

Öğrencilerin Fonksiyonlarda Tanım, Değer ve Görüntü Kümeleri Kavramlarına Yönelik Algıları¹

İlyas YAVUZ²

Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi, OFMA Matematik Öğretmenliği ABD

Tuğba HANGÜL

Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi, OFMA Matematik Öğretmenliği ABD

ÖZET

Bu çalışmanın amacı, lisans öğrencilerinin fonksiyonlarda tanım, değer ve görüntü kümeleri kavramlarına yönelik algılarını ve fonksiyon kavramının farklı temsillerini kullanım tercihlerini belirlemektir. Bunu yapabilmek için, 2013-2014 eğitim-öğretim yılının güz döneminde bir üniversitenin 1. sınıfında öğrenim gören 77 öğrenciye açık uçlu sorulardan oluşan bir yazılı anket uygulanmıştır. Bu makale çerçevesinde konu ile doğrudan ilişkili olan 1 soruya öğrencilerin verdikleri cevapların analizine yer verilmiştir. Araştırmanın bulgularına göre, öğrenciler fonksiyonları sözel, şema, grafik ve nümerik temsillerle ifade etmeyi tercih etmişlerdir. Ayrıca öğrencilerin fonksiyon kavramı ve sayı sistemleriyle ilgili bilgi eksikliklerinin olduğu; bunun yanı sıra farklı temsil türleri arasında bağlantı kurmakta ve matematiksel dili doğru bir şekilde kullanmakta problemler yaşadıkları görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Çoklu temsiller, değer kümesi, fonksiyon kavramı, görüntü kümesi, tanım kümesi

MAKALE BİLGİSİ

Alınma

Tarihi:11.07.2014

*Düzeltilmiş hali alınma
tarihi: 19.01.2014*

*Kabul Edilme Tarihi:
21.11.2014*

*Çevrimiçi yayınlanma
tarihi: 26.12.2014*

¹ * Bu çalışma, 16-18 Mayıs 2014 tarihlerinde düzenlenen "International Conference on Education in Mathematics, Science and Technology" de sunulmuştur.

¹ Sorumlu yazar. yavuz@marmara.edu.tr

Students' Perceptions towards Concepts of Domain, Codomain and Image of Domain

İlyas YAVUZ¹

Marmara Üniversitesi, Faculty of Education

Tuğba HANGÜL

Marmara Üniversitesi, Faculty of Education

ABSTRACT

The purpose of this study is to identify undergraduates' perceptions of domain, codomain and image of domain of functions and their preferences in using different representations of the function concept. To do this, an open ended questionnaire linked to the function concept was asked to 77 first graders at a university during the fall semester of the 2013-2014 academic year . In this paper, only results of the analysis of students' answers to one question is presented. The results of this study revealed that students preferred verbal, diagram, graph and numerical representations of functions. In addition, it was seen that students had lack of knowledge about the concept of function and classification of numbers as well as had problems translating among multiple representations of the function concept and using of mathematical language correctly.

Keywords: Multiple representations, codomain, function concept, image of domain, domain

ARTICLE INFO

Received: 11.07.2014

*Revision received:
19.01.2014*

Accepted: 21.11.2014

*Published online:
26.12.2014*

Giriş

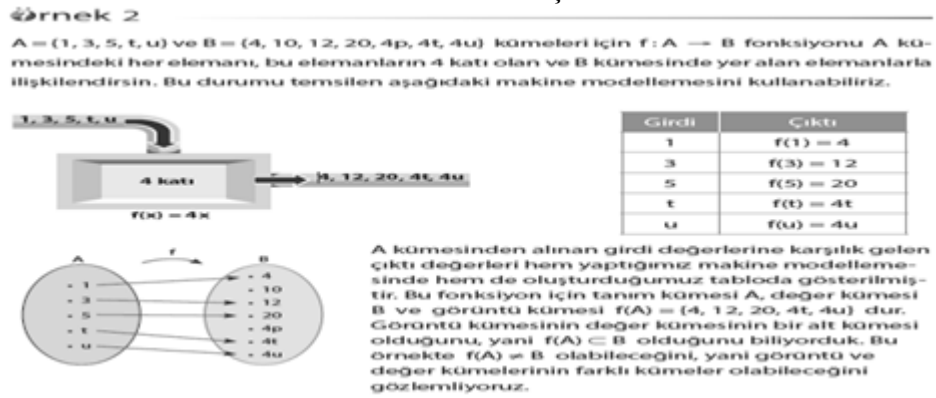
Fonksiyon kavramının tarihsel süreci göz önüne alındığında kavramın çeşitli biçimlerde tanımlanarak geliştiği görülmektedir. Fonksiyon kavramını matematikte ilk kez 17. yüzyılın sonunda Leibnitz kullanmıştır. Bernoulli bu kavramı geliştirmiş ve Euler de 18. Yüzyılın sonlarına doğru $f(x)$ gösterimini kullanmaya başlamıştır. Fonksiyonun açıklanmasında başlangıçta değişim ve dönüşüm kavramları öne çıkarken, sonrasında küme kavramının yaygınlaşmasıyla iki küme arasında eşleme kuralı kullanılmaya başlanmıştır (Baki, 2008; Jones, 2006; Ponte, 1992; Sipahi ve Özdemir, 2012).

