Journal of Statistics & Applied Science, Issue - 9
ISSN 2718-0999

Research Article

Received: date: 23.02.2024
Accepted: date: 04.04.2024
Published: date: 30.06.2024

Jackknife ve Bootstrap Yöntemlerine İlişkin Bir Uygulama

Elif Biçer [1], Hamit Mirtagioğlu [2], Canan Demir [3], Sıddık Keskin [4] Yıldırım Demir [5*]

[1]Independent Researcher, Ankara, Türkiye; bicerelif13@gmail.com
[2]Bitlis Eren University, Department of Statistics, Bitlis, Türkiye; hmirtagioglu@beu.edu.tr
[3]Van Yüzüncü Yıl University, Department of Health Technician, Van, Türkiye; canandemir@yyu.edu.tr
[4] Van Yüzüncü Yıl University, Department of Basic Medical Sciences,Van, Türkiye; skeskin@yyu.edu.tr
[5] Van Yüzüncü Yıl University, Department of Econometrics, Van, Türkiye; ydemir@yyu.edu.tr
Orcid: 0000-0002-1861-5447[1] Orcid: 0000-0003-2952-9584[2] Orcid: 0000-0002-4204-9756[3] Orcid: 0000-0001-9355-6558[4]
Orcid: 0000-0002-6350-8122[5]
*Correspondence: ydemir@yyu.edu.tr

Öz: Örnekleme işlemi veya süreci, bilimsel araştırma yapmanın en önemli aşamalarından birisidir. Örnekleme, ana kütle içerisinden ana kütleyi daha iyi temsil edecek şekilde tesadüfi olarak daha küçük örnek birimi alma işlemine denir. Diğer bir ifadeyle, örnekleme yapmaktaki amaç, ana kütle hakkında tutarlı ve geçerli bir tahminde bulunmak için örnekleme hatasını minimuma indirgemektir. Farklı kategoriler altında yer alan birçok örnekleme yöntemi bulunmaktadır. Son yıllarda ilerleyen teknoloji ile birlikte, temel örnekleme yöntemlerinin bir takım dezavantajlarının olduğu gözlenmiştir. Bu temel örnekleme yöntemlerindeki dezavantajları nedeniyle yeniden örnekleme yöntemleri geliştirilmiştir. Yeniden örnekleme yöntemleri örnek verilerini tekrar tekrar işleme tabi tutarak istatistik bilgiler sunmaktadır. Hızla gelişen teknolojiyle birlikte bu yöntemler, 1990'larda bilgisayar tabanlı yöntemler olarak uygulamadaki yerini almış ve hem parametrik hem de parametrik olmayan dağılımlar için temel yöntemlerle sınırlı kalmayıp, daha büyük veri setleri kullanarak iadeli ve iadesiz işlemler yapılabilmiştir. Bu çalışmada, yeniden örnekleme yöntemlerinden jackknife ve bootstrap yöntemleriyle; ortalaması 10 olan ana kütleden, 100 ve 300 birimlik örnekten çekildiği varsayılan n (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80) hacimli (bootstrap) örneklere ait ortalama ve güven aralığı değerleri incelenmiştir.
Anahtar Kelimeler: Bootstrap, jackknife, yeniden örnekleme

An Application on the Jackknife and Bootstrap Method

Abstract: Sampling process is one of the most important stages of scientific research. Sampling is the process of randomly selecting a smaller sample unit from the population to better represent the population. In other words, the purpose of sampling is to minimise sampling error in order to make a consistent and valid estimation about the population. There are many sampling methods under different categories. With the advancing technology in recent years, some drawback of basic sampling methods has been revealed. Due to these drawbacks in the basic sampling methods, resampling methods have been developed. Resampling methods provide statistical information by repeatedly processing sample data and with the rapidly developing technology in the 1990s, these methods have taken their place in practice as computer-based methods. These methods are not limited to basic methods for both parametric and nonparametric distributions, but they can perform return and non-return operations using larger data sets. In this study, with jackknife and bootstrap methods, which are resampling methods, the mean and confidence interval values of n (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80) volume (bootstrap) samples,

Citation: E. Biçer , H. Mirtagioğlu , C. Demir , and Y. Demir, " Jackknife ve Bootstrap Yöntemlerine İlişkin Bir Uygulama", Journal of Statistics and Applied Sciences, no. 9, pp. 45-56, June. 2024, doi:10.52693/jsas.1441998

which are assumed to be drawn from a sample of 100 and 300 units from the main population with a mean of 10, were examined.
Keywords: bootstrap; jackknife; resampling

1. Giriş

İstatistik yöntemler, bir araştırmaya konu olan verilerin toplanması, toplanan verilerin düzenlenmesi ve özetlenmesiyle elde edilecek tablo ve grafiklerin yanı sıra, parametre tahmininde ve hipotez testlerinde de kullanılmaktadır. Bilimsel araştırmalarda, elde edilen sonuçlara ve sonuçların raporlanmasına göre istatistikler, tanımlayıcı ve çıkarımsal istatistikler olmak üzere iki başlık altında incelenmektedir. Tanımlayıcı istatistikler, herhangi bir karşılaştırma içermeden ana kütleye veya örneğe ilişkin ortalama, standart sapma, sayı ve yüzde gibi tanımlayıcı istatistikleri sunmaktadır. Çıkarımsal istatistik ise örnekten hesaplanan istatistiklerle ana kütle parametrelerini tahmin etmeyi ve çıkarımlarda bulunmayı kapsamaktadır.

Bilimsel araştırmalarda, önemli iki kısıtlayıcı olan zaman ve araştırma maliyeti nedeniyle, çoğunlukla ana kütlenin tamamı ile çalışmak mümkün olmamaktadır. Bunun yerine, ana kütleyi temsil edebilen ve örneklem veya örnek olarak adlandırılan daha küçük bir grupla çalışılmaktadır. Günlük yaşamda çoğu zaman ana kütleden örnek alınarak, bütünü daha iyi temsil edecek şekilde örnekleme yapılmaktadır. Pişmekte olan bir tencere yemekten tadım yapmak için alınan bir kaşık yemek veya kan gurubunu öğrenmek için alınan kan örneklemedir. Örnekleme işlemi veya süreci, bilimsel araştırma yapmanın en önemli aşamalarından birisidir. Örneklem yeterli büyüklükte değilse veya yeterli büyüklükte olduğu halde, uygun örnekleme yöntemi kullanılmamışsa ya da çalışmaya alınacak deney üniteleri homojen değilse, araştırmada düşük güvenilirlik kaçınılmazdır. Bu nedenle bütün örnekleme yöntemlerinde amaç; ana kütleden rasgele alınan örnekten elde edilecek sonuca etki bakımından olumsuz faktörleri olabildiğince elemine etmek ve örnekleme varyanslarını azaltmaktır [1,2].

Ana kütleden alınan örnekten hesaplanan istatistikler yardımıyla ana kütle parametreleri (ortalama, varyans ve standart sapma, güven aralığı) tahmin edilmektedir. İyi bir tahmin edicide aranılan ilk özellik; dağılımı, tahmin edilecek ana kütle parametresi etrafında yoğunlaşan bir tahmin edici olmasıdır. İstatistik ile parametrenin aynı olması beklenemez [3]. Ancak parametre ile istatistik arsındaki fark olan toplam hatanın düşük olması beklenir.

