Yıldırım, D., Yavuzsoy Köse, N. (2018). Ortaokul öğrencilerinin çokgen problemlerindeki matematiksel düşünme süreçleri. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 18* (1), 605-633.

Geliş Tarihi: 17/04/2017 Kabul Tarihi: 05/12/2017

ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN ÇOKGEN PROBLEMLERİNDEKİ MATEMATİKSEL DÜŞÜNME SÜREÇLERİ [*]

Duygu YILDIRIM[**]
Nilüfer YAVUZSOY KÖSE[***]

ÖZET

Bu araştırmanın amacı ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin çokgen ile ilgili problemlerdeki matematiksel düşünme süreçlerini incelemektir. Araştırmada verilerin toplanması, çözümlenmesi ve yorumlanmasında nitel araştırma yöntemi benimsenmiştir. Toplam sekiz öğrenci ile gerçekleştirilen araştırmanın verileri klinik görüşme yöntemi kullanılarak toplanmıştır. Öğrencilere genellemeye ulaşmaları beklenen çokgenler ile ilgili problemler sunulmuş, elde edilen veriler tematik olarak analiz edilmiştir. Özelleştirme sürecinin problemi anlama aşamasında öğrencilerin aşina oldukları problemleri anladıkları ancak farklı bir geometrik problem ile karşılaştıklarında zorlandıkları belirlenmiştir. Yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerin tıkanma sürecine girseler dahi atak sayılarının diğer öğrencilere göre fazla olduğu ve farklı stratejilere yöneldikleri görülmüştür. Bununla birlikte beklenen genellemeye ulaşıp bunu sözel olarak ifade edebilen öğrencilerin çoğu, genellemeyi cebirsel olarak ifade etmekte oldukça zorlanmışlardır. Geometrik yaklaşım kullanarak genellemeye ulaşan öğrencilerin ulaştıkları genellemelere ilişkin daha kolay açıklama yapabildikleri, sadece sayısal yaklaşım kullanan öğrencilerin ulaştıkları genellemelerin nedenlerini açıklamada zorlandıkları saptanmıştır.

Anahtar sözcükler: Matematik eğitimi, matematiksel düşünme, çokgen problemleri, problem çözme.

MATHEMATICAL THINKING PROCESSES OF SECONDARY SCHOOL STUDENTS IN POLYGON PROBLEMS

ABSTRACT

The aim of this research was to examine the mathematical thinking processes of 8th-grade students in problems involving polygons. Qualitative research methods were used in the data collection, analysis, and interpretation stages. Data were collected from a total of eight students by using the clinical interview method. The students were given polygon problems where they were expected to reach generalizations, and the obtained data were thematically analyzed. During 'understanding the problem' phase of the specializing process, the students were able to understand the problems that they were already familiar with, but they had difficulties when they met a geometric problem that looked different. Also, those students with high achievement levels had more attacks compared to the other students and they turned to different strategies even if they were frustrated. Nevertheless, most of the students who reached the expected generalization and verbally expressed it had difficulty in expressing the generalization algebraically. The students who reached the generalizations using the geometric approach were able to easily justify the generalizations that they made, whereas only those students who used the numerical approach were unable to justify their generalizations.

Key Words: Mathematics education, mathematical thinking, polygon problems, problem solving.

** Bu çalışma 2016 yılında Muğla'da düzenlenen "III. International Eurasian Educational Research Congress" adlı kongrede sözlü bildiri olarak sunulmuş olup birinci yazarın yüksek lisans tez çalışmasıdır.*

*** Öğretmen, MEB, Matematik Öğretmeni, duyguyldrm_@hotmail.com*
**** Doç. Dr., Anadolu Üniversitesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, nyavuzsoy@anadolu.edu.tr*

1.GİRİŞ

Düşünme, bireyin entellektüel gelişimindeki en önemli araçtır. Düşünmeyen, sorgulamayan, sormayan ve araştırmayan bireyler öğrendiklerini de içselleştiremezler. Bu içselleştirme sürecinin etkin olması gereken en önemli alanlardan biri ise hiç şüphesiz matematiktir. Nitekim geçmişten günümüze bireyin entelektüel gelişimini hedefleyen tüm eğitim felsefeleri, düşünmeyi geliştirilmesi gereken en önemli beceri olarak tanımlamışlar ve bireyin düşünme sistemini geliştirmeye katkısı olan matematiği ise bireylere öğretilmesi gereken temel disiplinlerden biri olarak görmüşlerdir (Çelik, 2016). Matematik eğitimi sayıları, işlemleri öğretmekten, günlük yaşamın vazgeçilmez bir parçası olan hesaplama becerilerini kazandırmaktan öte bir işlev üslenmekte; düşünme, olaylar arasında bağ kurma, akıl yürütme, tahminlerde bulunma, problem çözme gibi önemli destekler sağlamaktadır (Umay, 2003). Bu düşünme biçimi matematiksel düşünme olmakla beraber üst düzey beceriler gerektiren bir düşünme şeklidir. Burton (1984) bir fikrin, bir gözlemin, bir olayın ya da durumun düşünmeyi tetiklediğini ve bu olguların matematiksel düşünme aracılığıyla tanımlanabildiklerini belirtir. Bu durum matematiksel düşünmenin, yalnızca soyut matematiksel kavramların yer aldığı durumlarda değil, günlük yaşamda da kullanılabilecek bir düşünme biçimi olduğunun göstergesidir. Üstelik bireyi kendisi hakkında daha derin bir anlayış geliştirmeye, ne bildiği hakkında daha mantıklı görüş oluşturmaya, ne bilmek istediğine yönelik daha etkili araştırma yapmaya, ne duyduğu ve gördüğüne dair daha iyi bir değerlendirme yapmaya yönlendirir (Mason, Burton ve Stacey, 1985).

Literatüre bakıldığında matematiksel düşünmenin, matematik eğitimi araştırmalarında matematiksel süreçler (varsayımda bulunma, genelleme ve ispat) ve matematiksel kavramların gelişimi olmak üzere iki farklı perspektiften tanımlandığı görülmektedir (Isoda ve Katagiri, 2012, s.24). Süreç perspektifinde "Matematiksel düşünme nasıl gerçekleşir?" sorusuna odaklanılır ve bir problem karşısında harekete geçen düşünme eylemini matematiksel düşünme yapan süreçler bu bakış açısı altında tanımlanır. Diğer perspektifte ise matematik içeriğine odaklanılarak bireyin matematiksel kavramları zihinde nasıl yapılandırdığı ve bu yapılandırma sırasında geçekleşen süreçlerin neler olduğu bakış açısından matematiksel düşünme tanımlanır (Çelik, 2016). Matematiksel düşünmeyi süreç perspektifinden ele alan araştırmacıların matematiksel düşünmenin bileşenlerini benzer şekillerde ortaya koydukları görülmektedir. Örneğin; Henderson ve diğerlerine (2004) göre matematiksel düşünme; problemlerin çözümünde matematiksel tekniklerin, kavramların ve süreçlerin doğrudan ya da dolaylı olarak uygulanmasıdır. Alkan ve Güzel (2005) ise matematiksel düşünme sürecinde bireylerin algılarından hareket ederek bir ürüne ulaşma çabası içinde olduklarını ve bu çaba sırasında kullanılan yaklaşımların bireysel farklılıklara göre çeşitlilik gösterebileceğini vurgulamışlar ve matematiksel düşünmeyi diğer düşünmelerden ayıran en belirgin göstergenin bireylerin önceden öğrenmiş oldukları matematiksel bilgi ve kavramları kullanarak soyutlama, tahmin etme, genelleme, hipotez kurup test etme, akıl yürütme, ispatlama ve betimlemelerle yeni bir bilgiye ya da kavrama ulaşması olarak belirlemişlerdir. Matematiksel düşünmenin özünde sürekli bir fonksiyonu tanımladığını, yani bir düşünceden yeni bir düşünceye ulaşma mantığı üzerine kurulu olduğunu; bir başka deyişle üretilen her yeni düşüncenin, bir başka düşüncenin başlangıcını oluşturduğunu ve sürecin bu şekilde bir döngü halinde devam ettiğini ifade etmişlerdir. Bu döngü Burton'a (1984) göre bir örüntünün araştırılmasıyla başlar; keşfedilen örüntü sözel, resimsel, somut ya da sembolik olarak ifade edilir; daha sonra ise örüntü doğrulanır ve bu şekilde süreç devam eder. Benzer şekilde Liu (2003) da matematiksel düşünmeyi tahmin edebilme, tümevarım, tümdengelim, tanımlama, genelleme, analoji, formal ve informal olmayan akıl yürütme, doğrulama ve benzeri karmaşık süreçlerin bir kombinasyonu olarak tanımlarken Tall (1991), matematiksel düşünmenin soyutlama, sentezleme, genelleme, modelleme, problem çözme ve kanıt gibi farklı bileşenleri içerdiğini ifade etmektedir. Schoenfeld (1992) ise matematiksel düşünmenin temel bileşenlerini bilginin özü, problem çözme stratejileri, bireyin kendi öz kaynaklarını etkili kullanma, matematiksel bakış açısına sahip olma, matematiksel uygulamalarla uğraşma şeklinde ortaya koymuştur. Burton (1984) ile Mason, Burton ve Stacey (1985) de matematiksel düşünmenin temel bileşenlerini özelleştirme (specializing), genelleme (generalizing), varsayımda bulunma (conjecturing), doğrulama ve ikna etme (justifiying and convincing) olmak üzere dört aşamada tanımlayıp incelemişlerdir. Bu bileşenlerden özelleştirme, en basit anlamıyla çeşitli örneklere bakarak özel durumlar arama olarak ifade edilebilir. Bu örnekleri problemi anlamak için rastgele, genellemeye zemin hazırlamak için sistematik bir şekilde ve genellemeyi test etmek için ustaca seçmek ve incelemek gerekmektedir. Böylelikle özelleştirme sürecinde genellemeye ulaşabilmek için kanıtlar toplanır (Mason ve diğer., 1985). Özelleştirme problemi anlamayı kolaylaştırarak problemin gerçekte ne ile ilgili olduğunu sezmeye yardımcı olan, daha bilinçli tahmin yapıp, problemin çözümünü sağlayan bir süreç iken genelleme, birkaç örnekten hareket ederek daha geniş durumlar hakkında tahminlerde bulunmaktır (Mason ve diğer., 1985). Genelleme sürecinde birey, "Doğru olması olası görünen şey nedir?", "Niçin doğrudur?" ve "Hangi durumlarda doğrudur?" soruları ile karşı karşıya kalır ve bu soruların yanıtlanmasını sağlayacak bir örüntü arayışı içine girer. Bu sebeple genelleme, en basit anlamıyla örüntü ve ilişki arama olarak da ifade edilebilir. Matematiksel genellemelerde belli sayıdaki adımlardan yola çıkarak iddia hakkında karar verilmeye çalışılır. Bu durum, genelleme sırasında özelleştirme işleminin de yapıldığının bir göstergesidir (Arslan ve Yıldız, 2010). Dolayısıyla özelleştirme ve genelleme süreçlerini birbirinden ayrı düşünmek mümkün değildir. Bu doğrultuda genellemeye giden sürecin özelleştirmeyi de içerecek şekilde giriş (entry), atak (attack) ve gözden geçirme (review) olmak üzere üç bölüme ayrıldığı söylenebilir. Problemin anlaşılması ile başlayan atak süreci problem çözüldüğünde ya da çözülmekten vazgeçildiğinde tamamlanır. Bu kısımda birçok plan formüle edilip denenebilir, dolayısıyla bu süreçteki matematiksel aktiviteler karışık ve çeşitlidir. Yeni bir strateji yani çözüm yolu ortaya atan birey, ki bu araştırmada bu durum atak olarak ifade edilmiştir, bunu uygulamaya başladığında ya hızlı ve sorunsuz bir şekilde sonuca ulaşır (Buldum! AHA!) ya da bütün fikirleri deneyip istenilene ulaşamaz, tıkanma sürecine girer ve yeni bir iç görü, yeni bir yaklaşım için uzun bir bekleme süresi geçirir (Tıkandım! STUCK!). Gözden geçirme bölümü ise isminden de anlaşılacağı gibi geriye bakmak anlamındadır (Mason ve diğer., 1985). Bu süreçlerin göstergeleri Tablo 1'de ayrıntılı olarak verilmiştir.

