MERSİN ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM FAKÜLTESİ DERGİSİ
ARAŞTIRMA MAKALESİ
DOI: 10.17860/mersinefd.1443293

MERSIN UNIVERSITY
JOURNAL OF THE FACULTY OF EDUCATION
RESEARCH ARTICLE
2024; 20(2): 175-198

# Matematik Öğretmenleri ile Öğretmen Adaylarının Öğretimsel Açıklamalarının Matematiksel Modeller Bağlamında İncelenmesi

Emine AKTAŞ*
Hayal YAVUZ MUMCU**

**Öz:** Bu araştırmanın amacı, matematik öğretmenleri ile öğretmen adaylarının kesirlerle bölmeye yönelik öğretimsel açıklamalarının matematiksel modeller bağlamında incelenmesidir. Araştırma kapsamında nitel araştırma yaklaşımına uygun olarak durum çalışması yönteminden yararlanılmıştır. Araştırmanın katılımcılarını aynı ilde yer alan farklı devlet okullarında görev yapmakta olan iki matematik öğretmeni ile bir devlet üniversitesinin İlköğretim Matematik Öğretmenliği programında öğrenim görmekte olan iki son sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Katılımcıların tespitinde amaçlı örnekleme yöntemlerinden uygun ve ölçüt örnekleme yöntemleri bir arada kullanılmıştır. Bu araştırmada veri toplama aracı olarak araştırmacılar tarafından oluşturulan sekiz adet açık uçlu soru ile yarı yapılandırılmış görüşmeler kullanılmıştır. Araştırma kapsamında yer alan katılımcıların öğretimsel açıklamalarında kullandıkları matematiksel modeller iki farklı boyutta değerlendirilmiştir. Bunlar matematiksel ve pedagojik boyutlardır. Matematiksel boyutta kullanılan modellerin özelliklerine, pedagojik boyutta ise kullanım düzeylerine yer verilmiştir. Araştırma sonucunda katılımcıların kullandıkları öğretimsel açıklama ve modellerin matematiksel olarak genelde doğru ve geçerli olmakla birlikte ilişkili oldukları matematiksel durumu tüm yönleriyle her zaman yansıtmadığı, pedagojik boyutta ise genel olarak kavramsal düzeye ve problem çözme düzeyine uygun olduğu görülmüştür. Pedagojik boyutta en düşük performans epistemik düzeye aittir. Araştırma sonucunda ayrıca öğretmenlerin kullandıkları öğretimsel açıklama ve modellerin, öğretmen adaylarına nazaran matematiksel ve pedagojik boyutlarda yer alan göstergelerle daha uyumlu olduğu sonucu elde edilmiştir.
**Anahtar Kelimeler:** Öğretimsel açıklama, matematiksel modeller, kesirlerle bölme, öğretmen ve öğretmen adayları.

# Examining Examining in-Service and Pre-Service Mathematics Teachers' Instructional Explanations in the Context of Mathematical Models

**Abstract:** The aim of this research is to examine the instructional explanations of mathematics teachers and pre-service teachers about dividing by fractions in the context of mathematical models. Within the scope of the research, the case study method was used. The participants of the research consist of two mathematics teachers working in different public schools in the same city and two senior students studying in the Primary Mathematics Teaching program of a state university. In this research, eight open-ended questions and semi-structured interviews were used as data collection tools. The mathematical models used by the participants in the study were evaluated in two different dimensions. These are mathematical and pedagogical dimensions. The mathematical dimension includes the features of the models, whereas the pedagogical dimension includes their levels of usage. As a result of the research, it was seen that although the instructional explanations and models used by the participants were generally mathematically correct and valid, they did not always reflect the mathematical situation to which they were related in all aspects, and in the pedagogical dimension, they were generally suitable for the conceptual and problem-solving level. The lowest performance in the pedagogical dimension belongs to the epistemic level. As a result of the research, it was also concluded that the instructional explanations and models used by the teachers were more compatible with the indicators in the mathematical and pedagogical dimensions compared to the pre-service teachers. The findings were discussed in relation to the literature and some suggestions were made in line with the results.
**Keywords:** Instructional explanation, mathematical models, fraction division, teachers and pre-service teachers.

***Öğretmen, Ordu Üniversitesi, Ordu-Türkiye, ORCID: 0000-0001-5530-8887, e-posta:eminealayci@gmail.com.
**** *Sorumlu yazar*, Doç. Dr., Ordu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ordu-Türkiye, ORCID: 0000-0002-6720-509X, e-posta:hayalym52@gmail.com
Bu araştırma ilk yazarın Doç. Dr. Hayal Yavuz Mumcu danışmanlığında yürüttüğü "*Matematik öğretmenleri ile öğretmen adaylarının kesirlerle bölmeye yönelik öğretimsel açıklamalarının matematiksel modeller bağlamında incelenmesi*" isimli yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

Geliş tarihi: 27 Şubat 2024 / Kabul tarihi: 24 Haziran 2024

## Giriş

Öğretimin niteliğini belirleyen en önemli unsurlardan biri öğretmen bilgisidir. Ben-Peretz (2011) tarafından "öğretilecek konuya ilişkin pedagojik ilke ve becerileri kapsayan mesleki bilgi" (s.54) olarak ifade edilen öğretmen bilgisinin son yıllarda öneminin fark edilmesi, söz konusu bilginin daha yakından ele alınarak tanımlanmasına ve geliştirilmesine yönelik çalışmaların artmasına neden olmuştur (Baki, 2013; Bütün, 2012). Öğretmen bilgisi üzerine yürütülen çalışmalar Shulman'ın (1986) öğretmenin bilgisi için geliştirmiş olduğu kuramsal zemine dayanmaktadır. Buna göre öğretmen bilgisi; i) alan bilgisi (content knowledge), ii) pedagojik alan bilgisi (pedagogical content knowledge) ve iii) müfredat bilgisi (curriculum knowledge) olmak üzere üç temel bilgi türünden oluşmaktadır. Alan bilgisi, öğretmenin bir alandaki kavram, ilke ya da kurallara yönelik bilgisinin yanında, bu alandaki kavramların yapısını açıklayabilmedeki ustalığı olarak tanımlanmaktadır (Shulman, 1986). Müfredat bilgisi bir konuyu herhangi bir seviyede öğretmek için var olan müfredatların ve bu müfredatlarla ilgili çeşitli öğretim materyallerinin bilgisi olarak ifade edilebilir. Pedagojik alan bilgisi ise, öğretmenin konuyu nasıl öğreteceğine ilişkin sahip olduğu bilgidir. Bu bilginin temelinde öğretilecek kavram, ilke ve yöntemlerin öğrenci tarafından anlaşılabilir hale getirilmesi yer almaktadır. Bunun için öğretmenin farklı sunuş şekilleri, gösterimleri, analojileri, örnekleri ve açıklamaları bilmesi gerekir (Shulman, 1986).

Öğretmen bilgisi üzerine yürütülen farklı çalışmalar incelendiğinde öğretmenlerin sahip olması gereken bilgi türleri üzerine farklı teori ve modellerin ortaya konulduğu görülmektedir. Gess-Newsome (1999) öğretmen bilgisini temelde bütünleştirici ve dönüştürücü olmak üzere iki farklı kategoride ele almıştır. Bütünleştirici modele göre öğretmen bilgisi konu alan bilgisi, pedagojik bilgi ve bağlam bilgisinden oluşmaktadır. Burada pedagojik alan bilgisi ayrı bir bilgi türü olarak tanımlanmamaktadır. Dönüştürücü modelde ise bundan farklı olarak konu alan bilgisi, pedagojik bilgi ve bağlam bilgisinden oluşan yeni bilgi türüne pedagojik alan bilgisi denilmektedir. Alan yazında bütünleştirici modele örnek olarak Cochran ve diğerleri (1993), dönüştürücü modele örnek olarak ise Magnusson ve diğerlerinin (1999) çalışmaları gösterilebilir. Bunun dışında Grossman (1990) Shulman'ın öğretmen bilgisini, tanımını genişleterek konu alan bilgisi, genel pedagojik bilgi, pedagojik alan bilgisi ve bağlam bilgisi olmak üzere dört ana başlık altında ele almıştır. Park ve Oliver (2008) ise fen eğitimine yönelik olarak yürüttüğü çalışmalarında pedagojik alan bilgisinin anlama ve uygulama boyutlarına sahip olduğunu belirterek ilgili kavramın bileşenlerini müfredat bilgisi, öğrenci anlamalarına yönelik bilgi, değerlendirme bilgisi, öğretim stratejileri bilgisi ve fen öğretimine yaklaşım bilgisi olarak ifade etmiştir (Işıksal-Bostan ve Osmanoğlu, 2016).

Matematik eğitimi söz konusu olduğunda alan yazında öğretmen bilgisi üzerine yürütülen çalışmalardan biri Ball ve diğerlerinin (2008) geliştirmiş olduğu matematiği öğretme bilgisi (mathematical knowledge for teaching) modelidir. Bu modelde Shulman'ın tanımladığı alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisi bileşenlerine ayrılmıştır. Buna göre konu alan bilgisi; i) genel alan bilgisi, ii) uzmanlık alan bilgisi ve iii) ufuk alan bilgisi olarak, pedagojik alan bilgisi ise i) alan ve öğrenci bilgisi, ii) alan ve öğretim bilgisi ve iii) alan ve müfredat bilgisi olarak ifade edilmiştir. Fennema ve Franke'nin (1992) çalışmalarında ise matematiği öğretme bilgisinin bileşenleri i) matematik bilgisi, ii) pedagoji bilgisi, iii) öğrenenlerin matematik biliş bilgisi ve iv) inançlar olarak ele alınmaktadır. Rowland ve diğerleri (2005) ise matematik eğitimi alanında pedagojik alan bilgisi ve alan bilgisinin birlikte incelenmesi amacıyla Dörtlü Bilgi Modeli'ni geliştirmiş ve matematiği öğretme bilgisinin boyutlarını i) temel bilgi, ii) dönüşüm bilgisi iii) beklenmeyen olaylar bilgisi ve iv) ilişki kurma bilgisi olmak üzere dört bileşenle ifade etmişlerdir. Buraya kadar ortaya konulan teorik çerçeveler göz önüne alındığında pedagojik alan bilgisinin öğretmenlerin sahip olması gereken yeterliklerin önemli bir bileşeni olduğu söylenebilir (Gürbüz vd., 2013). Staley (2004) pedagojik alan bilgisinin, öğretmenlerin alana özgü sahip oldukları bilgiyi kullanarak öğrencilerin öğrenme süreçlerini yorumlamalarını ve öğrenciyi bu süreçte yönlendirmelerini sağlayan bilgi türü olduğunu ifade etmektedir. "Pedagojik alan bilgisinin önemli bir diğer yönü ise, öğrencilere konuyla ilgili kavramlarda disiplinli düşünme becerisi kazandırmak ve öğrencilerin kavramları algılamalarına yardımcı olmaktır" (Monte-Sano, 2011, s. 261). Alan yazın incelendiğinde pedagojik alan bilgisi derin olan öğretmenlerin öğrenci hatalarına karşı daha yapıcı davrandıkları, öğrenci hatalarını düzeltmek için daha sabırla cevap verdikleri, öğrencilerin önemli matematiksel düşüncelerini geliştirebilmeleri için tartışabilecekleri ortamları oluşturmaya özen gösterdikleri ve derslerinde doğru açıklamalar yaptıkları görülmektedir (Hill vd., 2008). Bu bağlamda öğretmenler tarafından kullanılan öğretimsel açıklamalar, öğretmenin konuyu öğrenciye aktarma sürecinde kullandığı açıklama, yöntem ve gösterimleri içermektedir ve Rowland ve diğerlerinin (2005) ortaya koydukları dörtlü bilgi modelinin ikinci bileşeni olan dönüşüm bilgisinin içeriğini oluşturmaktadır. Leinhardt ve diğerlerinin (1991, s.89) "öğretmenin öğrencilere konu alan bilgisini ilettiği etkinlik" olarak tanımladığı öğretimsel açıklamaların, sadece sözel ifadeleri içeren bir kavram olmadığı, aynı zamanda öğrencinin anlamlı öğrenmesine yönelik yürütülen tüm faaliyetleri içerdiği belirtilmektedir. Benzer biçimde öğretmenler tarafından ders esnasında yapılan açıklamaların, öğretmenin konu alan (Lachner ve Nückles, 2015) ve pedagojik alan (Ball vd. 2008; Baumert vd., 2010) bilgisinin niteliği ile ilişkili olduğu ifade edilmiştir (Akyıldız, 2019). Bu bağlamda öğretimsel açıklamalar açık ya da örtük olarak öğretmen veya öğrenci tarafından yürütülen pedagojik faaliyetler olarak ele alınabilir (Leinhardt, 2001; Rey ve Fischer, 2013). Öğretim ortamının açık bir parçası olması ve bir öğretmenin pedagojik performansının bütüncül ve daha iyi gözlemlenmesine yardımcı olması nedeniyle bu araştırma kapsamında ilgili kavram pedagojik alan bilgisinin bir bileşeni olarak kullanılmıştır.

**Öğretimsel Açıklamaların İçeriği**

Kavramsal düzeyde öğrenmenin gerçekleştirilmesi için kullanılan öğretimsel açıklamaların nitelikli olması gerekmektedir. Bunun için öğretmenin etkili öğretim yöntem ve pedagojilerini, açıklamaları, temsil ve modelleri iyi bilmesi ve kullanabilmesi gerekmektedir. Farklı bir ifade ile öğretmenin, öğrenme sürecini zorlaştıran ve kolaylaştıran faktörleri bilmesi önemlidir. İyi öğretimsel açıklamalar, öğrencilerin var olan bilgilerinden yola çıkarak oluşturulmalı ve öğrencilerin mevcut kavram ve becerileri üzerine kurulmalı, aynı zamanda öğrencilerin zorluklarını ve kavram yanılgılarını dikkate almalıdır.