İlgili alanyazın incelendiğinde fonksiyon kavramına ilişkin birçok tanım yapıldığı görülmektedir. Fakat fonksiyon kavramının matematiksel olarak genelde üç farklı tema altında toplandığı söylenebilir. Birinci yaklaşıma göre fonksiyon, iki değişken arasındaki ilişkidir, dolayısıyla bağımsız değişkendeki değişime karşın bağımlı değişkende de bir değişim olacağı düşünülür (Bayazit ve Aksoy, 2013). Bu bağlamda Euler de yapmış olduğu fonksiyon tanımında değişkenler arasındaki ilişkiye vurgu yaparak bir fonksiyon grafiğinin köşelerinin olmadığını belirtmiştir. Fakat yapılan bu tanım, fonksiyon kavramının anlamını kısıtlamakla birlikte öğrencilerde fonksiyonun yalnızca, bir değişkene değer verip diğer değişkeni hesaplama gibi bir işlevi olduğu yönünde yanlış bir algıya sebebiyet verebileceği görülmüştür. Bundan sonraki süreç de bize bu kısıtlayıcı tanımın geliştirilmesi için bir takım çalışmaların yapıldığını göstermektedir (Malik, 1980).

¹ Correspondent author. yavuz@marmara.edu.tr

Fonksiyon kavramına yönelik geliştirilen bir başka yaklaşım da fonksiyonun bir bağıntı olduğu düşüncesidir. Bu doğrultuda fonksiyon kavramı olarak 1960'lerden itibaren Driehlet-Bourbaki tanımı ile ders kitapları ve öğretim programlarında yerini almıştır (Bayazit ve Aksoy, 2013; Kabael ve Tanışlı, 2010). Driehlet-Bourbaki tanımına göre fonksiyon; boş olmayan iki küme arasında, her elemanı yalnızca bir elemana götüren bir eşlemedir (Kabael ve Tanışlı, 2010).

Günümüz matematik kitaplarında ise fonksiyon kavramının bu iki düşüncenin birleşimi olarak, girdileri çıktılara dönüştüren dinamik bir süreç biçiminde ifade edildiği söylenebilir (Bayazit ve Aksoy, 2013). Bu dinamik sürecin Ural (2006)'nın da bahsettiği gibi, öğrencilere fonksiyonun sadece işlemsel değil aynı zamanda yapısal taraflarının verilerek, kavramın cebirsel, grafiksel, tablosal gibi farklı gösterimleri arasında geçişin gösterilerek, günlük yaşam ve doğa olaylarında yer alan fonksiyon durumlarının uygun matematiksel modellemelerle öğretim ortamına uyarlanarak tasarlanması gerekmektedir. Yeni ortaöğretim matematik programı ve ders kitaplarının da bu doğrultuda hazırlandığı söylenebilir. Şekil 1 de MEB (2013a) 9. Sınıf Matematik ders kitabından alınmış bir örnek vardır.



Şekil 1. MEB 9. sınıf matematik kitabından fonksiyon ile ilgili bir örnek

Örnek incelendiğinde fonksiyonun farklı temsil türlerinin yanı sıra, iki küme arasındaki eşleme bağıntısı, tanım, değer ve görüntü kümeleri, girdi-çıkı değerleri ve fonksiyon makinesi gibi öğelerden bahsedildiği görülmektedir. Ayrıca kitapta bu örnek tarzında başka etkinliklerin de olduğu söylenebilir. Bu da bize yeni programdaki fonksiyon anlayışının günümüze kadar fonksiyon kavramına yönelik geliştirilen yaklaşımların bir birleşimi olduğunu göstermektedir.