Matematiksel düşünmenin diğer bileşeni olan varsayımda bulunma, özelleştirme ve genelleme süreçlerinde kendiliğinden ortaya çıkar. Harel ve Sowder'e (2007) göre bir varsayım doğruluğundan şüphe duyan bir birey tarafından ortaya atılan bir iddiadır. Böylesi bir iddia öğrencileri araştırmaya ve incelemeye özendirir. Bu süreçte bir önermenin doğru olabileceği tahmin edilerek bağlantılar araştırılır, örüntüler keşfedilir ve keşfedilen örüntülerden yola çıkarak bir yargıya varılır (Burton, 1984). Varsayım doğrulanır ya da çürütülür. Doğru ise niçin doğru olduğu, yanlış ise nasıl düzeltileceği düşünülür, düzeltilemiyorsa vazgeçilip yeni bir varsayım aranır. İkna etme, iddianın nedenini araştırmayı, varsayımın doğruluğunun altında yatan bazı sebepleri anlamayı ve açıklamayı içerir (Mason ve diğer., 1985). Birey öncelikle kendini ikna etmeli, ardından çevresini ikna etmeye geçmelidir. Bu süreç sadece basit bir doğrulama süreci değil, bir araştırmanın, iddianın niçin doğru olduğunu açıklama ve genelleme koşullarını kontrol etmedir (Burton, 1984).

Tablo 1.
Özelleştirme ve Genelleme Süreçleri (Mason ve diğer., 1985, s.47)

SÜREÇLER	BÖLÜMLER	GÖSTERGELER
ÖZELLEŞTİRME	**GİRİŞ** Ne biliyorum? Ne istiyorum? Neyle karşılaşırım?	• Sorunun dikkatlice okunması. • Sorunun ne içerdiğini keşfetmek için özelleştirme yapılması. • İlgili görünen fikirlerin, becerilerin ve gerçeklerin neler olduğunun belirlenmesi. • Benzer bir soru düşünülmesi. • Bilginin sıralanıp sınıflandırılması. • Gerçek sorunun ne olduğunu keşfetmek için özelleştirme yapılması. • İmgeler, diyagramlar, semboller kullanılması. • Temsil ve organizasyon gibi eylemlerin gerçekleştirilmesi.
	ATAK	***Tıkandım!*** ***Buldum!***
GENELLEME	**GÖZDEN GEÇİRME** Kontrol Yansıtma Genişlet	• Hesaplamaların yapılması. • Hesaplama sonuçları üzerine düşünerek sonucun mantıklı olup olmadığının düşünülmesi. • Soruyla uyumlu çözümlerin gerçekleştirilmesi. • Anahtar durum ve fikirlerin ortaya çıkarılması. • Tahminlerden ve iddialardan çıkan sonuçların değerlendirilmesi. • Çözümün yeterince açık olup olmadığının düşünülmesi. • Sonucu geniş içeriğe yansıtmak için genelleme yapılması. • Çözüm için yeni bir yol aranması.

Bu bağlamda literatürde matematiksel düşünme süreçlerinin ele alındığı çalışmalarda, matematiksel düşünmenin aşamaları ilerledikçe özellikle genelleme sürecinde öğrencilerin çoğunun sayılar ya da değişkenler arasındaki ilişkiyi daha çok sözel ifade ettikleri, matematiksel sembollerle ifade etmede sorun yaşadıkları (Arslan ve Yıldız, 2010; Keskin, Akbaba ve Altun, 2013); problem çözme, ilişkilendirme, akıl yürütme ve tahmin gibi süreç becerilerinde zorlandıkları (Yeşildere ve Türnüklü, 2007); değişkenle ilgili bilgiye sahip olmayan öğrencilerin kısmi ya da yerleşmiş tarzda (var olan bilgiler ışığında) genelleme yapabildiği, değişkenlerle ilgili biraz bilgisi olan öğrencilerin ise fonksiyonel bağlamda değişkenleri anlama yeteneğine bağlı olarak ya kısmi genellemeyi ya da tam cebirsel genellemeyi üretebildikleri belirlenmiştir (Rivera ve Becker, 2006). Sasman, Linchevski, Olivier ve Lienberg'in (1998) öğrencilere genelleme problemleri vererek onlardan yanıtlarını ve kullandıkları stratejileri açıklamaları ve ispatlamalarını bekledikleri çalışmada ise öğrencilerin problemde verilen bilgileri temel alarak açıklama yapamadıkları, çoğunun verdiği yanıtları doğrulaması gereken bir hipotez gibi görmedikleri, genelleme ve doğrulama sürecinde verilenlerin rolünün farkında olmadıkları dikkat çekmiştir. Matematiksel düşünme ve genelleme süreçlerinin incelendiği bu gibi çalışmalarda öğrencilerin genel olarak bu alanlardaki muhakeme becerilerinde eksiklikler olduğu ortaya çıkarılmıştır. Bu sebeple öğrencilerin matematiksel düşünmelerinin ve özellikle genelleme süreçlerinin araştırılması ve geliştirilmesi gereken alanların başında yer aldığı düşünülmektedir.

Matematiksel düşünmenin ve ona ait süreçlerin geliştirilmesi problem çözme etkinlikleri ile gerçekleştirilir ve problem çözme becerilerinin gelişimine katkı sağlayan alanlardan biri de geometridir. Geometri öğretimi ile öğrencilere geometrik düşünme becerisi kazandırılır ve öğrencilerin eleştirel düşünebilmelerini, problem çözebilmelerini ve matematiğin diğer konularını daha iyi anlayabilmelerini sağlamak amaçlanır (Driscoll ve diğer., 2007). Geometri problemleri ile karşı karşıya kalan öğrenciler geometrik yapıları analiz ederek bu yapıların birbirleriyle ilişkilerini öğrenirler ve bu süreç onların ilişkilendirme, çıkarımda bulunma, genelleme yapma ve doğrulama becerilerini geliştirir. Geometri alt öğrenme alanında yer alan "çokgenler"; üçgen, dörtgen, beşgen, altıgen gibi farklı türleri barındırdığından yapısı itibariyle genelleme yapmaya oldukça uygun bir kavram olarak karşımıza çıkmaktadır. Çokgenlerin kenar, açı, köşegen özellikleri incelenerek birbirleri ile ilişkileri kurulabilir, varsayımlar üretilebilir ve bunlardan yola çıkılarak çeşitli genellemelere ulaşılabilir. Bu bağlamda bu araştırmada çokgenler ele alınmış ve çokgen problemleri aracılığı ile öğrencilerin matematiksel düşünme süreçleri; özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma, doğrulama ve ikna etme olmak üzere Mason, Burton ve Stacey'nin (1985) ele aldığı şekilde ayrıntılı olarak incelenmiştir. Öğrencilerin özelleştirme ve genelleme süreçlerinde gerçekleştirdikleri çeşitli ve karışık olan matematiksel aktiviteleri (stratejiler ve bu stratejilere bağlı olan ataklar ve tıkanma noktaları) daha derin bir şekilde inceleyebilmek ve anlamlandırabilmek için matematiksel düşünmeye ait bu teorik çerçeve kullanılmıştır.

Değişik bakış açıları ile düşünebilmeyi, şekiller ve parçaları arasındaki ilişkileri fark edip anlamlandırma ve zihinde somut olarak canlandırmayı gerektiren çokgen kavramına ilişkin literatürde daha çok çokgenleri tanımlama, oluşturma ve sınıflama becerilerinin incelenmesine (De Villiers, 1994, 1998; Ergün, 2010; Fujita, 2008; Fujita ve Jones, 2006a; Fujita ve Jones, 2006b; Herbst, Gonzalez ve Macke, 2005; Leung, 2008; Monaghan, 2000; Pickreign, 2007; Türnüklü ve Berkün, 2013) bunların van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ile ilişkilendirilmesine (Burger ve Shaughnessy, 1986; Erez ve Yerushalmy, 2006) ve çokgen öğretiminde çeşitli tekniklerin ve dinamik geometri yazılımı kullanımının etkililiğinin araştırılmasına (Jones, 2001; Gülbağcı, 2009; Okumuş, 2011) odaklanıldığı görülmektedir. Bunların dışında ise literatürde çeşitli yaş gruplarındaki öğrencilerin matematiksel düşünmenin aşamalarından genelleme süreci ve diğer aşamalarındaki beceri düzeylerini inceleyen (Arslan ve Yıldız, 2010; Garcia-Cruz ve Martinón, 1998; Keskin, Akbaba ve Altun, 2013; Sasman, Linchevski, Olivier ve Lienberg, 1998), genelleme sürecinde görselleştirmenin önemine dikkat çeken (Yılmaz ve Argün, 2013; Yılmaz, Argün ve Keskin, 2009), örüntülerin genellenme süreç ve stratejilerini inceleyen (Akkan ve Çakıroğlu, 2012; Rivera ve Becker, 2006; Tanışlı ve Özdaş, 2009; Tanışlı ve Köse, 2011; 2013; Yeşildere ve Akkoç, 2011;), prblem çözme ve şema gelişimine odaklanan (Steele ve Johanning, 2004) araştırmalara rastlanılmaktadır. Bu araştırmada ise literatürdeki diğer çalışmalardan farklı olarak öğrencilerin çokgen ile ilgili genelleme problemlerinde kullandıkları matematiksel düşünme süreçlerine ve bu süreçlerin parçaları olan stratejilerinin/ataklarının ve tıkanma noktalarının belirlenmesine odaklanılmıştır. Üçgenler ve dörtgenler ile öğrencilerin küçük yaşlarda karşılaşmaları, bu çokgenlerin köşegen özelliklerine, iç açılarına ve iç açıları toplamına aşina olmaları onların diğer çokgenlere yönelik varsayımda bulunmalarına, çeşitli genellemelere ulaşmalarına ve ulaştıkları genellemeleri sadece üçgen ve dörtgen özelliklerine dayalı olarak doğrulayabilmelerine olanak verecektir. Bu süreçte ise kullandıkları stratejilerin/atakların ve karşılaştıkları tıkanma noktalarının belirlenmesi geometrik düşünmede öğrencilerin daha ileriye taşınmasında öğretmenlere ve araştırmacılara önemli ipuçları sunabilir. Bu düşünce doğrultusunda bu araştırmanın genel amacı ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin çokgen problemlerindeki matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesidir.

2. YÖNTEM

Ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinin incelendiği bu araştırmada nitel araştırma yaklaşımlarından temel nitel araştırma benimsenmiştir. Temel nitel araştırma bireylerin bakış açılarını ve dünya görüşlerini keşfetmeyi amaçladığı gibi bir fenomeni ya da bir süreci keşfetme ve anlama/anlamlandırma arayışında da olabilir (Merriam, 1998, s.11). Öğrencilerin çokgenlere ilişkin özelleştirme ve genelleme süreçlerinde gerçekleştirdikleri karmaşık matematiksel aktiviteleri daha derin bir şekilde inceleyebilmek ve anlamlandırabilmek amacı ile bu desen tercih edilmiştir.

2.1.Katılımcılar

Araştırmada yer alan katılımcıların belirlenmesinde amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme kullanılmıştır. Araştırmanın amacına ulaşabilmesi için katılımcıların örüntü ve çokgenler ile tanışmış olması bir gerekliliktir. Bu nedenle ölçüt olarak ortaokul sekizinci sınıf düzeyi belirlenmiş, klinik görüşmelerde öğrencilerin düşünme ve muhakeme etme, verileri sınıflandırma ve ilişkilendirme, varsayımda bulunma, genelleme gibi üst düzey becerileri kullanmaları gerektirecek problemler kullanılacağı için başarı olarak düşük seviyedeki öğrencilerden zengin veri elde edilemeyeceği düşünülmüş ve bu nedenle sadece orta ve yüksek başarı düzeylerine sahip öğrenciler tercih edilmiştir.