Toplam hata, örnekleme hatası ve örnekleme dışı hatalar olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Örnekleme hatası, örnekten hesaplanan tahmin değeri ile parametre değeri arasındaki farktır. θ ana kütle parametresini ve $\hat{\theta}$ ise θ parametresinin tahmin edicisini göstermek üzere; olur [2].

$$\text{Örnekleme hatası} = \hat{\theta} - \theta \tag{1}$$

Örnek genişliği ve uygun örnekleme yönteminin seçimi örnekleme hatasını etkileyen en önemli faktörlerdir. Bu iki önemli faktörden esinlenerek, bu çalışmada farklı örneklem genişliklerinde yeniden örnekleme yöntemlerinden olan jackknife ve bootstrap yöntemleri incelenmiştir.

2. Materyal Ve Yöntem

Ana kütleden bilgi toplamak yüksek maliyetli olabileceği gibi belirli bir zaman içerisinde gerçekleştirilmesi veya tüm ana kütleye erişim de mümkün olmayabilir. İstatistik yöntemlerin amaçlarından birisi de bu gibi durumlarda örnekleme yapmaktır. Böylece örnekleme ile zaman ve işgücünden tasarruf sağlanarak maliyet düşürülmektedir [4]. İstatistik yöntemlerin bir diğer amacı da bilinmeyen ana kütle parametrelerini tahmin etmektir. Uygulamalı istatistikte, belirli bir ana kütle parametresi için tahmin ediciden yararlanılmaktadır. Bu tahmin edicinin doğruluğu tahmin edicinin, standart hata tahminleri üzerinden değerlendirilmekte ve parametre için güven aralıkları belirlenmektedir [5]. Tahmincinin, ana kütle parametresinin gerçek değerine yakın olması ya da parametre etrafında dar bir alanda değişim göstermesi istenmektedir. Bu, örneklem dağılımlarının ortalaması ve varyansıyla ölçülmektedir [6].

Bu parametreleri belirlemek amacıyla öncelikle örnekleme yapılması gerekmektedir. Farklı kategoriler altında yer alan birçok örnekleme yöntemi bulunmaktadır. Son yıllarda ilerleyen teknolojilerle birlikte;

örneklem hacmi ve örneklem seçimi ile ilgili hatalar, yanlı örnekleme yöntemlerinin kullanılması, örneklem büyüklüğünün yeterli olmaması ve veri toplamada yapılan hatalar gibi temel örnekleme yöntemlerinin bazı eksiklikleri gözlenmiştir [7]. Bu nedenle yeni yöntemler geliştirilmiştir.
Bunlardan biriside yeni bir örnek grubuyla çalışılarak var olan çalışmanın tekrarlanmasıdır. Ancak bu durum; zaman, maliyet ve personel ihtiyacını yineleyeceğinden tercih edilmeyebilir. Bu durumda yeniden örnekleme yöntemleri kullanılarak, yeni bir örnek oluşturmadan daha önce, çalışılan örnek üzerinde tekrarlanabilirlik sağlanabilir. Carver, "Tekrar, bilimin köşe taşıdır.'' diyerek tekrarlamanın önemine değinmiş ve tekrarlama ile elde edilen sonuçların güvenirliğini test ederek, yeniden örnekleme yöntemlerine olan güveni ortaya koymuştur [8]. Böylece oluşturulan örneklerin, ana kütle için genelleştirilebilir güvenli tahminler elde edilebilen yöntemler olduğu söylenilebilir. Temel örnekleme yöntemlerindeki eksikleri gidermek üzere, yeniden örnekleme yöntemleri geliştirilmiş ve bu yöntemler birçok alanda kullanılmaya başlanmıştır.

2.1. Yeniden Örnekleme

Yeniden örnekleme yöntemleri, örnek verilerini tekrar tekrar işleme tabi tutarak, istatistik bilgiler sunmaktadır. Bu yöntemler, 1990'larda hızla gelişen teknolojiyle birlikte, bilgisayar tabanlı yöntemler olarak uygulamadaki yerini almıştır. Zira yöntemlerin elle hesaplanabilmesi, zaman ve maliyet açısından oldukça zahmetlidir. Bu yöntemler, tahminin yanlılığı, güven aralığı oluşumu ve tahmin edilen parametreyle ilgili istatistik hipotezleri test etmektedir. Geleneksel yöntemlerde, normallik ve sabit varyanslılık varsayımları göz ardı edilemeyen kavramlardır. Veriler parametrik testlerin varsayımlarını sağlamadığında, yeni yöntemlerin kullanımında çekinceli davranılmakta ve geleneksel yöntemlerin kullanımı tercih edilmektedir. Ancak son yıllardaki teknolojik yeniliklerle, yeni yöntemlerin kullanımında artış olduğu söylenebilir.

Yeniden örnekleme yönteminin avantaj ve dezavantajları:
Klasik yöntemlerle, örnekten hareketle ana kütle hakkında yorumlar yapılabilir, ancak ana kütleye ilişkin yeterli ve güvenilir bilgi elde edilemediği durumlarda bu yöntemlerin etkinliği azalabilir. Bu gibi durumlarda, ampirik yöntemlere dayalı yeniden örnekleme yöntemlerinin kullanılması daha uygun olabilir [9].
Klasik yöntemler, örneklemin tesadüfi alınması ilkesine dayanmaktadır. Yeniden örnekleme yöntemleri, hem tesadüfi ve hem de tesadüfi olmayan örneklemelerde kullanılabilir [10]. Ayrıca klasik yöntemler yeniden örnekleme yöntemlerine göre çok daha fazla ve katı varsayımlara sahiptir.
Yeniden örnekleme yöntemleri büyük örnek genişliklerine uygulanabilmekte ve genellikle küçük örnekler için belirgin kolaylıklar sağlamaktadır. Ana kütle alt gruplara ayrılarak çapraz geçerlik ya da bootstrap yöntemleri uygulanabilir. Böylece, büyük örneklerle yapılan araştırmalarda, reddedilmemesi gereken bir sıfır hipotezi reddedilebilir. Oysaki büyük veri setleri, alt gruplara ayrılarak elde edilecek sonuçlar kullanabilir.
Yeniden örnekleme yöntemlerinin bir diğer amacı da simülasyon yapmaktır. Bu yöntemler, küçük örnekler kullanıldığında, daha fazla gözlem oluşturma gücüne sahip olmaları nedeniyle avantajlı olabilir [11].
İstatistikte tekrarlanabilirlik, çoğunlukla güven veren bir durumdur. Ancak daha fazla maliyet, zaman ve işgücü gereksinimi nedeniyle çoğu kez tercih edilmemektedir.
Yeniden örnekleme yöntemleri, tek bir örneğe dayalı olması ve sonuçların tek bir örnek üzerinden değerlendirilmesi nedeniyle genelleme için yeterli olmadığı yönünde eleştirilmektedir. Ancak, [12] test sonuçları kararlılığının değerlendirilmesinin çıkarımsal değil tanımlayıcı olduğunu belirtmiştir. Ayrıca, yeterli deneysel çalışmanın yapılmadığı durumlarda, yeniden örnekleme tahminlerinin doğruluğunun düşük olduğu belirtilmektedir. Ancak, günümüz koşullarında yüksek hızlı bilgisayarlarla bu durumun üstesinden gelinebilir.
Yanlılık büyük örneklerle azaltılabilir, ancak bootstrap yöntemi ile elde edilen güven aralıkları daima yanlılık göstermekte ve daha karmaşık bootstrap yöntemleri ile bu yanlılık azaltılabilmektedir. Klasik yöntemler bu soruna belirgin bir çözüm sunamazken, yeniden örneklemeyle yapılan tekrarlar, kısmen de olsa sorunu giderebilmektedir.

