (4) ve (6) kullanılarak (iii) ispatlanmıştır. Benzer işlemler tekrarlanarak (iv) ve (v) kolaylıkla elde edilir.

Aşağıdaki lemma ile MBDS operatörleri için merkezi momentler verilecektir.

Lemma 2.2.

MBDS operatörlerin merkezi momentleri aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

(i) $H_{m,\alpha,\beta}^M((t-x)^0;x) = 2c_0(m) + c_1(m),$

(ii) $H_{m,\alpha,\beta}^M(t-x;x) = \left[-\frac{\beta}{m+\beta}\big(2c_0(m)+c_1(m)\big) - \frac{2m\left(3c_0(m)+2c_1(m)\right)}{(m+\beta)(m+2)}\right] + \frac{m}{(m+\beta)(m+2)}(3c_0(m)$

$$+2c_1(m)\big)+\frac{\alpha}{m+\beta}\big(2c_0(m)+c_1(m)\big),$$

(iii) $H^M_{m,\alpha,\beta}((t-x)^2;x)=\Big\{\frac{m^2}{(m+\beta)^2}(2c_0(m)+c_1(m))-\frac{2m^3\big(8c_0(m)+5c_1(m)\big)}{(m+\beta)^2(m+2)(m+3)}-\frac{2m^2\big(4c_0(m)+c_1(m)\big)}{(m+\beta)^2(m+2)(m+3)}$

$$-\frac{2m}{m+\beta}\big((2c_0(m)+c_1(m)\big)+\frac{4m}{m+\beta}\frac{\big(3c_0(m)+2c_1(m)\big)}{m+2}+2c_0(m)+c_1(m)\Big\}x^2$$

$$+\Big\{\frac{2m^3\big(5c_0(m)+3c_1(m)\big)}{(m+\beta)^2(m+2)(m+3)}-\frac{10m^2\big(c_0(m)+c_1(m)\big)}{(m+\beta)^2(m+2)(m+3)}+\frac{2m\alpha}{(m+\beta)^2}\big((2c_0(m)+c_1(m)\big)$$

$$-\frac{4m\alpha}{(m+\beta)^2(m+2)}\big(3c_0(m)+2c_1(m)\big)-\frac{2m}{(m+\beta)(m+2)}\big(3c_0(m)+2c_1(m)\big)$$

$$-\frac{2\alpha}{m+\beta}\big(2c_0(m)+c_1(m)\big)\Big\}x+\frac{2m^2\big(4c_0(m)+3c_1(m)\big)}{(m+\beta)^2(m+2)(m+3)}+\frac{2m\alpha\big(3c_0(m)+2c_1(m)\big)}{(m+\beta)^2(m+2)}$$

$$+\frac{\alpha^2\big(2c_0(m)+c_1(m)\big)}{(m+\beta)^2},$$

(iv) $H^M_{m,\alpha,\beta}((t-x)^3;x)=\Big(\frac{m^3}{(m+\beta)^3}\big((2c_0(m)+c_1(m)\big)-\frac{30m^5c_0(m)+18m^5c_1(m)}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)(m+4)}$

$$-\frac{30m^4c_0(m)+6m^4c_1(m)}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)(m+4)}-\frac{60m^3c_0(m)+36m^3c_1(m)}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)(m+4)}$$

$$-\frac{3m^2}{(m+\beta)^2}\big((2c_0(m)+c_1(m)\big)+\frac{48m^3c_0(m)+30m^3c_1(m)}{(m+\beta)^2(m+2)(m+3)}+\frac{3m}{m+\beta}\big((2c_0(m)+c_1(m)\big)$$

$$+\frac{6m^2c_1(m)+24m^2c_0(m)}{(m+\beta)^2(m+2)(m+3)}-\frac{6m}{(m+\beta)(m+2)}\big(3c_0(m)+2c_1(m)\big)-\big(2c_0(m)+c_1(m)\big)\Big)x^3$$

$$+\Big(\frac{21m^5c_0(m)+12m^5c_1(m)}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)(m+4)}-\frac{63m^4c_0(m)+54m^4c_1(m)}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)(m+4)}$$

$$+\frac{42m^3c_0(m)+42m^3c_1(m)}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)(m+4)}+\frac{3m^2\alpha}{(m+\beta)^3}\big((2c_0(m)+c_1(m)\big)$$

$$-\frac{48m^3\alpha c_0(m)+30m^3\alpha c_1(m)}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)}-\frac{6m^2\alpha c_1(m)+24m^2\alpha c_0(m)}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)}$$

$$-\frac{30m^3c_0(m)+18m^3c_1(m)}{(m+\beta)^2(m+2)(m+3)}+\frac{30m^2c_0(m)+30m^2c_1(m)}{(m+\beta)^2(m+2)(m+3)}-\frac{6m\alpha}{(m+\beta)^2}\big((2c_0(m)+c_1(m)\big)$$

$$+\frac{12m\alpha\big((3c_0(m)+2c_1(m)\big)}{(m+\beta)^2(m+2)}+\frac{3m\big(3c_0(m)+2c_1(m)\big)}{(m+\beta)(m+2)}+\frac{3\alpha}{m+\beta}\big(2c_0(m)+c_1(m)\big)\Big)x^2$$

$$+\Big(\frac{54m^4c_0(m)+36m^4c_1(m)}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)(m+4)}-\frac{54m^3c_0(m)+54m^3c_1(m)}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)(m+4)}$$

$$+\frac{30m^3\alpha c_0(m)+18m^3\alpha}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)}-\frac{30m^2\alpha c_0(m)+30m^2\alpha c_1(m)}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)}+\frac{3m\alpha^2}{(m+\beta)^3}\big((2c_0(m)+c_1(m)\big)$$

$$-\frac{6m\alpha^2}{(m+\beta)^3(m+2)}\big(3c_0(m)+2c_1(m)\big)-\frac{18m^2}{(m+\beta)^2(m+2)(m+3)}c_1(m)$$

$$-\frac{24m^2}{(m+\beta)^2(m+2)(m+3)}c_0(m)-\frac{6m\alpha}{(m+\beta)^2(m+2)}\big(3c_0(m)+2c_1(m)\big)$$

