# Taşıma Probleminde Optimum (En Uygun) Çözüm Bulanması

Tevfik GÜYAGÜLER {*)

## GİRİŞ

Bu yazıda çeşitli üretim merkezlerinde üretilen malların birden fazla tüketim merkezlerine nakledilmesinde taşıma maliyetini minimum yapan kombinazasyonun nasıl bulunacağı çeşitli metodların aynı örneğe tatbiki ile anlatılacaktır.
Nakliye problemi, doğrusal programlama probleminin, taşımada optimum maliyetin bulunmasında kullanılan özel bir halidir.
Daha sonra izah edilecek ve problemi çözmede kullanılacak metotlara uygulanacak olan örnek problem şöyle özetlenebilir.

## ÖRNEK PROBLEM

Üç ayrı yerde üretilen kömür kullanılmak üzere dört ayrı kullanım merkezine nakledilecektir. Üretim ve tüketim merkezlerinde üretilen ve tüketilen kömür miktarları ile bir üretim merkezinden herhangi bir tüketim merkezine gönderilen kömürün birim taşıma maliyeti verilmiştir. Problem hangi üretim merkezinden hangi tüketim merkezine, ihtiyaçları karşılayacak şekilde, ve en az nakliye ücreti ile ne kadar kömür gönderilmesi gerektiğini bulmaktır.

Problemin elemanları şunlardır :

1 Üretim merkezleri
(Oi) 1=1, m (0j,02,03 ve m=3)

2. Tüketim merkezleri
(Dj) j=1, n (D,,D2,$D_3$,$D_4$ ve n=4)

3 Her üretim merkezinde üretilen mal miktarı (a j .) i-1, m (0, de aı ton, Ö> de $a_2$ ton, $0_3$ de $a_3$ ton)

4 Tüketim merkezlerinde kömüre olan ihtiyaçlar (bj) i=1,n (D, debi ton, $D_2$ de $b_2$ ton ....)

5. Birim taşıma maliyetleri (C jj) : i=1,m ve j=1,n Oi den Dj'ye nakledilen kömürün birim nakliye ücretini gösterir. Örneğin O2 den $D_3$e nakledilen kömürün birim nakliye ücreti $C_{23}$ dür. Problemde m=3, rr=4 olduğundan mxn= 3x4=12 adet birim taşıma ücreti verilmiştir.

{*) Öğretim Görevlisi Maden Müh. Bl. O.D.T.Ü.

6 Üretim merkezinden tüketim merkezine nakledilen kömür, miktar, ($X_{ij}$) . Örneğin $0_2$den $D_3$e gönderilecek kömür miktarı $X_{*}$tür - ?imdi toplam nakliye maliyetini gösterelim.

$$
\begin{aligned}
E = & X_{11} C_{11} + X_{12} C_{12} + \dots\dots\dots\dots + X_{1n} C_{1n} \\
& X_{21} C_{21} + X_{22} C_{22} + \dots\dots\dots\dots + X_{2n} C_{2n} \\
& \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
& X_{m1} C_{m1} + X_{m2} C_{m2} \dots\dots\dots\dots + X_{mn} C_{mn}
\end{aligned}
$$

veya kısaca, $E = \sum_{j=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

Toplam üretim$= a_1 + a_2 + \dots\dots\dots\dots\; a_m \quad \sum_{i=1}^{m} a_i$

Toplam tüketim$= b_1 + b_2 + \dots\dots\dots\dots\; b_n \quad \sum_{j=1}^{n} b_j$ dir.