Bir dersin farklı bölümlerinde kullanılabilecek olan öğretimsel açıklamaların kullanıldığı durumlar, farklı araştırmacılar tarafından farklı biçimlerde ifade edilmekle birlikte Leinhardt (2001) çalışmasında; matematik öğretiminde öğretimsel açıklamaların konunun niteliğine göre i) İşlemler, fonksiyonlar, algoritmalar ve yinelemeler gibi prosedürel öğeler, ii) Temsiller ve modeller, iii) İlkeler, iv) Bilişsel sorgulamalar olmak üzere dört farklı durumla ilişkili olabileceğini ortaya koymaktadır. Prosedürel öğelerle ilgili öğretimsel açıklamalar, matematiksel ilke ve kuralları kullanarak 'nasıl' sorusuna verilen yanıtları içermekle birlikte, üzerinde çalışılan varlıkların (sayılar, şekiller veya grafikler gibi) özelliklerini de içerir. Schmidt-Thieme (2009) bu tür açıklamaların, bir kişinin cebirdeki herhangi bir hesaplamayı doğru biçimde yapmasından, geometride bir şeklin nasıl çizileceğini açıklamaya kadar birçok eylemin doğru bir şekilde nasıl gerçekleştirilebileceği sorusuna cevap verdiğini ifade etmektedir. Bu kategoride yapılan öğretimsel açıklamalara örnek olarak kesirlerle bölme işleminde ters çevirip çarpma algoritmasının açıklanması gösterilebilir. İkinci olarak temsiller ve modeller öğretimsel açıklamaların içeriğini oluşturabilir. Temsil ve model kavramlarının herkes tarafından ortak kullanılan tek bir doğru anlamı olmamakla birlikte (Lesh ve Doerr, 2000) bu araştırma kapsamında Leinhardt (2001) çalışması referans alınarak kullanılmıştır. İlgili durum alan yazınla ilişkili olarak şu şekilde açıklanabilir. Nemirovsky (1994) matematiksel temsilleri, 'sembol sistemleri' olarak ifade etmekte ve bu bağlamda temsillerin tek bir obje yerine değil benzer objelerin bir kümesini vurgulamak üzere kullanıldığını ifade etmektedir. Matematik öğretim programlarında (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2009, 2013, 2018) benzer şekilde farklı matematiksel gösterimler için genel olarak 'temsil' ifadesinin kullanıldığı görülmektedir. Model kavramı ise Niss (1987) tarafından gerçek yaşam durumlarını temsil etmek için matematiksel kavramlar ve bunlar arasındaki ilişkilerden oluşan bir sistem olarak tanımlanmaktadır. NCTM (2000) dokümanında ortaöğretim seviyesinde öğrencilerin fiziksel, sosyal ve matematiksel olguları modellemek için temsilleri kullandıkları ifade edilmektedir. Dolayısıyla modelleme süreçlerinde matematiksel temsillerin kullanıldığı, buna bağlı olarak da temsillerin bir çeşit matematiksel model olarak işlev gördüğü söylenebilir. Alan yazın incelendiğinde matematiksel modellerin genel olarak matematiksel ilişkileri ve sistemlerin özelliklerini göstermek üzere, temsillerin ise matematiksel nesnelerin özelliklerine dikkat çekmek üzere kullanıldığı, bununla birlikte öğretim kademesine bağlı olarak farklı çalışmalarda matematiksel ilişkileri vurgulayan her tür temsilin matematiksel model olarak adlandırıldığı görülmektedir. Kesir öğretimi söz konusu olduğunda ise kesirlerin anlamı üzerine öğrenme ortamlarında kullanılan farklı temsil ve gösterimler genel olarak model olarak adlandırılmaktadır (Turan, 2023). Temsiller ve modellerin kullanıldığı öğretimsel açıklamalara örnek olarak, cebir öğrenme alanına ilişkin iki kare farkı özdeşliğinin veya çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğinin modellenmesi durumları gösterilebilir. Üçüncü olarak öğretimsel açıklamalar, herhangi bir disiplin alanının işleyişini ve sınırlarını tanımlayan ilkeleri ortaya koymak veya açıklamak için kullanılabilir. Prensipleri (ilkeleri) içeren öğretimsel açıklamalar, matematiksel bazı eylemlerin önceki varsayımlarla tutarlı olarak nasıl çalıştığı, bazılarının ise çalışmadığı fikrini öğretmeyi hedeflemektedir. İlkeler hakkındaki öğretimsel açıklamalar "ne" veya "neden" sorularına verilen cevaplardır; yani kavramsal tanımlara, olgulara, nedenlere veya ilişkilere atıfta bulunabilirler. Bu kategoride yapılan öğretimsel açıklamalara örnek olarak ondalık kesir kavramı ve kesir ilişkisi verilebilir. Burada yapılan öğretimsel açıklamada ondalık ifadelerde kullanılan virgülün ne anlama geldiği matematiksel ilkelerle ilişkili olarak açıklanabilir. Son olarak bilişsel sorgulamalar kategorisi, matematiksel akıl yürütme süreçlerini ele almaktadır ve matematiksel anlamlandırma süreçleriyle ilgilidir. Bu kategori, açıklanacak olguya bağlı olarak "ne", "nasıl" veya "neden" sorularıyla ilişkilendirilebilir. Bu kategoride yapılan öğretimsel açıklamalara örnek olarak bölme işleminde bölünen sayı içerisinde bölen sayının bulunamadığı durumlarda bölüme "0" yazılması durumu gösterilebilir.

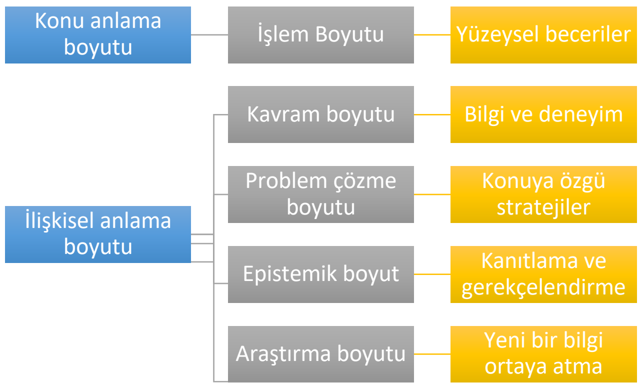
Burada ifade edilen durumlar dışında öğretimsel açıklamalar farklı birçok amaca hizmet edebilir. Bir dersin girişinde birincil öğretim stratejisi olabilir, öğrenci ile bire bir çalışmalarda kullanılabilir, öğrenci sorularına cevap vermek amacıyla kullanılabilir, öğrencilerde kavram yanılgısına dair ipuçları gözlendiğinde söz konusu yanılgıları gidermek veya öğrencilerin sahip oldukları hata/yanılgıların farkına varmalarını sağlamak amacıyla kullanılabilirler (Charalambous vd., 2011; Perry, 2000; Wittwer ve Renkl, 2008). Grossman ve McDonald (2008), Leinhardt ve diğerleri (1991) ile Martin (1970) öğretimsel açıklamaların kullanım amaçlarını i) yeni bir içeriği öğrenciye tanıtma, ii) öğrencilerin sorularını yanıtlama ve iii) öğrencilerin sahip oldukları hata veya kavram yanılgıların farkına varmalarını sağlama olarak ifade etmişlerdir.

### Öğretimsel Açıklamaların Değerlendirilmesi

Kinach (2002a) iyi bir öğretimsel açıklama için; i) 'niçin' sorusunun cevabını verebilmeli, ii) matematiksel gerekçeler öğretimsel açıklamaların temelini oluşturmalı, iii) açıklamalar, problem bağlamının mantığını kullanarak matematiksel sembol ve gösterimlerin farklı anlamlarını ayırt etmeyi sağlamalı, iv) manipülatifleri veya diğer temsilleri/gösterimleri içeren açıklamalar, her matematiksel fikri farklı şekilde simgeleyerek farklı matematiksel anlamları ayırt edebilmeli ifadelerini kullanmaktadır. Aynı araştırmada öğretimsel açıklamalarda yer alan gösterimlerin sahip olması gereken niteliklerden bazıları i) geçerlilik, ii) kapsamlılık, iii) tutarlılık ve iv) tamlık olarak ifade edilmektedir. Geçerlilik; öğretimsel açıklamalarda kullanılan gösterimlerin mevcut matematiksel duruma uygun (geçerli) olmasıdır. Kapsamlılık; öğretimsel açıklamalarda kullanılan ifade ve gösterimlerin kullanıldığı bağlamla ilişkili tüm matematiksel durumlar için işlevsel (kullanılabilir) olmasıdır. Kesirlerle toplama işlemi için sayı doğrusu modelinde işe koşulan algoritma ve prosedürlerin, farklı türde her kesrin (tam sayılı kesir, negatif kesir vb.) işleme sokulması durumunda kullanılabiliyor olması bu duruma örnek olarak gösterilebilir. Tutarlılık; birbiriyle ilişkili durumlar üzerinden yürütülen öğretimsel açıklamaların birbiriyle tutarlı olmasıdır. İzomorfizm ise kullanılan öğretimsel açıklamaların, kavramların farklı anlamlarını ayırt etmeyi sağlaması olarak açıklanabilir. Kinach (2002b) öğretimsel açıklamaları pedagojik alan bilgisi ekseninde ele alarak aşağıdaki gibi (Şekil 1) karakterize etmiştir.

**Şekil 1.**

*Öğretimsel Açıklamalar İçin Değerlendirme Çerçevesi (Kinach'tan (2002b) uyarlanmıştır.)*




İlgili çalışmada öğretimsel açıklamalar konu anlama ve ilişkisel anlama olmak üzere iki farklı boyutta ele alınmaktadır. Konu anlama boyutu (işlemsel boyut), öğretmenlerin öğretimsel açıklamalarında sadece tanım, yöntem, kural ve prosedürleri açıklaması, ancak bunların altında yatan nedenleri açıklamaması durumları için kullanılmaktadır. Kinach işlemsel boyutta yapılan öğretimsel açıklamaların matematiksel süreçlerde yürütülen işlem ve algoritmaların gerçek anlamlarını ve gerekçelerini içermediğini ve tamamen kural temelli ezberi bilgiye yer verdiğini ifade etmiştir. İlişkisel boyut ise; i) kavram boyutu, ii) problem çözme boyutu, iii) epistemik boyut ve iv) araştırma boyutu ile ifade edilmektedir. İlgili çalışmalarda bu boyutlar arasında hiçbir hiyerarşi olmadığı belirtilmiştir. Baki (2013) kavramsal boyutta yapılan öğretimsel açıklamaları ne ve nasıl sorularının arkasında yatan nedenlerin ortaya konularak, matematiksel süreçlerin açıklanması olarak ifade etmektedir. Problem çözme boyutunda yapılan öğretimsel açıklamalarda öğretmenler tarafından, tümdengelimli düşünme veya matematiksel modelleme gibi genel analitik stratejiler ve disipline özgü problem çözme teknikleri kullanılmaktadır. Epistemik düzeyde yürütülen öğretimsel açıklamalar, matematiksel düşüncelerin gerekçelerini içermektedir. Son olarak, araştırma seviyesindeki anlayış ise, bir disiplinde yeni bilgi veya teorilerin üretilmesini ifade etmektedir (Perkins, 1992). Bu düzeyde yapılan öğretimsel açıklamalar öğrencilerin yeni bilgiye ulaşmaları amacıyla araştırma ve sorgulama yapmaya yönlendirilmelerini içermektedir.

Öğretimsel açıklamalar özellikle matematik eğitimi söz konusu olduğunda soyut kavramların öğrenciler tarafından tam olarak anlaşılabilmesi açısından oldukça önemlidir. Bu bağlamda öğrenciler için anlaşılması güç kavramlardan biri olan 'kesir' kavramının öğretim süreçlerinde, öğretimsel açıklamaların nasıl kullanıldığının araştırılması önem arz etmektedir. Zira yapılan çalışmalar öğrencilerin tüm kademelerde kesir kavramını öğrenmekte zorlandıklarını göstermektedir. Amerika Birleşik Devletleri'nde uygulanan NAEP (The National Assessment of Educational Progress) araştırma sonuçları, öğrencilerin kesirleri ve kesir işlemlerini anlama konusunda güçlük yaşadıklarını göstermektedir (Sowder ve Wearne, 2006). Yürütülen farklı araştırmalarda da (Biber vd., 2013; Doğan, 2018; Macit, 2019; Özer, 2020; Şiap ve Duru, 2004; Van de Walle vd., 2004; Yurtsever, 2012) kesirler ve kesirlerle işlemler konusunun öğrenciler tarafından anlaşılması zor konuların başında yer aldığı ifade edilmektedir. Bununla birlikte birçok araştırmacı (Bulgar, 2003; Işık ve Kar, 2012; Kocaoğlu ve Yenilmez, 2010; Olkun ve Toluk-Uçar, 2012; Tirosh, 2000) kesirlerle işlemlerde öğrencilere en zor gelen ve öğrencilerin çoğu zaman düşük performans sergiledikleri işlemin bölme işlemi olduğunu ifade etmektedir. Bu bağlamda kesir kavramının anlamlı öğretimi adına, somutlaştırılması, farklı temsil ve gösterim biçimleriyle desteklenmesi önemlidir.

Alan yazında yer alan farklı birçok araştırmada (Ball, 1993; Behr vd., 1983; Erdem vd., 2015; İpek vd., 2005; Lamon, 1996; Parmar, 2003; Toluk-Uçar, 2009) kesirlerin öğretiminde model kullanılması gerektiği vurgulanmaktadır. Charalambous ve diğerleri (2011) ilişkisel anlamayı sağlayan eksiksiz, hatasız ve ilişkilendirilmiş açıklamaların genel olarak bilinen temsiller/gösterimler ve örnekler üzerine inşa edildiğini ifade etmektedir. Dolayısıyla bu araştırmada özellikle kesirlerle bölmeye yönelik olarak günümüzde öğreticiler tarafından kullanılan öğretimsel açıklamaların matematiksel modeller bağlamında incelenmesi hedeflenmektedir.

Alan yazın incelendiğinde öğretmen ve öğretmen adaylarının kesir kavramına yönelik öğretimsel açıklamalarını ele alan farklı çalışmalar (Bayazit vd., 2011; Charalambous, 2008; Charalambous vd., 2011; Çelik ve Çiltaş, 2011; Duran, 2017; Inoue, 2009; Junior, 2021; Toluk Uçar, 2010, 2011; Türnüklü ve Yeşildere, 2007) olmakla birlikte öğretimsel açıklamalarda kesir kavramına yönelik kullanılan farklı temsil ve modellerin incelendiği çalışmaların ulusal alan yazın için (Bayazit vd., 2011; Çelik ve Çiltaş, 2015; Duran, 2017) oldukça sınırlı olduğu görülmektedir. Bu çalışmalardan biri olan Bayazit ve diğerleri (2011) çalışması incelendiğinde ilköğretim matematik öğretmenlerinin model kullanımıyla ilgili düşüncelerinin ortaya çıkarıldığı ve tam sayılar ve kesirler konusunda ders kitaplarında verilen modelleri anlama ve model oluşturma becerilerinin incelendiği görülmektedir. İlgili araştırmada öğretmenlerin model oluşturma becerileri tam sayı ve kesir kavramları ile ilgili belirli durumlar üzerinden ele alınmaktadır. Çelik ve Çiltaş (2015) ise matematik öğretmenlerinin kesirlerle ilgili olarak matematiksel modelleri kullanma durumlarına odaklanmışlardır. Burada ifade edilen her iki çalışmada da öğretimsel açıklama vurgusu bulunmamaktadır. Bu çalışmalardan farklı olarak Duran (2017) ise öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölmeye yönelik kullandıkları modelleri pedagojik alan bilgisi bağlamında incelemişlerdir. İlgili çalışmada katılımcıların kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinin öğretimine yönelik olarak yürüttükleri dersler incelenmiş ve öğrenci bilgisi bağlamında değerlendirilmiştir. Dolayısıyla Duran (2017) çalışmasında katılımcıların öğretimsel açıklamalarına yer verildiği ve değerlendirildiği görülmektedir.

Burada sözü edilen çalışmalardan farklı olarak bu çalışmada matematik öğretmenleri ve öğretmen adaylarının kesirlerle bölmeye yönelik öğretimsel açıklamalarının matematiksel modeller bağlamında incelenmesi amaçlanmaktadır. Çalışma kapsamında öğretimsel açıklamaların kullanım durumlarına bağlı olarak farklı senaryolar üzerinden veriler toplanmış ve kesirlerle bölme işlemi özelinde ayrıntılı olarak incelenmiştir. Çalışma sonuçları ile öğrenciler tarafından anlaşılması güç olan konulardan birine yönelik olarak günümüzün ve geleceğin matematik sınıflarındaki uygulamalara bir ışık tutularak, öğretim ortamlarının niteliğini geliştirmeye yönelik farklı öneriler ortaya konulabilecektir. Bu bağlamda bu araştırmanın ulusal alan yazına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

## Yöntem

### Araştırma Modeli

Bu araştırma nitel bir tasarıma sahip olup, çalışma sürecinde katılımcıların kullandıkları öğretimsel açıklamaların ayrıntılı veriler toplanarak derinlemesine incelenmesi amacıyla durum çalışması yöntemi kullanılmıştır. Durum çalışması, çalışılan olguyu kendi gerçekliği içerisinde sistematik ve çok yönlü olarak derinlemesine inceleme fırsatı olan ve ortaya çıkan durumu betimlemeye imkân tanıyan araştırma desenidir (Cohen vd., 2007; Yin, 2017). Çalışma kapsamında farklı durum çalışması türlerinden bütüncül tek durum deseni kullanılmıştır. Bu tür genellikle karmaşık bir olayı/ durumu anlamak veya neden-sonuç ilişkilerini belirlemek için kullanılır. Ayrıca bu tür çalışmalarda tek bir durumda birden fazla analiz biriminin varlığı söz konusudur (Yin, 2017). Bu çalışmaya katılan her öğretmen ve öğretmen adayı farklı bir analiz birimi olarak ele alınmış ve katılımcıların öğretimsel açıklamalarında matematiksel modelleri kullanma durumları ayrıntılı olarak incelenmiştir. Dolayısıyla ilgili türün bu çalışma için uygun olduğu kabul edilmiştir.