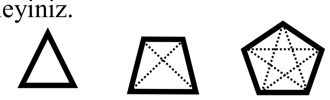
Öğrenci başarı düzeylerini belirlemede öncelikle matematik öğretmeninin öğrenciler hakkındaki görüşleri ve ayrıca 2014-2015 eğitim-öğretim yılı TEOG sınav sonuçları baz alınarak dört kız-dört erkek olmak üzere sekiz öğrenci seçilmiştir. Dört kız-dört erkek öğrenci arasından ise orta ve yüksek başarı düzeylerine uygun öğrenciler seçilirken her düzeye ait iki kız, iki erkek öğrenci seçilmesine dikkat edilmiştir. Başarı düzeyi yüksek olan öğrenciler Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 ve başarı düzeyi orta olan öğrenciler O_1, O_2, O_3, O_4 şeklinde kodlanmış ve öğrencilerin dağılımı Tablo 2'de sunulmuştur:

Tablo 2.
Araştırmaya Katılan Öğrencilerin Cinsiyet ve Başarı Düzeyleri

Cinsiyet/Başarı Düzeyi	Orta	Yüksek
Kız	O_1 , O_2	Y_1 ,Y_2
Erkek	O_3 , O_4	Y_3 ,Y_4

2.2. Verilerin Toplanması

Bu araştırmada öğrencilerin çokgen problemlerini genellemelerine ilişkin matematiksel düşünme süreçlerini belirlemek ve derinlemesine bilgi toplamak amacıyla klinik görüşme tekniği kullanılmıştır. Klinik görüşmelerde öğrencilerden verilen problemleri yanıtlarken sesli düşünmeleri ve düşüncelerini detaylı olarak açıklamaları beklenmiş ayrıca araştırmacı tarafından da öğrencilere düşünme süreçlerini ortaya çıkaracak sonda sorular yöneltilmiştir. Gerekli izinler alınarak gerçekleştirilen görüşmeler sırasında kullanılan video kamera öğrencileri, öğrencilerin kâğıtlarını görebilecek ve onların dikkatini dağıtmayacak şekilde yerleştirilmiş, görüşmecinin öğrenci ile yüz yüze olduğu ve öğrencinin yaptıklarını rahat görebildiği bir oturma düzeni oluşturulmasına dikkat edilmiştir.

1. Üçgen, dörtgen, beşgen ve altıgen gibi geometrik şekilleri düşünerek, herhangi bir sayıda kenar sayısına sahip bir çokgenin iç açıları toplamını bulmaya yarayacak genel bir kural oluşturabilir misiniz?	*Herhangi bir çokgenin bir köşesinden çıkabilecek köşegenler yardımıyla çokgenin kenar sayısının iki eksiği (n-2) kadar üçgene parçalanabileceği bilgisini "Bir üçgenin iç açıları toplamı 180°'dir." bilgisi ile birleştirerek "(n-2).180°" genellemesine ulaşmaları beklenmiştir.*
2. Aşağıda bazı çokgenlerin köşegenleri çizilmiştir. İnceleyiniz.  Buna göre n kenarlı bir çokgenin kaç tane köşegeni olduğunu bulmaya yarayacak bir kural bulabilir misiniz?	*Öğrencilerin "n kenarlı bir çokgenin her bir köşesinden n-3 tane köşegen çizilerek toplamda n.(n-3) köşegen çizilebilir" bilgisi ile A köşesinden B köşesine çizilen köşegen ile B'den A'ya çizilen köşegenlerin aynı olacağını fark etmeleri ve böylece n>3 olmak üzere, n kenarlı konveks bir çokgenin köşegen sayısı için* $\frac{n.(n-3)}{2}$ *genellemesine ulaşmaları beklenmiştir.*
3. Bir koordinat sisteminde (4, 0) ve (8, 0) noktalarını belirtiniz. Köşe noktalarından ikisi bu noktalar ve çevresi 12 birim olan bir üçgen düşününüz. Buna göre bu üçgenin 3. köşesinin koordinatı için neler söyleyebilirsiniz? Mümkün olan bütün durumları nasıl bulabilirsiniz? Açıklayınız.	*Olası üçüncü noktanın koordinatlarının (4,0) ve (8,0) noktalarını kapsayan yaklaşık bir elips üzerinde olduğunu anlayabilmeleri, bu noktaların hareketliliğini dikkate alabilmeleri ve bir üçgen oluşturmak için kenarlar arasındaki ilişkiyi fark edebilmeleri beklenmiştir.*

Şekil 1.Klinik görüşme soruları ve beklenen genellemeler

Genelleme içeren geometri problemlerinden oluşan klinik görüşme görevlerinin geçerlik ve güvenirlikleri, uzman görüşü alınarak ve pilot çalışma gerçekleştirilerek sağlanmıştır. Öncelikle alanyazın taraması yapılarak genelleme içeren sekiz geometri problemi (çokgenlerle ilişkili benzer yapıda problemler) belirlenmiştir. Belirlenen sekiz problem iki öğretim üyesi ve ortaokulda görev yapan iki matematik öğretmeni olmak üzere matematik eğitimi alanında uzman dört kişiye sunulmuş, önerilen değişiklikler doğrultusunda gerekli düzenlemeler yapılarak üç problem çıkarılmış ve kalan beş problemden oluşan testin pilot çalışması yapılmıştır. Pilot çalışma sonucunda soruların anlaşılırlığında bir sorun görülmemiş, bundan dolayı sorularda herhangi bir değişiklik yapılmamıştır. Klinik görüşmeler her bir öğrenci için iki ya da üç ayrı oturum şeklinde gerçekleştirilmiştir. Görüşmelerin her birinde öğrencilere sorular ayrı kâğıtlarda yazılı olarak sunulmuş ve çözümlerini gerçekleştirebilmeleri için yeterince süre tanınmıştır. Ancak bulguların çok uzun olmasından dolayı bu çalışma kapsamında Şekil 1'de verilen çokgenler ile ilgili sorulara odaklanılmıştır. Şekil 1'de ayrıca her bir soru kapsamında öğrenciden beklenen genellemelere de yer verilmiştir.

2.3.Veri Analizi

Araştırmada verilerin analizinde nitel analiz yöntemlerinden biri olan tematik analiz yöntemi kullanılmıştır. Bu doğrultuda bu araştırmada, aynı zamanda çalışmanın yazarları olan araştırmacı (matematik öğretmeni) ve bir matematik eğitimi alan uzmanı hazırlanmış olan kuramsal çerçeveyi dikkate alarak veriler üzerinde bağımsız çalışmış, temaları ve alt temaları oluşturmuşlardır. Ana temalar Mason, Burton ve Stacey'nin (1985) kuramsal çerçevesinde ele aldıkları "özelleştirme", "genelleme ve doğrulama-ikna etme"dir. Diğer tema, alt tema ve kategorilerin oluşturulmasında ise veriler bir araya getirilerek incelenmiş ve ortak yönleri araştırmacılar tarafından bulunmaya çalışılmıştır. Ortaya çıkan tema ve alt temalar birbiriyle ilişkili ve anlamlı bir bütün oluşturacak şekilde düzenlenmiştir. Bu tema ve alt temaların düzenlenmesinde kuramsal çerçeve de dikkate alınarak matematiksel düşünme süreçleri öne çıkarılmış, bu süreçler altında her bir probleme ait kategorilere yer verilmiştir. Bu tema ve alt temaları içeren kodlama anahtarı Tablo 3'de sunulmuştur.

Örneğin özelleştirme temasının ilişki arama- varsayım oluşturma alt temasına ait "ön bilgiye dayalı kural yazma" öğrencilerin verilen problemlerdeki özel değerleri ve şekilleri inceledikten sonra ya da bu aşamaları hiç yapmadan önbilgilerine dayalı olarak genellemeleri ifade etmeleridir. Bu durum ile birinci ve ikinci problemde karşılaşılmıştır. Geometrik yaklaşım alt teması ise iki farklı problemde ortaya çıkmıştır. Çokgenin iç açıları toplamı probleminde çokgeni geometrik yapılara parçalama ve tamamlama iki ayrı alt tema altında incelenirken, çevre probleminde çokgeni parçalama söz konusu olmadığından kenar uzunluklarına odaklanma, üçgen eşitsizliği, olası üçgenleri çizme, simetri ve Pisagor bağıntısını fark etme alt temaları oluşturulmuştur. Geometrik yaklaşım probleme uygun geometrik bir yapı kullanmayı ve bu yapıyı analiz etmeyi içerdiğinden bu alt temalar bulgularda geometrik yaklaşım altında birlikte sunulmuştur.

Kodlama ve temalaştırma süreci ilk iki yazar tarafından birbirinden bağımsız olarak yürütülmüş ve güvenirlilik hesaplaması yapılarak %92 güvenirlik sağlanmıştır (Miles & Huberman, 1994, s. 64). Ortaya çıkan temalar ve temalar arası ilişkiler şekiller ile desteklenerek sunulmuş, aynı zamanda elde edilen tema ve alt temalar öğrencilerden alınan görüşler ve dokümanlardan doğrudan alıntılar yapılarak desteklenmiştir. Şekillerde harf ve sayılarla kodlanan öğrencilerin kullandıkları stratejiler sonucunda genellemeye ulaşıp ulaşmama durumları mavi (A_1), kırmızı (B_2) ve siyah renk (C_3) kullanılarak verilmiştir. Kırmızı öğrencilerin düşünme sürecinde tıkanma yaşadıklarını, mavi beklenen genellemeye ulaştıklarını gösterirken siyah kullanılan stratejinin istenen genellemede aracı ya da etkisiz bir rol oynadığını ifade etmektedir.

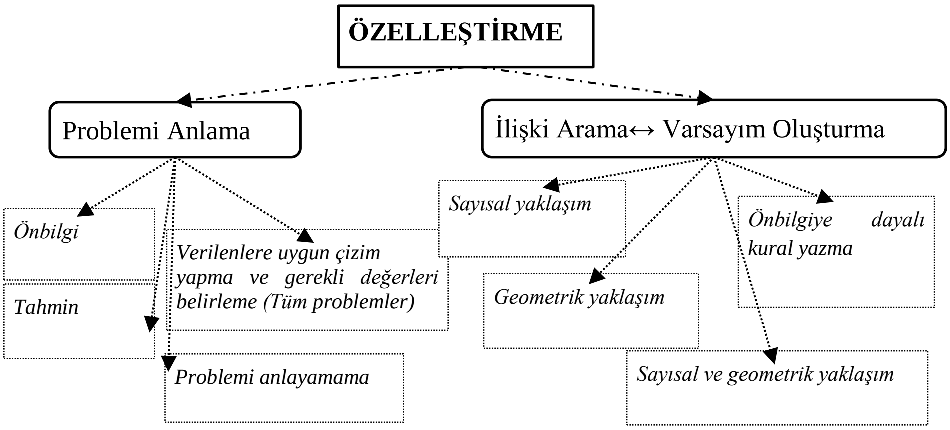
Tablo 3.
Kodlama Anahtarı

Özelleştirme	**Problemi anlama**	Verilenlere uygun çizim yapma ve gerekli değerleri belirleme	**Tüm problemler**
		Önbilgi	**1.Problem**
		Tahmin	**3.Problem**
		Problemi anlayamama	**3.Problem**
	İlişki arama-varsayım oluşturma/ataklar	Ön bilgiye dayalı kural yazma	**1.- 2. Problem**
		Sayısal yaklaşım	**1.Problem** *Örüntü oluşturma *Fonksiyonel strateji *Deneme-yanılma
		Geometrik yaklaşım	**1.Problem** *Geometrik yapılara parçalama *Geometrik yapılara tamamlama **3.Problem** *Kenar uzunluklarına odaklanma *Üçgen eşitsizliği *Olası üçgenleri çizme *Simetri *Pisagor bağıntısını fark etme
		Sayısal ve geometrik yaklaşım	**1.Problem** *Köşegen sayısına odaklanma *Açıya odaklanma **2.Problem** * Bir köşeden çıkan köşegen sayısı-kenar ilişkilendirmesi * Köşegen sayısı kenar ilişkilendirmesi
Genelleme ve doğrulama-ikna etme	**Genelleme**	Sözel genelleme	**1.Problem**
		Cebirsel genelleme	**1.- 2. Problem**
		Geometrik yer genellemesi	**3. Problem**
		Genelleme yapamama	**1.-3. Problem**
	Doğrulama-ikna etme	Doğrulama	**1.- 2. Problem**
		Açıklama	**1.- 2. Problem**

3. BULGULAR

3.1. Özelleştirme Süreci

Problemlerin özelleştirme sürecinde kullanılan yaklaşımlar Şekil 2'de verilmiştir.