Bu tip bir problemde eğer toplam üretim *toplam tüketime eşit ise* $\left( \sum_{j=1}^{m} a_j = \sum_{j=1}^{n} b_j \right)$

problem «Dengelenmiş taşıma problemi» olarak isimlendirilir. Problem tablo halinde gösterildiğinde

Çizelge 1

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | üretim |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 21 | 36 | 43 | 20 | 18 |
| $O_2$ | 60 | 30 | 50 | 43 | 5 |
| $O_3$ | 18 | 10 | 48 | 72 | 7 |
| tüketim | 4 | 18 | 6 | 2 | 30 |

Birinci üretim merkezindeki üretim
aıi= 18 bin ton

ikinci üretim merkezindeki üretim
$a_2$'= 5 bin ton

Üçüncü üretim merkezindeki üretim
$a_3$=7 bin ton

Birinci tüketim merkezînde ihtiyaç
b, ,= 4 bin ton

ikinci tüketim merkezinde ihtiyaç
$b_2$ = 18 bin ton

Üçüncü tüketim merkezinde ihtiyaç
$b_3$ = 6 bin ton

Dördüncü tüketim merkezinde ihtiyaç
$b_4$ = 2 bin ton

Problemin sınırlayıcı unsurları şöyledir; Her üretim merkezi için :

j - 1-2——n

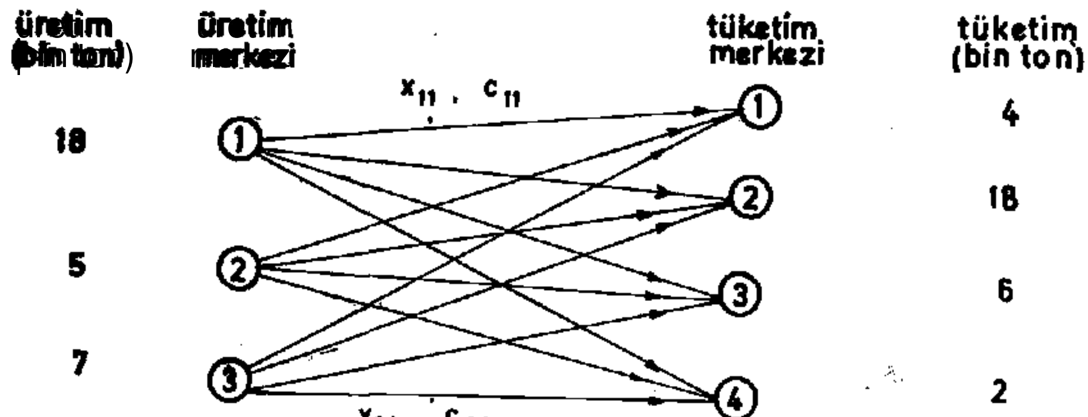
ve her tüketim merkezi için de

İLıij-a; is 1.2 — m
1*1

eşitlikleri geçerlidir.

Yukardaki şartlan sağlıyan çeşitli Xjj kombinazasyonlan vardır. Ancak amaç taşıma maliyetini minimum yapan Xjj değerlerinin tespit etmektir.

Problemin çözümünde şekilde gösterilen kombinazasyoniar mevcuttur. {Şekil 1)



Sekil.:1

Problem dengelenmiş bir taşıma problemidir çünkü.

£ a; > 18-»S +I7*4(

? bj= 4+1S+B+2 = 30

8u durumda problemin çözümü aşağıdaki /netodlar ile yapılabilir.

1 Sol üst köşe metodu (Nortwest Corner Rule)

2 Düşük fiyat metodu {Low-cost Cell Method)

3 Ceza metodu (Penalty Method)

1. Sol üst köşe metodu :

Bu metod en kolay fakat verdiği netice itibarı ile en az hassas olanıdır. Bu metod birim taşıma ücretlerinin birbirine eşit veya çok yakın olduğu hallerde kullanılır ziro bu metodla taşıma maliyeti göz önüne alınmaz. Sadece arz, talep dengesi sağlanır.

Metod kısaca şöyle özetlenebilir.

— En üst sol köşeyi al ve mümkün olan en çok yüklemeyi yap. (neticede ya 0, deki kömür biter ya da Di deki ihtiyacının tamamı karşılanmış olur).