2.1.1. Jackknife yöntemi

Jackknife ilk olarak Maurice Quenouille (1949;1956) tarafından yanlılığı ortadan kaldırmak için önerilmiş daha sonra John W. Tukey tarafından (1958) hipotez testi ve güven aralığının istatistik anlamlılığını test etmek üzere geliştirilmiştir. Jackknife, parametre dağılımı hakkında herhangi bir bilginin olmadığı parametrik olmayan yöntemler altında daha güçlü ve güvenilir sonuçlar verdiği, dağılım hakkında bilginin olduğu durumda parametrik yöntemlere benzer sonuçlar verdiği ileri sürülen yeniden örnekleme yöntemidir [13-16].

Jackknife yöntemi, bir defada bir veya daha fazla gözlemi dışarıda bırakarak, oluşturduğu yeni veri setleriyle, ana kütle parametreleri için güven aralığı tahmininin yanı sıra istatistik testler yardımıyla yanlılık ve standart hata kestirimleri de yapmaktadır. Yeni bir örnek oluşturmada her seferinde örnekten bir gözlem alarak tekrarlama yapıldığından ve bu işlem defalarca kez gerçekleştirildiğinden uç noktalara karşı oldukça hassas olan yöntem genellikle ana kütle dağılımının geniş yayılım gösterdiği ya da veri setinde aşırı uç değerlerin olduğu durumda kullanılmaktadır. Her seferinde bir veriyi veya gözlemi dışarıda bırakarak aynı testin tekrarlanmasında, yönteme birini dışarıda bırak (leave-one-out) ve birden fazla gözlemin dışarıda bırakılmasına ise "delete-d jackknife" denilmektedir [17].

Jackknife yöntemi, veri setinde her bir gözlem değerini bir kez dışarıda bırakarak geriye kalan gözlemlerden sözde değerler hesaplamaya dayanmaktadır. Bu şekilde n tane gözlemden her biri n-1 büyüklüğünde n tane farklı örnek elde edilebilir. Orijinal veri seti $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ise ve yöntemde $i.$ gözlem dışarıda bırakıldığında elde edilen $i.$ Jackknife örneği;

$$x_{(i)} = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \qquad i = 1, 2, \dots, n \tag{2}$$

olur. Orijinal veri kümesinin ortalaması $\bar{x}$ ve $i.$ gözlem değeri dışarıda bırakılarak elde edilen ortalama $\bar{x}_i$ biliniyorsa $i.$ gözlem değeri Eşitlik (3) ile de hesaplanır [3].

$$x_i = n\bar{x} - \bar{x}_i(n-1) \tag{3}$$

Ana kütle parametresinin tahmin edicisi $\hat{\theta} = s(x)$ olarak ifade edilmekte ve Jackknife yönteminde amaç, $\hat{\theta}$'nın standart hatasını ve yanlılığı (bias) tahmin etmektir. Böylece yeni örneğe dayalı tahmin edici $\hat{\theta}_i = s(x_i)$ olarak ifade edilebilir. $\hat{\theta}_i$, $\hat{\theta}$'nın $i.$ jackknife tekrarı olarak olmak üzere, yanlılık değeri Eşitlik (4) ile yanlılığın jackknife tahmini ise Eşitlik (5) ile ifade edilebilir.

$$Yanlılık = \hat{\theta}_{(.)} - \hat{\theta} \tag{4}$$

$$\widehat{bias}_{jack} = (n-1)(\hat{\theta}_{(.)} - \hat{\theta}) \tag{5}$$

Yanlılık değeri ve yanlılığı azaltılmış jackknife tahmini arasındaki fark pseduo (sözde) olarak tanımlanmakta ve Eşitlik (6) ile hesaplanmaktadır.

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \widehat{bias}_{jack}(\hat{\theta}) => \tilde{\theta} = n\hat{\theta} - (n-1)\hat{\theta}_{(.)} \tag{6}$$

$\hat{\theta}_{(.)}$ her defasında dışarıda bırakılan, yani orijinal veri kümesinden silinen değerler üzerinden alınan ortalamayı göstermekte ve Eşitlik (7) ile hesaplanmaktadır.

$$\hat{\theta}_{(.)} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \hat{\theta}_{(i)} \tag{7}$$

Jackknife tahmini için standat hata;

$$\widehat{se}_{jack} = \sqrt{\frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{\theta}_{(i)} - \hat{\theta}_{(.)}\right)^2} \tag{8}$$

olarak hesaplanmaktadır.

Bu değer ortalamanın standart hatasının tahminine benzemekte ve n tane sözde değer, jackknife tahmin değerlerinin ortalamasını göstermektedir. Buradan hareketle, sözde değerlerden bir güven aralığı oluşturulabilir. t-dağılımının yüzdesine (1-α) ve serbestlik derecesine (n-1) dayanan güven aralığı Eşitlik (9) ile elde edilebilir [18].

$$\tilde{\theta} = t_{n-1}^{1-\alpha}\widehat{se}_{jack} \tag{9}$$

Jackknife yöntemiyle $\hat{\theta}$ tahmin edicisinin dağılımı hakkında aralık tahmini ve çıkarım yapılmak istendiğinde, birçok durumda yeterli bilgi sağlanmayacağı gibi örnek nitelikleri düzgün olmayan $\hat{\theta}$ için tutarlı bir varyans tahmincisi de sağlanmayabilir. Bu iki durumu da içine alan jackknife yönteminin eksik yanlarının giderilmesi için Shao ve Wu (1989), yöntemin genel bir modifikasyonu olan delete-d jackknife yöntemini önermişlerdir. İlk olarakWu (1986), her iki sorunda da gözlem aralığını geniş tutarak, her seferinde daha fazla gözlemin silinmesiyle çözüm getirilebileceğini önermektedir. Shao ve Wu (1989) ise ikinci problem için jackknife varyans tahmin tutarlılığının $\hat{\theta}$ tahmincisi düzgünlüğünün bir ölçüsüne bağlı olarak d ile bir delete-d jackknife kullanarak geri yüklendiğini göstermektedir [19-21]. Delete-d jackknife, varyans tahmin etmede ve jackknife histogramı oluşturmada da kullanılabilir. Jackknife histogramı, $\hat{\theta}$'nın örnekleme dağılımının tutarlı bir tahmincisini sağlamaktadır. Bu kestirimde r ve d'nin sonsuza doğru sapması tutarlılığı artırmaktadır [22].
Standart hatanın delete-d jackknife tahmini Eşitlik (10) ile gösterilmektedir.