### Katılımcılar

Bu araştırmanın katılımcılarının tespitinde amaçlı örnekleme yöntemlerinden uygun örnekleme ile ölçüt örnekleme yöntemleri bir arada kullanılmıştır. Uygun örnekleme yönteminde katılımcılar ulaşılması kolay, araştırma için uygun ve gönüllü bireylerden seçilmektedir (Gravetter ve Forzano, 2012). Ölçüt örneklemede ise daha önceden belirlenmiş bazı önemli ölçütleri karşılayan durumları çalışmak ve gözden geçirmek üzere katılımcılar belirlenmektedir (Patton, 2014). Buna göre bu araştırmanın katılımcıları araştırmacının yakın çevresinde yer alan öğretmen ve öğretmen adaylarından seçilmiştir. Ayrıca çalışılacak öğretmenlerin en az 5 yıl mesleki deneyime sahip olmaları ve yüksek lisans yapıyor olmaları, öğretmen adaylarının ise lisans süreçlerinin son basamağında ve akademik başarı olarak sınıf ortalamasının orta veya üst grubunda bulunan öğrenciler arasında yer almaları ölçüt olarak belirlenmiştir. Araştırmanın amacı doğrultusunda katılımcıların kesir öğretiminde kullanılan matematiksel modellere ilişkin bilgi sahibi olmaları gerekmektedir. Bu nedenle katılımcıların seçiminde sözü edilen ölçütler belirlenmiştir. Zira katılımcı öğretmenler yüksek lisans sürecinde, öğretmen adayları ise lisans süreçlerinde matematik eğitiminde model kullanma durumlarına yönelik dersler almışlardır. Buna göre araştırmanın katılımcılarını iki matematik öğretmeni ile bir devlet üniversitesinin İlköğretim Matematik Öğretmenliği programında öğrenim görmekte olan iki son sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Bu öğretmenlerden biri 16, diğeri ise 11 yıllık mesleki deneyime sahiptir. Araştırmaya gönüllü olarak katılan öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının gerçek isimleri gizli tutulmuş ve öğretmenlerin isimleri K1, K2; öğretmen adaylarının isimleri ise K3, K4 şeklinde kodlanmıştır.

**Veri Toplama Araçları**

Bu araştırmada yer alan öğretmen ve öğretmen adaylarının öğretimsel açıklamalarını değerlendirmek amacıyla araştırmacılar tarafından oluşturulan sekiz adet açık uçlu soru ile yarı yapılandırılmış görüşmeler kullanılmıştır.

***Açık uçlu sorular***

Veri toplama aracında yer alan soruların oluşturulmasında araştırma kapsamında geliştirilen genel çerçeve (Şekil 2) kullanılmış ve Charalambos vd. (2011) ile Charalambos (2008) çalışmalarından, kendileri ile iletişime geçilerek ve izinleri alınarak yararlanılmıştır.

**Şekil 2.**

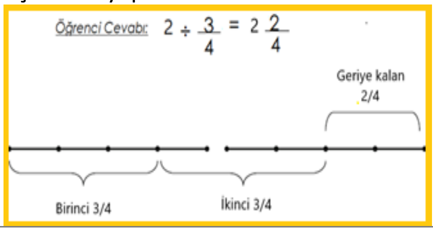
*Veri Toplama Aracında Yer Alan Soruların Çerçevesi*


Buna göre veri toplama aracında yer alan soruların bazıları Tablo 1'de verilmektedir. Bu sorulardan 1, 2, 4 ve 8. sorular araştırmacılar tarafından oluşturulmuş, 3, 5, 6 ve 7. soruların oluşturulmasında ise Charalambos (2008) ile Charalambos ve diğerleri (2011) çalışmalarından yararlanılmıştır. Veri toplama aracında yer alan sorulardan 1, 2, 3, 4 ve 5. sorular yeni bir içeriği öğrenciye tanıtma, 6. soru öğrenci sorularını yanıtlama, 7. soru öğrencilerin sahip oldukları hata veya kavram yanılgılarının farkına varmalarını sağlama, 8. soru ise epistemik düzeyde matematiksel ilkelerin anlamını açıklama durumlarına yönelik öğretimsel açıklamalar kullanmayı gerektirmektedir. Veri toplama aracında yer alan soruların geçerlik ve güvenirliğine yönelik olarak ön uygulama (pilot çalışma) gerçekleştirilmiş, ayrıca matematik eğitimi alanında uzman iki öğretim üyesi ve iki matematik öğretmeninin görüşlerinden yararlanılmıştır. Bu süreçte veri toplama aracında yer alacak olan soruların amaç, içerik ve düzey kategorilerine göre farklı durumları içerecek şekilde nasıl oluşturulabileceği üzerinde durulmuştur.  Araştırmanın amacı doğrultusunda katılımcıların oluşturacağı öğretimsel açıklamaların farklı amaçlara yönelik, farklı içeriğe sahip ve farklı düzeylerde oluşturulabilmesi sağlanmaya çalışılmıştır. Süreç sonunda uzmanlar ve araştırmacılar tarafından önerilen soruların çözümleri üzerine tartışılarak, Tablo 1'de yer alan kategoriler oluşturulmuştur.

**Tablo 1.**

*Veri Toplama Aracında Yer Alan 1, 2, 6 ve 7. Sorular*

| Sorular | Amaç | İçerik | Düzey |
|---|---|---|---|
| 1<br>Aşağıdaki işlemleri sayı doğrusu ve alan modellerinden yararlanarak öğrencilerinize anlatıyormuş gibi açıklayınız.<br>a) $3/2 \div 2=?$<br>b) $4 \div 3/5=?$<br>c) $½ \div 3/5 =?$ | Yeni bir içeriği öğrenciye tanıtma | Prosedürel Öğeler<br>Temsiller<br>Bilişsel Sorgulamalar | Kavram Düzeyi |
| 2<br>Kesirlerle bölme işlemini ilk kez öğrenen öğrencilerinize, işlemin algoritmasını öğretmek için matematiksel modellerden yararlanarak geliştireceğiniz öğretim sürecinde kullanacağınız açıklamaları ayrıntılı olarak yazınız. | Yeni bir içeriği öğrenciye tanıtma | Prosedürel Öğeler<br>Temsiller<br>Bilişsel Sorgulamalar | Kavram Düzeyi |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6<br>Yukarıdaki (soru 5) problemi sınıf ortamında tartışmaya açtığınızı düşünelim. Aşağıdaki fikirleri öne süren öğrencilerinize (Ö1, Ö2 ve Ö3) yapacağınız açıklamaları ayrıntılı olarak yazınız. | Öğrencilerin sorularını yanıtlama/dönüt verme | Prosedürel Öğeler<br>Temsiller<br>Bilişsel Sorgulamalar | Kavram Düzeyi<br>Problem Çözme Düzeyi |
| Ö1: 4 saat 240 dakikadır. 1 saatin ¾'ü 45 dakikadır. 240'ı 45'e bölersek bölüm 5 kalan 15 olur.<br>Ö2: Bu çözüm bence doğru olamaz çünkü problemin çözümü için ben 4÷3/4 işlemini yaptım ve 5 1/3 buldum. Halbuki 15 dakika 1saatin 1/3'ü değil çeyreğidir.<br>Ö3: Bence haklı olamazsın çünkü problem 4'te birlerden bahsediyor sen nasıl 3'te 1 cevabını buluyorsun? | | | |
| 7<br>2 ÷ ¾ işlemi için aşağıdaki modelleri kullanan bir öğrencinizin yanılgısını fark etmesine yönelik nasıl bir açıklama yaparsınız?<br><br> | Öğrencilerin sahip oldukları hata veya kavram yanılgıların farkına varmalarını sağlama | Prosedürel Öğeler<br>Temsiller<br>Bilişsel Sorgulamalar | Kavram Düzeyi |

***Yarı yapılandırılmış görüşmeler***

Bu araştırmada öğretmen ve öğretmen adaylarının kullandıkları öğretimsel açıklamaların ayrıntılı olarak çalışılabilmesi, bir başka ifade ile verilerin ayrıntılandırılabilmesi amacıyla yarı yapılandırılmış görüşmeler kullanılmıştır. Görüşme süreçleri katılımcıların açık uçlu sorulara verdikleri yazılı yanıtlar üzerinden gerçekleştirilmiş ve bu süreçte kendilerine herhangi bir süre sınırlaması yapılmamıştır. Elde edilen veriler ses kaydı alınarak saklanabilir hale getirilmiştir. Yarı yapılandırılmış görüşme süreçlerinde yer alan yapılandırılmış sorulardan/ifadelerden bazıları 'Oluşturduğunuz matematiksel çözümü problemle ilişkili olarak öğrencilerinize anlatıyormuş gibi ifade ediniz', 'Bu problemin çözümünde kullandığınız matematiksel modeli/modelleri problemle ilişkili olarak açıklayınız.' ve 'Kullandığınız matematiksel modelin gerekçesini (bu modeli niçin tercih ettiğinizi) kavramlarla ilişkili olarak açıklar mısınız?' biçimindedir.

**Ön Uygulama (Pilot Çalışma)**

Araştırma kapsamında oluşturulan açık uçlu soruların çalışmanın amacına uygunluğuna yönelik olarak pilot çalışma gerçekleştirilmiştir. Bu süreçte asıl çalışmanın katılımcıları ile benzer özellikler gösteren 2 matematik öğretmeni ve 2 öğretmen adayı ile çalışılmıştır. Pilot çalışma süreci sonunda açık uçlu sorulardan bazıları veri toplama aracından çıkarılmış, bazı sorularda ifade değişikliklerine gidilmiş, bazı sorularda ise kullanılan kesir sayıları değiştirilmiştir. Buna göre pilot çalışma sonucunda bazı katılımcıların 2. soru için matematiksel modellere yer vermediği gözlenmiş ve soruya 'matematiksel modellerden yararlanarak' ifadesi eklenmiştir. Bununla birlikte birinci soruda yer alan kesir sayıları pilot çalışma sonucunda basit kesir olarak değiştirilmiştir. İlgili süreç sonunda son hali verilen sorular için tekrar uzman görüşü alınmıştır. İkinci uzman görüşü sürecinde herhangi bir değişiklik önerisi yapılmamıştır. Ayrıca bu aşamada soruların amaç, içerik ve düzey kategorilerine uygunluğunu tespit etmek üzere kodlayıcılar arası güvenirlik hesabı yapılmış, ilgili değer 0.83 olarak hesaplanmıştır. Bu süreçte dört kodlayıcı yer almıştır. Güvenirlik hesabında kodlayıcılar arası Güvenirlik Yüzdesi = [Görüş Birliği/(Görüş Birliği+Görüş Ayrılığı)] formülünden (Miles ve Huberman, 1994) yararlanılmıştır.

Kodlayıcılar arası güvenirlik hesabında üç farklı güvenirlik yüzdesi hesaplanmış ve bunların ortalamaları alınmıştır. Amaç, içerik ve düzey kategorileri için ilgili değerler sırasıyla 1, 0.75 ve ve 0.75'dir. Amaç kategorisinde dört durum söz konusudur ve dört kodlayıcı da durumların tamamı için hemfikir olmuşlardır. İçerik ve düzey kategorilerinde ise kodlayıcılar dört farklı durumun üçünde hemfikir olmuşlardır, dolayısıyla bu kategoriler için güvenirlik yüzdesi 0.75 olarak hesaplanmıştır. Bu değerlerin ortalaması 0.83'tür.

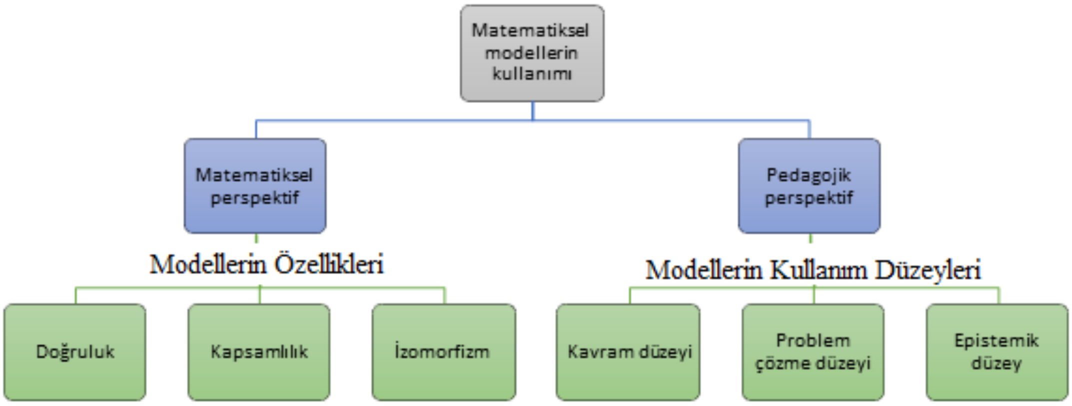
**Veri Toplama Süreci**

Bu araştırma kapsamında yürütülen asıl ve pilot çalışma süreçlerinde yer alan öğretmenler aynı ilde görev yapan ve belirlenen ölçütleri taşıyan, öğretmen adayları ise aynı sınıfta öğrenim görmekte olan ve ilgili ölçütleri taşıyan bireyler arasından gönüllülük esasına göre seçilmiştir. Çalışma sürecine yönelik olarak Ordu Üniversitesi Sosyal ve Beşerî Bilimler Araştırmaları Etik Kurulu'nun 15.09.2021 tarihli 2021-149 sayılı izni alınmıştır.

**Verilerin Analizi**

Çalışma kapsamında yer alan öğretmen ve öğretmen adaylarının veri toplama aracı olarak kullanılan açık uçlu sorulara verdikleri yanıtların değerlendirilmesinde araştırmacılar tarafından oluşturulmuş olan değerlendirme çerçevesi (Şekil 3) ve bu çerçeve kapsamında yer alan her bir içerik ile ilgili olarak yürütülen görüşme süreçlerinden yararlanılmıştır. İlgili çerçevenin oluşturulmasında Kinach (2002a, 2002b) çalışmalarından yararlanılmıştır. Buna göre katılımcıların kullandığı öğretimsel açıklamalar, matematiksel ve pedagojik olmak üzere iki farklı boyutta değerlendirilmiştir. Bu boyutların oluşturulmasında araştırmanın yapısına uygun olarak öğretimsel açıklamalarda kullanılan matematiksel modellerin sahip olabileceği özellikler dikkate alınmıştır.

**Şekil 3.**
*Öğretimsel Açıklamaların Matematiksel Modeller Bağlamında Değerlendirme Çerçevesi*




Yapılan alan yazın taramasına bağlı olarak öğretimsel açıklamalarda kullanılan matematiksel modellerin, matematiksel olarak doğruluğu ve bunun yanında ilgili duruma uygun biçimde kullanılıp kullanılmadığı boyutlarının öne çıktığı görülmüştür. Kinach çalışmalarında kullanılan kategoriler arasından belirlenen boyutlara uygun olanları seçilerek ilgili yapı araştırmacılar tarafından oluşturulmuştur. Veri analizi sürecinde araştırmacılar her bir boyut ve bileşenleri için oluşturulmuş olan göstergelere göre birlikte hareket etmişlerdir. Buna göre araştırmacılar mevcut açıklamaların hangi göstergeyle uyumlu olduğuna karar vererek, her bir açıklamayı uygun olduğu biçimde kodlamışlardır. Uyumsuzluk durumlarında veriler tekrar gözden geçirilmiş, gerektiği durumlarda uzman görüşlerinden yararlanılmıştır.