**Çizelge 2**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 36 | 43 | 20 | 18 , 14 |
| 60 | 30 | 50 | 43 | 5 |
| 18 | 10 | 48 | 72 | 7 |
| 4 0 | 18 | 6 | 2 | |

— Eğer 0ı deki kömür bitmiş ise birinci satırı. D! deki ihtiyaç karşılanmış ise birinci kolonu üzerini çizerek İşlemden çıkar.
— Geri kalan değerler İle işlemi tekrarla.

Çizelge 2'de görüldüğü gibi 0, den D: e 4 (4000 ton) gönderildiğinde (daha fazla gönderilemez çünkü D,de İhtiyaç okadardır.) $0_t$de 18-4 = 14 (14000 ton) kömür kalır. D:'in tüm ihtiyacı karşılandığından birinci kolonun üzeri çizilir ve işlem dışı bırakılır.

İkinci iterasyonda en üst sol köşe taşıma maliyeti 36 olan köşedir.

İkinci tüketim merkezinde ($D_2$) gereken (18) miktarın ancak 14'ü birinci üretim merkezinden (O/den) karşılanabilir. Bu durumda Oj de kömür tükenir, $D_2$ de (4) (4000 ten) kömür kalır ve birinci satır devreden çıkartılır (çünkü $0_t$ de mal tükenmiştir).

**Çizelge 3**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ~~–~~ $\boxed{4}$ | ~~36~~ $\boxed{14}$ | ~~43~~ | ~~20~~ | ~~18 , 14 , 0~~ |
| – | 30 | 50 | 43 | 5 |
| – | 10 | 48 | 12 | 7 |
| 4.0 | 18.4 | 6 | 2 | – |

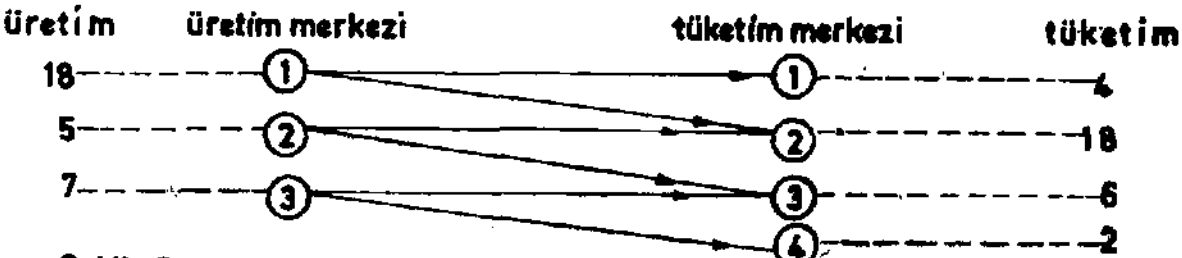
Üçüncü iterasyonda sol üst köşe taşıma maliyeti 30 olan karedir.

Aynı işlemler tekrarlandığında tabloda görülen neticeler elde edilir.

**Çizelge 4**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| — $\boxed{4}$ | — $\boxed{14}$ | — | — | 18 , 14 , 0 |
| — | — $\boxed{4}$ | — $\boxed{1}$ | — | 5 , 1 , 0 |
| — | — | — $\boxed{5}$ | — $\boxed{2}$ | 7 , 2 , 0 |
| 4 , 0 | 18 , 4 , 0 | 6 , 5 , 0 | 2 , 0 | |

Sonuç şekil üzerinde gösterildiğinde




**Şekil : 2**

**Bu değerler ve verilen birim taşıma maliyetleri ile maliyet hesaplandığında** $E = \sum_{j=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

$E = 4(21) + 14(36) + 4(30) + 1(50) + 5(48) + 2(72)$

$E = 1.142.000$ TL.

Yukarıda hesaplanan toplam taşıma maiiyetinin (1.142.000 TL) en düşük olma ihtimali çok azdır. Zira gönderilecek miktarları *[Xjj* )bulmada birim taşıma maliyetleri göz önüne alınmamıştır.