$$se_{jack-d} = \sqrt{\frac{n-d}{\binom{n}{d}}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\theta}_{(s)} - \hat{\theta}_{(.)}\right)^2} \tag{10}$$

s, (1, 2,…,n) olmak üzere içerisinden alınan d boyutlu bir kümeyi ve $\hat{\theta}_{(s)}$, alt kümeleri kaldırılmış (s) veri kümesine uygulanan θ'yı ifade etmektedir. $\hat{\theta}_{(s)} = \hat{\theta}_{(x)}$, x orijinal veri kümesinden $\{x_i, i \in s\}$ dışarıda bırakılmak için geriye kalanlar bir delete-d jackknife örneğinin boyutunu temsil eden $n-d$ tane veri noktasını göstermektedir. Ayrıca; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ içerisinden değiştirilmeden alınan $(n-d)$ boyutlu tüm alt küme s'lerin toplamı $\hat{\theta}_{(.)} = \sum \hat{\theta}_{(s)}/\binom{n}{d}$ ve $\binom{n}{d}$ ise bir seferde dışarıda bırakılan alt küme örneklerini göstermektedir. n büyük ve $\sqrt{n} < d < n$ ise jackknife örneklerinin alt küme $\binom{n}{d}$ sayıları da büyük olabilir. $\sqrt{n}/d \to 0$ veya $n-d \to \infty$ olduğunda, delete-d jackknife değerinin medyan için tutarlı olduğu söylenebilir. Böylece jackknife standart hatasının tahmini için tutarlılık elde edilmekte ve bu durum $d = \sqrt{n}$'den fazla ve n'den az gözlemin dışarıda bırakılmasıyla gerçekleşmektedir [18].
Delete-d jackknife yönteminin en önemli avantajı, $\hat{\theta}$'nın örnek dağılımının uygun bir tahmininin yorumlanmasına yardımcı olmasıdır. Bu da delete-d jackknife'ın (yani d silme değerinin) bootstrap'a göre standart hataya daha yakın bir değer olduğunu göstermektedir. Böylece delete-d jackknife'ın bootstrap'a daha çok benzemesini sağlamaktadır.

2.1.2. Bootstrap yöntemi

Bootstrap yöntemi 1979 yılında yeniden örnekleme yöntemi olarak ileri sürülmüş ve bootstrap tahmin edicilerini kullanarak bir tahmin edicinin dağılımını tahmin etmek amacıyla geliştirilmiştir [23]. Yöntem, tek örnekten hareketle ana kütle parametresi hakkında karar vermek yerine, örnekten elde edilen değerleri ana kütle değeri olarak varsayar ve tekrardan yerine koyarak (iadeli) örnek alıp, ana kütle parametresini tahmin eder. Bootstrap yönteminde asıl amaç, var olan veri setindeki gözlemlerin tesadüfi olarak yer değiştirilmesi sonucunda yeniden örnekleme ile yeni veri setleri oluşturmaktır.
Bootstrap yöntemi, ana kütle parametreleri hakkında bilgi sahibi olunmadığı ve sadece o ana kütleye ait bir örneklemin gözlemlenebilir olduğu durumlarda, ana kütlenin bilinmeyen parametrelerine ilişkin tahminlerin yapılması, güven aralıklarının oluşturulması ve istatistik hipotezlerin test edilmesi işlemlerini kapsar. Efron'un bootstrap yöntemi, bilinen bir ana kütleden gözlemlenmiş olan bir örneklemin, birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı olması koşulu ile analitik olarak elde edilmesi güç olan çeşitli tahmin edicilerin örneklem dağılımlarına yaklaşımda bulunarak elverişli bir yöntem olarak kullanılmaktadır [24]. Jackknife yöntemine alternatif olan yöntemin çok daha güvenilir ve kolay uygulanabilir olduğu bilinmektedir [25].

Bootstrap algoritmasının işleyişi;

1. Ana kütle parametresi tahmin edicisinin hesaplanması için ana kütleden n hacimlik bir örnek alınır.
2. Ana kütle ile ilgili hiçbir bilgi olmadığından, elde edilen bu örnek, ana kütlenin en iyi tahmincisi kabul edilir. Bu nedenle bu örnek ana kütle gibi kabul edilerek her defasında iadeli seçimle her bir gözlemin örneğe girme olasılığı 1/n alınarak n hacimlik bir örneğin yeniden elde edilmesi ve bu sürecin B kez tekrarlaması yapılır.
3. Her bootstrap örneği için tahmin edici hesaplanır.
4. B sayıda örnekten hareketle bu tahmin edicilerin örnekleme dağılımı elde edilir.
5. Elde edilen bu dağılımdan, dağılımla ilgili ortalama, standart sapma ve standart hata gibi önemli tahmin ediciler ile parametre tahmin değerleri elde edilir.

6) Bu tahminler kullanılarak ana kütle hakkında yorumlar yapılır [26].

Bu, bootstrap yönteminin işleyiş mantığını genel olarak açıklayan bir algoritmadır [1]. Yeniden örnekleme sayısı olan B, uygulamaya bağlıdır. n hacimlik bir örnekten, teorik olarak n^n sayıda bootstrap örneği oluşturmak mümkün olsada bu hem gereksiz hem de zaman kaybına neden olmaktadır [27].

Bootstrap dağılımının standart hata tahmini;
Dağılımı bilinmeyen rastgele bir örnek olduğu varsayılan $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ veri setinden oluşan gözlemlerden bootstrap standart hatası aşağıdaki algoritmayla bulunabilir.

1. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ veri setinden, n birimlik yerine koyma yöntemiyle seçilmiş B tane birbirinden bağımsız $x^{*1}, x^{*2}, \ldots, x^{*B}$ bootstrap örneği oluşturulur.
2. "s" standart sapmayı göstermek üzere her bir örnek için standart sapma hesaplanır.

$$\hat{\theta}^*_{(b)} = s(x^{*b}) \qquad\qquad b = 1, 2, \ldots, B \tag{11}$$

3. $\widehat{se}_B$, bootstrap örneklerinin örnek standart hatası olmak üzere standart hata;

$$\widehat{se}_B = \sqrt{\sum_{b=1}^{B} \left[\hat{\theta}^*_{(b)} - \hat{\theta}^*_{(.)}\right]^2 \Big/ (B-1)} \tag{12}$$

olarak ve burada $\hat{\theta}^*_{(.)}$ ise Eşitlik (13) ile hesaplanmaktadır.

$$\hat{\theta}^*_{(.)} = \sum_{b=1}^{B} \hat{\theta}^*_{(b)} \Big/ B \tag{13}$$

İlk aşamada gözlemlenmiş değerlerden bootstrap örnekleri oluşturulmuş ve her bir örnek için standart hata tahmin değerleri hesaplanmıştır. Daha sonra hesaplanan standart hata tahminlerinin ortalaması bulunmuştur. Her bir standart hata tahmin değerinden, hesaplanan ortalama standart hata değerler farkının karesi alınarak, sapma miktarı elde edilmiş ve son olarak sapmaların kareleri bootstrap örnek sayısının bir eksiğine bölünerek karekökü alınmış ve standart hata değerleri elde edilmiştir [28].
Günümüzde standart bootstrap güven aralığının yerine, parametrik olmayan farklı güven aralığı oluşturma yöntemleri de bulunmaktadır. Bu yöntemlerle yeniden örnekleme yapılarak örneğin ampirik dağılımı elde edilebilir. Parametre tahminlerinin ampirik dağılımı olan örnekleme dağılımının elde edilebilir olmasıyla güven aralıkları oluşturulabilmektedir [29]. Bootstrap güven aralıkları, normal yaklaşım yöntemi ve yüzdelik yöntem olmak üzere iki şekilde elde edilebilir. Bootstrap yöntemi parametrik olmayan bir yöntem olarak bilinmesine rağmen, normal yaklaşım ile bootstrap güven aralığı yönteminin, parametrik yöntemle büyük benzerlik gösterdiği söylenebilir. Normal yaklaşımla elde edilen bootstrap güven aralığı yöntemi, güçlü normallik varsayımı gerektirmektedir. Bu varsayım sağlanmadığı durumda, normal yaklaşımla elde edilen güven aralığı, parametrik olmayan yöntemlerle elde edilen güven aralıklarından daha iyi olmaz ve bu varsayımlar nedeniyle yöntem fazla tercih edilmez. Bunun yerine, yüzdelik yöntemiyle elde edilen bootstrap güven aralığı tercih edilir.