Araştırma sürecinde katılımcıların yanıtlarının kodlanmasında her bir kategori için ilgili sorunun özelliğine bağlı olarak farklı betimlemeler kullanılmıştır. Buna göre doğruluk kategorisinde katılımcı yanıtlarında yer alan matematiksel modeller, ilgili durumla tam olarak ilişkili ise ve soruda yer alan matematiksel durumu doğru biçimde yansıtıyorsa kullanılan modeller "doğru/geçerli" olarak, kullanılan modeller mevcut durumla kısmen uyumlu olmakla birlikte, matematiksel içeriğin tüm yönlerini tam olarak yansıtmıyorsa "kısmen doğru/kısmen geçerli" olarak, mevcut durumla hiçbir şekilde uyumlu değilse "doğru değil/geçersiz" olarak kodlanmıştır. Katılımcı yanıtlarında herhangi bir modele yer verilmemiş ise kullanılan öğretimsel açıklamanın matematiksel olarak doğruluğu dikkate alınmıştır.

Kapsamlılık kategorisinde kullanılan modeller ilgili olduğu matematiksel kavram veya ilişkileri tam olarak ifade ediyorsa "kapsamlı", diğer durumlarda ise "kapsamlı değil" olarak kodlanmıştır. Kullanılan öğretimsel açıklamalarda matematiksel modellere (gerektiği durumlarda birden fazla) yer verme durumu da bu kategori altında değerlendirilmiştir. İzomorfizm kategorisinde ise kullanılan modeller mevcut duruma ilişkin farklı matematiksel anlamları ayırt etmeyi sağlayıp sağlamama durumuna göre değerlendirilmiştir. Araştırmada yer alan tüm soruların içeriğinde bölme işlemine ilişkin modeller kullanılıyor olmasına bağlı olarak burada modellerin bölmenin farklı anlamlarını (gruplama-paylaştırma) ayırt etme durumları dikkate alınmıştır. Matematiksel modellere yer vermeyen açıklamalarda izomorfizm, öğretimsel açıklamaların içeriğine bağlı olarak değerlendirilmiştir.

Kavram düzeyi kategorisinde kullanılan açıklama ve modellerin mevcut durumu kavramsal düzeyde yansıtıp yansıtmadığı dikkate alınmıştır. Buna göre katılımcılar öğretimsel açıklamalarında kavramsal düzeye uygun olarak matematiksel modellere yer vermiş ise modeller 'uygun', katılımcılar modelleri kavramsal düzeye tam olarak uygun biçimde kullanamamış ise 'kısmen uygun', modeller ilgili oldukları kavramlar için işlemsel düzeyde kalmış ve 'niçin' sorusunun cevabını vermeye hizmet etmiyor ise 'uygun değil' olarak kodlanmıştır. Model içermeyen durumlarda katılımcılar tarafından kullanılan açıklamalar dikkate alınmıştır. Problem çözme düzeyi kategorisinde kullanılan modellerin bir problem bağlamı içerisinde kullanılması söz konusudur. Buna göre modeller kullanılan (kurulan veya çözülen) problem durumuyla uyumlu biçimde kullanılmış ise 'uygun', kısmen uyumlu ise 'kısmen uygun', uyumsuz ise 'uygun değil' olarak kodlanmıştır. Son olarak epistemik düzey için kullanılan modellerin matematiksel ispat süreçlerine uygun biçimde kullanılması dikkate alınmıştır ve modeller matematiksel ispatın bir parçası olarak doğru biçimde kullanılmış ise 'uygun', kullanılan modeller matematiksel ispat süreçleriyle ilişkili olmakla birlikte ilgili içeriği tam olarak yansıtmıyorsa 'kısmen uygun', kullanılan modeller matematiksel ispat süreçleriyle hiçbir şekilde ilişkili değilse 'uygun değil' olarak kodlanmıştır. Buna göre veri analizi sürecinin genel çerçevesi Tablo 2'de verilmiştir.

**Tablo 2.**

*Veri Analizi Süreci Genel Çerçevesi*

| | Ölçütler | Açıklamalar/Göstergeler | İlgili Sorular | Betimlemeler |
|---|---|---|---|---|
| Matematiksel Perspektif | Doğruluk | Kullanılan matematiksel modellerin mevcut duruma uygun (geçerli) oluşunu ifade etmektedir. | Her bir soru üzerinden | Kullanılan matematiksel model;<br>Doğrudur/ Geçerlidir.<br>Kısmen doğrudur/ Kısmen geçerlidir.<br>Doğru değildir/ Geçersizdir. |
| | Kapsamlılık | Kullanılan matematiksel modellerin ilgili olduğu matematiksel kavram veya ilişkileri tam olarak (tüm yönleriyle) ifade etmesidir. | Her bir soru üzerinden | Kullanılan matematiksel model;<br>Kapsamlıdır.<br>Kapsamlı değildir. |
| | İzomorfizm | Kullanılan matematiksel modellerin farklı anlamaları ayırt etmeyi sağlamasıdır. | Soru 3<br>Soru 5<br>Soru 6 | Kullanılan matematiksel model farklı matematiksel anlamları ayırt etmeyi;<br>Sağlar.<br>Sağlamaz. |
| Pedagojik Perspektif | Kavram Düzeyi | Kullanılan modeller öğretimsel açıklamalarda "niçin" sorusunun cevabını vermeye yönelik olarak kullanılmaktadır. | Her bir soru üzerinden | Kullanılan matematiksel model kavramsal düzeye;<br>Uygundur.<br>Kısmen uygundur.<br>Uygun değildir. |
| | Problem Çözme Düzeyi | Kullanılan modeller problem çözme ve kurma süreçlerinde kullanılabilmektedir. | Soru 4<br>Soru 5<br>Soru 6 | Kullanılan matematiksel model problem çözme düzeyine;<br>Uygundur.<br>Kısmen uygundur.<br>Uygun değildir. |
| | Epistemik Düzey | Kullanılan modeller matematiksel ilişkilerin ispatlanması süreçlerinde matematiksel ilkelerle ilişkili olarak kullanılabilmektedir. | Soru 8 | Kullanılan matematiksel model epistemik düzeye;<br>Uygundur.<br>Kısmen uygundur.<br>Uygun değildir. |

Tablo 2 göz önüne alındığında katılımcılara uygulanan sekiz farklı soru için yanıt verilen ve araştırma kapsamında ele alınarak incelenen toplamda on üç farklı durumun mevcut olduğu görülmektedir. Farklı kategoriler göz önüne alındığında ise doğruluk/geçerlik ve kapsamlılık kategorisinde 13, izomorfizm kategorisinde 4, kavram düzeyi kategorisinde 13, problem çözme düzeyi kategorisinde 6, epistemik düzey kategorisinde ise tek bir durum ele alınarak yorumlanmıştır.

Veri analizi sürecinde uyum yüzdeleri doğruluk kategorisinde %84, kapsamlılık kategorisinde %76, izomorfizm ve epistemik düzey kategorilerinde %100, kavram düzeyi kategorisinde %92, problem çözme kategorisinde ise %83 olarak hesaplanmıştır.

## Bulgular

### Matematiksel Perspektif Boyutundan Elde Edilen Bulgular

Araştırmanın bu bölümünden katılımcıların öğretimsel açıklamalarında kullandıkları matematiksel modellerin doğruluk, kapsamlılık ve izomorfizm alt boyutlarında ele alınarak incelenmesi sonucu elde edilen bulgulara yer verilmiştir.

***Doğruluk kategorisinden elde edilen bulgular***

Bu araştırmada kullanılan sekiz adet açık uçlu soru ve bu soruların alt maddeleri için katılımcıların yer aldıkları 13 farklı durum mevcuttur. Bu durumlar için elde edilen bulgular Tablo 3'te verilmektedir.

**Tablo 3.**

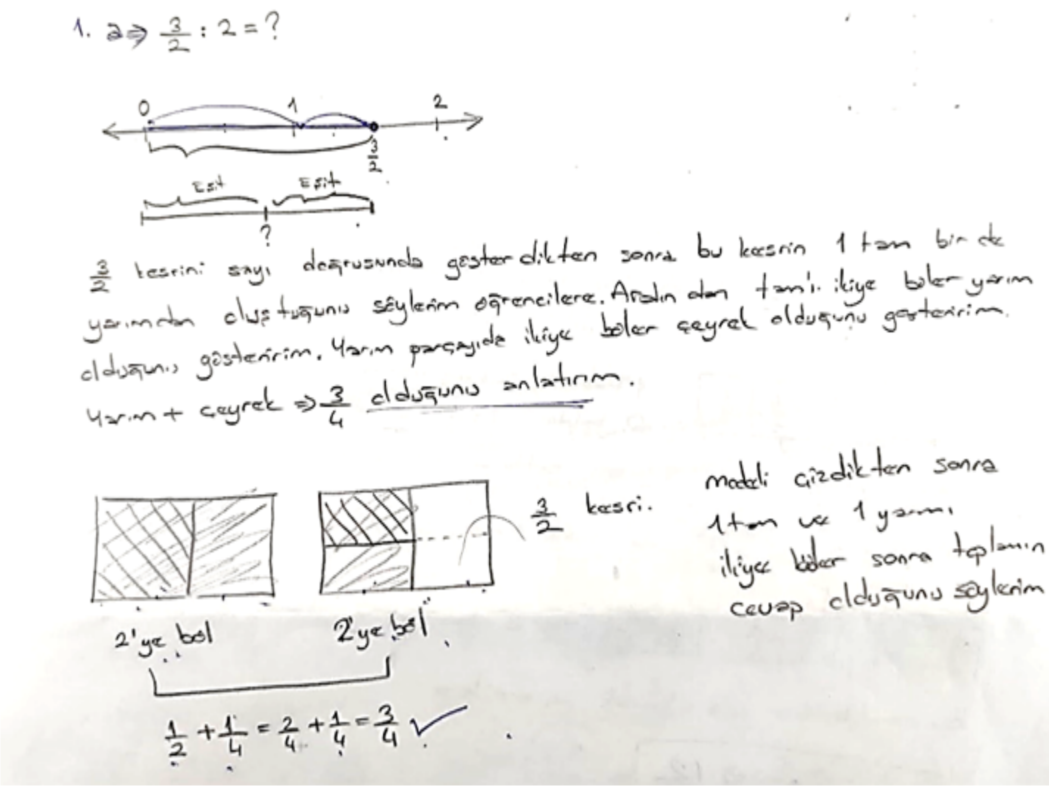
*Doğruluk Kategorisinden Elde Edilen Bulgular*

| Katılımcılar | Doğru/Geçerli | Kısmen doğru/ Kısmen geçerli | Doğru değil/ Geçersiz | Toplam |
|---|---|---|---|---|
| K1 | 11 | - | 2 | 13 |
| K2 | 9 | - | 4 | 13 |
| K3 | 10 | - | 3 | 13 |
| K4 | 9 | 2 | 2 | 13 |

Tablo 3'te yer alan veriler incelendiğinde öğretmen ve öğretmen adaylarının doğruluk kategorisindeki yanıtlarının çok fazla farklılaşmadığı görülmektedir. Katılımcı performansları dikkate alındığında en düşük performansı K4 öğretmen adayının gösterdiği görülmektedir. Bununla birlikte farklı sorular göz önüne alındığında tüm katılımcıların doğru olmayan modeller kullandığı iki durum olduğu görülmektedir. Bunlar dördüncü sorunun a ve b maddeleridir.

**Şekil 4.**

*K2 Kodlu Katılımcının Birinci Sorunun "a" Maddesine Verdiği Yanıt*




Doğruluk kategorisinde yer alan yanıtlar için "doğru/geçerli" olarak kodlanan durumlar K2 kodlu öğretmenin birinci soruya verdiği yanıt üzerinden örneklendirilmiştir. Öğrencinin yanıtının kodlanması sürecinde kendisi ile yürütülen görüşme sürecinin ilgili kesiti aşağıda verilmiştir.

> Araştırmacı: Bu soruda 3/2÷2 işlemini öğrencilerinize sayı doğrusu ve alan modeli ile nasıl anlatırsınız?
> K2: Bunu öğrencilere anlatırken önce 0-2 aralığında sayı doğrusu modelini çizip 3/2 kesrini işaretlerim ve bu büyüklüğün iki eşit parçaya bölüneceğini söylerim. 3/2'nin 1 tam ve 1 yarımdan oluştuğunu öğrenciye fark ettiririm ve tamı ikiye bölüp yarım, yarımı ikiye bölüp çeyrek elde edildiğini söylerim. En son yarım ve çeyreğin toplamının 3/4 olduğunu söylerim. Alan modeli ile göstermek için ise iki tane tam çizdim ve kesrin paydası iki olduğu için her iki tamı da iki eş parçaya böldüm. Şimdi burada 3/2 dediği için birinci tamın hepsini, ikinci tamın yarısını taradım. Birinci kısımda boyadığım kısmın yarısını alıp yarım, ikinci kısımda boyadığım kısmın yarısını alıp çeyrek ve toplamının 3/4 olduğunu söylerim.

Yukarıda (Şekil 4) K2 kodlu katılımcının 1. sorunun a maddesine verdiği yanıtı incelendiğinde, sayı doğrusu ve alan modelinin matematiksel olarak doğru ve gerçek duruma uygun olduğu görülmüştür. Bu nedenle ilgili cevap doğru/geçerli kategorisinde değerlendirilmiştir.

***Kapsamlılık kategorisinden elde edilen bulgular***

Öğretmen ve öğretmen adaylarının yanıtlarında kullandıkları matematiksel modellerin analizi sonucunda kapsamlılık kategorisine ilişkin elde edilen bulgular Tablo 4'te verilmiştir.

**Tablo 4.**

*Kapsamlılık Kategorisinden Elde Edilen Bulgular*

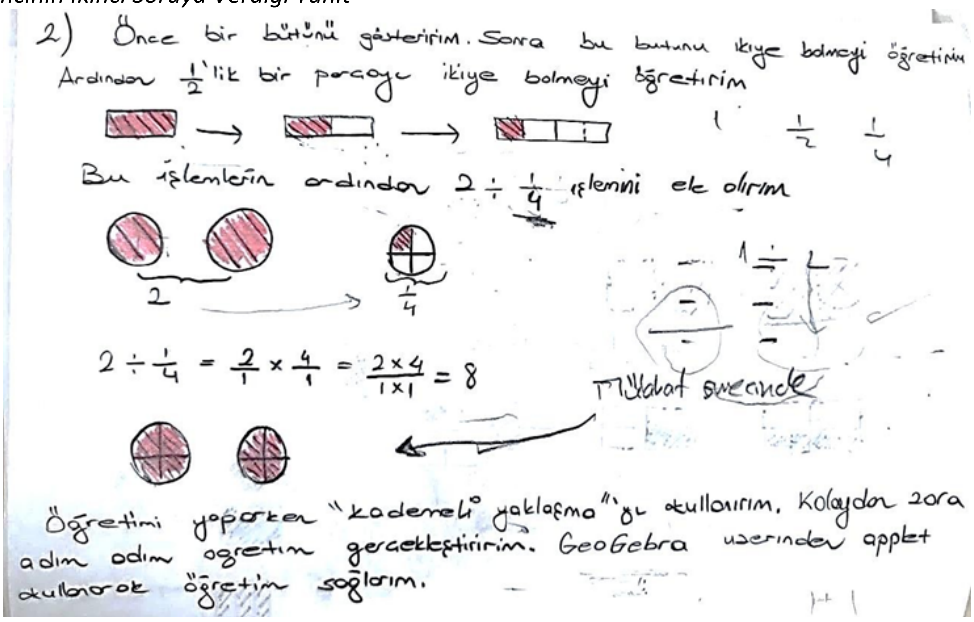
| Katılımcılar | Kapsamlı | Kapsamlı değil | Toplam |
|---|---|---|---|
| K1 | 10 | 3 | 13 |
| K2 | 6 | 7 | 13 |
| K3 | 2 | 11 | 13 |
| K4 | 7 | 6 | 13 |

Tablo 4'te yer alan veriler incelendiğinde tüm katılımcıların (K1 hariç) performanslarının bu kategoride oldukça düşük olduğu görülmektedir. Dört katılımcının üçünün kullandıkları matematiksel modellerin yarısına yakın bir bölümünün kapsamlı olmadığı görülmektedir. Katılımcı türleri dikkate alındığında öğretmen adaylarının öğretmenlere nazaran daha düşük performans gösterdikleri, en düşük performansın ise K4 öğretmen adayına ait olduğu görülmektedir. Farklı sorular göz önüne alındığında tüm katılımcıların kapsamlı olmayan modeller kullandığı iki farklı durum olduğu görülmektedir. Bunlar dördüncü sorunun a ve b maddeleridir.