Şekil 2. Problemlerin özelleştirme sürecinde kullanılan yaklaşımlar

Özelleştirme süreci, problemi anlama ile başlar. Problem çözme sürecinin de ilk aşamasının problemi anlama olduğu düşünüldüğünde, ilk olarak öğrencilerin problemi anlamaya yönelik olarak gösterdikleri eylemler "problemde verilenlere uygun çizimler yapma" ve "gerekli değerleri belirleme" başlıkları altında incelenmiştir. Bu bağlamda öğrencilerin, problemlerin tamamında ilgili şekillerin çizimlerini gerçekleştirdikleri ve belirlemeleri gereken değerleri (kenar ve köşe sayıları, koordinat sisteminde noktaları ve iki nokta arasındaki uzaklığı belirleme) ifade ettikleri görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin bazı problemlerde önbilgilerini kullanarak tahminde bulundukları da elde edilen diğer bulgulardandır. Örneğin çokgenlerde iç açılar toplamını bulmak için bir genel kuralın istendiği birinci problemde öğrencilerin öncelikle iç açıları toplamlarını bildikleri çokgenleri (eşkenar üçgen, kare) düşündükleri ve bunları çizdikleri görülmüştür. Öğrencilerin tamamı bu çizimlerde ilk olarak düzgün çokgenleri tercih etmelerine karşın düzgün beşgen ve düzgün altıgenin bir açısının ölçüsünü hatırlamakta zorlanmışlar, üç öğrenci (O_3, Y_1, Y_2) beşgenin iç açıları toplamı için 180°'lik artışa dayalı tahmin yürüterek düşünme sürecini açıklamıştır. Ayrıca bu süreçte bazı öğrencilerin (Y_2, O_2) düzgün olmayan çokgenlere (dik üçgen, beşgen) de odaklandıkları görülmüştür.

Bir çokgenin köşegen sayısını bulma probleminin anlama aşamasında ise öğrencilerin tamamının verilen çokgenlerin köşegenlerini inceleyip saydıkları ve bir altıgen çizdikleri belirlenmiştir. Bu özelleştirme aşamasında ilişkinin keşfi için köşegen çizimi önemli bir bileşendir ve öğrenciyi genellemeye götüren strateji için belirleyicidir. Eğer öğrenci sistematik olarak çokgenin herhangi bir köşesinden başlayarak köşegen çizerse kenar sayısı ile köşegen sayısı arasındaki ilişkiyi fark edebilir. Bu doğrultuda rastgele çizim yapan bir öğrenci hariç (O_4) diğer öğrencilerin tamamının sistematik bir biçimde köşegenleri çizdikleri görülmüştür. Bir öğrencinin görüşmesi örnek olarak sunulabilir:

G : *Mesela orda köşegenleri çizerken nasıl bir yöntem izledin? Rastgele mi çizdin yoksa belirli bir yol kullandın mı çizmek için?*

Y_3 : *Belirli bir yol kullandım.*

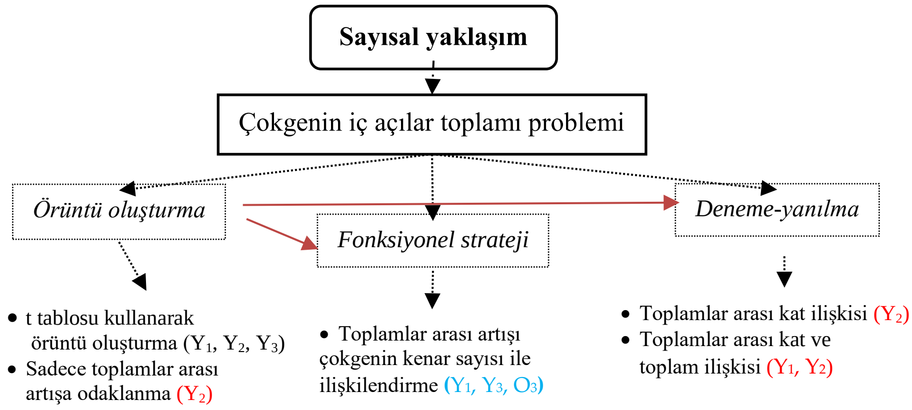
G : *Nasıl bir yol?*

Y_3 : *Mesela şimdi bu köşenin (altıgenin bir köşesi) bir kenarla bağıntısı olmadığı üç tane köşe var. O yüzden buradan üç tane köşegen çıkar ve her köşeden de böyle üç tane köşegen çıkacağı için her köşeden üç tane. Üçer tane köşegen çıktığı ana kadar çizmeye devam ettim.*

Genel olarak öğrencilerin problemi anlama aşamasında başarılı oldukları söylenebilir. Bununla birlikte öğrencilerin üçüncü köşe noktasının koordinatlarının (4,0) ve (8,0) noktalarını kapsayan yaklaşık bir elips üzerinde olduğunu anlayabilmeleri, bu noktaların hareketliliğini dikkate alabilmeleri ve bir üçgen oluşturmak için kenarlar arasındaki ilişkiyi fark edebilmeleri beklenen çevre problemini anlamada sorun yaşadıkları saptanmıştır. Bu soruda iki öğrenci (Y_1 ve Y_2), olası üçüncü köşe noktasının koordinatlarını belirlemekten daha çok üçgenlere odaklanmış, ayrıca Y_1 üçgende kenar-açı bağıntılarını da düşünerek tıkanma sürecine girmiş, sonuç olarak bu soruyla ilgili herhangi bir genellemeye ulaşamamıştır.

Özelleştirmenin ilişki arama/varsayım oluşturma aşamasında öğrenciler ilgili problemlerde veriler arasında ilişki aramaya yönelmişlerdir. Bu süreçte öğrencilerin Şekil 2'de verildiği gibi öncelikle eğer problemin genellemesine ilişkin önbilgiye sahiplerse ön bilgiye dayalı kural yazdıkları, ardından sayısal, geometrik, sayısal ve geometrik yaklaşımları kullandıkları görülmüştür. Ön bilgiye dayalı kural yazma öğrencilerden bazılarının iç açılar toplamı ve köşegen sayısı problemlerinde özel değerleri ve şekilleri inceledikten ya da bu aşamaları hiç yapmadan önbilgilerine dayalı olarak genellemeleri ifade etmeleridir. Çokgenin iç açılar toplamı probleminde bir öğrenci (O_1) doğru biçimde ve çokgenin köşegen sayısı ile ilgili problemde üç öğrenci (Y_1, Y_4, O_2) hatalı bir biçimde kural yazmaya çalışmışlardır.

Sayısal yaklaşımın kullanıldığı bir çokgenin iç açılar toplamı problemine ait stratejiler Şekil 3'te sunulmuştur. Sayısal yaklaşım problemdeki verileri sayısallaştırmayı ve veriler arasında ilişki aramayı ifade eder. Şekildeki kırmızı renk öğrencilerin tıkanma yaşadıklarını, mavi beklenen genellemeye ulaştıklarını ve siyah renk öğrenci tarafından kullanılan stratejinin istenen genellemede aracı ya da etkisiz bir rol oynadığını belirtmektedir.



Şekil 3. Sayısal yaklaşıma ait stratejiler

Çokgenin iç açılar toplamı probleminde veriler arasında ilişki arayan öğrenciler, atak oluşturma sürecinde ilk olarak sayısal yaklaşımlara yönelmişler ve bu kapsamda örüntü oluşturarak bu örüntülerin terimleri arasında deneme-yanılma ve fonksiyonel stratejileri kullanmışlar ve çeşitli ilişkiler aramışlardır. Problemde örüntü oluşturduktan sonra kenar sayılarını dikkate almadan sadece iç açılar toplamları arasındaki artışa odaklanan öğrencinin (Y_2) deneme-yanılma stratejilerine yöneldiği ve bu bağlamda önce toplamlar arasında bir kat ilişkisi (90 kat) aradığı ardından kat ve toplam ilişkisi arayarak tıkanma sürecine girdiği de görülmüştür. Örüntü oluşturarak öncelikle örüntünün terimleri arasında deneme-yanılma stratejisi ile ilişki arayan Y_1 ise tıkanma sürecinin ardından yeni bir atak gerçekleştirerek fonksiyonel stratejiyi kullanmıştır. Fonksiyonel stratejiler, girdi ve çıktı değerleri arasındaki ilişkinin araştırılmasını belirtir (Tanışlı ve Köse, 2011). Öğrenci (Y_1) problemde oluşturduğu örüntüden yararlanarak çokgenlerin iç açıları toplamları arasındaki 180°'lik artışı kenar sayısı ile ilişkilendirmiş ve (n-2).180° genellemesine ulaşmıştır. Öğrenci görüşmesi örnek olarak sunulabilir:

Y_1 : *Geometrik şekillerde kenar 180, dört kenar 360, beş kenar 540 çarpı 180 desek olmaz. Zaten burada hani mesela bir kenar 180 diye başlamamış. Üç kenar 180 diye başlamış. Belki de bunu hani bir kenar 180 desek uyacak bir kural genel bir şey yapabiliriz.*

G : *Nasıl yapabiliriz onu?*

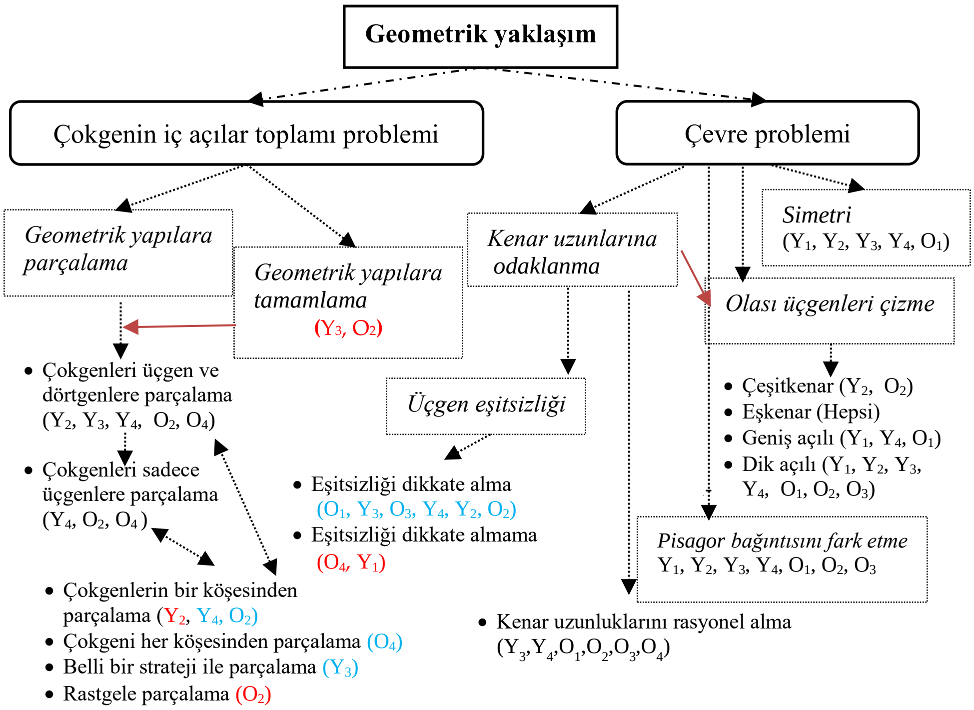
Y_1 : *Onu bir, iki, üç, dört olsa. İki eksik. Hepsinden altı, dört, iki eksiği yani iki eksiği. Evet, eee sonra sıfırlamış olacağız.*

G : *...Bunu bana genel olarak yazabilir misin?*

Y_1 : *Hmm kenara n desek yine. n eksi iki yapsak bunu direk buluruz, çarpı 180 olur mu ki?*

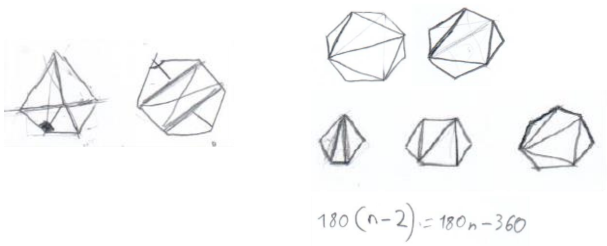
Yukarıdaki açıklamaları yapan Y_1, oluşturduğu genellemenin yalnızca düzgün çokgenler için geçerli olabileceğini düşünerek (özelleştirme) bir tıkanma yaşamış ancak biraz düşündükten sonra bu fikrin tüm çokgenler için doğru olduğuna karar vermiştir.

Sayısal yaklaşımdan beklenen genellemeye ulaşamayan öğrenciler yeni bir atak gerçekleştirerek geometrik yaklaşımlara yönelmişlerdir. İstenen genellemenin keşfinde çeşitli geometrik kavramlara odaklanmayı ve kullanmayı ifade eden geometrik yaklaşıma ait stratejiler Şekil 4'te sunulmuştur. Çokgenin iç açılar toplamı probleminde geometrik yaklaşım kullanan öğrenciler verilen çokgeni ya geometrik yapılara parçalamışlar ya da geometrik yapılara tamamlamışlardır.