Bootstrap yöntemi, parametrenin güven aralıklarının oluşturulması için ampirik dağılım kullanmaktadır [29]. Bootstrap algoritmasındaki yinelemeler tekrar edilerek, bootstrap yöntemi ile tahmin edilmiş parametre tahminlerinin vektörü oluşturulmakta ve dağılımın yüzdelik değerleri ortaya çıkarılmaktadır [30]. Bootstrap yüzdelik güven aralığı yöntemi daha çok parametrik varsayımların olmadığı durumlarda kullanılmakta ve standart normal güven aralığı yönteminin aksine bilinmeyen parametrelerin dağılımı ya da bootstrap dağılımı için bu yöntemde herhangi bir normallik varsayımı aranmamaktadır.

Bootstrap yüzdelik güven aralığı yönteminde örnekleme dağılımının parametrelerini tahmin etmek için bootstrap örnekleme dağılımının oluşturulması yeterlidir. Bu yöntemde güven aralığının sınırları $\hat{\theta}$'nın bootstrap dağılımı ile belirlenmekte ve bu yöntem çarpık dağılımlarda oldukça doğru sonuçlar vermektedir. Ancak örnek hacminin küçük olduğu durumlarda performansı düşmekte [31] ve bu durumda, sıfır hipotezinin reddedilme olasılığının artma ihtimali ortaya çıkmaktadır.

Bootstrap tekrar sayısının sonsuza yaklaştırılmasıyla istenilen bootstrap güven aralığı elde edilebilir. Ancak uygulamada tekrar sayısının sonsuza yaklaştırılması mümkün olmayabilir. Buna bağlı olarak sonlu bir B tekrar sayısı ve $\hat{\theta}^*$'ın dağılımı için aşağıdaki adımlar kullanılarak bootstrap yüzdelik güven aralığı oluşturulabilir.

1. $x_1, x_2, \dots, x_n$ örnekleminden hareketle tesadüfi örnek çekilerek $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ olarak bootstrap örneklemleri elde edilir.
2. θ parametresine ilişkin bootstrap tahmini $\hat{\theta}^*$ hesaplanır.
3. Bu iki adım B kez tekrarlanır. B tekrardan elde edilen $\hat{\theta}^{*1}, \hat{\theta}^{*2}, \dots, \hat{\theta}^{*B}$ tahminleri kullanılarak bootstrap dağılımının $(\hat{G})$ kümülatif dağılım fonksiyonu elde edilir.
4. $\hat{G}$, $\hat{\theta}^*$'nın kümülatif dağılım fonksiyonu olduğu varsayımı altında, $1-2\alpha$ yüzdelik aralığı $\hat{G}$'nin α ve $1-\alpha$'inci yüzdelik dilimleri ile Eşitlik (14)'deki gibi tanımlanır.

$$\left[\hat{\theta}_{\%\text{alt}}, \hat{\theta}_{\%\text{üst}}\right] = \left[\hat{G}^{(-1)}(\alpha), \hat{G}^{(-1)}(1-\alpha)\right] \tag{14}$$

5. Bootstrap dağılımının $100\,\alpha$'inci yüzdeliği $\hat{\theta}^*$ olduğu için $\hat{G}^{(-1)}(\alpha) = \hat{\theta}^*$ şeklinde de ve bootstrap yüzdelerine ait aralık ise Eşitlik (15) ile de gösterilebilir.

$$\left[\hat{\theta}_{\%\text{alt}}, \hat{\theta}_{\%\text{üst}}\right] = \left[\hat{\theta}^{*(\alpha)}, \hat{\theta}^{*(1-\alpha)}\right] \tag{15}$$

2.1.3. Jackknife ve bootstrap yöntemleri arasındaki benzerlikler ve farklılıklar

Jackknife ve bootstrap yöntemlerinin her ikisi de aynı veri kümesinden tekrarlama yaparak örnekler elde etme temeline dayanmaktadır. Bootstrap standart hata tahmininde, sapma değerleri $\frac{1}{n-1}$ veya $\frac{1}{n}$ çarpanı ve jackknife tahmininde ise $\frac{n-1}{n}$ çarpanı ile kullanılmaktadır. $\frac{n-1}{n}$ değeri, $\frac{1}{n-1}$ veya $\frac{1}{n}$ değerinden oldukça büyük olduğundan, jackknife sapmaları Bootstrap sapmalarından daha küçük eğilime sahip olur [18].

$$\left(\hat{\theta}_{(i)} - \hat{\theta}_{(.)}\right)^2$$

$$\left(\hat{\theta}^*_{(b)} - \hat{\theta}^*_{(.)}\right)^2$$

Jackknife yöntemi, bootstrap yöntemine göre daha kolay ve daha başarılı bir yaklaşım sunmakta, ancak $\hat{\theta}$ istatistiği düzgün olmadığında (non-smooth) iyi sonuçlar vermemektedir. Zira medyan gibi düzgün olmayan bir istatistik için bootstrap yönteminin jackknife yönteminden daha tutarlı olduğu bilinmektedir. Jackknife yöntemi duyarlı ölçümler için aşırı uç değerleri veri setine dahil ettiğinden uç değerlerden etkilenmektedir. Bu nedenle istatistik ölçümler açısından medyanın güvenirliği bu yönteme göre güvenilir değildir. Böylece düzgünlüğün olmaması örneğin medyan ile hesaplanacak olan örnekleme hatasının jackknife tahmininde istenmeyen tutarsız durumlara neden olacaktır. Ancak bootstrap yönteminde böyle bir durum söz konusu değildir.

$\hat{\theta}$'nın sadece n jackknife veri kümeleri için hesaplanması gerektiğinde, n'nin standart hata tahmini, bootstrap tarafından yapılan tekrarlama yönteminden az ise jackknife'ın tercih edilmesi daha mantıklı olur. Ancak sadece n jackknife örneklerine bakarak, jackknife θ hakkında sınırlı bilgiye ulaşır. Bu nedenle jackknife'ın bootstrap'tan daha az etkili olduğu söylenebilir. Bu da jackknife'ın bootstrap

yöntemine yakın bir tahmine dönüştüğü şeklinde yorumlanabilir [18]. Bootstrap yönteminde ise B tekrarlamayla N^n tane yeniden örnek oluşturulduğunda bootstrap tekrarlamayla elde edilecek birden fazla örneğin oldukça büyük işlemler gerektirdiği ayrıca zaman, maliyet ve kalifiyeli eleman durumlarını ortaya çıkaracağından verilerle ilgili bazı güncellikler zamanla önemini yitirebilir. Ayrıca jackknife yöntemi sadece n tane gözlem kullanarak elde edeceği sınırlı bilgiye rağmen, bootstrap N^n tane örnek elde ederek jackknife göre daha küçük örnekleme hatası elde etmektedir. Bu durumda bootstrap yönteminin, jackknife yöntemine nazaran daha etkili olduğu söylenebilir.
Bazı paket programların geliştirilmesi ile çoğu araştırmacı jackknife yönteminin bootstrap yönteminden sonra kullanılan kontrol amaçlı bir yeniden örnekleme yöntemi olduğunu ileri sürmüştür [3].
Son olarak jackknife yöntemi, dağılımı tahmin etmek için kullanılırken, bootstrap yönteminde böyle bir durumdan söz edilemez. Bootstrap yöntemiyle elde edilen yeniden örneklerde yeni bir bootstrap dağılımı oluşturulur. Jackknife ve bootstrap yöntemlerinde ana kütle dağılımı normal dağılım göstermiyorsa bu iki yöntem;

- Standart hatayı azaltır,
- Herhangi bir dağılım olmadan güven aralığı verir,
- Yeniden bir örnek üzerinde çalışma imkanı sağlar.