Kapsamlılık kategorisinde yer alan yanıtlar için "kapsamlı değil" olarak kodlanan durumlar K4 kodlu öğretmen adayının ikinci soruya verdiği yanıt üzerinden örneklendirilmiştir.

***Şekil 5.***

*K4 Kodlu Katılımcının İkinci Soruya Verdiği Yanıt*




Öğrencinin yanıtının kodlanması sürecinde kendisi ile yürütülen görüşme sürecinin ilgili kesiti aşağıda verilmiştir.

> Araştırmacı: Burada sizden kesirlerle bölmeyi ilk kez öğrenen birine bölmenin algoritmasını kullandığınız modellerle nasıl açıklayabileceğiniz sorulmaktadır. Nasıl açıklamalarda bulunursunuz?
> K4: Öncelikle bir bütünü her zaman gösteririm. Bütünü ikiye bölerim ve her bir parçayı tekrar 2 ye bölerim. Bu işlemin ardından tam sayıyı kesre bölmeyi öğretirim. 2 tam ve 1/4' ü gösterdim. 2 tamın içinde 8 tane 1/4 olduğunu taralı alana bakarak fark ettiririm.
> Araştırmacı: Peki burada kesri kesre bölmeyi ve ters çevir çarp yani bölmenin algoritmasını nasıl verirsiniz?
> K4: İşlemin algoritmasını öğrenciye model kullanarak nasıl anlatırım bilmiyorum.

Yukarıda yer alan görüşme sürecinde öğretmen adayının tam sayıyı tam sayıya ve tam sayıyı bir kesre bölmeyi model kullanarak başarı ile gösterebildiği fakat kesri kesre bölmeyi gerektiren durumlarda matematiksel modellerden nasıl yararlanacağına karar veremediği görülmektedir. Bu nedenle kullanılan matematiksel modellerin, ilgili olduğu matematiksel kavram veya ilişkileri tam olarak (tüm yönleriyle) yansıtmadığı kabul edilerek ilgili yanıt kapsamlı değil olarak değerlendirilmiştir.

***İzomorfizm kategorisinden elde edilen bulgular***

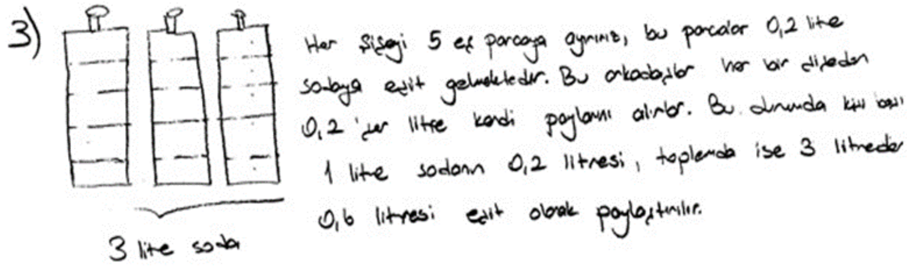
Öğretmen ve öğretmen adaylarının yanıtlarında kullandıkları matematiksel modellerin analizi sonucunda izomorfizm kategorisine ilişkin elde edilen bulgular Tablo 5'te verilmiştir.

**Tablo 5.**
*İzomorfizm Kategorisinden Elde Edilen Bulgular*

| Katılımcılar | İzomorfizm sağlar | İzomorfizm sağlamaz | Toplam |
|---|---|---|---|
| K1 | 4 | - | 4 |
| K2 | 4 | - | 4 |
| K3 | 4 | - | 4 |
| K4 | 4 | - | 4 |

Tablo 5 incelendiğinde tüm katılımcıların izomorfizm özelliğini içeren dört farklı durumun tamamında izomorfizm özelliğini sağlayan modelleri kullandıkları görülmektedir. Katılımcı türleri dikkate alındığında öğretmen ve öğretmen adaylarının performanslarının farklılaşmadığı görülmektedir. İzomorfizm kategorisinde yer alan yanıtlar için "izomorfizm özelliğini sağlar" olarak kodlanan durumlar K3 kodlu öğretmen adayının üçüncü soruya verdiği yanıt üzerinden örneklendirilmiştir.

**Şekil 6.**
*K3 Kodlu Katılımcının Üçüncü Soruya Verdiği Yanıt*




Öğrencinin yanıtının kodlanması sürecinde kendisi ile yürütülen görüşme sürecinin ilgili kesiti aşağıda verilmiştir.

> Araştırmacı: Burada ne yaptığını açıklar mısın?
> K3: Burada her şişeyi 5 parçaya ayırmışım, bu parçalar her biri 1 litrelik olduğu için (3 tane- 3 litrelik sodayı bu şekilde ifade etmişim), 5 parçaya ayırdığımızda her bir parça 0,2 litre, bu arkadaşlar her bir şişeden 0,2'şer litre kendi paylarına alıyorlar. Bu durumda kişi başı 1 litreden 0,2 litre, 3 litreden de 0,6 litre soda alıyorlar. Dolayısıyla 1 litre sodanın 0.6 litresi düşer.
> Araştırmacı: Peki toplam soda miktarının ne kadarı düşer?
> K3: Şimdi bu 0,6 litre 3 litrenin ne kadarıdır diye düşünürsek, beşte biridir. Yani 1/5 diyebiliriz.

Yukarıda yer alan görüşme sürecinde katılımcı öğretmen adayının oluşturduğu matematiksel modelleri, problemin içerdiği farklı matematiksel anlamlara uygun biçimde kullanabildiği görülmektedir. Bu nedenle ilgili yanıt "izomorfizm özelliğini sağlar" olarak kodlanmıştır.

**Pedagojik Perspektif Boyutundan Elde Edilen Bulgular**

Araştırmanın bu bölümünden katılımcıların öğretimsel açıklamalarında kullandıkları matematiksel modellerin kavram düzeyi, problem çözme düzeyi ve epistemik düzey alt boyutlarında ele alınarak incelenmesi sonucu elde edilen bulgulara yer verilmiştir.

***Kavram düzeyi kategorisinden elde edilen bulgular***

Öğretmen ve öğretmen adaylarının yanıtlarında kullandıkları matematiksel modellerin analizi sonucunda kavram düzeyi kategorisine ilişkin elde edilen bulgular Tablo 6'da verilmiştir.

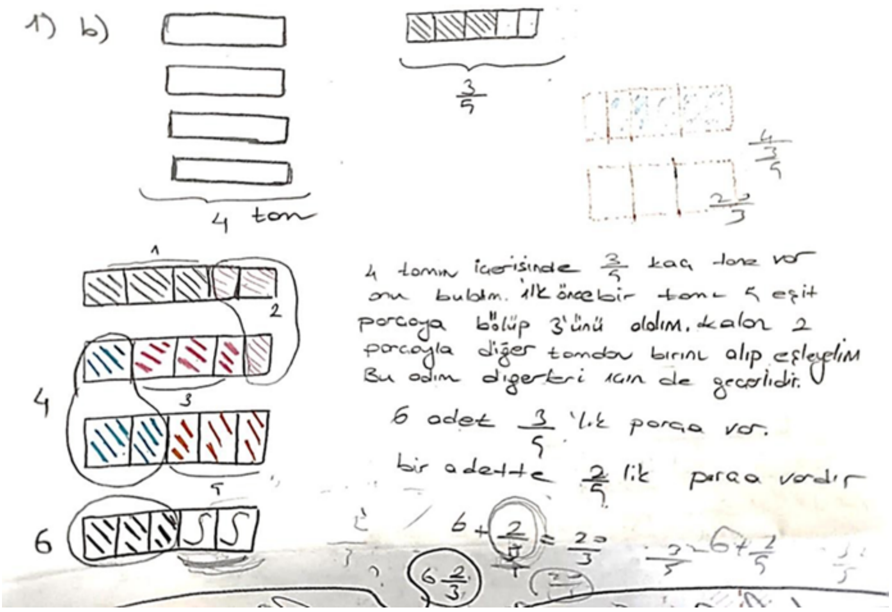
**Tablo 6.**
*Kavram Düzeyi Kategorisinden Elde Edilen Bulgular*

| Katılımcılar | Kavramsal düzeye uygun | Kavramsal düzeye kısmen uygun | Kavramsal düzeye uygun değil | Toplam |
|---|---|---|---|---|
| K1 | 9 | 3 | 1 | 13 |
| K2 | 9 | - | 4 | 13 |
| K3 | 8 | 4 | 1 | 13 |
| K4 | 9 | 2 | 2 | 13 |

Tablo 6'da yer alan veriler incelendiğinde katılımcı performanslarının genel olarak kavram düzeyi kategorisine uygun olduğu söylenebilir. Katılımcı türleri göz önüne alındığında öğretmen ve öğretmen adayları arasında belirgin bir fark olmadığı söylenebilir. Farklı sorular göz önüne alındığında ise en düşük performansın sekizinci soruya ait olduğu görülmektedir. Bu soruda K1 dışında tüm katılımcılar kavramsal düzeye uygun olmayan modeller kullanmışlardır.

Kavram düzeyi kategorisinde yer alan yanıtlar için "kavramsal düzeye kısmen uygundur" olarak kodlanan katılımcı yanıtları K4 kodlu katılımcının birinci sorunun "b" seçeneğine verdiği yanıt üzerinden örneklendirilmiştir.

**Şekil 7.**
*K4 Kodlu Katılımcının Birinci Sorunun "b" Maddesine Verdiği Yanıt*




Öğrencinin yanıtının kodlanması sürecinde kendisi ile yürütülen görüşme sürecinin ilgili kesiti aşağıda verilmiştir.

<u>K4:</u> 4 tamın içerisinde 3/5 kaç tane var diye öncelikle düşündüm. İlk önce 1 tamı 5 eşit parçaya böldüm, üçünü aldım. Kalan iki parçayla diğer tamdan birini alıp eşledim.
<u>Araştırmacı:</u> 6 tane var.
<u>K4:</u> Aynen. 6 adet 3/5'lik parça var. 1 adet te 2/5'lik parça var. 6 + 2/3 yani 20/3 yaptı.
Araştırmacı: Niçin 2/3, 2/5 değil?
<u>K4:</u> Aa orada, o zaman burada bir yanlış yaptım. 2/5 olacak. Burada bir yanlışım var. <u>Araştırmacı:</u> Emin misiniz?
<u>K4:</u> (Katılımcı bir müddet düşünür.) Burada bir yanlış var sanki, burası 5 olmayacak mı?
Araştırmacı: Tekrar düşünün isterseniz.
<u>K4:</u> 2/3'ü ben nerden bulmuşum? (Katılımcı yaptığı tüm işlemleri tekrar gözden geçirir.) Bunu hatırlamıyorum. 2/3 bu modele uymuyor.
<u>Araştırmacı:</u> Sorun galiba burada, tam 3 parça mı, 5 parça mı?
<u>K4:</u> Aynen.
<u>Araştırmacı:</u> Ne üzerinden konuşuyorsunuz?
<u>K4:</u> 4 tane tam üzerinden. O zaman cevabı da yanlış buluyorum. 5 olsa 32/5 oluyor. Bunu hatırlamıyorum gerçekten. Yok maalesef bunu hatırlamıyorum.

Yukarıdaki (Şekil 7) K4 kodlu öğretmen adayı ile yürütülen görüşme süreci incelendiğinde katılımcının ilgili durumun modelini yorumlayamadığı görülmektedir. Öğretmen adayı kalan 2 parçayı kesir biçiminde ifade etmekte zorlanmıştır. Dolayısıyla katılımcının kullandığı modellerin kavramsal düzeyde olduğunu söylemek güçtür. Bu nedenle ilgili cevap "kavramsal düzeye kısmen uygundur" biçiminde değerlendirilmiştir.

***Problem çözme düzeyi kategorisinden elde edilen bulgular***

Öğretmen ve öğretmen adaylarının yanıtlarında kullandıkları matematiksel modellerin analizi sonucunda problem çözme düzeyi kategorisine ilişkin elde edilen bulgular Tablo 7'de verilmiştir.

**Tablo 7.**

*Problem Çözme Düzeyi Kategorisinde Elde Edilen Bulgular*

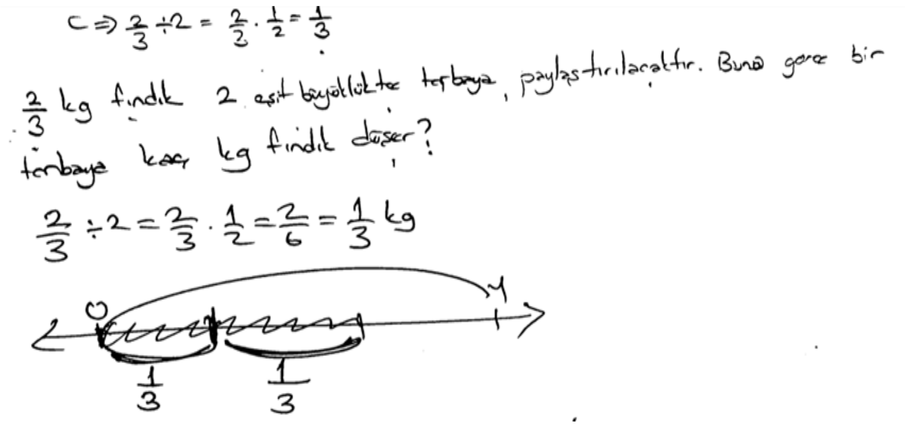
| Katılımcılar | PÇ düzeyine uygun | PÇ düzeyine kısmen uygun | PÇ düzeyine uygun değil | Toplam |
|---|---|---|---|---|
| K1 | 6 | - | - | 6 |
| K2 | 4 | - | 2 | 6 |
| K3 | 4 | 1 | 1 | 6 |
| K4 | 4 | - | 2 | 6 |

Tablo 7'de yer alan bulgular incelendiğinde genel olarak katılımcı yanıtlarının problem çözme düzeyine uygun olduğu görülmektedir. Katılımcı türleri göz önüne alındığında öğretmenlerin öğretmen adaylarına nazaran daha iyi performans gösterdikleri söylenebilir. Farklı sorular göz önüne alındığında ise en düşük performansın dördüncü sorunun b maddesinde gösterildiği dikkat çekmektedir. Bu soru maddesinde K1 kodlu öğretmen problem çözme düzeyine uygun, K3 kodlu öğretmen adayı ise problem çözme düzeyine kısmen uygun, diğer katılımcılar ise problem çözme düzeyine uygun olmayan modeller kullanmışlardır.

Problem çözme düzeyi kategorisinde yer alan yanıtlar için "problem çözme düzeyine uygundur" olarak kodlanan katılımcı yanıtları K2 kodlu katılımcının dördüncü sorunun "c" seçeneğine verdiği yanıt üzerinden aşağıda örneklendirilmiştir.

***Şekil 8.***

*K2 Kodlu Katılımcının Dördüncü Sorunun "C" Maddesine Verdiği Yanıt*




Öğrencinin yanıtının kodlanması sürecinde kendisi ile yürütülen görüşme sürecinin ilgili kesiti aşağıda verilmiştir.

> <u>K2:</u> Bu soruda kurduğum problem şu şekilde 2/3 kg fındık 2 eşit büyüklükte torbaya paylaştırılacaktır. Buna göre bir torbaya kaç kg fındık düşer. Burada bir normal işlem yaparak cevabı buluyoruz, birinci kesri aynen yazıp ikinci kesri ters çevirip çarptığımızda 1/3 kg düşer diye bulabiliyoruz.
> <u>Araştırmacı:</u> Başka nasıl açıklama yapabiliriz, farklı?
> <u>K2:</u> Başka sayı doğrusunda gösterebiliriz. 0 ile 1 arasını çizerim çünkü bu 1 tamdan küçük. 3 eşit parçaya böleriz. 2 tanesini boyarız. Bunu iki eşit parçaya ayırdığımda bu büyüklüğü ikiye bölmem gerekiyor. İkiye böldüğümde de burası ve burası eşit olduğu için direkt bütünün üçte birine karşı gelir. Her bir torbaya 1/3 kg fındık düşer.