2. Düşük Fiyat Metodu :

Bu metod birinci metoda oranla daha iyi netice verir. Çünkü taşımada, birim taşıma maliyeti az olanlara öncelik verir.

İşlem sırası şöyledir ;

— Kareler içinde birim taşıma maliyeti en düşük olanı seç.

— Birinci metodda olduğu gibi maksimum yüklemeyi yap.

— Eğer üretim merkezinde kömür tükenmiş ise tekabül eden satırı, tüketim merkezinde ihtiyaç karşılanmış ise tekabül eden kolonu işlemden çıkart.

— Tabloda geri kalan kareler içinde tekrar en düşük birim taşıma maliyeti olan kareyi bul ve aynı işlemi tekrarla.

Örnekte seçilecek iik kare birim taşıma maliyeti en düşük olan karedir (Cjj = 10) Daha sonraki kareler birim taşıma maliyeti 20, 21, 30, 36 ve 43 olan karelerdir.

**çizelge 5**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 36 | 43 | 20 2 | 18 16 |
| 60 | 30 | 50 | 43 | 5 |
| ~~18~~ | ~~10~~ 7 | ~~48~~ | ~~72~~ | ~~7,0~~ |
| 4 | 18, 11 | 6 | 2,0 | |

Birinci iterasyonda birim taşıma maliyeti en düşük kare 10'un bulunduğu kare olduğundan $0_3$ den $D_2$ye mümkün olan en çok kömür gönderilecek, (7000 ton) bu durumda $0_3$de kömür bitmiş ancak $D_2$de ihtiyacı karşılanmamış olacaktır. $0_3$de kömür bitmiş olduğundan üçüncü satır işlem dışı bırakılacaktır.

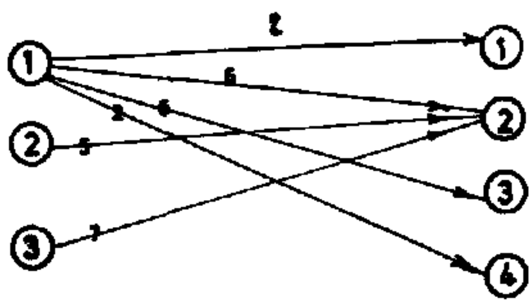
İkinci iterasyonda birim taşıma maliyeti en düşük kare (20) nin bulunduğu kare olduğundan 0, den $D_4$e kömür gönderilecektir. $D_4$ ün ihtiyacı olan 2 ünite 0, den karşılanır ve 0j de 16 ünite mal kalır. Aynı zamanda dördüncü kulon işlem dışı bırakılır.

Iterasyonlara aynı şekilde devam edildiğinde tabloda görülen neticeler elde edilir.

çizelge 6

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| — $\boxed{4}$ | — $\boxed{6}$ | — $\boxed{6}$ | — 2 | 18,16,12,6,0 |
| — | — $\boxed{5}$ | — | — | 5.0 |
| — | — $\boxed{7}$ | — | — | 7,0 |
| 4,0 | 18,11,6,0 | 6,0 | 2,0 | |

Sonuç şekil üzerinde gösterildiğinde.



Şekil: 3

Bu değerler ile maliyet hesaplandığında

$$E = \sum_i \sum_j C_{ij} x_{ij}$$

E = 4(21) + 6(36) + 5{30 + 7(10)+ 6(43) + 2(20

E = 818.000 TL.

Görüldüğü gibi bu metod neticesinde alınan taşıma maliyeti birinci metodda alınan neticesinde bulunan maliyetten çok daha azdır. Ancak bu çözüm bile en ekonomik (OPTİMUM) çözüm olmıyabilir.