$$-\frac{3\alpha^2}{(m+\beta)^2}\big(2c_0(m)+c_1(m)\big)\Bigg)x+\frac{30m^3c_0(m)}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)(m+4)}$$

$$+\frac{24m^3c_1(m)}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)(m+4)}+\frac{18m^2\alpha}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)}c_1(m)$$

$$+\frac{24m^2\alpha}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)}c_0(m)+\frac{3m\alpha^2}{(m+\beta)^3(m+2)}\big(3c_0(m)+2c_1(m)\big)$$

$$+\frac{\alpha^3}{(m+\beta)^3}\big(2c_0(m)+c_1(m)\big),$$

(v) $H^{M}_{m,\alpha,\beta}((t-x)^4;x)=\Big(\frac{m^4}{(m+\beta)^4}(2c_0\,(m)+c_1(m))-\frac{m^7\left(48c_0(m)+28c_1(m)\right)}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}$

$$-\frac{m^6\big(12c_1(m)+72c_0(m)\big)}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}+\frac{m^5\big(-248c_1(m)-408c_0(m)\big)}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}$$

$$-\frac{m^4(72c_1(m)+192c_0(m))}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}-\frac{4m^3}{(m+\beta)^3}\big((2c_0(m)+c_1(m)\big)$$

$$+\frac{120m^5c_0(m)+72m^5c_1(m)}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)(m+4)}+\frac{120m^4c_0(m)+24m^4c_1(m)}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)(m+4)}$$

$$+\frac{240m^3c_0(m)+144m^3c_1(m)}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)(m+4)}+\frac{6m^2}{(m+\beta)^2}\big(2c_0(m)+c_1(m)\big)$$

$$-\frac{12m^3}{(m+\beta)^2(m+2)(m+3)}\big(8c_0(m)+5c_1(m)\big)-\frac{12m^2}{(m+\beta)^2(m+2)(m+3)}\big(c_1(m)+4c_0(m)\big)$$

$$-\frac{4m}{m+\beta}\big((2c_0(m)+c_1(m)\big)+\frac{8}{(m+\beta)(m+2)}\big(3c_0(m)+2c_1(m)\big)+\big(2c_0(m)+c_1(m)\big)\Bigg)x^4$$

$$+\Big(\frac{m^7}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}\big(36c_0(m)+20c_1(m)\big)-\frac{m^6}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}(168c_1(m)$$

$$+216c_0(m))+\frac{m^5}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}\big(364c_1(m)+396c_0(m)\big)$$

$$-\frac{m^4}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}\big(216c_1(m)+216c_0(m)\big)+\frac{4m^3\alpha}{(m+\beta)^4}(2c_0(m)$$

$$+c_1(m))+\frac{12m^5\alpha}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)(m+4)}\big(-10c_0(m)-6c_1(m)\big)$$

$$+\frac{12m^4\alpha}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)(m+4)}\big(-10c_0(m)-2c_1(m)\big)+\frac{24m^3\alpha\big(-10c_0(m)-6c_1(m)\big)}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)(m+4)}$$

$$-\frac{84m^5c_0(m)+48m^5c_1(m)}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)(m+4)}+\frac{252m^4c_0(m)+216m^4c_1(m)}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)(m+4)}$$

$$-\frac{168n^3c_0(m)+168m^3c_1(m)}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)(m+4)}-\frac{12m^2\alpha}{(m+\beta)^3}\big((2c_0(m)+c_1(m)\big)$$

$$+\frac{m^3\alpha}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)}(192c_0(m)+120c_1(m))+\frac{12m^3(5c_0(m)+3c_1(m))}{(m+\beta)^2(m+2)(m+3)}$$

$$+\frac{m^2\alpha}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)}\big(24c_1(m)+96c_0(m)\big)-\frac{12m^2\big(5c_1(m)+5c_0(m)\big)}{(m+\beta)^2(m+2)(m+3)}$$

$$+\frac{12m\alpha}{(m+\beta)^2}\big((2c_0(m)+c_1(m)\big)-\frac{24m\alpha\big(3c_0(m)+2c_1(m)\big)}{(m+\beta)^2(m+2)}-\frac{4m}{m+\beta}\big(3c_0(m)+2c_1(m)\big)$$

$$-\frac{4\alpha}{m+\beta}+\big(2c_0(m)+c_1(m)\big)\Bigg)x^3+\Bigg(\frac{m^6}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}(120c_1(m)$$

$$+192c_0(m))+\frac{m^5}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}(-504c_1(m)-576c_0(m))$$

$$+\frac{m^4}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}(364c_1(m)+364c_0(m))$$

$$+\frac{12m^5\alpha}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)(m+4)}\big(7c_0(m)+4c_1(m)\big)+\frac{12m^4\alpha}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)(m+4)}$$

$$\big(-21c_0(m)-18c_1(m)\big)+\frac{24m^4\alpha}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)(m+4)}\big(7c_0(m)+7c_1(m)\big)$$

$$+\frac{6m^2\alpha^2}{(m+\beta)^4}\big(2c_0(m)+c_1(m)\big)-\frac{12m^3\alpha^2}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)}\big(8c_0(m)+5c_1(m)\big)$$

$$-\frac{12m^2\alpha^2}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)}(4c_0(m)+c_1(m))+\frac{-216m^4c_0(m)-144m^4c_1(m)}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)(m+4)}$$

$$+\frac{216m^3c_0(m)+216m^3c_1(m)}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)(m+4)}+\frac{m^3\alpha}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)}(-120c_0(m)-72c_1(m))$$

$$+\frac{m^2\alpha}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)}(120c_0(m)+120c_1(m))+\frac{-12m\alpha^2}{(m+\beta)^3}\big((2c_0(m)+c_1(m)\big)$$

$$+\frac{24m\alpha^2}{(m+\beta)^3(m+2)}\big(3c_0(m)+2c_1(m)\big)+\frac{12m^2(3c_1(m)+4c_0(m))}{(m+\beta)^2(m+2)(m+3)}+\frac{12m\alpha}{(m+\beta)^2(m+2)}(3c_0(m)$$

$$+2c_1(m))+\frac{6\alpha^2}{(m+\beta)^2}(2c_0(m)+c_1(m))\Bigg)x^2+\quad\Bigg(\frac{m^5(240c_1(m)+336c_0(m))}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}$$