Yukarıda yer alan K2 kodlu katılımcının yanıtı ve görüşme sürecine bağlı olarak katılımcının mevcut duruma uygun problem kurabildiği ve problemi uygun modelleri kullanarak çözebildiği görülmektedir. Bu duruma bağlı olarak ilgili yanıt "problem çözme düzeyine uygundur" olarak kodlanmıştır.

***Epistemik düzey kategorisinden elde edilen bulgular***

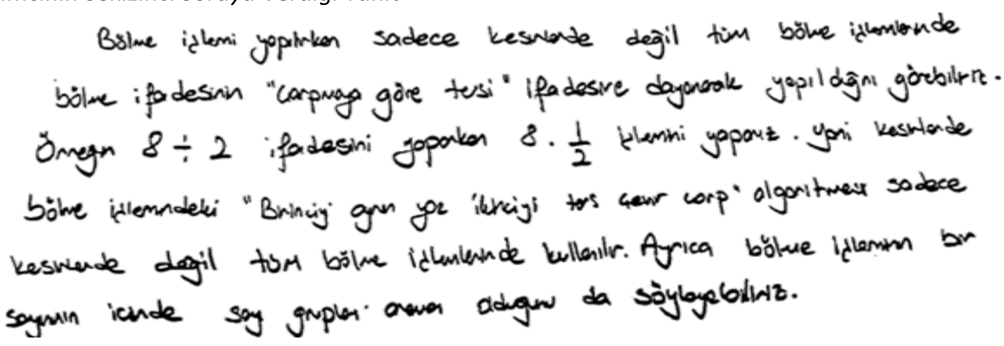
Öğretmen ve öğretmen adaylarının yanıtlarında kullandıkları matematiksel modellerin analizi sonucunda epistemik düzey kategorisine ilişkin elde edilen bulgular Tablo 8'de verilmiştir.

**Tablo 8.**
*Epistemik Düzey Kategorisinde Elde Edilen Bulgular*

| Katılımcılar | Epistemik düzeye uygundur | Epistemik düzeye uygun değildir | Toplam |
|---|---|---|---|
| K1 | 1 | - | 1 |
| K2 | - | 1 | 1 |
| K3 | - | 1 | 1 |
| K4 | - | 1 | 1 |

Tablo 8'de yer alan bulgular incelendiğinde katılımcı yanıtlarının genel olarak (K1 dışında) epistemik düzeye uygun olmadığı görülmektedir. K1 kodlu öğretmen ise çalışma kapsamında epistemik düzeye uygun modeller kullanabilmiştir. Epistemik düzey kategorisinde yer alan yanıtlar için "epistemik düzeye uygun değildir" olarak kodlanan katılımcı yanıtları K3 kodlu katılımcının sekizinci soruya verdiği yanıt üzerinden aşağıda örneklendirilmiştir.

***Şekil 9.***
*K3 Kodlu Katılımcının Sekizinci Soruya Verdiği Yanıt*


Bölme işlemi yaparken sadece kesirlerde değil tüm bölme işlemlerinde bölme ifadesinin "çarpmaya göre tersi" ifadesine dayanarak yapıldığını görebiliriz. Örneğin $8 \div 2$ ifadesini yaparken $8 \cdot \frac{1}{2}$ işlemini yapıyoruz. Yani kesirlerde bölme işlemindeki "Birinciyi aynen yaz ikinciyi ters çevir çarp" algoritması sadece kesirlerde değil tüm bölme işlemlerinde kullanılır. Ayrıca bölme işleminin bir sayının içinde sayı grupları oluşturma olduğunu da söyleyebiliriz.

<u>K3:</u> Bu soruyu sözel olarak yazdım.
<u>Araştırmacı:</u> İspatlayabilir misiniz matematiksel olarak? Neden ters çevirip çarpıyoruz?
<u>K3:</u> Aslında bu durum sadece kesirlerde yok, tam sayılarda biz bölme yaparken de, zaten bölme ifadesi çarpmanın tersi anlamı var, yani biz aslında 8'i 2'ye bölerken de aslında 8'i 1/2 ile çarpıyoruz. Sadece kesirlerde olan bir durum değil, kesirlerde sadece biraz daha göz önünde oluyor, bence öyle. Başka türlü ters çevirip çarpma algoritması nasıl açıklanabilir?
<u>Araştırmacı:</u> Aslında bölme işlemi bir çarpmadır mı demek istiyorsunuz?
<u>K3:</u> Evet bölme çarpmanın tersidir. Bölme çarpma içerikli bir işlemdir yani bence. Ama işte bunu nasıl somutlaştırabilirim? Bilmiyorum.

Yukarıda yer alan katılımcı yanıtı ve görüşme süreci incelendiğinde K3 kodlu katılımcının kesirlerle bölme işlemi algoritmasının matematiksel düzeyde tam olarak açıklayamadığı ve matematiksel ispatı yapamadığı görülmüştür. Bu nedenle ilgili cevap "epistemik düzeye uygun değildir" kategorisinde kodlanmıştır.

## Tartışma ve Sonuç

Bu araştırmada matematik öğretmenleri ve öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işlemine yönelik öğretimsel açıklamalarında matematiksel modelleri kullanma durumları incelenmeye çalışılmıştır. Veri toplama aracında yer alan sorular i) yeni bir içeriği öğrenciye tanıtma, ii) öğrenci sorularını yanıtlama ve iii) öğrencilerin sahip oldukları hata veya kavram yanılgılarının farkına varmalarını sağlama olmak üzere farklı amaçlara yönelik olarak hazırlanmıştır. Bununla birlikte çalışma kapsamında katılımcıların oluşturdukları öğretimsel açıklamalar doğruluk, kapsamlılık, izomorfizm, kavramsal düzey, problem çözme düzeyi ve epistemik düzey olmak üzere farklı kategorilerde değerlendirilmiştir. Her ne kadar çalışmada kullanılan sorular öğretmenleri matematiksel model kullanmaya yönlendirse de bazı sorularda (4 ve 6. sorular) katılımcıların nadiren de olsa, matematiksel modelleri içermeyen öğretimsel açıklamalar oluşturdukları gözlenmiştir. Böyle durumlarda katılımcılar tarafından oluşturulan modeller yerine öğretimsel açıklamalar dikkate alınmıştır. Çalışmadan elde edilen bulgular incelendiğinde genel olarak öğretmenlerin kullandıkları öğretimsel açıklamaların ilgili duruma uygun olduğu gözlenmiştir. Katılımcı türleri dikkate alındığında ise öğretmenlerin öğretmen adaylarından daha iyi performanslar sergiledikleri söylenebilir.

Çalışmadan elde edilen bulgular matematiksel perspektif boyutunda analiz edildiğinde katılımcıların kullandıkları öğretimsel açıklama ve modellerin matematiksel olarak genelde doğru ve geçerli olmakla birlikte ilişkili oldukları matematiksel durumu tüm yönleriyle her zaman yansıtmadığı söylenebilir. Alan yazın incelendiğinde bu durumla ilişkili olarak farklı çalışmalarda benzer sonuçların raporlandığı görülmektedir. Bayazit ve diğerleri (2011) matematik öğretmenlerinin kesirler konusunda model oluşturma durumlarını inceledikleri çalışmalarında öğretmenlerin model ile temsil ettiği düşünceyi tam olarak ilişkilendiremediklerini ortaya koymuş, bu ilişkinin kurulamaması halinde kullanılan modelin kavramsal bilgi edinmeleri noktasında öğrencilere bir katkısının olmayacağını ifade etmişlerdir. Işıksal (2006) benzer biçimde öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işlemi gerektiren problemleri sembolize edip çözebilmelerinin yanında, bu kavramları matematiksel olarak yorumlama ve anlamlandırmada güçlük çektiklerini ifade etmektedir. Bu durumla ilişkili olarak farklı araştırmalarda da (Blum, 1993; Zbiek, 1998) öğretmenlerin model oluşturma süreçlerinde yaşadıkları zorlukların büyük oranda eldeki durum ile üretilecek model arasındaki anlamsal ilişkinin kurulmasında yaşanan sıkıntılardan kaynaklandığı ifade edilmektedir. Dolayısıyla bu noktada öğretmen performanslarının pedagojik boyuttan ziyade matematiksel boyutla daha fazla ilişkili olduğu, bu bağlamda alan bilgisinin mevcut modelleme süreçlerinde etkili olduğu söylenebilir.

Çalışmadan elde edilen bulgular pedagojik perspektif boyutunda analiz edildiğinde ise katılımcıların kullandıkları öğretimsel açıklama ve modellerin genel olarak kavramsal düzeye ve problem çözme düzeyine uygun olduğu ve bu boyutta en düşük performansın epistemik düzeye ait olduğu görülmüştür. Epistemik düzeyde araştırma kapsamında kullanılan soruda öğretmen ve öğretmen adaylarından kesirlerle bölme işleminin algoritmasının matematiksel ispatını yapmaları istenmiştir. Elde edilen bu sonuçla ilişkili olarak alan yazın incelendiğinde benzer sonuçların farklı araştırmalarda ifade edildiği görülmektedir. Bu çalışmalardan biri olan Yavuz Mumcu (2018) öğretmen adaylarının genel itibariyle kesir işlemlerinin algoritmasını/matematiksel anlamını model kullanarak gösterme konusunda güçlük çektiklerini, bu durumun diğer işlemlere nazaran çarpma ve bölme işlemlerinde daha fazla görüldüğünü ifade etmektedir. Benzer şekilde Zembat (2007) öğretmen adaylarının iki kesrin birbirine bölünmesi işlemini yaptığında neden birinci kesrin aynen yazılıp ikinci kesrin tersinin yazılıp çarpılacağını açıklayamadıklarını ifade etmiştir. Baki ve Bütün (2009) çalışmasında ise öğretmenlerin ters-çevirip çarpma algoritmasını açıklayamadıkları sonucuna ulaşılmıştır. Ball (1990) öğretmen adaylarının kesirlerle bölmenin anlamı konusunda zorluklara sahip olduklarını ifade etmektedir. Rosli ve diğerleri (2013) çalışmasında da benzer biçimde öğretmen adaylarının kesirlerle işlemler konusunda sahip oldukları bilgilerin zayıf olduğu ve kesirlerin öğretiminde modellemelerin yer alması gerekliliği ifade edilmiştir. Yine Borko ve diğerleri (1992) çalışmasında ise kesirlerde bölme işleminde ters çevirip çarpma algoritmasını açıklaması istenen bir öğretmen adayının, iki kesrin bölümünü veren bir problem durumu oluşturmaya ve alan modeli ile göstermeye çalışırken kesirlerin çarpımına yönelik bir problem ortaya koyduğu sonucu elde edilmiştir. Sözü edilen bu durum bu araştırma kapsamında K2 kodlu öğretmenin 1. sorunun c seçeneğinde oluşturduğu model kapsamında da gözlenmiştir. Söz konusu durumda öğretmen bölmenin değil çarpmanın modelini oluşturmuş fakat hatasının farkına varmasına rağmen cevabını düzeltememiştir.

Bu araştırmadan elde edilen sonuçlara göre öğretmenlerin öğretmen adaylarına nazaran daha iyi performanslar sergiledikleri söylenebilir. Elde edilen bu sonuç öğretmenlerin mesleki tecrübelerine bağlı olarak yorumlanabilir. Daha üniversiteden mezun olmamış öğretmen adaylarının veri toplama aracında yer alan sorulara lisans öğrenimleri boyunca aldıkları teorik ve uygulamalı derslere bağlı olarak yanıt vermiş olmaları, farklı durumlarda matematiksel modellere yer verme konusunda zorluk yaşamalarının nedeni olarak yorumlanabilir. Elde edilen bu sonuçla ilişkili olarak alan yazında yer alan farklı çalışmalarda da (Erdem vd., 2015; Gökkurt vd., 2013; Işık, 2011; Lee, & Lee, 2023; Lo & Luo, 2012; Rosli vd., 2013; Şahin vd., 2013; Yavuz Mumcu, 2018) öğretmen adaylarının kesir işlemlerinde model oluşturma konusunda eksikliklerinin olduğu ifade edilmektedir. Benzer şekilde Tuna ve diğerlerinin (2013) öğretmen adaylarının matematikte modelleme becerilerini inceledikleri araştırmada katılımcıların bu beceriye yeterince sahip olmadığı sonucu elde edilmiştir.

Bu araştırmada öğretmen ve öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işleminde matematiksel modelleri genel olarak doğru biçimde kullandıkları görülmüştür. Bununla birlikte mevcut durumda yer alan kesirler basit kesirden bileşik kesre veya tam sayılı kesre dönüştükçe tüm katılımcıların süreç içerisinde yer verdikleri matematiksel modellerin de azaldığı, öğretimsel açıklamaların sözel boyutta kaldığı görülmüştür. Matematiksel ve pedagojik perspektif boyutları bir arada değerlendirildiğinde ise çalışma kapsamında kullanılan dördüncü sorunun 'a' ve 'b' maddelerinde (kesri kesre bölmeyi içeren durumlarda) genel olarak tüm katılımcıların verilen duruma uygun problem kurma süreçlerinde zorlandıkları görülmüştür. Aynı sorunun 'c' maddesinde kesri tam sayıya bölme durumunda ise katılımcılar uygun problemleri kurmakta daha başarılı olmuşlardır. Dolayısıyla öğretmen ve öğretmen adaylarının kesrin kesre bölümünü içeren matematiksel durumlara uygun problem yazma sürecinde zorlandıkları sonucuna ulaşılmıştır. Literatüre bakıldığında Xie ve Massingla (2017) ile Işık (2011) çalışmalarında da benzer sonuçlara ulaşıldığı görülmektedir. Işık (2011) tarafından yürütülen ve öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işlemine yönelik kurdukları problemlerin incelendiği çalışmada, öğretmen adaylarının işlem ve sayıları anlamlandırmada güçlük yaşadıkları, özellikle bölünenin doğal sayı olduğu durumlarda katılımcıların ölçme (gruplama) anlamını gösteren problemler oluşturabildikleri sonucu elde edilmiştir. Bunun tersine bölünen ve bölenin kesir olduğu durumlarda kurulan problemlerde ölçme anlamının oluşturulmasında güçlükler yaşandığı ifade edilmiştir. Söz konusu durumlarda öğretmen adaylarının bölen kesir sayısına doğal sayı anlamı yükledikleri ve paylaştırma anlamına yoğunlaştıkları görülmüştür. Dolayısıyla kesirlerle bölme işleminde sırasıyla bölünen ve bölen kesrin özelliğine bağlı olarak bireylerin mevcut durumu algılayışının da değiştiği söylenebilir.