Şekil 4. Geometrik yaklaşıma ait stratejiler

Çokgenlerin iç açılar toplamı probleminde geometrik şekilleri uygun parçalara ayırabilme becerisinin öğrencilerin genellemeyi keşfetmelerinde etkili bir rol oynadığı saptanmıştır. Bu bağlamda öğrencilerin (Y_2, Y_3, Y_4, O_2, O_4) çokgeni öncelikle üçgen ve dörtgenlere parçaladıkları ve ardından bazı öğrencilerin (Y_4, O_2, O_4) sadece üçgenlere parçalayarak toplamları elde ettikleri görülmüştür. Bu süreçte öğrencinin çokgeni nasıl parçalara ayırdığı da önemlidir. Bu parçalamada çokgenin bir köşesinden başlayan öğrenciler (Y_2, Y_4, O_2), çokgeni her köşesinden parçalayan öğrenciler (O_4) ve belli bir strateji ile parçalayan öğrenciler (Y_3) ile rastgele parçalayan öğrencilerin (O_2) düşünme süreçleri birbirinden farklıdır. Nitekim beşgeni bir üçgen ve bir dörtgene ayıran O_2, altıgende aynı stratejiyi uygulayarak onu da bir dörtgen ve iki üçgene ayırmıştır. Ancak dörtgenin de iç açılar toplamını bilmediği varsayılması gerektiği söylendiğinde, O_2 Şekil 5a'da görüldüğü gibi rastgele bir parçalama yaparak tıkanma noktasına gelmiştir. Bu tıkanma sürecinin ardından çokgenin tek köşesinden çıkan köşegenlerle üçgenler oluşturmuş ve toplamı üçgenin iç açıları ölçüsü toplamına dayalı olarak ifade etmiştir.

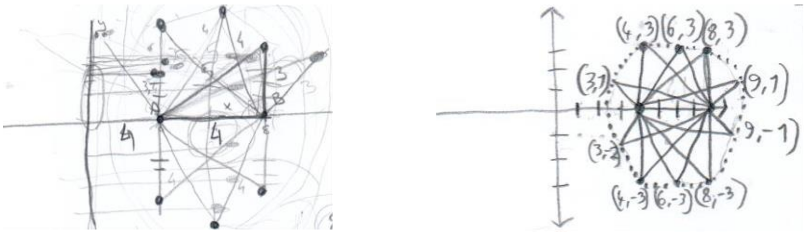


a. O_2 **b.** Y_3

Şekil 5. Çokgenin iç açılar toplamına ait öğrenci çizimleri

Öğrencilerden Y_3 ise Şekil 5b'deki gibi çokgenleri belli bir strateji bağlamında parçalayarak "Çokgenleri parçalarken ortada bir dörtgen kalana kadar birbirlerini kesmeyecek şekilde üçgen çizer ve son olarak ortadaki dörtgeni de köşegen yardımıyla iki üçgene ayırırım." şeklinde bir genellemeye ulaşmıştır. Katılımcı öğrencilerin çoğu çokgenleri üçgenlere parçalama stratejisini kullanırken biri yüksek (Y_3) diğeri orta başarı düzeyine sahip (O_2) iki öğrenci, geometrik yaklaşım kapsamındaki diğer bir strateji olan geometrik yapılara tamamlamayı kullanmışlar ve ilk olarak üçgeni dörtgene tamamlamayı düşünmüşlerdir. Bu tamamlama ile iç açılar toplamına ulaşamayınca "Çokgenler üçgenlere parçalanabilir" fikri zihinlerinde canlanmış ve geometrik yapılara parçalamaya geçmişlerdir.

Geometrik yaklaşımın kullanıldığı ve öğrencilerin çoğunluğunun özelleştirme aşamasında kaldığı çevre probleminde (Şekil 6) öğrencilerin üçgen oluşturabilmek için kenar uzunluklarına odaklandıkları belirlenmiştir. Bu doğrultuda iki öğrenci (O_4, Y_1) hariç diğer öğrenciler çevresi 12 birim olan üçgenleri belirlerken üçgenin kenarları arasındaki "üçgen eşitsizliği" kuralını dikkate almışlardır. Böylelikle diğer iki kenar uzunlukları toplamını 8 olarak belirtmişler, kenar uzunluklarının 2 ve 6 olamayacağını vurgulamışlardır. Bu noktada öğrencilerin tamamının kenar uzunlukları için rasyonel sayı değerlerini düşünmedikleri görülmüş, araştırmacının yönlendirmesine rağmen yüksek başarı düzeyine sahip iki öğrencinin (Y_1, Y_2) kenar uzunluklarının sadece tam sayılardan olabileceğini ifade ettikleri saptanmıştır. Kenar uzunluklarının neler olabileceğini sorgulayan öğrenciler ikinci aşamada olası üçgenlere ilişkin çizim yapmışlardır. Öğrencilerin tamamı ilk olarak eşkenar üçgen çizimini düşünürken, bazılarının üçgenin çeşitkenar, dik açılı ya da geniş açılı olabileceği düşündükleri görülmüştür. Özellikle 3-4-5 çeşitkenar üçgenini çizen öğrencilerin (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, O_1, O_2, O_3) bu üçgenin aynı zamanda dik üçgen olduğunu belirttikleri ve kenarlar arasındaki Pisagor bağıntısını da ifade ettikleri saptanmıştır. Ağırlıklı olarak yüksek başarılı öğrencilerin fark ettiği simetri özelliği doğrultusunda bazı öğrencilerin üçüncü köşe noktası için tahmini bir geometrik yer belirleyerek Şekil 6'daki gibi çizim yaptıkları görülmüştür.



a. Y_4 **b.** Y_3

Şekil 6.Çevre problemindeki öğrenci çizimleri

Çokgenlerin iç açılarının toplamının ve köşegen sayılarının belirlenmesi problemlerinde öğrencilerin hem geometrik hem sayısal yaklaşım altındaki stratejileri birlikte kullandıkları belirlenmiş ve bu stratejiler Şekil 7'de sunulmuştur. Sayısal ve geometrik yaklaşım yapıdaki geometrik bir özellik ile belirlenen köşegen sayısı ya da çokgenin kenar sayısı arasında sayısal bir ilişki aramayı belirtir.

Sayısal ve Geometrik Yaklaşım

Çokgenin iç açılar toplamı problemi

- *Köşegen sayısına odaklanma*
  - Çokgenin tüm köşegen sayılarına odaklanma (Y_1, Y_4)
- *Açıya odaklanma*
  - Çokgenlerin iç açıları arasındaki artış (Y_2, O_2, O_3)
  - Tümler açı (Y_2)

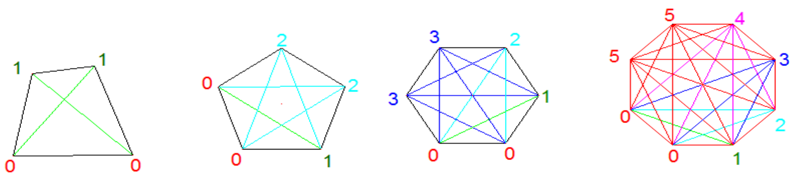
Çokgenin köşegen sayısı problemi

- *Bir köşeden çıkan köşegen sayısı-kenar ilişkilendirmesi*
  - Artışa odaklanma (Tüm öğrenciler)
    - Örüntü oluşturma
      -t tablosu (Y_2)
      -listeleme (Y_1, Y_2, Y_3)
- *Köşegen sayısı kenar ilişkilendirmesi*
  - Kat ilişkisi arama (Y_2, O_1)
  - Örüntü oluşturma
    -t tablosu (Y_1, Y_2, O_3)
    -listeleme (Y_3)
  - Kombinasyon (Y_2)

Şekil 7. Sayısal ve geometrik yaklaşıma ait stratejiler

Öğrenciler her iki problemde de öncelikle geometrik yapıyı analiz etmişler, ardından iç açılar toplamlarına ve köşegen sayılarına ilişkin örüntüler aramışlardır. Çokgenlerin iç açılarının toplamı probleminde açıya odaklanan öğrencilerin tıkanma sürecine girdikleri görülmüştür. Bu öğrencilerin bazılarının (Y_2, O_2, O_3) çizdikleri düzgün çokgenlerin iç açıları (60° ve 90°) arasındaki artışı inceleyerek bir kural aradıkları, bir öğrencinin (Y_2) ise çokgeni geometrik yapılara parçaladıktan sonra elde ettiği üçgenlerin iç açılarının tümler olması gerektiğini belirttiği belirlenmiştir. Elde ettiği üçgenler ikizkenar ya da eşkenar olmadığı için açılar hakkında yorum yapamayacağını belirten öğrencinin tıkanma sürecine girdiği de görülmüştür. İç açılar toplamı probleminde köşegen sayısına odaklanan öğrencilerin ise dörtgen, beşgen ve altıgene ait tüm köşegenleri çizmeye çalıştıkları ve sistematik bir yapı kuramadıkları için bir sonuca ulaşamayıp tıkanma sürecine girdikleri belirlenmiştir.

Çokgenin köşegen sayısının belirlenmesi probleminde ise öğrencilerin tamamı çokgenin kenar sayısı ile bir köşeden çıkan köşegen sayısını ilişkilendirmiş, bazıları bu ilişkilendirmeyi örüntü oluşturarak t tablosunda (Y_2) ya da liste aracılığıyla (Y_1, Y_2, Y_3) göstermiştir. Bu süreçte öğrencilerin öncelikle ilgili çokgenlerin tek bir köşesinden çıkan köşegenlerini çizdikleri, ardından bu köşegen sayıları üzerinde bir ilişki aradıkları görülmüştür. Bu ilişki arayışında yüksek başarı düzeyine sahip iki öğrenci (Y_1 ve Y_3) diğer öğrencilerden oldukça farklı bir strateji ile çokgenlerin köşelerinden çıkan köşegen sayılarının kendi içinde bir örüntü oluşturduğunu fark etmişlerdir. Bu örüntü Şekil 8'de sunulmuştur. Öğrenciler, çizimi yaparken beşgen ve altıgenin bir köşesinden başlamış, o köşeden çizilebilecek köşegen sayısını belirlemiş ve sırasıyla bütün köşelere aynı işlemi yapıp her bir köşeden çıkan köşegen sayılarını kâğıda not etmiştir.



2 (1,1) 5 (2,2,1) 9 (3,3,2,1) 20 (5,5,4,3,2,1)

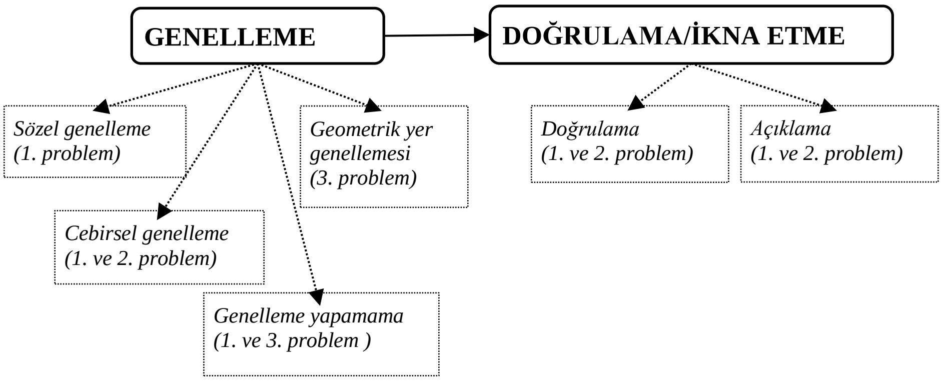
Şekil 8. Y_1 ve Y_3'ün köşegen sayılarına ilişkin stratejileri

Beşgenin 0, 0, 1, 2, 2 olmak üzere iki köşesinden iki (mavi), bir köşesinden bir (yeşil) köşegen çizilebileceğini ve diğer iki köşesinden köşegen çizilemeyeceğini, altıgen için ise 0, 0, 1, 2, 3, 3 olmak üzere iki köşesinden üç (lacivert), bir köşesinden iki (mavi), bir diğer köşesinden bir (yeşil) köşegen çizilebileceğini ve diğer iki köşesinden hiç köşegen çizilemeyeceğini söylemişlerdir. Öğrencilerden Y_3 yedigen ve sekizgeni de içeren bir listeleme yapmış, ancak yaptıkları bu atakla özelleştirme boyutunda kalarak herhangi bir genellemeye ulaşamamışlardır.