$$+\frac{m^4(-336c_1(m)-336c_0(m))}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}+\frac{12m^4\alpha(18c_0(m)+12c_1(m))}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)(m+4)}$$

$$+\frac{24m^3\alpha(-9c_0(m)-9c_1(m))}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)(m+4)}+\frac{12m^3\alpha^2(5c_0(m)+3c_1(m))}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)}-\frac{12m^2\alpha^2(5c_0(m)+5c_1(m))}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)}$$

$$+\frac{4m\alpha^3}{(m+\beta)^4}(2c_0(m)+c_1(m)-\frac{8m\alpha^3}{(m+\beta)^4(m+2)}\big(3c_0(m)+2c_1(m)\big)$$

$$+\frac{m^3(-120c_0(m)-96c_1(m))}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)(m+4)}-\frac{m^2\alpha(72c_1(m)+96c_0(m))}{(m+\beta)^3(m+2)(m+3)}-\frac{12m\alpha^2\big(3c_0(m)+2c_1(m)\big)}{(m+\beta)^3(m+2)}$$

$$-\frac{4\alpha^3}{(m+\beta)^3}\big(2c_0(m)+c_1(m)\big)\Bigg)x+\frac{m^4}{(m+\beta)^4}\big(120c_1(m)+144c_0(m)\big)$$
$$+\frac{24m^3\alpha(5c_0(m)+4c_1(m))}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)(m+4)}+\frac{12m^2\alpha^2(4c_0(m)+3c_1(m))}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)}+\frac{4m\alpha^3}{(m+\beta)^4(m+2)}(3c_0(m)$$
$$+2c_1(m))+\frac{\alpha^4}{(m+\beta)^4}\big(2c_0(m)+c_1(m)\big).$$

Makalede $c_i(m),\ \ i=0{,}1$ dizilerinin

$$2c_0(m)+c_1(m)=1 \tag{10}$$

eşitliğini sağladığı kabul edilecektir.

İspat. (i) Lemma 2.1.' in (i) maddesi ve MBDS operatörlerinin lineerliği kullanıldığında

$$H^M_{m,\alpha,\beta}((t-x)^0;x)=H^M_{m,\alpha,\beta}(1;x)=2c_0(m)+c_1(m)$$

elde edilir.

(ii) Yine Lemma 2.1.'in gerekli maddeleri ile MBDS operatörlerin lineerliği kullanılarak

$$H^M_{m,\alpha,\beta}(t-x;x)=H^M_{m,\alpha,\beta}(t;x)-xH^M_{m,\alpha,\beta}(1;x)$$
$$=(m+1)\sum_{i=0}^{m}b^M_{m,i}(x)\int_0^1 b_{m,i}(t)tdt-x(m+1)\sum_{\mathrm{i}=0}^{m}b^M_{m,k}(x)\int_0^1 b_{m,i}(t)dt$$
$$=\left[-\frac{\beta}{m+\beta}\big(2c_0(m)+c_1(m)\big)-\frac{2m\big(3c_0(m)+2c_1(m)\big)}{(m+\beta)(m+2)}\right]+\frac{m}{(m+\beta)(m+2)}\big(3c_0(m)+2c_1(m)\big)$$
$$+\frac{\alpha}{m+\beta}\big(2c_0(m)+c_1(m)\big)$$

bulunur. Aynı şekilde (iii)-(v) bentleri de elde edilir.

Şimdi bilinmeyen $c_0(m),\ \ c_1(m)$ dizileri için aşağıdaki kabuller ele alınacaktır.

Durum 1. $c_0(m)\geq 0,\ c_0(m)+c_1(m)\geq 0$ (11)

olsun. (10) koşulunu kullanarak $0\leq c_0(m)\leq 1$ ve $-1\leq c_1(m)\leq 1$ eşitsizliklerini elde ederiz. Yani diziler sınırlıdır. Bu durumda (7) operatörleri pozitiftir.

Durum 2. $c_0(m)<0$ veya $c_0(m)+c_1(m)<0$ (12)

olsun. Eğer $c_0(m)<0$ ise $c_0(m)+c_1(m)>1$ ve $c_0(m)+c_1(m)<0$ ise $c_0(m)>1$ olur. Bu durumda (7) operatörleri pozitif değildir.

Teorem 1. $f\in C[0,1]$ olsun. Eğer $c_1(m), c_0(m)$ dizileri (10) ve (11) şartlarını sağlıyor ise, bu durumda

$$\lim_{m\to\infty}H^M_{m,\alpha,\beta}(f;x)=f(x),$$

limiti [0, 1] üzerinde düzgün yakınsaktır.

İspat. $c_1(m)$, $c_0(m)$ dizileri (10) ve (11) şartlarını sağladığında, Korovkin Teoremi ve Lemma 2.1. kullanılarak, $H_{m,\alpha,\beta}^{M}$ operatörlerinin düzgün yakınsaması kanıtlanmış olur.

Teorem 2. $f \in C[0,1]$ ve $c_1(m)$, (10) ve (12) koşullarını sağlayan yakınsak bir dizi olsun. Bu durumda,

$$\lim_{m\to\infty} H_{m,\alpha,\beta}^{M}(f;x) = f(x),$$

limiti [0, 1] üzerinde düzgün yakınsaktır.

İspat. $H_{m,\alpha,\beta}^{M}$ operatörleri için

$$H_{m,\alpha,\beta}^{M,1}(f;x) = (m+1)\sum_{i=0}^{m}\left[-c_1(m)xb_{m-1,i}(x) - c_1(m)b_{m-1,i-1}(x)\right]\int_0^1 b_{m,i}(t)f\left(\frac{mt+\alpha}{m+\beta}\right)dt,$$

$$H_{m,\alpha,\beta}^{M,2}(f;x)$$

$$= (m+1)\sum_{i=0}^{m}\left[c_0(m)b_{m-1,i}(x) + (-c_1(m)x + c_0(m))b_{m-1,i-1}(x)\right]\int_0^1 b_{m,i}(t)f\left(\frac{mt+\alpha}{m+\beta}\right)dt$$

olarak alınırsa,

$$H_{m,\alpha,\beta}^{M}(f;x) = H_{m,\alpha,\beta}^{M,2}(f;x) - H_{m,\alpha,\beta}^{M,1}(f;x)$$