Bu araştırma kapsamında kullanılan altı ve yedinci sorularda katılımcılardan öğrenci hatalarına yönelik açıklama yapmaları istenmiş ve yapılan açıklamalarda kullanılan modeller matematiksel ve pedagojik boyutta incelenmiştir. Elde edilen veriler incelendiğinde katılımcıların öğrenci hatalarına yönelik yaptıkları açıklamalarında kavramsal düzeye inmek adına farklı gösterim ve modellere genel olarak yer vermedikleri ve sözel açıklamalarla yetindikleri görülmüştür. Araştırmanın bu bölümünde tartışma süreci kesir işlemleri ile ilgili öğrenci hataları bağlamında yürütüldüğünde, yapılan çalışmalarda öğretmen ve öğretmen adaylarının genel olarak öğrenci hatalarını tespit etme noktasında yeterli düzeyde bilgi ve uygulamaya sahip olduğu görülmekle birlikte, bu hataların giderilmesi noktasında performanslarının daha düşük olduğu raporlanmaktadır. Watson ve diğerleri (2006) ile Chick (2010) çalışmalarında, öğretmenlerin öğrencilerin hatalarını giderme noktasında strateji dağarcığının sınırlı olduğu ve kullandıkları en yaygın stratejinin sözlü açıklamalar olduğu belirtilmektedir. Gökkurt ve diğerleri (2013) çalışmasında, sınıf öğretmeni adaylarının kesir kavramı ile ilgili öğrenci hatalarını belirlemede pek fazla zorlanmadıkları fakat söz konusu hataların düzeltilmesine yönelik pedagojik alan bilgilerinin yeterli düzeyde olmadığı ifade edilmiştir. Gökkurt (2014) benzer minvalde yürüttüğü çalışmasında ise öğretmenleri öğrenci hataları açısından incelemiş ve öğretmenlerin çoğunun öğrenci hatalarını tespit ederken yeterli oldukları sonucunu ortaya koymuştur. Can (2019) çalışmasında, öğretmenlerin kesirlerle işlemler konusundaki öğrenci güçlüklerine ve kavram yanılgılarına yönelik daha çok kavramsal bilgi boyutunda açıklamalar yaptıkları, özellikle yanılgıların sebeplerini ifade etmede ise güçlük yaşadıkları sonucunu elde etmiştir. İlgili araştırmada yapılan incelemeler, öğretmenlerin özellikle 'tam sayılardan kesirlere yanlış aktarma' durumundan kaynaklanan öğrenci güçlüklerine ve kavram yanılgılarına yönelik farkındalığının olmadığını göstermiştir. Öğretmenlerin kullandıkları çözüm önerilerinde ise model kullanımını öne çıkardıkları görülmüştür.

Bu araştırma kapsamında elde edilen bulgular tüm katılımcıların matematiksel modelleri oluşturma sürecinde genel olarak bölmenin farklı anlamlarını uygun biçimde kullanabildiklerini göstermiştir. Buna göre özellikle bölen sayının tam sayı olduğu durumlarda paylaştırma, bölen sayının kesir olduğu durumlarda ise gruplama anlamı kullanılmıştır. Araştırmada özellikle sayı doğrusu veya küme modeli olarak belirtilmedikçe tüm katılımcılar genel olarak alan modelini kullanma eğiliminde olmuşlardır. Bu durum özellikle karmaşık durumlar için söz konusu olmuştur. Daha açık ifade etmek gerekirse kesrin kesre bölümü veya tam sayılı kesir içeren durumlarda katılımcıların tamamının alan modelini tercih ettikleri ve sayı doğrusu modeline yer vermedikleri görülmüştür. Bununla birlikte araştırmanın geneli için katılımcıların küme modelini hemen hemen hiç kullanmadıkları görülmüştür. Öğretmen adaylarının yaptıkları öğretimsel açıklamalar incelendiğinde kesirlerle bölme işleminde sayı doğrusu ve sayma pulları kullanımına yönelik performanslarının ayrıca yetersiz olduğu tespit edilmiştir. Burada sözü edilen durumlarla benzer olarak Seçir (2017) ve Toluk-Uçar (2009) çalışmalarında, öğretmen adaylarının kesirlerle işlem konusunda alan modelini kullanmayı tercih ettiklerini ifade etmektedir. Alan modeli eş parçalara ayırmayı doğrudan gösteren bir model olduğundan katılımcıların bu modeli tercih ettikleri düşünülmektedir. İki kesrin bölme işleminin alan modeli ile gösterilmesinde tüm öğretmen ve öğretmen adaylarının öncelikle bölünen kesri, daha sonra ise içerisinde bölen kesirden ne kadar bulunduğunu göstermeye çalıştıkları, bir başka deyişle gruplama anlamını kullandıkları görülmüştür. Benzer olarak Erdem ve diğerleri (2015) tarafından yapılan çalışmada da öğretmen adaylarından bazılarının aynı yaklaşımı benimsediği ifade edilmektedir. Yine Bayazit ve diğerleri (2011) çalışmalarında öğretmenlerin bölünen sayı içerisinde bölen sayıdan kaç tane olduğu düşüncesi ile hareket ettikleri gözlenmiştir. Bu durumla ilişkili olarak yürütülen farklı araştırmalarda (Ma, 1999; Van de Walle, 2004) özellikle kesirlerle bölme işleminde gruplama anlamının kullanımının paylaştırma anlamına nazaran daha uygun olduğu ifade edilmektedir.

**Öneriler**

Kesir konusunun öğrenciler tarafından genel olarak anlaşılması güç konuların başında gelmesi ve öğrencilerin kesir kavramını anlamlandırma noktasında güçlük yaşadıkları gerçeğinden hareket edilirse, bu araştırma sonuçlarının ilgili problem durumu için bir çözüm yolu olabileceği düşünülmektedir. Yapılan çalışmalar öğrencilerin özellikle kesirlerle bölme konusunda güçlük yaşadıklarını ve buna bağlı olarak düşük performans gösterdiklerini ortaya koymaktadır. Bu durum öğretmen ve öğretmen adaylarının kesirlerin öğretiminde yeni ve farklı pedagojik yaklaşımlara yeterince yer vermemeleri ile ilişkili olarak yorumlanabilir. Kesir kavramının soyut yapısına bağlı olarak ilgili süreçlerde somutlaştırma araçları olarak matematiksel modellere yer verilmesi önerilmektedir. Bu bağlamda özellikle mesleğe yeni başlayan, çok fazla deneyime sahip olmayan öğretmenlerin matematiksel modellerin öğretimde kullanımı konusunda desteklenmesi önemlidir. Konu ile ilgili olarak hizmet içi eğitimler, seminer ve projeler yürütülebilir. Bu çalışmalarda özel olarak matematiksel modellerin anlamlı öğrenmeye hizmet edecek biçimde nasıl kullanılabileceği vurgulanmalıdır. Bununla birlikte farklı amaçlara yönelik olarak (yeni bir kavramı öğretme, öğrenci yanılgılarının önüne geçme, bilişsel sorgulamaları destekleme ve öğrenmeyi pekiştirme) derslerde matematiksel modellere nasıl yer verilebileceğinin üzerinde durulması önerilmektedir. Günümüz matematik sınıflarında öğretmen ve öğrencilerin kullandıkları birincil öğretim materyali olması bağlamında matematik ders kitaplarında bulunan model örnekleri ve modelleme etkinliklerinin artırılarak model kullanımına ilişkin açıklamalı yönlendiricilere yer verilmesinin, öğrencilerin kesir kavramını anlama ve kesir işlemlerini yorumlama süreçlerine ayrıca fayda sağlayacağı düşünülmektedir.

Bu araştırma kapsamında katılımcı öğretmen adaylarının gösterdikleri performans durumu ile ilişkili olarak Eğitim Fakültelerinin Matematik Öğretmenliği programlarında matematiksel temsil ve model kullanımı ile ilgili ders ve çalışmalara daha fazla yer verilmesi önerilmektedir. Bu çalışmalarda öğretmen adaylarının öğrenci düşüncelerini gözleyebilecekleri ve öğrenci hatalarına müdahale edebilecekleri örnek durumlar oluşturulması ve bu durumlarda kullanılabilecek uygun yöntem ve stratejiler üzerine yürütülecek sınıf tartışmalarında özellikle model kullanma süreçlerine ağırlık verilmesi önerilmektedir. Böylece öğretmen adaylarının farklı durumlara yönelik olarak sınıf içerisinde kullanabilecekleri öğretimsel açıklamalarında matematiksel temsil ve modellerden nasıl yararlanacakları hususunda daha fazla bilgi ve deneyim sahibi olacakları öngörülmektedir.

Bununla birlikte bu araştırma iki matematik öğretmeni ve iki öğretmen adayı ile sınırlıdır. Konu ile ilgili olarak yürütülecek farklı çalışmalarda daha büyük örneklem grupları ve daha çeşitli veri toplama araçları ile çalışılması önerilmektedir. Böylece araştırılan durumların farklı boyutları ortaya çıkarılarak, alan yazına daha etkili öneriler sunulabileceği düşünülmektedir.

**Etik Kurul Onay Bilgileri**

Bu araştırma için Ordu Üniversitesi Sosyal ve Beşerî Bilimler Araştırmaları Etik Kurulu'nun 15.09.2021 tarihli 2021-149 sayılı izni alınmıştır.

**Çıkar Çatışması**

Yazarlar tarafından çıkar çatışması bulunmamaktadır.

**Finansal Destek**

Bu çalışma için herhangi bir finansal destek alınmamıştır.

**Yazar Katkıları**

Bu araştırma ilk yazarın yüksek lisans tezinden üretilmiştir. Çalışmanın veri toplama süreci ilk yazar tarafından yapılmış olup, tezin yazım sürecinde yazar ve danışman birlikte çalışmışlardır.

## Kaynakça


Akyıldız, P. (2019). *Matematik öğretmeni adaylarının öğretimsel açıklamalarının matematiksel inanç perspektifinden incelenmesi* (Tez No: 588885). [Doktora tezi, Gazi Üniversitesi].

Baki, A., & Bütün, M. (2009). İlköğretim matematik öğretmenlerinin bölme kavramı ile ilgili alan eğitimi bilgilerinin yapısı. *e-Journal of New World Sciences Academy, 4*(4), 1243-1256. https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/185882

Baki, M. (2013). Sınıf öğretmeni adaylarının bölme işlemi ile ilgili matematiksel bilgileri ve öğretimsel açıklamaları. *Eğitim ve Bilim*, *38*(167), 300-311. https://egitimvebilim.ted.org.tr/index.php/EB/article/view/1837/484

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(2), 132-144. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.21.2.0132

Ball, D. L. (1993). Halves, pieces, and twoths: Constructing and using representational contexts in teaching fractions. T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Ed.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 157–195). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/00224871083245

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M., & Tsai, Y. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal*, *47*(1), 133–180. https://doi.org/10.3102/0002831209345157

Bayazit, İ., Aksoy, Y., & Kırnap, M. (2011). Öğretmenlerin matematiksel modelleri anlama ve model oluşturma yeterlilikleri. *NWSA: Education Sciences*, *6*(4), 2495-2516. https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/185520

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational Number Concepts. R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-125). Academic Press.

Ben-Peretz, M. (2011). Teacher knowledge: What is it? How do we uncover it? What are its implications for schooling? *Teaching and Teacher Education*, *27*(1), 3-9. https://doi.org/10.1016/j.tate.2010.07.015

Biber, A. Ç., Tuna, A., & Aktaş, O. (2013). Öğrencilerin kesirler konusundaki kavram yanılgıları ve bu yanılgıların kesir problemleri çözümlerine etkisi. *Trakya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *3*(2), 152-162.

Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. T. Breiteig, I. Huntley & G. Kaiser Messmer (Eds.), *Teaching and learning mathematics in context* (pp. 3-14). Ellis Horwood Limited.

Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C. A., Underhill, R. G., Jones, D., & Agard, P. C. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily? *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(3), 194-222. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.23.3.0194

Bulgar, S. (2003). Children's sense-making of division of fractions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(3), 319-334. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00024-5

Bütün, M. (2012). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının uygulanan zenginleştirilmiş program sürecinde matematiği öğretme bilgilerinin gelişimi* (Tez No: 321920). [Doktora tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi].

Can, H. N. (2019). *Ortaokul matematik öğretmenlerinin kesirlerde işlemler konusu ile ilgili pedagojik alan bilgilerinin öğrenci zorlukları ve kavram yanılgıları bileşeninde incelenmesi* (Tez No: 569175). [Yüksek lisans tezi, Marmara Üniversitesi].

Çelik, B., & Çiltaş, A. (2015). Beşinci sınıf kesirler konusunun öğretim sürecinin matematiksel modeller açısından incelenmesi. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, *10*(1), 180-204.

Charalambous, C. Y. (2008). *Preservice teachers' mathematical knowledge for teaching and their performance in selected teaching practices: Exploring a complex relationship.* [Doctoral thesis, University of Michigan]. https://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/61673/chcharal_1.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Charalambous, C. Y., Hill, H. C., & Ball, D. L. (2011). Prospective teachers' learning to provide instructional explanations: How does it look and what might it take? *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(6), 441-463. https://doi.org/10.1007/s10857-011-9182-z

Chick, H. L. (2010). Aspects of teachers' knowledge for helping students learn about ratio. *Mathematics Education Research Group of Australasia, 33*, 145-152.

Cochran, K. F., DeRuiter, J. A., & King, R. A. (1993). Pedagogical content knowing: An integrative model for teacher preparation, *Journal of Teacher Education, 44*, 263–272. https://doi.org/10.1177/0022487193044004004

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research method in education* (6th edition). Taylor & Francis e-Library.

Doğan, A. (2018). *Sınıf öğretmenlerinin kesrin anlamlarına yönelik bilgileri ve kesirlerin öğretiminde kullandıkları modeller* (Tez No: 528969). [Doktora tezi, Gazi Üniversitesi].

Duran, N. B. (2017). *Ortaokul matematik öğretmen adaylarının alan ve pedagojik alan bilgileri çerçevesinde kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinin öğretimine ilişkin kullandıkları modeller* (Tez No: 469524). [Yüksek lisans tezi, Pamukkale Üniversitesi].

Erdem, E., Gökkurt, B., Şahin, Ö., Başıbüyük, K., & Soylu, Y. (2015). Examining prospective middle school mathematics teachers' modelling skills of multiplication and division in fractions. *Croatian Journal of Education, 17*(1), 11-36. https://doi.org/10.15516/cje.v17i1.830

Fennema, E. F., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 147-164). Macmillan.

Gess-Newsome, J. (1999). Pedagogical content knowledge: An introduction and orientation. In *Examining pedagogical content knowledge: The construct and its implications for science education* (pp. 3-17). Springer Netherlands.

Gökkurt, B. (2014). *Ortaokul matematik öğretmenlerinin geometrik cisimler konusuna ilişkin pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi* (Tez No: 381641). [Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi].

Gökkurt, B., Şahin, Ö., Soylu, Y., & Soylu, C. (2013). Examining pre-service teachers' pedagogical content knowledge on fractions in terms of students' errors. *International Online Journal of Educational Sciences, 5*(3), 719-735. https://iojes.net/?mod=tammetin&makaleadi=&makaleurl=IOJES_1104.pdf&key=41106

Gravetter, J. F., & Forzano, L. B. (2012). *Research methods for the behavioral sciences* (4. Baskı). Linda Schreiber-Ganster.

Grossman, P. (1990). *The making of a teacher*. Teacher's College Press.

Grossman, P., & McDonald, M. (2008). Back to the future: Directions for research in teaching and teacher education. *American Educational Research Journal*, *45*(1), 184– 205. https://doi.org/10.3102/0002831207312906

Gürbüz, R., Erdem, E., & Gülburnu, M. (2013). Sınıf öğretmenlerinin matematik yeterliklerini etkileyen faktörlerin incelenmesi. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, *14*(2), 255-272. https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/1490593

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction*, *26*(4), 430-511. https://doi.org/10.1080/07370000802177235

İpek, A. S., Işık, C., & Albayrak, M. (2005). Sınıf öğretmeni adaylarının kesir işlemleri konusundaki kavramsal performansları. *Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi*, *11*, 538-547. https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/31446

Işık, C. (2011). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kesirlerde çarpma ve bölmeye yönelik kurdukları problemlerin kavramsal analizi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *41*, 231-243. http://www.efdergi.hacettepe.edu.tr/yonetim/icerik/makaleler/694-published.pdf

Işık, C., & Kar, T. (2012). 7. sınıf öğrencilerinin kesirlerde toplama işlemine kurdukları problemlerin analizi. *İlköğretim Online*, *11*(4), 1021-1035. https://core.ac.uk/download/pdf/230029927.pdf

Işıksal, M. (2006). *A study on pre-service elementary mathematics teachers' subject matter knowledge and pedagogical content knowledge regarding the multiplication and division of fractions* (Thesis No: 181012). [Doctoral thesis, Middle East Technical University].

Işıksal-Bostan, M., & Osmanoğlu, A. (2016). Pedagojik alan bilgisi. E. Bingölbali, S. Arslan, İ. Ö. Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* içinde (s. 677-699). Pegem.