3 Ceza Metodu :

Bu metod düşük fiyat metodunun biraz daha geliştirilmiş şeklidir. Aralarındaki fark sadece kare seçimindedir. Bu metodda kare seçimi şöyle yapılır: Her kolonda ve her satırda en düşük birim taşıma maliyet- ile ikinci küçük aralarındaki maliyet farkları çıkartılır. En büyük fark hangi kolonda veya satırda mevcut ise işlem o kolonun veya satırın en düşük birim taşıma maliyetine haiz kareden başlar.

Aynı örnek bu metod ile çözülürse;

çizelge 7

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 36 | 43 | 20 $\boxed{2}$ | 18 , 16 | 1 |
| 60 | 30 | 50 | 43 | 5 | 13 |
| 18 | 10 | 48 | 72 | 7 | 8 |
| 4 | 18 | 6 | 20 | | |
| 3 | 20 | 5 | 23 | | |

Tabloda görüldüğü gibi en büyük fark 4. kulondadır. Yani işleme bu kulonun en düşük birim taşıma maliyetine haiz karesinden başlıyacaktır (C jj == 20).

$D_4$ ün ihtiyacı olan 2 ünite 0ı den karşılanır ve dördüncü kulon işlemlerden çıkartılır.

Aynı işlemler tekrarlanarak

çizelge 8

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 36 | 43 | $\boxed{2}$ | 18, 16 | 15 |
| 60 | 30 | 50 | | 5 | 20 |
| ~~18~~ | ~~10~~ $\boxed{7}$ | ~~48~~ | | ~~7,0~~ | ~~8~~ |
| 4 | 18, 11 | 6 | 2,0 | | |
| 3 | 20 | 5 | | | |

Bu durumda ikinci kulonda en büyük fark mevcuttur. Kulonun en düşük birim taşıma maliyeti üçüncü satırdadır. (C,-/ = 10) İşleme bu kareden devam edilir. $0_3$ den $D_3$ ye 7 ünite gönderilecek, $0_3$ de kömür kalmıyacaktır, ve $D_3$nin ihtiyacı 11 üniteye düşecektir. $0_3$de kömür kalmadığından üçüncü satır işlem dışı bırakılacaktır.

Kerasyona devam edildiğinde

çizelge 9

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{4}$ 21 | 36 | 43 | $\boxed{2}$ – | 18, 16, 12 | 15 |
| 60 | 30 | 50 | – | 5 | 20 |
| – | – $\boxed{7}$ | – | – | 7,0 | |
| 4,0 | 18, 11 | 6 | 2,0 | | |
| 39 | 6 | 13 | | | |

çizelge 10

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{4}$ – | 36 | 43 | $\boxed{2}$ – | 18, 16, 12 | 7 |
| – | $\boxed{5}$ 30 | 50 | – | 5,0 | 20 |
| – | – $\boxed{7}$ | — | — | 7,0 | |
| 4,0 | 18, 11, 6 | 6 | 2,0 | | |
| | 6 | 13 | | | |

Böylece $X_{J(}$- miktarları hesaplanmış olur.

Çizelge 11

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| – $\boxed{4}$ | – $\boxed{6}$ | – $\boxed{6}$ | – $\boxed{2}$ | 8,16,12,0 |
| – | – $\boxed{5}$ | – | – | 5,0 |
| – | – $\boxed{7}$ | – | – | 7,0 |
| 4,0 | 18,11,6,0 | 6,0 | 2.0 | |

Elde edilen değerler ile toplam taşıma maliyeti hesap edildiğinde;

E=4(21) + 6{36} + 5(30) + 7(10) + 6(43) + 2(20)
E=818.000 TL.

neticenin ikinci metod ile elde edilen neticenin aynısı olduğu görülür. Ancak bu metodlar ikinci ve üçüncü her problemde cynı neticeyi vermezler.
Ceza metodu çoğunlukla OPTİMUM çözümü verir.