Çokgenin köşegen sayısının belirlenmesi problemindeki ikinci strateji ise kenar sayısı ile tüm köşegen sayısı arasında bir ilişkilendirme aramadır. Bazı öğrencilerin (Y_2, O_1) çokgenlerin köşegen sayısını belirledikten sonra bu sayılarla kenar sayısı arasında bir kat ilişkisi aradıkları, bazı öğrencilerin ise t tablosu oluşturarak (Y_1, Y_2, O_3) ya da listeleme (Y_3) ile köşegen sayıları arasındaki artışa odaklandıkları ancak tıkanma yaşadıkları görülmüştür. Öğrencilerden Y_2 ise, diğer öğrencilerin kullanmadığı bir strateji olan kombinasyonu da düşünerek farklı bir atak gerçekleştirmiştir.

3.2. Genelleme ve Doğrulama-İkna Etme Süreçleri

Öğrencilerin problemlerdeki genelleme ve doğrulama-ikna etme süreçlerinde kullandıkları yaklaşımlar Şekil 9'da gösterilmiştir. Problemlerde ön bilgiye dayalı genellemeye ulaşan öğrencilerin bazı özel değerleri ulaştıkları genel ifadede yerine yazmaları doğrulama altında, ulaşılan genellemenin geometrik olarak açıklamasını nedeni ile ifade edebilme ise açıklama alt teması altında incelenmiştir.



Şekil 9. Problemlerin genelleme ve doğrulama-ikna etme süreçlerinde kullanılan yaklaşımlar

Genellemeye ulaşan öğrencilerin yanıtları incelendiğinde sözel ya da cebirsel genellemelerin varlığı dikkat çekmiştir. Örneğin iç açılar toplamı probleminde (2. problem) öğrencilerden O_1 hariç diğer yedi öğrencinin *"Kenar sayısı arttıkça çokgenlerin iç açıları toplamı da 180° artar."* şeklinde bir sözel genelleme yapabildiği görülmektedir. Bunun yanı sıra öğrencilerden O_2 *"Tüm çokgenler üçgenlerden oluşur"*, O_4 "*Dörtgende iki üçgen sığdı, beşgende üç üçgen sığdı, altıgende dört üçgen sığdı. Üçgen sayısı birer artarak gidiyor."* şeklinde sözel genellemelere ulaşmışlardır. Katılımcı öğrencilerden üçü yüksek (Y_3, Y_4 ve Y_1) ikisi orta başarı düzeyine sahip (O_4 ve O_2) toplam beşi istenilen cebirsel genellemeye ulaşıp örnekler üzerinde doğruluğunu gösterirlerken biri yüksek (Y_2) diğeri orta başarı düzeyine sahip olan (O_3) ikisi cebirsel genellemeye ulaşamamıştır. Öğrencilerin cebirsel genellemeye ulaşmalarında sayısal yaklaşımlardan (fonksiyonel yaklaşımı kullananlar: Y_1, Y_3) ziyade geometrik yaklaşımların (geometrik yapılara parçalamayı kullananlar: Y_3, Y_4, O_2, O_4) yardımcı olduğu görülmüştür. Böylelikle verilen çokgeni tek bir köşesinden üçgenlere ve dörtgenlere parçalayabilen öğrencilerin çokgenin iç açılar toplamına ulaştıkları ve (n-2).180 genellemesini ifade ettikleri belirlenmiştir. Öğrenci görüşmesi örnek olarak sunulabilir:

O_4 *: Yedigende de o zaman beş tane sığması lazım üçgenin.180 ile de beşi çarparsak oradan yedigeni bulabiliriz. Dörtgene kenar sayısından iki eksik üçgen sığıyor, beşgene de iki eksik, altıgene de iki eksik üçgen sığıyor.*

G *: Peki, nasıl ifade edersin onu?*

O_4 *: Eee n eksi iki yani, n bir köşegenin kenar sayısı, şey çokgenin kenar sayısı çarpı 180 olabilir.*

G *: n eksi iki neyi ifade eder bu durumda?*

O_4 *: n eksi iki bu durumda çokgenin içine sığacak üçgen sayısını, 180 de üçgenin iç açısı…*

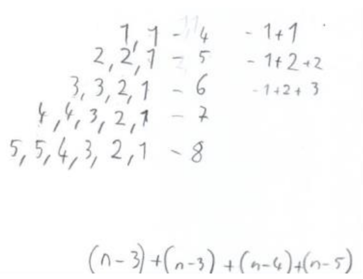
Çokgenlerin iç açıları toplamı için (n-2).180 genellemesine ulaşan öğrencilerin doğrulama sürecinde özel örnekler seçerek genel ifadede yerine yazdıkları ve ikna etme sürecinde ise biri hariç (Y_1) diğerlerinin buldukları ilişkinin nedenini açıkladıkları belirlenmiştir. Bu açıklamalarında geometrik yaklaşımı kullanmaları etkili olmuştur. Nitekim sayısal yaklaşımı kullanarak genellemeye ulaşan Y_1 ulaştığı "n-2"nin anlamını ve bu ifadenin neden 180˚ ile çarpıldığını açıklayamamıştır.

Çokgenlerin köşegen sayısının istendiği problemde öğrencilerin biri önbilgilerine dayalı olarak kuralı ifade ederken diğerleri "n(n-3)/2" genellemesine ulaşmış, tamamı bildikleri çokgenler üzerinde doğrulama yapmıştır. Öğrencilerin tamamı bu problemde sayısal ve geometrik yaklaşımları kullandıkları için ulaştıkları cebirsel genellemenin geometrik açıklamasını yapabilmişlerdir. Öğrencilerden O_1'in açıklamaları aşağıda sunulmuştur:

O_1 ***: … n çarpı n eksi üç bölü iki, diye düşünüyorum.***
G ***: Neden böyle olduğunu düşünüyorsun?***
O_1 ***: Neden böyle? Zaten bu [n-3'ü gösteriyor] bir köşeden çıkan köşegen sayısı. Eee zaten köşe, kenar sayısı ile köşe sayısı eşit oluyor zaten, diye düşündüm. Bunun ile bunu [bir köşeden çıkan köşegen sayısı ile köşe sayısını göstererek] çarptım. İkiye bölmemin sebebi de iki kenar, iki köşe arasında gidip gelmesi oldu.***

Bu problemde çokgenlerin köşelerinden çıkan köşegen sayıları arasında bir örüntü kuran öğrencilerden biri sadece altıgen için bir kural belirtmiş ancak tüm çokgenler için genel kurala ulaşamayacağını şu şekilde ifade etmiştir:

Y_3: *"n eksi üç dedik mesela. Bir köşe altı köşesi var. Altıdan üçü çıkarınca üç, evet, üç. Daha sonra ikinci kenar için de aynı şey dedik. Daha sonraki kenardan iki tane çıktı. Yani altıdan dört çıkartmış olduk. Altıgen için altı eksi iki, dört oluyor. Yine iki oldu bir oluyor. Altıgenin her bir çokgenin ayrı ayrı teker teker kuralını çıkarabilirim; ama ortak kuralı."*



Şekil 10. Y_3'ün açıklaması

Doğrulama ve ikna etme temasına yer verilmeyen ve sadece genelleme teması altında incelenen çevre probleminde ise öğrencilerin dördü (O_1, O_3, Y_4 ve Y_3) bir geometrik yer genellemesi yaparken diğer dört öğrenci bir genellemeye ulaşamamıştır. Bu problemdeki genellemede üçgenin üçüncü noktasının hareketliliğini dikkate alma önemsenmiş, noktanın elips dışında çember ve kare gibi bir geometrik yer üzerinde olabileceğinden bahseden öğrencilerin düşünme süreçleri diğer öğrencilerden ayrılmıştır. Bu bağlamda çember ifadesini kullanan öğrencilerden (O_3, Y_4 ve Y_3) Y_4'ün sözel açıklamalarında kenar uzunlukları toplamının 12'yi aşmayacak şekilde olması gerektiğini ifade ettiği yani kenar uzunlukları arasındaki üçgen eşitsizliğini dikkate aldığı ve kendine birinci ve dördüncü bölgelerde yer alan bir sınır belirlediği anlaşılmaktadır. Her ne kadar hatalı da olsa öğrencinin belirlediği geometrik yer Şekil 6a'da verilmiştir. Şekil 6b'deki gibi doğru bir geometrik yer belirleyen tek öğrenci Y_3 ise koordinat düzleminde olası noktaları belirlemiş, bu noktaların bir elips oluşturabileceğini ifade etmiş ve kendine göre elipsi tanımlamıştır. Görüşmesi örnek olarak sunulan Y_3'ün diğer bütün öğrencilerden daha ileri düzeyde bir genelleme ortaya koyduğu dikkat çekmektedir:

G ***: Diğer köşeler nerelerde olabilir?***
Y_3 ***: Hmm mesela onlar da şu düzlemde bir yerde olabilir [çiziyor] şöyle, böyle geliyor. Yine böyle [çember gibi bir şey çiziyor] aşağı inebilir.***
G ***: Peki, sence o ne belirtir? Aynı şekilde aşağıda da var onlardan diyorsun. (…)***
Y_3 ***: Daire… Çember olabilir.***

G *: Çember… Başka? Onlara benzer başka şekil?*
Y_3 *: Elips...*
G *: Elips... Elips olursa nasıl olur peki? Tam olarak tanıyor muyuz o şekli?*
Y_3 *: Yani hafiften dairenin birazcık daha basık hali gibi.*
G *: Çok güzel.*

4.TARTIŞMA ve SONUÇ

Çokgen ile ilişkili problemlerdeki matematiksel düşünme süreçlerinin incelendiği bu araştırmada elde edilen ilk sonuç, öğrencilerin aşina oldukları problemleri anlayabilmeleri, problemlerde istenen ilişkilerin keşfi için verilenleri belirlemeleri ve anlamayı destekleyici çizimler yapabilmeleridir. Benzer sonuçlar Arslan ve Yıldız (2010) ile Keskin, Akbaba ve Altun'un (2013) çalışmalarındaki öğrencilerin özelleştirme sürecindeki özel değerler için durumu test etme kısmında genel anlamda zorlanmadıkları sonucu ile örtüşmektedir. Ayrıca bir çokgenin köşegen sayısının sorulduğu problemde öğrencilerin tamamı Gutiérrez ve Jiame (1998)'nin çalışmasındaki 2. ve 3. düzey van Hiele geometrik düşünme düzeyindeki öğrenciler gibi her bir çokgenin köşegenlerini çizerek saymışlardır. Dolayısıyla öğrencilerin problemlerdeki verilenlere uygun çizimler yaptıkları ve gerekli değerleri belirledikleri söylenebilir. Bununla birlikte aşina olmadıkları birden çok nokta belirleyebilecekleri ve dolayısıyla bir geometrik yere ulaşacakları bir problemde (çevre problemi) öğrencilerin ikisinin problemi anlamadığı görülmüştür. Bu problem öğrenciler açısından zorlayıcı bir problem olmakla birlikte onların matematiksel düşünme süreçlerini ortaya çıkaran, yorum yapabilme becerilerini yoklayan ve simetri, üçgen eşitsizliği gibi birden fazla geometrik kavramın kullanılmasını gerektiren bir problemdir. Bu doğrultuda öğrencilerin problemde Driscoll ve arkadaşlarının (2007) çalışmasındaki öğrenciler gibi hatalı da olsa çember ve kare gibi bir geometrik yerden bahsetmeleri son derece değerlidir. Üstelik yüksek başarılı öğrencilerden biri (Y_3) beklenen doğru geometrik yer genellemesine (elips) de ulaşabilmiştir. Bu öğrencilerin eşkenar üçgen ve dik üçgen çizerek özelleştirme sürecinde kalan öğrencilerden esnek düşünerek daha iyi yorum yaptıkları, kenarlar arasındaki üçgen eşitsizliği kuralını ve simetri özelliğini dikkate aldıkları belirlenmiştir. Simetri özelliğini ağırlıklı olarak yüksek başarı düzeyindeki öğrencilerin fark etmesi de önemli sonuçlardandır.