biçiminde yazılabilir. $c_i(m)$, $i = 0, 1$ dizileri (10) ve (12) koşullarını sağlar ($c_0(m) < 0, c_1(m) > 0$ ya da $c_0(m) > 0, c_1(m) < 0$). Bu durumda $H_{m,\alpha,\beta}^{M}$ operatörlerinin momentleri;

$$H_{m,\alpha,\beta}^{M,1}(e_0;x) = (m+1)\sum_{i=0}^{m}\left[-c_1(m)xb_{m-1,i}(x) - c_1(m)b_{m-1,i-1}(x)\right]\int_0^1 b_{m,i}(t)dt = -c_1(m)(x+1),$$

$$H_{m,\alpha,\beta}^{M,1}(e_1;x) = (m+1)\sum_{i=0}^{m}\left[-c_1(m)xb_{m-1,i}(x) - c_1(m)b_{m-1,i-1}(x)\right]\int_0^1 b_{m,i}(t)\left(\frac{mt+\alpha}{m+\beta}\right)dt$$

$$= -c_1(m)\left[\frac{m}{(m+\beta)(m+2)}(x^2m - x^2 + mx + 2) - \frac{\alpha}{m+\beta}c_1(m)(x+1)\right],$$

$$H_{m,\alpha,\beta}^{M,1}(e_2;x) = (m+1)\sum_{i=0}^{m}\left[-c_1(m)xb_{m-1,k}(x) - c_1(m)b_{m-1,k-1}(x)\right]\int_0^1 b_{m,i}(t)\left(\frac{mt+\alpha}{m+\beta}\right)^2 dt$$

$$= \frac{-c_1(m)}{(m+\beta)^2}\left\{\frac{m^4x^2(x+1) - xm^3(3x^2 - x - 6) + m^2(2x^3 - 2x^2 - 4x + 6)}{(m+2)(m+3)}\right.$$

$$+\frac{2m\alpha}{m+2}(x^2m-x^2+mx+2)+\alpha^2(x+1)\Big\}.$$

ve

$$H^{M,2}_{m,\alpha,\beta}(e_0;x)=(m+1)\sum_{i=0}^{m}\left[c_0(m)b_{m-1,i}(x)+(-c_1(m)x+c_0(m))b_{m-1,i-1}(x)\right]\int_0^1 b_{m,i}(t)dt$$

$$=2c_0(m)-c_1(m)x,$$

$$H^{M,2}_{m,\alpha,\beta}(e_1;x)$$

$$=(m+1)\sum_{i=0}^{m}\left[c_0(m)b_{m-1,i}(x)+(-c_1(m)x+c_0(m))b_{m-1,k-1}(x)\right]\int_0^1 b_{m,i}(t)\left(\frac{mt+\alpha}{m+\beta}\right)dt$$

$$=\frac{m}{(m+\beta)(m+2)}\big([2c_0(m)-c_1(m)x]mx+c_1(m)x^2-2c_0(m)x-2c_1(m)x+3c_0(m)\big)$$

$$+\frac{\alpha}{m+\beta}(2c_0(m)-c_1(m)x),$$

$$H^{M,2}_{m,\alpha,\beta}(e_2;x)$$

$$=(m+1)\sum_{i=0}^{m}\left[c_0(m)b_{m-1,i}(x)+(-c_1(m)x+c_0(m))b_{m-1,i-1}(x)\right]\int_0^1 b_{m,k}(t)\left(\frac{mt+\alpha}{m+\beta}\right)^2 dt$$

$$=\frac{m^2}{(m+\beta)^2}\Bigg(\frac{m^2x^2[2c_0(m)-c_1(m)x]+mx(3c_1(m)x^3-6c_0(m)x^2-6c_1(m)x^2+10c_0(m))}{(m+2)(m+3)}$$

$$+\frac{-2c_1(m)x^3+4c_0(m)x^2+6c_1(m)x^2-10c_0(m)x-6c_1(m)x+8c_0(m)}{(m+2)(m+3)}\Bigg)+\frac{2m\alpha}{(m+\beta)^2(m+2)}$$

$$[-c_1(m)mx^2+c_1(m)x^2+2c_0(m)mx-2c_0(m)x-2c_1(m)x+3c_0(m)]+\frac{\alpha^2}{(m+\beta)^2}(2c_0(m)$$

$$-c_1(m)x)$$

olarak hesaplanır.

$j_1=\lim\limits_{m\to\infty}c_1(m)$ olsun. (10) ve (12) koşullarından,

$$k_1(x)=j_1(1+x)\quad ve\quad k_2(x)=1-j_1(1+x)$$

şeklinde ele alınan fonksiyonlar [0,1] üzerinde sabit işaretlidir. Yukarıdaki uygun eşitlikler ve Korovkin teoremi kullanılarak

$$\lim_{m\to\infty}H^{M,1}_{m,\alpha,\beta}(f;x)=-j_1(1+x)f(x),\ \lim_{m\to\infty}H^{M,2}_{m,\alpha,\beta}(f;x)=\big(1-j_1(1+x)\big)f(x),$$

elde edilir. Buradan,

$$\lim_{m\to\infty} H_{m,\alpha,\beta}^{M}(f;x) = f(x)$$

olur.

Teorem 3. $c_1(m)$ ve $c_2(m)$, (10), (12) koşullarını sağlayan yakınsak diziler ve $j_i = \lim_{m\to\infty} c_i(m)$, $i = 0,1$ olsun. Bu durumda eğer $f'' \in C[0,1]$ ise $[0,1]$ üzerinde

$$\lim_{m\to\infty} m\left(H_{m,\alpha,\beta}^{M}(f;x) - f(x)\right) = \left(\alpha - \beta x + (1-2x)(2j_1 + 3j_0)\right)f'(x) + x(1-x)(2j_0 + j_1)f''(x)$$

düzgün yakınsaktır.