Sonuç olarak DU tip taşıma problemlerinde toplam maliyet bulmakta kullanılacak metod ceza metodudur (penalty method). Ancak herzaman kesinlikle OPTİMUM çözümü vermeyebilir. Çözümün optimum olup o'madığını anlamak için ayrı bir test uygulanır. Aşağıdaki bölümde, bu testin nasıl yapıldığını göstermektedir.

## ÇÖZÜMÜN OPTİMUM OLUP OLMADIĞININ DENENMESİ :

Misalde bulunan sonuç, diğer uygun sonuçlar arasında en ekonomik olanı ise optimum çözüm elde edilmiştir. Çözümün optimum olup olmadığını anlamak için aşağıdaki test uygulanır.

*Bu* testte kullanılan Ajjbağımlı maliyeti gösterir. Metodun esası bu değeri hesaplamaktadır. Ai/nin iki özelliği vardır.

i. Optimum çözümde bağımlı maliyet (A jj) sıfırdır.

ii. Optimum çözümden gayri herhangi bir uygun çözüm için, eğer yüksek-maliyetli çözüm ise pozitif ( + ), düşük - maliyetli çözüm ise negatif(—} A *n* değerleri elde edilir.

Optimum çözüm için yapılan testten şu neticeler çıkartılır.

i. Maliyet minimize probleminde tüm Ajjdeğerleri sıfır veya pozitif. Kâr Maksimize Probleminde tüm Ajj değerleri negatif veya sıfırdır.

ii. Eğer bulunan uygun çözüm OPTİMUM çözüm değil ise daha iyi bir çözüm bulmada, yapılan ve test neticesinden faydalanılır.

Analitik olarak A[j şöyle gösterilir.

$$AijsCij— Uj-Vi$$

Burada

Cj:j=(i,j) karesindeki maliyet
u j = Tablonun sıraları ile ilgili bulunmamış miktarlar
Vj =s Tablonun.kulpnları ile ilgili bulunmamış miktarlar

Bu metodda A -, j değerleri, $U_($ ve V, değerlerinin ayrı ayrı hesaplanması ile bulunur, m tane üretim merkezi olduğundan m tane u değeri (u,, $u_2$, $u_3$, $u_m$ ) ve n tane tüketim merkezi olduğundan n tane v değeri ($v_1v_2v_3$ —$v_n$) bulmak gerekir. Başka bîr deyimle n + m tane bilinmeyen mevcuttur. -'—•••••

Testi uygulayabilmek için düşük fiyat metodunda bulunan neticeleri örnek olarak alalım, A/j =0 ve başlangıç için U,.=0 alınırsa

| Kare | Cij | Cij = Ui + Vj | Etap | Sonuç |
|---|---|---|---|---|
| 1,1 | 21 | $21 = U_1 + V_1$ | | |
| | | | 1 | $U_1 = 0 \Rightarrow V_1 = 21$ |
| 1,2 | 36 | $36 = U_1 + V_2$ | 2 | $V_2 = 36$ |
| 2,2 | 30 | $30 = U_2 + V_2$ | 3 | $U_2 = -6$ |
| 3,2 | 10 | $10 = U_3 + V_2$ | 4 | $U_3 = -26$ |
| 1,3 | 43 | $43 = U_1 + V_3$ | 5 | $V_3 = 43$ |
| 1,4 | 20 | $20 = U_1 + V_4$ | 6 | $V_4 = 20$ |

Yukardaki tabloyu tamamladıktan sonra $A_{jj} = C_{jj} - U_j - V_j$ değeri hesaplandığında,

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $21-0-21=0$ | $36-0-36=0$ | $43-0-43=0$ | $20-0-20=0$ | $U_1=0$ |
| $60+6-21=45$ | $30+6-36=0$ | $50+6-43=13$ | $43+6-20=29$ | $U_2=-6$ |
| $18+26-21=23$ | $10+26-36=0$ | $48+26-43=31$ | $72+26-20=78$ | $U_3=-26$ |
| $V_1=21$ | $V_2=36$ | $V_3=43$ | $V_4=20$ | |

sonuçlar gösterildiğinde:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | $U_1=0$ |
| 45 | 0 | 13 | 29 | $U_2=-6$ |
| 23 | 0 | 31 | 78 | $U_3=-26$ |
| $V_1=21$ | $V_2=36$ | $V_3=43$ | $V_4=20$ | |

Tabloda görüldüğü gibi A j, değerleri sıfır {düşük maliyet metodunda bulunan sonuçlara tekabül eden kareler) ve pozitif olduğundan bu çözüm OPTİMUM çözümaür. Daha iyi bir çözüm bulmak olanaksızdır.