Jackknife ve bootstrap yöntemlerinden hangisinin daha kullanışlı olabileceğini anlamak için Tablo 1 kullanılabilir

Tablo 1. Jackknife ve bootstrap yöntemlerinin karşılaştırılması

Jackknife	Bootstrap
Yeniden örnekleme, belli bir gözlemden birinin dışarıda bırakılmasıyla yapılır	Yeniden örnekleme, eldeki gözlemlerin yerine koyarak örnekleme yapılır
İadesiz seçim yapar	İadeli seçim yapar
En fazla örnek genişliği kadar örneklem elde eder	Örnek türetme konusunda herhangi bir limit yoktur
Normal dağılım varsayımını gerektirir	Herhangi bir dağılımdan bağımsız üretilir
Daha az algoritma ve hesaplama içerir	Daha fazla algoritma ve hesaplama içerir
Her zaman aynı sonuçları sağlar	Aynı verilerin yinelenmesiyle zaman zaman farklı sonuçlar sağlar
Örnek büyüklüğü n tane gözlemden birinin dışarıda bırakılmasıyla geriye kalan n-1 tane gözlemden oluşur	Bootstrap'taki örnek büyüklüğü n'dir
Tekrar sayısı n'dir	Tekrar sayısı Nn'dir
Herhangi bir dağılımın tahmin edilmesi amaçlanmaz daha çok doğrulama amacıyla iyi sonuçlar verir	Temelde bilinmeyen bir dağılımının tahmin edilmesi ve hesaplanması için tavsiye edilir
Esasen temel istatistik çıkarsamalarda iyi sonuç verir	Yoğun hesaplamalarda iyi sonuç sağlar

3. Bulgular

Bu çalışmada, yeniden örnekleme yöntemlerinden olan jackknife ve bootstrap yöntemleriyle; 100 ve 300 tekrarlamayla oluşturulan örnek genişliklerinde elde edile n birimlik örneklerden; çekilen örnek genişliği altında ortalama ve güven aralığı değerleri incelenmiştir.
Ortalaması 10 olan ana kütleden 100'lük örnekte; n değeri 10'ar birim artacak şekilde 10'dan 80'e kadar çekilen bootstrap ve jackknife örneklerinde ortalama ve güven aralıkları Tablo 2'de verilmiştir.
Ortalaması 10 olan ana kütleden, 100 birimlik örnekten çekildiği varsayılan n (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80) hacimli (bootstrap) örneklere ait ortalama ve güven aralığı değerlerini içeren Tablo 2 incelendiğinde;
n=10 olduğu durumda, gerçek ortalama 10.058 ve güven aralığı 8.376-11.740 olarak bulunmuşken, bootstrap için ortalama 10.065, güven aralığı 9.781-10.349 ve jackknife yöntemi için ise ortalama 10.058 ve güven aralığı 7.906-12.210 olarak bulunmuştur. Bu sonuçlara göre jackknife ortalamasının gerçek değerle aynı olduğu ve bootstrap ortalamasının ise yaklaşık %1'lik farkla gerçek değere çok yakın olduğu gözlenmiştir.

n=20 olduğu durumda, iki yönteme ait ortalamanın da 10 ve gerçek ortalama ile aynı olduğu gözlenmiştir. Gerçek ortalama için güven aralığı 8.068-11.931, bootstrap yöntemi için 9.620-10.380 ve jackknife yöntemi için ise 6.961-13.038 olarak bulunmuştur

Tablo 2. 100 birimlik örnek genişliklerinde elde edilen sonuçlar

	n	Ort_G	Ort_B	Ort_J	CI_G		CI_B		CI_J	
					L	U	L	U	L	U
100	10	10.058	10.065	10.058	8.376	11.740	9.781	10.349	7.906	12.210
	20	10	10	10	8.068	11.931	9.620	10.380	6.961	13.038
	30	10.049	10.031	10.049	8.203	11.895	9.793	10.270	7.371	12.727
	40	10.127	10.123	10.127	8.155	12.099	9.882	10.364	7.018	13.236
	50	10.104	10.107	10.104	8.155	12.053	9.900	10.315	7.088	13.121
	60	10.107	10.115	10.107	8.155	12.060	9.933	10.297	7.067	13.147
	70	10.077	10.071	10.077	8.096	12.059	9.887	10.255	6.702	13.452
	80	10.052	10.053	10.052	8.034	12.070	9.904	10.201	6.799	13.305

n=30 olduğu durumda, gerçek ortalama değeri 10.049 ve güven aralığı 8.203-11.895 olarak bulunmuşken, bootstrap için ortalama 10.031, güven aralığı 9.793-10.270 ve jackknife için ise ortalama 10.049, güven aralığı 7.371-12.727 olarak bulunmuştur. Bu sonuçlarla, jackknife ile elde edilen ortalamanın, gerçek değerle aynı olduğu, ancak bootstrap ile elde edilen ortalamanın gerçek değerden yaklaşık 0.018 birimlik bir fark gösterdiği görülmüştür.

Örnek genişliği 40 olduğunda; gerçek ortalama 10.127, güven aralığı 8.155-12.099, bootstrap ortalaması 10.123, güven aralığı 9.882-10.364 ve jackknife ortalaması 10.127, güven aralığı ise 7.018-13.236 olarak bulunmuştur.

Örnek genişliği 50 olduğunda, gerçek değer ve jackknife ortalamaları 10.104, gerçek değer için güven aralığı 8.155-12.053, jackknife için ise 7.088-13.121 olarak belirlenmiştir. Ayrıca bootstrap ortalaması 10.107 ve güven aralığı 9.900-10.315 olarak bulunmuştur.

Örnek genişliği 60 olduğunda, gerçek değer ve jackknife ortalamaları 10.107, gerçek değer için güven aralığı 8.155-12.060, jackknife için ise 7.067-13.147 olarak bulunmuşken, bootstrap ortalaması 10.115 ve güven aralığı ise 9.933-10.297 olarak bulunmuştur.

n=70 olduğunda, gerçek ve jackknife ortalamaları 10.077, gerçek ortalamaya ait güven aralığı 8.096-12.059 ve jackknife ortalamasına ait güven aralığı ise 6.702-13.452 olarak bulunuştur. Bootstrap ortalaması 10.071, güven aralığı ise 9.887-10.255 olarak bulunmuştur.

Örnek genişliği 80 olduğunda da gerçek ve jackknife ortalamalarının (10.052) birbirlerine eşit oldukları, bootstrap ortalamasının (10.053) ise bunlardan biraz farklı olduğu görülmektedir. Ayrıca gerçek, bootstrap ve jackknife ortalamalarına ait güven aralıkları sırasıyla 8.034-12.070, 9.904-10.201 ve 6.799-13.305 olarak bulunmuştur.