Özelleştirme sürecinin veriler arasında ilişki arama aşamasında ise elde edilen önemli sonuçlardan biri, öğrencilerin sayısal, geometrik ve hem sayısal hem de geometrik yaklaşımları kullanmalarıdır. Sayısal yaklaşımlara odaklanan öğrencilerin t-tablosu oluşturarak sayı örüntüsü aradıkları ve oluşturdukları örüntülerde yinelemeli ve fonksiyonel stratejileri kullandıkları belirlenmiştir. Şekilleri bir ilişki bulma yönünde incelemek yerine sayı örüntüsüne dönüştürmek için kullanan öğrencilere gerçekleştirilen diğer çalışmalarda (Becker ve Rivera, 2006; Ma, 2007; Rico, 1996; Sasman, Linchevski ve Olivier, 1998; Stacey, 1989; Tanışlı ve Özdaş, 2009) da rastlanmaktadır. Oluşturulan sayı örüntülerinde bazı öğrencilerin sadece terimler arası artışa odaklanarak yinelemeli stratejileri kullandıkları ve rastgele ilişki aradıkları dikkat çekmiştir. Bu durum öğrencilerin geometri problemleri ile karşılaştıklarında şeklin yapısını incelemekten daha çok sayılarla ezbere işlem yapma eğiliminde olduklarını düşündürmektedir ve bu araştırma sürecinde de rastgele ilişki arayan öğrencilerin varlığı dikkat çekmiştir. Fonksiyonel stratejileri kullanan bazı öğrencilerin ise oluşturdukları şeklin yapısal özelliklerine odaklandıkları ve problemi görsel olarak analiz ettikleri görülmüştür. Hem sayısal hem de geometrik yaklaşımı kullanan öğrenciler ise köşegen sayısı probleminde özel örnekler üzerinde sistematik bir şekilde inceleme yaparak köşegenlerin nasıl oluştuğunu fark etmişlerdir. Bu problemde yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerden ikisi (Y_1 ve Y_3) diğer öğrencilerden çok daha farklı bir strateji bularak çokgenlerin her bir köşesinden çıkan köşegen sayılarının bir örüntü oluşturduğunu fark etmişler ve bu örüntüyü biri şekiller üzerinde biri de listeleme yaparak ifade etmiştir. Öğrencilerin sistematik bir biçimde çokgenin her bir köşesinden çıkan köşegen sayısına dayalı oluşturdukları örüntünün incelenmesini içeren bu strateji ile sadece Steele ve Johanning'in (2004) çalışmasında karşılaşılmıştır. Her ne kadar strateji ile öğrenciler genel bir kurala ulaşamasalar da bu stratejinin sayısal ve geometrik yaklaşımın birlikte kullanılabilmesine iyi bir örnek teşkil ettiği söylenebilir. Bununla birlikte hem sayısal hem geometrik yaklaşımın kullanıldığı çokgenin iç açılar toplamı probleminde öğrencilerin çokgendeki açı ölçüleri, tüm köşegenlerin sayısı ve çokgenin parçalanması ile oluşan üçgenin eşkenar ya da ikizkenar olması gibi farklı geometrik özelliklere odaklandıkları ve dolayısıyla tıkanma sürecine girdikleri de elde edilen diğer sonuçlardandır.

Geometrik yaklaşıma ait stratejilerin kullanıldığı iç açılar toplamı probleminde en dikkat çekici sonuç öğrencilerin verilen çokgenleri çeşitli geometrik yapılara parçalamaları ya da tamamlamalarıdır. İlk olarak geometrik yapılara tamamlamayı kullanan öğrencilerin tıkanma sürecine girerek "çokgenler üçgenlere ve dörtgenlere parçalanabilir" fikrine ulaştıkları görülmüştür. Tam bu noktada ise çokgenlerin nasıl parçalara ayrıldığı son derece önemlidir. Geometrik problemlerin çözümünde özellikle problem karmaşık ise öğrenciler şekli parçalamaya gereksinim duyarlar. Bu parçalama doğru parçaları ile olabildiği gibi var olan doğruların uzatılması aracılığıyla da olabilir. Böylelikle verilen probleme yeni bir yolla bakabilme sağlanmaya çalışır. İleriki sınıflardaki geometrik kanıtlardaki başarı sıklıkla bu bakabilme/görme becerisinde saklıdır (Sarama ve Clements, 2009).Bu bağlamda bu araştırmada sadece bir öğrencinin çokgenlerde rastgele bir parçalama yaptığı, diğer öğrencilerin belli bir strateji doğrultusunda ya da çokgenin köşelerinden parçalamaya başladıkları belirlenmiştir.

Özelleştirmenin ilişki arama aşamasındaki bir diğer sonuç bazı öğrencilerin özel değerleri, özel şekilleri inceledikten sonra ya da bu aşamaları hiç yapmadan ön bilgilerine dayalı olarak kural yazmaya çalışmalarıdır. Benzer durumla Arslan ve Yıldız'ın (2010) ve Steele ve Johanning (2004) karşılaşmış ve problemler arası bağlantıları gören öğrencilerin özel durumları çalışmaksızın geçmiş genellemelerini yeni problemlere uyguladıkları ve özel durumları sadece doğrulama yapmak için kullandıklarını belirlemişlerdir.

Problemlerin genelleme süreçlerinde ise öğrencilerin ulaştıkları genellemeleri sözel olarak açıklayabildikleri halde cebirsel olarak ifade etmede zorlandıkları belirlenmiştir. Benzer sonuçlarla Rivera ve Becker (2006), Özmantar, Bingölbali ve Akkoç (2008), Arslan ve Yıldız (2010) ile Keskin, Akbaba ve Altun (2013) da karşılaşmıştır. Sadece bir yüksek başarılı öğrenci (Y_3) iç açılar toplamı probleminde üç farklı strateji ile beklenen genellemeye ulaşmış, diğer öğrenciler tek bir strateji kullanmış ve zorlandıkları için farklı bir strateji arayışına girmek istememişlerdir. Bu durum Arıkan ve Ünal'ın (2012) çalışması ile paralellik göstermektedir. Yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerden bir diğerinin (Y_4) ise tek köşeden çıkan köşegenlerle çokgenleri üçgenlere ayırdığı ancak diğer öğrencilerden daha farklı olarak ilişkiyi [*(tek köşeden çıkan köşegen* *sayısı+1).180°*] ifade ettiği görülmüştür. Cebirsel işlemlerde oldukça başarılı olan bu öğrenci, ulaştığı genellemenin doğrudan kenar sayısı ile ilişkilendirilmiş olan *(n-2).180°* formundaki genel kuralla aynı olduğunu ifade edebilmiştir. Başarı düzeyi yüksek olan öğrencilerin daha esnek düşünebildikleri ve buna bağlı olarak problem çözmek için ürettikleri strateji/atak sayılarının arttığı görülmüştür.

Araştırma sürecinde öğrencilerin tamamının ulaştıkları genellemelerin doğruluğundan emin olmak için birkaç özel örneği kural üzerinde denedikleri ve genellemeye nasıl ulaştıklarını ifade edebildikleri görülmüştür. Doğrulamayı gerçekleştiren öğrenciler, ulaştıkları ifadenin geometrik olarak ne anlama geldiğini genelde açıklayabilmişlerdir. Geometrik yaklaşım kullanarak genellemeye ulaşan öğrencilerin daha kolay açıklama yapabilmelerine rağmen sadece sayısal yaklaşım kullanan öğrencilerin açıklama yapmakta zorlandıkları saptanmıştır.

Bu araştırma sonucunda özelleştirme sürecinde öğrencilerin aşina oldukları problemlerde verilen herhangi bir durum için ilgili ya da karşıt örnekler seçme, bu örnekleri tanımlama, anlatma, çizme ve farklı temsillerle gösterme gibi eylemleri kolaylıkla gerçekleştirebildikleri yani problemi anladıkları ancak sonrasında veriler arasında ilişki aramada öğrencilerin sorun yaşadıkları bu sebeple de ortaya attıkları stratejilerin çoğunun sonucunda tıkanma sürecine girdikleri belirlenmiştir. Ancak aşina olmadıkları daha karmaşık problemlerde öğrencilerin bazılarının problemi anlamada sıkıntı yaşadıkları ve özelleştirme aşamasında kaldıkları görülmüştür. Problemlerin çözümündeki ataklar incelendiğinde ise yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerin tıkanma sürecine girseler dahi atak sayılarının diğer öğrencilere göre fazla olduğu görülmüştür. Ayrıca beklenen genellemeye ulaşıp bunu sözel olarak ifade edebilen öğrencilerin çoğu, genellemeyi cebirsel olarak ifade etmekte oldukça zorlanmışlardır. Buna rağmen öğrencilerin çoğu problemlerde beklenen genellemelere ulaşabilmişlerdir. Genellemeye ulaşan öğrenciler, öncelikle ulaştıkları ifadenin doğruluğundan emin olmak için başlangıçta düşündükleri özel örnekleri kullanmayı tercih etmişlerdir. Geometrik yaklaşım kullanarak genellemeye ulaşan öğrencilerin daha kolay açıklama yapabildikleri, sadece sayısal yaklaşım kullanan öğrencilerin açıklama yapmakta zorladıkları saptanmıştır.

Öğrenciler matematiksel düşünme süreçlerini (genelleme yapabilme, tahmin edebilme vb.) ortaya çıkaran, yorum yapabilme becerilerini yoklayan birden fazla kavramın kullanılmasını gerektiren rutin olmayan problemlerle karşılaştırılmalıdırlar. Böylece öğretmenlerin öğrencilerinin nasıl bir muhakeme yürüttüklerini, hangi noktalarda tıkanma yaşadıklarını ve nasıl farklı çözümlere geçebileceklerini örneklendirme ve anlama şansları olabilir. Sınıf içi tartışmalar öğrencilerin eksik olduğu bu durumların reçetesi olabilir. Öğretmenler genelleme içeren geometri problemlerinde var olan örüntüleri sadece sayısal ya da tamamen ezbere bir yaklaşımla ele almamalı, öğrencileri şekillerin yapısını analiz ederek (parçalara ayırma, parçaları tamamlama) parçalar arası ilişki aramaya yönlendirmelidirler. Bu yaklaşım, öğrencilere geometri problemlerinde ilişki arama, varsayım oluşturma, genellemeye ulaşmada kolaylık sağlayabilir ve şekilleri parçalama, tamamlamaya yönelik çalışmalar öğrencilerin üst sınıflarda karşılaşacakları geometrik kanıtlardaki başarıyı daha kolay yakalamalarına yardımcı olabilir. Öğrencilerin geometri problemlerinde alışkanlık olarak özel örneklere (üçgeni ikizkenar ya da eşkenar alma, çokgen olarak düzgün çokgen alma, vs.) odaklandıkları ya da verilen problemle ilgili istenilenlerin dışında farklı geometrik özellikleri araştırdıkları görülmüştür. Bu doğrultuda öğretmenlerin sınıf içinde verdikleri örneklerde ve çizimlerinde prototip örneklerin dışına çıkmaları son derece önemlidir. Ayrıca ortaya çıkan sonuçlara göre öğretmenlerin derslerinde değişkenler arasındaki ilişkileri matematiksel olarak ifade etmeye daha çok yer vermeleri gerektiği düşünülmektedir. Öğrencileri farklı stratejiler üretmeye yönlendirmek için ise onların birbirleriyle düşüncelerini paylaşacakları tartışma ortamları yaratılarak değişik çözüm yollarını fark etmeleri sağlanabilir ve bu yolla öğrencilerin daha esnek ve daha yaratıcı düşünmelerinin gelişimi desteklenebilir.

KAYNAKÇA

Akkan, Y. & Çakıroğlu, Ü. (2012). Doğrusal ve ikinci dereceden örüntüleri genelleştirme stratejileri: 6-8. sınıf öğrencilerinin karşılaştırılması. *Eğitim ve Bilim, 37*(165), 184-194.

Alkan, H. ve Güzel, E. B. (2005). Öğretmen adaylarında matematiksel düşünmenin gelişimi. *Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 25*(3), 221-236.

Arıkan, E. E. & Ünal, H. (2012). Farklı profillere sahip öğrencilerle çoklu yoldan problem çözme. *Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, *1*(2), 76-84.

Arslan, S. & Yıldız, C. (2010). 11. Sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim, 35*(156), 17-31.

Becker, J. R. & Rivera, F. (2006). Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra (1). In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Saiz, & A. Mendez (Eds.), *Proceeding of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 95-101). Merida, Mexico: Universidad Pedagogica Nacional.

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry, *Journal for Research in Mathematics Education*, *17*(1), 31–48.

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(l), 35-49.

Çelik, D. (2016). Matematiksel Düşünme, E. Bingölbali, S. Arslan, I.O. Zembat (Eds.), *Matematik Eğitiminde Teoriler* içinde (ss.17-42). Ankara: Pegem Akademi.

De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 11-18.

De Villiers, M. D. (1998). To tech definitions in geometry or tech to define? In A Olivier& K. Newstead, *Proceedings of the 22nd PME Conference* (Vol. *2*, pp. 248- 255). Stellenbosch (South Africa): University of Stellenbosch.

Driscoll, M., DiMatteo, R. W., Nikula, J. E. & Egan, M. (2007). *Fostering geometric thinking: A guide for teachers grades 5–10.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Erez, M. & Yerushalmy, M. (2006). "If you can turn a rectangle into a square, you can turn a square into a rectangle": Young students‟ experience the dragging tool, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*(3), 271-299.