İspat. $H_{m,\alpha,\beta}^{M}$ MBDS operatörlerine kalanlı Taylor formülü uygulandığında ve bu operatörlerin lineerliği ve Lemma 2.1. kullanıldığında;

$$f(t) = f(x) + (t-x)f'(x) + \frac{1}{2!}(t-x)^2 f''(x) + \theta(t,x)(t-x)^2$$

$$H_{m,\alpha,\beta}^{M}\big((f(t),x) - f(x)\big)$$

$$= H_{m,\alpha,\beta}^{M}(t-x,x)f'(x) + \frac{1}{2!}H_{m,\alpha,\beta}^{M}((t-x)^2,x)f''(x) + H_{m,\alpha,\beta}^{M}(\theta(t,x)(t-x)^2)$$

$$= \Bigg\{\left(-\frac{\beta}{m+\beta}\big(2c_0(m) + c_1(m)\big) - \frac{2m(3c_0(m) + 2c_1(m))}{(m+\beta)(m+2)}\right)x + \frac{m}{(m+\beta)(m+2)}\big(3c_0(m) + 2c_1(m)\big)$$

$$+\frac{\alpha}{m+\beta}(2c_0(m) + c_1(m))\Bigg\}f'(x) + \frac{1}{2!}\Bigg\{\left(\frac{\beta^2}{(m+\beta)^2}(2c_0(m) + c_1(m)) + \frac{4m}{m+\beta}\frac{\big(3c_0(m) + 2c_1(m)\big)}{m+2}\right.$$

$$\left.-\frac{2m^3\big(8c_0(m) + 5c_1(m)\big)}{(m+\beta)^2(m+2)(m+3)} - \frac{2m^2\big(4c_0(m) + c_1(m)\big)}{(m+\beta)^2(m+2)(m+3)}\right)x^2 + \left(\frac{2m^3\big(5c_0(m) + 3c_1(m)\big)}{(m+\beta)^2(m+2)(m+3)}\right.$$

$$-\frac{10m^2\big(c_0(m) + c_1(m)\big)}{(m+\beta)^2(m+2)(m+3)} + \frac{2m\alpha}{(m+\beta)^2}\big((2c_0(m) + c_1(m)\big) - \frac{4m\alpha}{(m+\beta)^2(m+2)}\big(3c_0(m) + 2c_1(m)\big)$$

$$\left.-\frac{2m}{(m+\beta)(m+2)}\big(3c_0(m) + 2c_1(m)\big) - \frac{2\alpha}{m+\beta}\big(2c_0(m) + c_1(m)\big)\right)x + \frac{2m^2\big(4c_0(m) + 3c_1(m)\big)}{(m+\beta)^2(m+2)(m+3)}$$

$$+\frac{2m\alpha\big(3c_0(m) + 2c_1(m)\big)}{(m+\beta)^2(m+2)} + \frac{\alpha^2\big(2c_0(m) + c_1(m)\big)}{(m+\beta)^2}\Bigg\}f''(x) + H_{m,\alpha,\beta}^{M}(\theta(t,x)(t-x)^2)$$

elde edilir. Burada, $\theta \in C[0,1]$ ve $\lim_{t\to x}\theta(t,x) = 0$ dır.

Pozitif $H_{m,\alpha,\beta}^{M}$ operatörlerine sırasıyla Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanıp, $m \to \infty$ için limit alındığında

$$\lim_{m\to\infty} mH_{m,\alpha,\beta}^{M}(\theta(t,x)(t-x)^2,x) \leq \lim_{m\to\infty}\left(H_{m,\alpha,\beta}^{M}(\theta^2(t,x),x)\right)^{\frac{1}{2}} \lim_{m\to\infty}\left(m^2 H_{m,\alpha,\beta}^{M}((t-x)^4,x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Teorem 1 den $\lim_{m\to\infty}\left(H_{m,\alpha,\beta}^{M}(\theta^2(t,x),x)\right)^{\frac{1}{2}} = 0$ ve Lemma 2.2. de

$\lim_{m\to\infty}\left(m^2 H^M_{m,\alpha,\beta}((t-x)^4,x)\right)^{\frac{1}{2}}$ sınırlıdır. Buradan $\lim_{m\to\infty} mH^M_{m,\alpha,\beta}(\theta(t,x)(t-x)^2,x)=0$ elde edilir. Sonuçta

$\lim_{m\to\infty} m\, H^M_{m,\alpha,\beta}\big((f(t),x)-f(x)\big)=\big(\alpha-\beta x+(1-2x)(2j_1+3j_0)\big)f'(x)+x(1-x)(2j_0+j_1)f''(x)$

hesaplanır.

$H^M_{m,\alpha,\beta}$ operatörleri, $c_0(m)$, $c_1(m)$ dizileri (10), (12) özelliklerini sağladığında, pozitif olmadığından aşağıdaki teorem verilecektir.

Teorem 4. $c_1(m)$ ve $c_2(m)$ dizileri (10) ve (12) şartlarını sağlayan yakınsak birer dizi ve $j_i=\lim_{m\to\infty} c_i(m)\,, i=0{,}1$ olsun. Eğer $f'\in C[0{,}1]$ ve f'', belirli bir $x\in[0{,}1]$ noktasında mevcutsa

$\lim_{m\to\infty}\left[H^M_{m,\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right]=(\alpha-\beta+(1-2x)(2j_1+3j_0))f'(x)+x(1-x)(2j_0+j_1)f''(x)$

olur.

İspat. Teorem 3'te yapılan işlemler tekrar edildiğinde yani $H^M_{m,\alpha,\beta}$ operatörlerine kalanlı Taylor teoremi uygulandığında

$$\lim_{m\to\infty} mH^M_{m,\alpha,\beta}(\theta(t,x)(t-x)^2;x)=0 \tag{13}$$

olduğu gösterildiğinde ispat bitmiş olacaktır. Burada $H^M_{m,\alpha,\beta}$ operatörleri pozitif değildir. (5) ve (7) den $H^M_{m,\alpha,\beta}$ aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$H^M_{m,\alpha,\beta}(f;x)$$
$$=(m+1)\sum_{i=0}^{m-1}\left(c(x,m)\int_0^1 b_{m,i}(t)f\left(\frac{mt+\alpha}{m+\beta}\right)dt+c(1-x,m)\int_0^1 b_{m,i+1}(t)f\left(\frac{mt+\alpha}{m+\beta}\right)dt\right)b_{m-1,i}(x). \tag{14}$$

$\varepsilon>0$ olsun. Bu durumda öyle bir $\delta>0$ vardır ki $|t-x|<\delta$ iken $|\theta(t,x)|<\varepsilon$ sağlanır. Şimdi $\epsilon_1 := (x-\delta,x+\delta)\cap[0{,}1]$ ve $\epsilon_2 := [0{,}1]\setminus(x-\delta,x+\delta)$ tanımlansın. $c_1(m)$ ve $c_2(m)$ dizilerinin sınırlılığı, $|b(x,m)|<C$ olacak şekilde bir $C>0$ var olmasıdır.