Bu sonuçlara göre tüm örnek genişliklerinde, jackknife ortalamalarının benzer örnek hacmindeki gerçek ortalama değeriyle aynı olduğu ve bootstrap ortalamasını ise bunlara çok yakın olduğu belirlenmiştir. Ayrıca tüm örnek genişliklerinde jackknife güven aralıklarının gerçek değer güven aralıklarına göre geniş bir aralığa, bootstrap güven aralıklarının ise daha dar bir aralığa sahip olduğu gözlenmiştir.

Ortalaması 10 olan ana kütleden 300 birimlik örnekte; n değeri 10'ar birim artacak şekilde 10'dan 80'e kadar çekilen bootstrap ve jackknife örneklerinde ortalama ve güven aralıkları Tablo 3'te verilmiştir.

Tablo 3. 300 birimlik örnek genişliklerinde elde edilen sonuçlar

	n	Ort_G	Ort_B	Ort_J	CI_G		CI_B		CI_J	
					L	U	L	U	L	U
300	10	9.960	9.954	9.960	7.963	11.958	9.508	10.400	6.529	13.391
	20	10.042	9.960	10.042	7.988	12.096	9.589	10.332	6.753	13.330
	30	10.079	10.083	10.079	8.067	12.091	9.704	10.461	6.372	13.785

40	10.028	10.022	10.028	8.069	11.987	9.735	10.309	6.675	13.381
50	9.947	9.947	9.947	7.959	11.935	9.727	10.166	6.755	13.139
60	10.003	10.007	10.003	8.024	11.983	9.824	10.191	6.921	13.086
70	10.006	10.007	10.006	7.997	12.014	9.849	10.164	7.029	12.983
80	9.995	9.990	9.995	8.025	11.964	9.843	10.137	7.106	12.883

Ortalaması 10 olan anakütleden 300 birimlik örnekten çekildiği varsayılan n (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80) hacimli (bootstrap) örneklere ait ortalama ve güven aralığı değerlerini içeren Tablo 3 incelendiğinde; bütün örnek genişliklerinde gerçek ve jackknife ortalamalarının aynı örnek genişliğinde birbirlerine eşit olduğu gözlenmiştir.

n=10 olduğu durumda; ortalama 9.960, gerçek ortalama güven aralığı 7.963-11.958 ve jackknife ortalama güven aralığı 6.529-13.391 olarak bulunmuşken, bootstrap ortalaması 9.954 ve güven aralığı 9.508-10.400 olarak bulunmuştur.

Örnek genişliği 20 olduğunda; ortalama değer 10.042, gerçek ortalama güven aralığı 7.988-12.096 ve jackknife ortalama güven aralığı 6.753-13.330 olarak belirlenirken, bootstrap ortalama değeri 9.960 ve güven aralığı ise 9.589-10.332 olarak belirlenmiştir.

n=30 olduğu durumda; gerçek ortalama ile jackknife ortalaması 10.079 ve bootstrap ortalaması ise 10.038 olarak bulunmuştur. Ayrıca güven aralığı gerçek ortalama için 8.067-12.091, bootstrap için 9.704-10.461 ve jackknife için ise 6.372-13.785 olarak bulunmuştur.

40 örnek genişliğinde gerçek ve jackknife ortalaması 10.028, gerçek ortalama için güven aralığı 8.069-11.987 ve jackknife ortalaması için güven aralığı 6.675-13.381 olarak belirlenirken, bootstrap ortalaması 10.022 ve güven aralığı ise 9.735-10.309 olarak belirlenmiştir.

50 örnek genişliğinde üç ortalamanın da birbirine eşitken, gerçek ortalama için güven aralığı 7.959-11.935, jackknife ortalaması için güven aralığı 6.755-13.139 ve bootstrap ortalaması için güven aralığı ise 9.727-10.166 olarak belirlenmiştir.

Örnek genişliği 60 olduğunda; gerçek ve jackknife ortalama değerleri 10.003, gerçek ortalama için güven aralığı 8.024-11.983 ve jackknife için güven aralığı 6.921-13.086 olarak, bootstrap ortalama değeri 10.007 ve güven aralığı ise 9.824-10.191 olarak belirlenmiştir.

n=70 olduğu durumda; gerçek ortalama ile jackknife ortalaması 10.006 ve bootstrap ortalaması ise 10.007 olarak bulunmuştur. Ayrıca güven aralığı gerçek ortalama için 7.997-12.014, bootstrap için 9.849-10.164 ve jackknife için ise 7.029-12.983 olarak bulunmuştur.

80 örnek genişliğinde gerçek ve jackknife ortalaması 9.995 olarak ve bu iki ortalamaya ait güven aralıkları ise sırasıyla 8.025-11.964 ve 7.106-12.883 olarak belirlenmişken, bootstrap ortalaması 9.990 ve buna ait güven aralığı ise 9.843-10.137 olarak belirlenmiştir.

Bu veriler ışığında, tüm örnek genişliklerinde, jackknife ortalamalarının benzer örnek hacmindeki gerçek ortalama değeriyle aynı olduğu ve bootstrap ortalamasını ise bunlara çok yakın olduğu söylenebilir. Ayrıca tüm örnek genişliklerinde jackknife güven aralıklarının gerçek değer güven aralıklarına göre geniş bir aralığa, bootstrap güven aralıklarının ise daha dar bir güven aralığına sahip olduğu gözlenmiştir.

4. Tartışma ve Sonuç

Örnekleme yöntemleri, istatistik biliminin gelişmesi ve bilgisayar teknolojisinin ilerlemesiyle birlikte son 50-60 yıl içerisinde her geçen gün daha da yaygın kullanılmaktadır.

Modern çağın getirmiş olduğu kolaylıklar sayesinde, bilgisayar kullanımının artmasıyla birlikte, yeniden örnekleme yöntemleri ortaya çıkmıştır. Paket programların kullanımıyla birlikte, bir istatistiğin dağılımını tahmin etmek için normal dağılım şartı yerine, hem normal hem de normal olmayan dağılımlar için yeniden örnekleme yöntemleri kullanılmaya başlanmıştır. [25] çalışmasında; doğrudan kuramsal hesap, monte carlo ve taylor yöntemleri ile bootstrap dağılımını elde etmeyi açıklamıştır. Ayrıca örnek hacmini artırmadan ana kütle parametresi ile tahmin edici arasındaki sapmanın azalacağından bahsetmiştir. Bu bağlamda örnek hacminin farklı örnekleme yöntemleriyle de araştırıldığında örnek hacminin belli bir sayıdan sonra anakütle parametresi ile tahmin edici arasındaki sapmanın azalacağı belirlenmiştir [32]. [33]; tahmin edicinin, parametre için doğru bilgi taşıyıp taşımadığına cevap aramak üzere, standart sapmanın bootstrap tahminini ele almışlardır. Ayrıca jackknife yöntemi ile bootstrap yöntemleri arasındaki ilişkiyi de incelemişlerdir. Bootstrapta güven aralığı yöntemlerine değinerek, bootstrap tekrar sayısının büyük olması gerektiğini vurgulamışlardır. [34] ise farklı bootstrap güven aralıklarını ele almışlardır. [35] bootstrap tekrar sayısında azaltmaya giderek daha etkili bootstrap hesaplamaları yapmış ve bootstrap tekrar sayının, 50 ile 200 arasında olmasının yeterli olduğunu belirtmiştir. jackknife standart sapma değerlerinin nasıl tahmin edileceğini açıklamıştır.