Kinach, B. M. (2002a). Understanding and learning-to-explain by representing mathematics: epistemological dilemmas facing teacher educators in the secondary mathematics "methods'' course. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*(2), 153-186. https://doi.org/10.1023/A:1015822104536

Kinach, B. M. (2002b). A cognitive strategy for developing pedagogical content knowledge in the secondary mathematics methods course: Toward a model of effective practice. *Teaching and Teacher Education*, *18*(1), 51-71. https://doi.org/10.1016/S0742-051X(01)00050-6

Kocaoğlu, T., & Yenilmez, K. (2010). Beşinci sınıf öğrencilerinin kesir problemlerinde yaptıkları hatalar ve kavram yanılgıları. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi, 14*, 71-85. https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/787095

Lachner, A., & Nückles, M. (2015). Bothered by abstractness or engaged by cohesion? Experts' explanations enhance novices' deep learning. *Journal of Experimental Psychology: Applied*, *21*(1), 101-115. https://doi.org/10.1037/xap0000038

Lamon, S. (1996). The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*, 170-193. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.27.2.0170

Lee, J. E., & Lee, M. Y. (2023). How elementary prospective teachers use three fraction models: their perceptions and difficulties. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *26*(4), 455-480. https://doi.org/10.1007/s10857-022-09537-4

Leinhardt, G. (2001). Instructional explanations: A commonplace for teaching and location for contrast. V. Richardson (Ed.), *Handbook for research on teaching* (4th Edition). American Educational Research Association.

Leinhardt, G., Putnam, R. T., Stein, M. K., & Baxter, J. (1991). Where subject knowledge matters. J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching* (Vol. 2, pp. 87–113). JAI Press Inc.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2000). Symbolizing, communicating, and mathematizing: Key components of models and modeling. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 361 –383). Lawrence Erlbaum Associates.

Lo, J. J., & Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*, 481-500. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9221-4

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates.

Macit, E. (2019). 6*. sınıf öğrencilerinin kesirler konusundaki imajlarının kavram yanılgıları ve başarıları ile ilişkisinin incelenmesi* (Tez No: 610998). [Doktora tezi, İnönü Üniversitesi].

Magnusson, S., Krajcik, J., & Borko, H. (1999). Nature, sources, and development of pedagogical content knowledge for science teaching. In *Examining pedagogical content knowledge: The construct and its implications for science education* (pp. 95-132). Springer Netherlands.

Martin, J. R. (1970). *Explaining, understanding, and teaching*. McGraw-Hill.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook*. Sage.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2009). *İlköğretim matematik dersi 6-8. sınıflar öğretim programı.* MEB.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2013). *Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı.* MEB.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2018). *Matematik dersi öğretim programları (ilkokul ve ortaokul 1., 2., 3., 4.,5.,6., 7. ve 8. sınıflar).* MEB.

Monte-Sano, C. (2011). Beyond reading comprehension and summary: Learning to read and write in history by focusing on evidence, perspective, and interpretation. *Curriculum Inquiry*, *41*(2), 212-249. https://doi.org/10.1111/j.1467-873X.2011.00547.x

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

Nemirovsky, R. (1994). On ways of symbolizing: The case of Laura and the velocity sign. *The Journal of Mathematical Behavior*, *13*(4), 389-422. https://doi.org/10.1016/0732-3123(94)90002-7

Niss, M. (1987). Applications and modelling in the mathematics curriculum—state and trends. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *18*(4), 487-505. https://doi.org/10.1080/0020739870180401

Olkun, S., & Toluk-Uçar, Z. (2012). *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi*. Eğiten Kitap.

Özer, A. (2020). *Ortaokul 6. sınıf kesirler konusunun görselleştirme ile öğretiminin akademik başarıya etkisinin incelenmesi* (Tez No: 616475). [Yüksek lisans tezi, Kırıkkale Üniversitesi].

Park, S., & Oliver, J. S. (2008). Revisiting the conceptualisation of pedagogical content knowledge (PCK): PCK as a conceptual tool to understand teachers as professionals. *Research in Science Education*, *38*, 261-284. https://doi.org/10.1007/s11165-007-9049-6

Parmar, R. (2003). Understanding the concept of "division": assessment considerations. *Exceptionality,* 11(3), 177-189. http://dx.doi.org/10.1207/S15327035EX1103_05

Patton, M. Q. (2014). *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri* (M. Bütün ve S. B. Demir, çev.). Pegem Akademi.

Perkins, D. N. (1992). *Smart schools: Better thinking and learning for every child*. Free Press.

Perry, M. (2000). Explanations of mathematical concepts in Japanese, Chinese, and US first-and fifth-grade classrooms. *Cognition and Instruction*, *18*(2), 181-207. https://doi.org/10.1207/S1532690XCI1802_02

Rey, G. D., & Fischer, A. (2013). The expertise reversal effect concerning instructional explanations. *Instructional Science*, *41*(2), 407-429. https://doi.org/10.1007/s11251-012-9237-2

Rosli, R., Han, S., Capraro, R. M., & Capraro, M. M. (2013). Exploring preservice teachers' computational and representational knowledge of content and teaching fractions. *Research in Mathematical Education*, *17*(4), 221-241. http://dx.doi.org/10.7468/jksmed.2013.17.4.221

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8(*3), 255-281.

Şahin, Ö., Gökkurt, B., & Soylu, Y. (2013, Nisan). *Matematik öğretmeni adaylarının kesirlerle ilgili pedagojik alan bilgilerinin öğrenci hataları bağlamında incelenmesi*. 4th International Conference on New Trends in Education and Their Implications konferansında sunulan sözlü bildiri, Antalya. https://www.demo.emuder.com/icontedemo/wp-content/uploads/2024/02/4._iconte_bildiri_ozetleriii-2013.pdf

Schmidt-Thieme, B. (2009). Erklären als fachspezifische Kompetenz in fächerübergreifender perspektive [Explanation as a subject-specific competence from an interdisciplinary perspective]. In: Beiträge zum Mathematikunterricht [Contributions to mathematics teaching] (239-242). WTM.

Seçir, S. (2017). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin özelleştirilmiş alan bilgilerinin gelişiminin incelenmesi* (Tez No: 461458). [Doktora tezi, Gazi Üniversitesi].

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Şiap, İ. & Duru, A. (2004). Kesirlerde geometriksel modelleri kullanabilme becerisi. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 2*(1), 89-96.

Sowder, J., & Wearne, D. (2006). What do we know about eighth-grade student achievement? *Mathematics Teaching in the Middle School*, *11*(6), 285–293. https://www.jstor.org/stable/pdf/41182306.pdf

Staley, K. N. (2004). *Tracing the development of understanding rate of change: A case of changes in a pre-service teacher's pedagogical content knowledge.* [Doctoral thesis, North Carolina State University]. https://www.proquest.com/docview/305165371

Tarkan-Yurtsever, N. (2012). *A study on fifth grade students mistakes, difficulties and misconceptions regarding basic fractional concepts and operations* (Tez No: 321086). [Master thesis, Middle East Technical University].

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: the case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 5–25. https://doi.org/10.2307/749817

Toluk Uçar, Z. (2009). Developing pre-service teachers understanding of fractions through problem posing. *Teaching and Teacher Education*, *25*, 166–175. https://doi.org/10.1016/j.tate.2008.08.003

Tuna, A.., Biber, A. Ç., & Yurt, N. (2013). Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel modelleme becerileri. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *33*(1), 129-146. https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/76918

Turan, Y. (2023). *Ortaokul matematik öğretmenlerinin farklı kesir şemaları bağlamında model kullanmaya yönelik pedagojik tercihlerinin incelenmesi* (Tez No: 863226). [Yüksek lisans tezi, Ordu Üniversitesi].

Van de Walle, J. A. (2004). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. Fifth edition. Allyn & Bacon.

Watson, J., Beswick, K., & Brown, N. (2006). Teachers' knowledge of their students as learners and how to intervene. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds.), *Identities, cultures and learning spaces* (Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, pp. 551-558). Sydney: MERGA.

Wittwer, J., & Renkl, A. (2008). Why instructional explanations often do not work: A framework for understanding the effectiveness of instructional explanations. *Educational Psychologist*, *43*(1), 49-64. https://doi.org/10.1080/00461520701756420

Xie, J., & Masingila, J. O. (2017). Examining interactions between problem posing and problem solving with prospective primary teachers: A case of using fractions. *Educational Studies in Mathematics, 96*, 101–111. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9760-9

Yavuz Mumcu, H. (2018). Kesir işlemlerinde matematiksel modellerin kullanımı: Bir durum çalışması. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *12* (1), 122-151. https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/495740

Yin, R. K. (2017). *Case study research and applications: Design and methods.* Sage Publications.

Zbiek, R. M. (1998). Prospective teachers' use of computing tools to develop and validate function as mathematical models. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(2), 184–201. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.29.2.0184

Zembat, İ. Ö. (2007). Sorun aynı-kavramlar; kitle aynı-öğretmen adayları. *İlköğretim Online*, *6*(2), 305-312. https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/91015

# Extended Abstract

## Introduction

One of the most important elements that determine the quality of teaching is teacher knowledge. Studies on teacher knowledge are based on the theoretical basis developed by Shulman (1986). Accordingly, pedagogical content knowledge is the knowledge that the teacher has about how to teach the subject. The basis of this knowledge is to make the concepts, principles and methods to be taught understandable by the student. For this, the teacher needs to know different presentation styles, demonstrations, analogies, examples and explanations. Instructional explanations, defined by Leinhardt et al. (1991, p.89) as "the activity in which the teacher conveys subject knowledge to the students", is not a concept that includes only verbal expressions, but also includes all activities carried out for the meaningful learning of the student and is pedagogical. It can be said that it constitutes an important dimension of pedagogical content knowledge and, depending on this importance, it has been examined within the scope of this research.

Instructional explanations are very important for students to fully understand abstract concepts, especially when it comes to mathematics education. In this context, it is important to investigate how instructional explanations are used in the teaching process of the concept of "fraction", which is one of the difficult concepts for students to understand. However, many researchers (Bulgar, 2003; Işık and Kar, 2012; Kocaoğlu and Yenilmez, 2010; Olkun and Toluk-Uçar, 2012; Tirosh, 2000) stated that the most difficult operation for students with fractions is the division operation. In this context, in order to teach fractions meaningfully, it is important to concretize them and support them with different forms of representation and display. So, in many different studies in the literature (Erdem et al., 2015; İpek et al., 2005; Toluk-Uçar, 2009), it is emphasized that models should be used in teaching fractions. Accordingly, this study aims to examine the instructional explanations of mathematics teachers and pre-service teachers about dividing by fractions in the context of mathematical models.

## Method

In this research, case study method was used. The participants of this study consist of two mathematics teachers and two senior students studying in the Primary Mathematics Teaching program of a state university. In determining the participants of the study, a combination of convenient sampling and criterion sampling methods, which are among the purposeful sampling methods, were used (Patton, 1987). Accordingly, the criteria were determined that the teachers to be employed should have at least 5 years of professional experience and should be doing a master's degree, and that the teacher candidates should be among the students who are at the last stage of their undergraduate studies and are in the middle or upper group of the class average in terms of academic success.

Semi-structured interviews with eight open-ended questions created by the researchers were used to evaluate the instructional explanations of the teachers and pre-service teachers in this study. Among these questions, questions 1, 2, 4 and 8 were created by the researchers and Charalambos (2008) and Charalambos et al. (2011) studies were used for questions 3, 5, 6 and 7. A preliminary application (pilot study) was carried out to determine the validity and reliability of the questions, and the opinions of two faculty members and two mathematics teachers who experts in the field were benefited. In evaluating the answers given by the teachers and pre-service teachers included in the study, the evaluation framework created by the researchers and the interview processes conducted regarding each content within this framework were used.

## Results and Discussion

In this study, it was tried to examine the use of mathematical models by mathematics teachers and pre-service teachers in their instructional explanations of dividing fractions. The questions included in the research, require creating instructional explanations for different purposes, such as introducing a new content to the student, answering student questions, and making students aware of their mistakes or misconceptions. In addition, within the scope of the study, the instructional explanations created by the participants were evaluated in different categories as: accuracy, comprehensiveness, isomorphism, conceptual level, problem-solving level and epistemic level. When the results obtained from the study were examined, it was generally observed that the instructional explanations used by teachers in different situations, including introducing new content to students, answering student questions, and making students aware of their mistakes or misconceptions, were appropriate to the relevant situation. Considering the participant types, it can be said that teachers generally show better performances than teacher candidates.

However, when the findings obtained from the study were analyzed from a mathematical perspective, it was seen that the mathematical models used by the participants were generally correct/valid and isomorphic (allowing to distinguish different mathematical meanings). When the findings obtained from the study are considered in the comprehensiveness category, it can be said that most of the models created by the participants are not comprehensive. When the literature is examined, it is seen that similar results are reported in different studies (Bayazit et al., 2011; Işıksal, 2006), regarding this situation. Blum (1993) and Zbiek (1998) stated that the difficulties experienced by teachers in the model creation process are largely due to the difficulties experienced in establishing the semantic relationship between the situation at hand and the model to be produced.

When the findings obtained from the study were analyzed in terms of pedagogical perspective, it was seen that the instructional explanations and models used by the participants were generally suitable for the conceptual and problem-solving level. It can be said that the lowest performance in this dimension belongs to the epistemic level. In the question used within the scope of the research at the epistemic level, teachers and pre-service teachers were asked to provide mathematical proof of the algorithm of dividing fractions. When the literature is examined in relation to this result, it is seen that similar results are expressed in different studies. Yavuz Mumcu (2018), Zembat (2007) and Baki and Bütün (2009) studies have similar results and state that teacher candidates generally have difficulty in demonstrating the algorithm/mathematical meaning of fraction operations using models, and this situation is more common in multiplication and division operations than in other operations.

According to the results obtained from this research, it can be said that teachers show better performances than teacher candidates. This result can be interpreted depending on the professional experience of teachers. The fact that teacher candidates who have not yet graduated from university answered the questions based on the theoretical and applied courses they took during their undergraduate education, can be interpreted as the reason why they have difficulty in using mathematical models in different situations. Related to this result, in different studies in the literature (Gökkurt vd., 2013; Şahin vd., 2013; Yavuz Mumcu, 2018), it is stated that the candidates have difficulties in creating models in fraction operations.

In this research, it was seen that teachers and pre-service teachers generally used mathematical models correctly in dividing fractions. However, as the fractions in the current situation changed from simple fractions to compound fractions or integer fractions, it was observed that the mathematical models used by all participants in the process decreased and the instructional explanations remained in the verbal dimension. When the mathematical and pedagogical dimensions are evaluated together, it can be said that in general, all participants had difficulty in posing problems appropriate to the given situation. Therefore, it was concluded that teachers and pre-service teachers had difficulty in writing problems suitable for mathematical situations involving fraction division. When looking at the literature, it can be seen that similar results were obtained in the study of Işık (2011).

In the sixth and seventh questions used within the scope of this research, participants were asked to make instructional explanations for student errors. At this stage, it was observed that the participants generally did not use different representations and models but only verbal explanations. It was observed that similar results were achieved in different studies (Can, 2019; Gökkurt et al., 2013; Gökkurt, 2014). Although it is seen that teachers and teacher candidates generally have sufficient knowledge and practice in detecting student errors, their performance in correcting these errors is reported to be lower.

Studies in the literature show that students have difficulty in dividing fractions and therefore show poor performance. This situation can be interpreted as teachers and pre-service teachers not giving enough time to new and different pedagogical approaches in teaching fractions. Depending on the abstract structure of the concept of fraction, it is recommended to include mathematical models as concretization tools in the relevant processes. In this context, it is important to support teachers, especially those who are new to the profession, in the use of mathematical models in teaching. In-service training, seminars and projects can be carried out on the subject. However, this research is limited to two mathematics teachers and two teacher candidates. It is recommended to use larger sample groups and data collection tools in different studies. In this way, it is thought that different dimensions of the researched situation can be revealed, and thus more effective suggestions can be presented to the literature.