Bu durumda

$$\left|H^M_{m,\alpha,\beta}(\theta(t,x)(t-x)^2;x)\right|\le(m+1)C\sum_{i=0}^{m-1} b_{m-1,i}(x)\left(\int_0^1 b_{m,i}(t)|\theta(t,x)|\left(\frac{mt+\alpha}{m+\beta}-x\right)^2dt\right.$$
$$\left.+\int_0^1 b_{m,i+1}(t)|\theta(t,x)|\left(\frac{mt+\alpha}{m+\beta}-x\right)^2dt\right)$$

$$= (m+1)C\sum_{i=0}^{m-1} b_{m-1,i}(x)\left(\int_{\epsilon_1} b_{m,i}(t)|\theta(t,x)|\left(\frac{mt+\alpha}{m+\beta}-x\right)^2 dt\right.$$

$$+\int_{\epsilon_2} b_{m,i}(t)|\theta(t,x)|\left(\frac{mt+\alpha}{m+\beta}-x\right)^2 dt+\int_{\epsilon_1} b_{m,i+1}(t)|\theta(t,x)|\left(\frac{mt+\alpha}{m+\beta}-x\right)^2 dt$$

$$\left.+\int_{\epsilon_2} b_{m,i+1}(t)|\theta(t,x)|\left(\frac{mt+\alpha}{m+\beta}-x\right)^2 dt\right)$$

yazılır. $M = sup_{0\le t\le 1}|\theta(t,x)|$ olduğu kabul edilsin. Buradan;

$$\left|H_{m,\alpha,\beta}^{M}(\theta(t,x)(t-x)^2;x)\right| \le (m+1)C\left(\varepsilon\sum_{i=0}^{m-1} b_{m-1,i}(x)\left[\int_{\epsilon_1} b_{n,i}(t)\left(\frac{mt+\alpha}{m+\beta}-x\right)^2 dt\right.\right.$$

$$\left.+\int_{\epsilon_1} b_{n,i+1}(t)\left(\frac{mt+\alpha}{m+\beta}-x\right)^2 dt\right]+\frac{M}{\delta^2}\sum_{i=0}^{m-1} b_{m-1,i}(x)\left[\int_{\epsilon_2} b_{m,i}(t)\left(\frac{mt+\alpha}{m+\beta}-x\right)^4 dt\right.$$

$$\left.\left.+\int_{\epsilon_2} b_{m,i+1}(t)\left(\frac{mt+\alpha}{m+\beta}-x\right)^4 dt\right]\right)$$

elde edilir. Burada Beta fonksiyonu, ardından Gamma fonksiyonu kullanılıp gerekli cebirsel işlemler yapıldığında;

$$\left|H_{m,\alpha,\beta}^{M}(\theta(t,x)(t-x)^2;x)\right| \le C\left(\varepsilon\frac{1}{(m+\beta)^2(m+2)(m+3)}[m^3(2\alpha^2-4x^2+4x)+m^2(10\alpha^2\right.$$

$$[-4\alpha\beta x-12\alpha x+2\beta^2x^2+12\beta x^2-6\beta x+28x^2-28x+8)+m(12\alpha^2-20\alpha\beta x-36\alpha x+6\alpha$$

$$+10\beta^2x^2+36\beta x^2-18\beta x)+\ 12\beta^2x^2-24\alpha\beta x]+\frac{M}{\delta^2}\Big[\Big[\frac{1}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}$$

$$\{m^6(24x^4-48x^3+24x^2)-m^5(24\beta^2x^4-24\beta^2x^3+240\beta x^4-360\beta x^3+120\beta x^2+792x^4$$

$$-1584x^3+1008x^2-216x)+m^4(2\beta^4x^4+24\beta^3x^4-12\beta^3x^3-48\beta^2x^4+48\beta^2x^3+48\beta^2x^2$$

$$-480\beta x^4+720\beta x^3-120\beta x+1488x^4-2976x^3+2424x^2-936x+144)+m^3(28\beta^4x^4$$

$$+288\beta^3x^4-144\beta^3x^3+1032\beta^2x^4-1032\beta^2x^3+432\beta^2x^2+3600\beta x^4-5400tx^3+3000\beta x^2$$

$$-600\beta x)+m^2(142\beta^4x^4+1128\beta^3x^4-564\beta^3x^3+3360\beta^2x^4-3360\beta^2x^3+960\beta^2x^2)$$

$$+m(308\beta^4x^4+1440\beta^3x^4-720\beta^3x^3+2\beta x)\}]+\frac{1}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)(m+4)}[m^4(240\alpha x^3$$

$$-360\alpha x^2+120\alpha x-48c\beta x^2+48c\beta x^3)-m^3(8\alpha\beta^3x^3+72\alpha\beta^2x^3-36\alpha\beta^2x^2+144\alpha\beta x^3$$

$$-144\alpha\beta x^2+96\alpha\beta x+720\alpha x^3-1080\alpha x^2+600\alpha x-120\alpha)-m^2(72\alpha\beta^3x^3+504\alpha\beta^2x^3$$

$$-252\alpha\beta^2x^2+1344\alpha\beta x^3-1344\alpha\beta x^2+384\alpha\beta x)-m(208\alpha\beta^3x^3+864\alpha\beta^2x^3-432\alpha\beta^2x^2)$$

$$-192\alpha\beta^3x^3]+\frac{12}{(m+\beta)^4(m+2)(m+3)}[m^3(2\alpha^2x-2\alpha^2x^2)\ +m^2(\alpha^2\beta^2x^2+6\alpha^2\beta x^2$$