Bootstrap ve jackknife yöntemlerini karşılaştırmak için ortalaması 10 olan ana kütleden 100'lük ve 300'lük örneklerden alınan örneklerin ortalama değerleri incelendiğinde; tüm (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80) örnek genişliklerinde jackknife ortalamalarının gerçek ortalamalarla aynı ve bootstrap ortalamalarının ise gerçek ortalamalardan farklı ancak bunlara çok yakın olduğu söylenebilir. Ayrıca 100'lük ve 300'lük örnek genişliklerinde örneklerin güven aralıkları incelendiğinde; gerçek değere göre bootstrapın güven aralığı daha dar bir aralıkta, jacknifeın güven aralığının ise oldukça geniş bir aralıkta olduğu gözlenmiştir.

Sonuç olarak, bootstrap yöntemi jackknife yöntemine göre tahmin hatalarının daha az olması ve daha dar bir aralıkta güven aralığı vermesi, varyanslarının da daha küçük çıkmasını sağlamaktadır. Ayrıca 300'lük örnek genişliklerinden çekilen örneklere ait güven aralıklarının 100'lük örnek genişliklerinden çekilen örneklere ait güven aralıklarından çok az büyük ve genel olarak bu farkların çok küçük olduğu söylenebilir Böylece, daha güvenilir sonuçlar elde etmek amacıyla çekilen örnek genişliğini artırmak maliyetli ve güç işlemler ortaya çıkarabilmektedir. Kullanımı oldukça kolay olan bootstrap tekrarları yoluyla bu maliyetli ve güç işlemlerden kurtulabilir.

Yazar Katkıları: Yazarlar makaleye eşit katkıda bulunmuştur.

Finansman: Bu araştırma dışarıdan fon almadı.

Çıkar çatışmaları: Yazarlar çıkar çatışması beyan etmemektedir.

Kaynaklar

[1] D. Topuz, "Regresyonda yeniden örnekleme yöntemlerinin karşılaştırmalı olarak incelenmesi," Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Estitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 2002, Niğde.

[2] Y. A. Özdemir, S. T. Şahin Tekin ve A. Esin, "Çözümlü örneklerle örnekleme yöntemlerine giriş," Seçkin Yayıncılık, 2015, Ankara.

[3] M. Yay, "Bootstrap ve jackknife yöntemlerinin otomotiv sanayi üzerine uygulanması," Marmara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Doktora Tezi, 2003, İstanbul.

[4] B. Çil, "İstatistik gözden geçirilmiş 2. baskı," Detay Yayıncılık, 2000, Ankara.

[5] M. R. Chernick, "Bootstrap methods: a guide for practioners and researchers," John Wiley and Sons Inc, 2008, New York.

[6] R. Tarı, "Ekonometri gözden geçirilmiş 9. baskı," Umuttepe Yayınları, 2014, Kocaeli.

[7] K. Sümbüloğlu ve K. Sümbüloğlu, "Biyoistatistik 7. baskı," Hatiboğlu Yayınevi, 1997, Ankara.

[8] R. P. Carver, "The case against statistical significance testing," Harvard Educational Review, 48, 1978, pp. 378-99.

[9] P. Diaconis and B. Efron, "Computer intensive methods in statistics," Scientific American, 248:5, 1983, pp. 116-131.

[10] S. S. Edgington, "Randomization tests (3rd ed.)," Taylor & Francis, 1995, New York.

[11] S. D. Peddada and T. Chang, "Bootstrap confidence region estimation of the motion of rigid bodies," Journal of the American Statistical Association, 91:433, 1996, pp. 231-241.

[12] X. Fan and L. Wang, "Comparability of jackknife and bootstrap results: an investigation for a case of canonical correlation analysis," Journal of Experimental Education, 64, 1996, pp. 173-189.

[13] M. H. Quenouille, "Approximate tests of correlation in time series," Journal of The Royal Statistical Society, 11, 1949, pp. 18-44.

[14] M. H. Quenouille, "Notes on bias in estimation," Biometrika, 61, 1956, pp. 353-360.

[15] J. W. Tukey, "Bias and confidence in not-quite large samples," The Annals of Mathematical Statistics, 29, 1958, p. 614.

[16] F. Şahin, "Jackknife ve bootstrap parametre tahmin yöntemlerinin etkinliğinin araştırılması," Anadolu Üniversitesi Sağlık Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 1993, Eskişehir.

[17] H. Friedl and E. Stampfer, "Jackknife resampling," Encyclopaedia of Econometrics, 2, 2002, pp. 1089-1098.

[18] B. Efron and R. J. Tibshirani, "An Introduction to the bootstrap," Chapman and Hall, 1993, New York.

[19] J. Shao and C. Wu, "A general theory for jackknife variance estimation," The Annals of Statistics, 17:3, 1989, pp. 1176-1197.

[20] C .F. J. Wu, "Jackknife, bootstrap and other resampling methods in regression analysis (with discussions)," The Annals of Statistics, 14:4, 1986, pp. 1261-1350.

[21] C. F. J. Wu, "On the asymptotic properties of the jackknife histogram," The Annals of Statistics, 18:3, 1990, pp. 1438-1452.

[22] J. Shao and T. Dongsheng, “The jackknife and the bootstrap,” Springer-Verlag, 1995, New York.

[23] Ş. Bülbül ve D. Altaş, “Bootstrap yönteminin model seçiminde kullanılması,” III. Ulusal Ekonometri ve İstatistik Sempozyumu, 1998, pp. 1037-1049, Bursa.

[24] S. Duman, “Markow zincirlerinde bootstrap,” Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 2006, Ankara.

[25] B. Efron, “Bootstrap methods: another look at the jackknife,” The Annals of Statistics, 7:1, 1979, pp. 1-50.

[26] J. Fox, “Applied regression analysis, linear models and related methods,” 1997, London.

[27] R. Stine, “Modern methods of data analysis,” Sage Publication, 1990, Newbury.

[28] Ö. Atabey, “Lojistik regresyon modeli ve geriye doğru eliminasyon yöntemiyle değişken seçiminin hipertansiyon riski üzerine uygulamasında bootstrap yöntemi,” Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 2010, Ankara.

[29] M. K. Beşer, “Zaman serilerinde bootstrap çözümlemeleri ve türkiye’de tanzi etkisine uygulaması,” Marmara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü,” Doktora Tezi, 2006, İstanbul.

[30] U. Atalay ve C. İnal, “Geometrik ve iki terimli dağılımların parametrelerinin bootstrap tahminleri,” İstatistik Konferansı, 1999, pp. 37-67, Ankara.

[31] T. J. Diciccio and J. P. Romano, “A review of bootstrap confidence intervals,” Journal of the Royal Statistical Society, 50:3, 1988, pp. 338-354.

[32] H. Eygü and M.S. Özçomak, “Multivariate statistical quality contol based on ranked set sampling”, Asian Social Science, 14, 2017, pp. 1-10.

[33] B. Efron and R. J. Tibshirani, “Bootstrap methods for standart errors, confidence intervals and other measures of statistical accurarcy,” Statistical Science, 1:1, 1986, pp. 54-77.

[34] T. J. Diciccio and R. J. Tibshirani, “Bootstrap confidence intervals and bootstrap approximations,” Journal of the American Statistical Association, 82:397, 1987, pp. 163-170.

[35] B. Efron, “More efficient bootstrap computations,” Journal of the American statistical association, 85, 1990, pp. 79-89.