Ergün, S. (2010). *İlköğretim 7. sınıf öğrencilerinin çokgenleri algılama, tanımlama ve sınıflandırma biçimleri*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Fujita, T. (2008). Learners' understanding of the hierarchical classification of quadrilaterals. In M. Joubert (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 28*(2), 31-36.

Fujita, T. & Jones, K. (2006a). Primary trainee teachers’ understanding of basic geometrical figures in Scotland. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 3, pp. 129-136). Prague: PME.

Fujita, T. & Jones, K. (2006b). Primary trainee teachers’ knowledge of parallelograms. In D. Hewitt (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 26*(2), 25-30.

Garcia-Cruz, J. A. & Martinón, A. (1998). Levels of generalization in linear patterns. In A. Olivier & K. Karen (Eds.), *Proceeding of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 329-336). Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch.

Gutiérrez, A. & Jaime, A. (1998). On the assessment of the van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 20* (2&3), 27-46.

Gülbağcı, S. (2009). *İlköğretim 7. sınıf dörtgenler konusunun öğretiminde dinamik geometri yazılımlarının etkisi.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Harel, G. & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. Lester (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* National Council of Teachers of Mathematics.

Henderson, P. B., Marion, B. Fritz, S. J., Riedesel, C., Hamer, J., Scharf, C., et al. (2004). *Materials development in support of mathematical thinking.* {ONLINE} http://www.cs.geneseo. edu/~baldwin/math-thinking/iticse2002-paper.pdf adresinden 10.12.2014 tarihinde edinilmiştir.

Herbst, P., Gonzalez, G., & Macke, M. (2005). How can geometry students understand what it means to define in mathematics? *The Mathematics Educator*, *15*(2).

Isoda, M & Katagiri, S. (2012). *Mathematicsl thinking: How to develop it in the classroom*. Singapore: World Scientific Publishing.

Jones, K. (2001). Learning geometrical concepts using dynamic geometry software. In Kay Irwin (Ed), *Mathematics Education Research: A Catalyst for Change.* (p.50-58). Auckland: University of Auckland

Keskin, M., Akbaba, S. & Altun, M. (2013). 8. ve 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme aşamalarındaki davranışlarının karşılaştırılması. *Journal of Educational Sciences, 1*, 33-50.

Leung, I. K. C. (2008). Teaching and learning of inclusive and transitive properties among quadrilaterals by deductive reasoning with the aid of SmartBoard, *ZDM, 40*, 1007–1021.

Liu, P. H. (2003). Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching? *The Mathematics Teacher, 96*(6), 416-421.

Ma, H. L. (2007). The potential of patterning activities to generalization. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceeding of the 31th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 225- 232). Seoul: PME.

Monaghan, F. (2000).What difference does it make? Children's views of the differences between some quadrilaterals. *Educational Studies in Mathematics, 42*(2), 179-196.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1985). *Thinking mathematically*. Revised Edition. England: Addison-Wesley Publishers, Wokingham.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education. Revised and expanded from case study research in education.* San Francisco, CA: Jossey-Bass Publishers.

Miles, M. & Huberman, M. (1994). *An expanded sourcebook qualitative data analysis.* Second Edition. California: Sage Publications.

Okumuş, S. (2011). *Dinamik geometri ortamlarının 7. sınıf öğrencilerinin dörtgenleri tanımlama ve sınıflandırma becerilerine etkilerinin incelenmesi*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Özmantar, M. F., Bingölbali, E. & Akkoç, H. (2008). *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri*. Ankara: Pegem Yayıncılık.

Pickreign, J. (2007). Rectangles and rhombi: How well do preservice teachers know them? *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal*, *1*.14 Şubat 2016 tarihinde http://www.k-12prep.math.ttu.edu/journal/1.contentknowledge/pickreign01/article.pdf adresinden alınmıştır.

Rico, L. (1996). The role of representation systems in the learning of numerical structures. In L. Puig, & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 87–102). Valencia: University of Valencia.

Rivera, F. & Becker, J. R. (2006). Accounting for sixth graders' generalization strategies in algebra. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2, pp.155-157). *Mérida, México:* Universidad Pedagógica Nacional.

Sarama, J. & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research. Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.

Sasman, M., Linchevski, L., Olivier, A. & Liebenberg, R. (1998). Probing children's thinking in the process of generalisation. *Proceedings of the Fourth Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA)* (pp.210-218*).* Pietersburg: University of the North.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. (Ed. D.A. Grouws). *In Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of The National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 334-370). Newyork:Macmillan.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Steele, D. & Johanning D.I. (2004). A schematic–theoretic view of problem solving and development of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics, 57*, 65–90.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. USA: Kluwer Academic Publishers.

Tanışlı, D. & Özdaş, A. (2009). İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntüleri genellemede kullandıkları stratejiler. *Educational Sciences: Theory & Practice, 9*(3), 1453-1497.

Tanışlı, D. & Köse, N. Y. (2011). Lineer şekil örüntülerine ilişkin genelleme stratejileri: Görsel ve sayısal ipuçlarının etkisi. *Eğitim ve Bilim, 36*(160), 184-194.

Tanışlı, D. & Köse, N. Y. (2013). Sınıf öğretmeni adaylarının genelleme sürecindeki bilişsel yapıları: Bir öğretim deneyi. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi, 12(*44). 255-283.

Türnüklü, E., & Berkün, M. (2013). İlköğretim 5 ve 7. sınıf öğrencilerinin çokgenleri sınıflandırma stratejileri. *Kastamonu Eğitim Dergisi 21*(1), 337-356.

Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Eğitim Fakültesi Dergisi, 24*, 234- 243.

Yeşildere, S. & Akkoç, H. (2011) Matematik öğretmen adaylarının şekil örüntülerini genelleme süreçleri. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 30*, 141-153.

Yeşildere, S. ve Türnüklü, E. (2007). Öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi, 40*(1), 181-213.

Yılmaz, R., Argün, Z. & Keskin, M. (2009). What is the role of visualization in generalizaton processes: The case of preservice secondary mathematics teachers. *Humanity & Social Sciences Journal. 4*(2), 130-137.

Yılmaz, R. & Argün, Z. (2013). Matematiksel genelleme sürecinde görselleştirme ve önemi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 28*(2), 564-576.

EXTENDED ABSTRACT

1. Introduction

An idea, an observation, an event or a situation can be defined by mathematical thinking just as they can trigger thinking (Burton, 1984). This is an indication that mathematical thinking is a form of thinking that can be used not only in situations with abstract mathematical concepts but also in everyday life. Moreover, it also helps individuals develop a deeper understanding of themselves, build a more logical view of what they know, do more effective research on what they want to know, and make a better assessment of what they hear and see (Mason, Burton and Stacey, 1985). Studies on mathematical thinking tend to see it as a process and come up with similar components of mathematical thinking. For example, Burton (1984) and Mason et al. (1985) identified and examined the basic components of mathematical thinking in four stages: specializing, generalizing, conjecturing, and justifying and convincing. Mathematical thinking and its processes are developed by problem solving activities, and geometry is one of those areas that contribute to the development of problem solving skills. What geometry teaching aims to do is to help students acquire geometric thinking skills, think critically, solve problems, and better understand other topics of mathematics. Students who are faced with geometry problems analyze geometric structures and learn relations of these structures with each other, and this process improves their skills to establish relationships, inference, generalize and justify. “Polygons” is a topic of geometry, and because it covers different types such as triangles, quadrilaterals, pentagons and hexagons, it is quite suitable for generalizing. By examining the side, angle, and diagonal properties of polygons, we can establish relations among them, make assumptions, and reach out to various generalizations. In the light of these points, in this study, we discussed polygons and examined students’ mathematical thinking processes (i.e. specializing, generalizing, conjecturing, and justifying and convincing) in detail through polygon problems. Understanding the concept of polygons requires ability to think through different perspectives and to recognize, make sense of and mentally visualize the relationships between a shape and its parts. Studies on polygons usually examined the skills to identify, construct and classify polygons (De Villiers, 1994, 1998; Ergün, 2010; Fujita, 2008; Fujita and Jones, 2006a; Fujita and Jones, 2006b; Herbst, Gonzalez and Macke, 2005; Leung, 2008; Monaghan, 2000; Pickreign, 2007; Türnüklü and Berkün, 2013) or focused on their relevance to van Hiele's geometric thinking levels (Burger and Shaughnessy, 1986; Erez and Yerushalmy, 2006) or on investigation of the effectiveness of the use of various techniques and dynamic geometry software in teaching polygons (Jones, 2001; Gülbağcı, 2009; Okumuş, 2011). There are also studies that examined the skill levels of students in various age groups about the stages of mathematical thinking such as generalizing process (Arslan and Yıldız, 2010; Garcia-Cruz and Martinón, 1998; Keskin, Akbaba and Altun, 2013; Sasman, Linchevski, Olivier and Lienberg, 1998), studies that highlighted the importance of visualization in generalizing process. (Yılmaz, Argün and Keskin, 2009; Yılmaz and Argün, 2013), studies that examined the generalizing processes and strategies of patterns (Akkan and Çakıroğlu, 2012; Tanışlı and Özdaş, 2009; Tanışlı and Köse, 2011; 2013; Rivera and Becker, 2006; Yeşildere and Akkoç, 2011) and studies that focused on problem solving and schema development (Steele and Johanning, 2004). Unlike other studies in the literature, this research focused on determining students’ strategies/attacks, thinking processes and frustration points in problems involving polygons. In the light of this idea, the overall purpose of this research was to explore the mathematical thinking processes of eighth-grade students in problems involving polygons.

2. Method

This research adopted basic qualitative research methods to examine the mathematical thinking processes of eighth-grade students. Criterion sampling, a purposeful sampling method, was used for determining the participants in the research. It is a requirement that the participants have met patterns and polygons in order to reach the purpose of the research. For this reason, the primary criterion was that the participants were eighth-grade students with medium and high achievement level to obtain rich data.

Data in this research were collected through clinical interviews. The clinical interviews included three polygon problems involving generalization. In the first problem, the students were asked to formulate a general rule to find the interior angle sum of any polygon, considering geometric shapes such as triangle, quadrilateral, pentagon and hexagon. The second problem involved finding a rule that can be used to find out how many diagonals a polygon with n edges would have. The third one was a geometric location problem. The students were asked to find the coordinates of the 3^{rd} corner of a triangle with corner points (4, 0) and (8, 0) and with a circumference of 12 units, and they were to reach a generalization about the geometric location of possible points.

Data were analyzed using the thematic analysis method, a qualitative analysis method. The analyzes were presented by means of figures in the findings section, and whether the students, who were coded with letters and numbers in the figures, reached a generalization as a result of their strategies or not were explained by using given blue (A_1), red (B_2) and black (C_3) colors. Color blue indicates that the students experienced frustration in their thinking processes, color red indicates that the students achieved the expected generalizations, and color black indicates that the used strategy played an intermediary or ineffective role in the desired generalization.

3. Findings, Discussion and Results

The first result of this research, in which mathematical thinking processes in polygon-related problems were examined, is that the students could understand the problems they were already familiar with, identify the data to predict the desired relationships in the problems, and make drawings that promoted comprehension. However, two of the students could not make sense of the given problem (a circumference problem) where they were able to identify multiple points that they were unfamiliar with, and therefore they would eventually arrive at a geometric distance.

One of the important results obtained in ‘searching for relationships among data’ phase of the specializing process was that the students used either numerical or geometric approaches and they employed both numerical and geometric approaches. Those students who focused on numerical approaches formed t-table to look for number patterns, and they used repetitive and functional strategies in the patterns they created. The students who used both numerical and geometric approaches systematically examined particular samples in the problem involving a number of diagonals, and they realized how the diagonals were formed. The most noticeable result of the interior angle sum problem, where geometric approach strategies were used, was that the students either broke down or completed the given polygons into various geometric constructions. Another result obtained in ‘searching for relationships among data’ phase of the specializing process was that some of the students tried to formulate a rule based on their preliminary knowledge after examining particular values and shapes or without performing these steps at all. In the generalizing processes of the problems, the students were able to justify their generalizations verbally, but they had difficulty in expressing them algebraically. All the students tried some specific examples of the rule to justify their generalizations and they were able to explain how they reached the generalizations. Those students who were able to come up with a justification were able to explain what their generalizations meant geometrically. The students who reached generalizations by using the geometric approach were able to make explanations more easily, but only the students who used the numerical approach had difficulty in justifying and convincing.