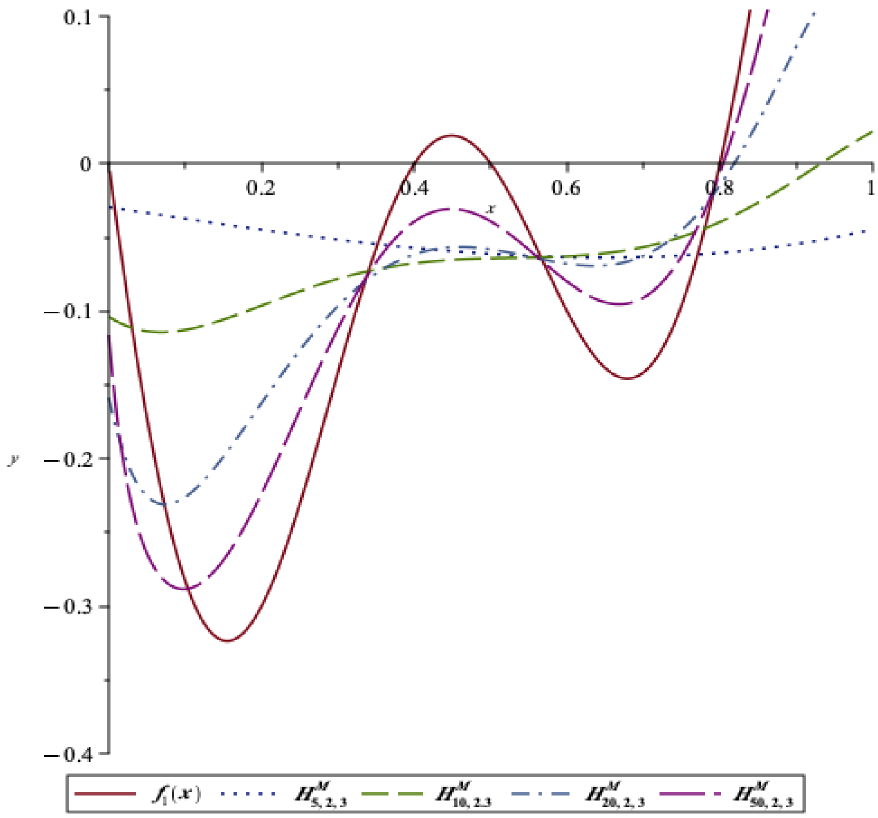
$$-3\alpha^2\beta x + 18\alpha^2 x^{2-14\alpha^2 x)} + m(5\alpha^2\beta^2 x^2 + 18\alpha^2\beta x^2 - 9\alpha^2\beta x) + 72\,\alpha^2\beta^2 x^2] + \frac{4}{(m+\beta)^4(m+2)}$$

$$[-m(6\alpha^3 x - 3\alpha^3 + 2\alpha^3\beta x) - 4\alpha^3\beta x] + \frac{2\alpha^4}{(m+\beta)^4}\Bigg]$$

hesaplanır. Buradan (13) elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur.

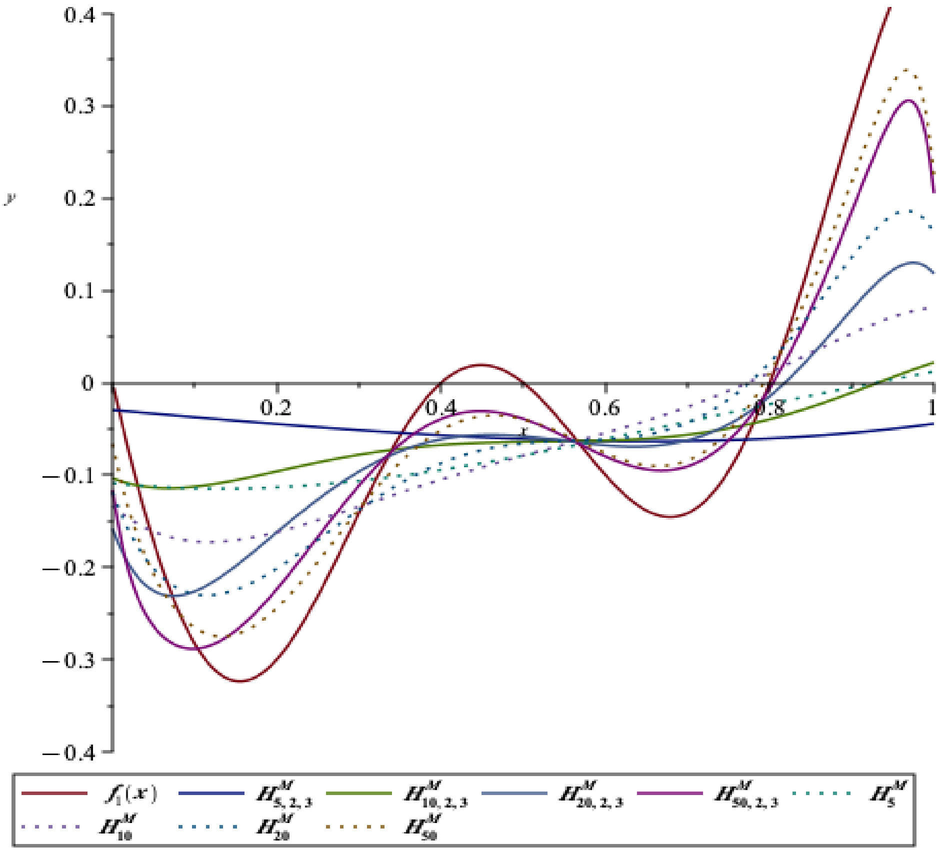
3. MBDS OPERATÖRLERİ İÇİN GRAFİK ANALİZ

Bu bölümde MBDS operator dizisinin aşağıda ele alınan fonksiyonlara yaklaşımları grafiklerle gösterilmiştir. Şekil 1'de, $f_1(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\sin\frac{5\pi}{2}x$ fonksiyonu ve $c_0(m) = \frac{2m-1}{4m}, c_1(m) = \frac{1}{m}$ dizileri, $m = 5, 10, 20, 50$ ve $\alpha = 2, \beta = 3$ için MBDS operator dizisinin yaklaşımları gösterilmiştir.