Aynı test sol üst köşe metodundan elde edilen neticeler üzerinde uygulandığında aşağıdaki tablo elde edilir.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 $\boxed{4}$ | 0 $\boxed{14}$ | $-13$ | $-60$ | $U_1=0$ |
| 45 | 0 $\boxed{4}$ | 0 $\boxed{1}$ | $-31$ | $U_2=-6$ |
| 5 | $-18$ | 0 $\boxed{5}$ | 0 $\boxed{2}$ | $U_3=-8$ |
| $V_1=21$ | $V_2=36$ | $V_3=56$ | $V_4=80$ | |

Bu durumda elde edilen neticeler çözümün kesinlikle OPTİMUM (en uygun) olmadığını göstermektedir çünkü tabloda negatif değerler mevcuttur. Ünite başına 0, den $D_4$'e nakilde 60 TL., $0_2$ den $D_4$e 31 TL. $0_3$ den $D_2$ ye 18 TL. ve 0, den $D_3$ e 13 TL miktarında daha iyi bir sonuç elde edilebilir. (Tabloda görülen (—) değerler)

Çözümün OPTİMUM olması ancak tablodaki değerlerin sıfır (Xjj ye sahip kareler) ve geri kalanın artı (+) olması ile sağlanır.

## REFERANSLAR


1. Fundamentals of operation Research for management
   Shıv K Gupta, John M Cuuzzolino 1974
2. Introduction to Systems Engineering Deterministic Models
   TUNGAU and STELSON


## TÜM MÜHENDİS VE MİMARLAR AYNI TİP KİMLİK BELGESİ UYGULAMASINA BAŞLADI

Odamızca ele alınan ve daha sonra Birlik tarafından tüm meslek odaları için uygulamaya geçirilen yeni ve aynı tip kimlik belgeleri üyelerimize verilmeye başlanmıştır. Kart şeklinde olan yeni kimlikler, her yıl odalarca onaylanacak, nüfus cuzdam gibi kuliamlabi lecektir. Eski belgelerin yenilenmesi için belirli bir süre saptanacaktır. Arzu eden üyelerimiz posta ile yeni kimlik belgelerini alabilirler.

**TMMOB**

TÜRK MÜHENDİS VE MİMAR ODALARI BİRLİĞİ
Union of Chambers of Turkish Engineers and Architects

**MADEN MÜHENDİSLERİ ODASI**

Chamber of Mining Engineers

Soyadı ..........................................

Adı ..........................................

Bitirilen Okul ..........................................

Diploma No.Yılı ..........................................

Diploma Unvanı ..........................................

Oda Sicil No ..........................................

Bu kartın sahibi 6235 (7303) sayılı Türk Mühendis ve Mimar Odaları Birliği Yasası uyarınca Odamız üyesidir

Baba adı ..........................................

Ana adı ..........................................

Dogum yeri ve yılı ..........................................

Uyruğu ..........................................

Nüfusta kayıtlı olduğu yer ..........................................

İli ..........................................

İlçesi ..........................................

Köyü,Mahallesi ..........................................

Hane,Cilt,Sahife No ..........................................

Kan Gurubu ..........................................

Üyenin imzası ..........................................

ONAY [Bu kart onaylanan yıllar için geçerlidir]

| | |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

Oda adresi: Konur sok.no4, kat2, Yenişehir Ankara