Şekil 1. *$f_1(x)$ fonksiyonu ve $c_0(m), c_1(m)$ dizileri, farklı m değerleri ve $\alpha = 2, \beta = 3$ için MBDS operator dizisinin yaklaşımları*

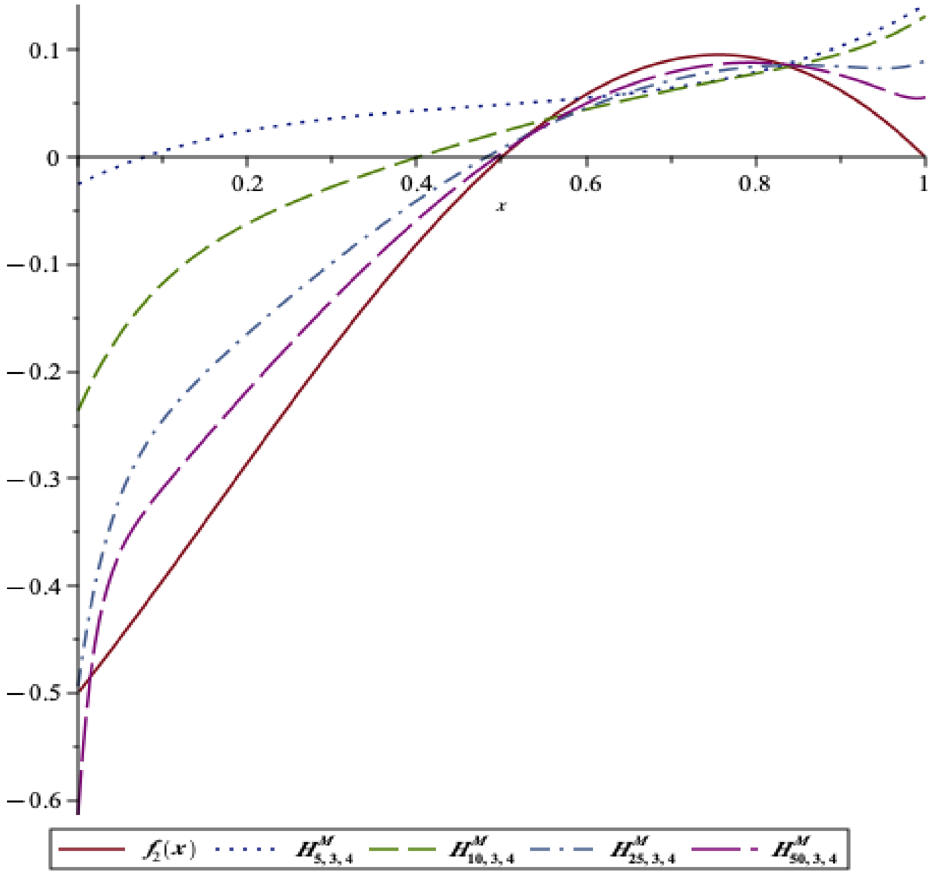
Şekil 2'de, $f_1(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\sin\frac{5\pi}{2}x$ fonksiyonu ve $c_0(m) = \frac{2m-1}{4m}, c_1(m) = \frac{1}{m}$ dizileri, $m = 5, 10, 20, 50$ ve $\alpha = 2, \beta = 3$ için MBDS operator dizisinin yaklaşımları ile $f_1(x)$ fonksiyonu ve $c_0(m), c_1(m)$ dizileri, $m = 5, 10, 20, 50$ için MBD operator dizisinin yaklaşımları karşılaştırılmıştır.



Şekil 2. *$f_1(x)$ fonksiyonu ve $c_0(m), c_1(m)$ dizileri, farklı m değerleri ve $\alpha = 2, \beta = 3$ için MBDS operator dizisinin yaklaşımları ile MBD operator dizisinin yaklaşımları karşılaştırılması*

Şekil 3'de, $f_2(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}x$ fonksiyonu ve $c_2(m) = -\frac{2m}{4m-1}$, $c_3(m) = \frac{2m-1}{m-1}$ dizileri,

$m = 5, m = 10, m = 25, m = 50$ ve $\alpha = 3, \beta = 4$ için MBDS operator dizisinin yaklaşımları gösterilmiştir.



Şekil 3. *$f_2(x)$ fonksiyonu ve $c_2(m), c_3(m)$ dizileri, farklı m değerleri ve $\alpha = 3, \beta = 4$ için MBDS operator dizisinin yaklaşımları*

YAZAR KATKI ORANLARI

Ülkü Dinlemez Kantar: Kavramlaştırma, Metodoloji, Kontrol, İçerik Analizi, Araştırma, Makalenin yazımı-orijinal taslak, Makalenin yazımı- inceleme ve düzenleme yapmış**, Mehmet Hanefi Altun:** Araştırma, Makale Yazımı yapmıştır.

ÇIKAR ÇATIŞMASI BEYANI

Yazarların bu makalenin içeriğiyle ilgili olarak beyan edecekleri hiçbir çıkar çatışması yoktur.

KAYNAKLAR

[1] Bernstein, S. (1912). Démonstration du thèorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. *Kharkov Mathematical Society*, 13(1), 1-2.
[2] Durrmeyer, J.L. (1967). Une formule d'inversion de la transformée de Laplace: Applications à la théorie des moments. Doctoral Dissertation, *Aculté Des Sciences De I'Université De Paris*, 21-28.
[3] Stancu, D. D. (1968). Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators. *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées*, 13(8), 1173-1194.
[4] Khosravian-Arab, H., Dehghan, M., Eslahchi, M.R. (2018). A new approach to improve the order of approximation of the Bernstein operators: theory and applications. *Numerical Algoritms* 77(1), 111–150.
[5] Acu , A.M., Gupta, V., Tachev, G. (2019). Better Numerical Approximation by Durrmeyer Type Operators, *Results in Mathematics*, 74(90), 1-11.

[6] Korovkin, P.P. (1953). On convergence of linear operators in the space of continuous functions. *Doklady Akademii Nauk*, 90, 961-964.
[7] Voronovskaja, E. (1932). Determination de la forme asymptotique d'approximation des fonctions par les polynomes de M. Bernstein. *Doklady Akademii Nauk SSSR* 4, 79–85.
[8] Altomare, F., Campiti, M. (1994). Korovkin-type approximation theory and its applications. *Berlin: Walter de Gruyter*, 17.
[9] Gonska, H. (2007). On the degree of approximation in Voronovskaja's theorem. *Studia Universitatis Babeș-Bolyai Mathematica,* 52(3), 103–115.