Fonksiyon kavramının tarihsel sürecinden de anlaşıldığı üzere fonksiyonun matematik öğretiminde önemli bir yer teşkil ettiği yadsınamaz bir gerçektir. Bu sebeple kavramla alakalı günümüze kadar gerek yurtiçinde gerekse yurt dışında birçok çalışma yapılmıştır (Vinner ve Dreyfus, 1989; Thompson, 1994; Even, 1998; Meel, 1999; Tall ve diğerleri, 2000a; Tall ve diğerleri, 2000b; Akkoç, 2005; Polat ve Şahiner, 2007; Yavuz, 2010; Kabael, 2011). Fonksiyona verilen bu önemde, modern matematiğe geçilmesiyle küme teorisi yaklaşımın işlerlik kazanması ve bunun sonucu pek çok ülke programının fonksiyonlar temel alınarak hazırlanmasının etkisi göz ardı edilemez (Baştürk, 2010).

Ülkemizdeki yeni ortaöğretim matematik programında bahsedilen matematiksel süreç becerilerinden bir tanesi de matematiksel ilişkilendirme yapabilmektir. Bu bağlamda matematik sadece kurallar, semboller, şekiller ve işlemlerden ibaret değildir. İçinde bir anlam bütünlüğü olan düzen ve ilişkiler ağından oluşmaktadır. Bu nedenle öğretim programında, öğrencilerin ilişkilendirme becerilerinin gelişimine önem verilmektedir. Bunun için öğrencilerde kavramsal ve işlemsel bilgiler arasında ilişki kurma; matematiksel kavram ve kuralları çoklu temsil biçimleriyle gösterme; öğrenme alanları (sayılar ve cebir; geometri; sayma, veri ve olasılık) arasında ilişki kurma; matematiği diğer derslerde ve günlük hayatında karşılaştığı konu ve durumlarla ilişkilendirme; matematiksel konu, kavram ve

fikirler arasında ilişki kurma; matematiksel kavramların, işlemlerin ve durumların farklı temsil biçimleri (sayısal, sembolik, geometrik/grafiksel vb.) arasında ilişki kurma ve bu farklı temsiller arasında geçişler yapma gibi davranışların geliştirilmesi hedeflenmiştir (MEB, 2013b). Bütün bu hedefler de matematikte çoklu temsillerin önemini ortaya koymaktadır. Çoklu temsiller, öğrenme ortamında birçok işleve hizmet edebilir. Öncelikle, çoklu temsiller içerik, hesaplama, öğrenen kişinin karakteri ve tercihleri gibi birçok faktörün tamamlayıcısı olma işlevine sahiptir (Ainsworth, 1999). Yani kişiye kendi tercih ve özellikleri doğrultusunda öğrenme özgürlüğü sağlar. Bunun doğal bir sonucu olarak da çoklu temsillerin kullanımının, öğrencilerin ilgili konu veya kavramla farklı stratejiler kullanarak ve farklı bakış açılarını yansıtarak başa çıkabilme yeteneğini geliştirdiği söylenebilir (Seufert, 2003). Bir kavramı birden fazla temsil biçimiyle göstermenin bir başka işlevi de özellikle karmaşık kavramların farklı yönlerinin vurgulanmasının ve bütünü her zaman parçaların toplamından fazlasını oluşturduğu mantığından yola çıkılarak temsiller arası bilişsel bağlantının kurulmasının sağlanmasıdır (Keller ve Hirsch, 1998). Ayrıca öğrencilerin sadece belli bir alanda ve temsilde başarılı olmaları yapılan öğretimin niteliğinin sınırlılığını göstermesi açısından da önemli ipuçları sağlamaktadır (Baştürk, 2010). Temsiller üzerinden ele alınan temel konulardan biri de fonksiyon kavramıdır. Bir fonksiyonun grafik temsili, o fonksiyonun geometrik görünüşü hakkında bilgi verebileceği gibi, fonksiyona ait verilerin kolayca kullanılabilmesine de olanak sağlamaktadır (Yavuz ve Kepçeoğlu, 2010). Bu açıdan düşününce fonksiyon kavramının öğretiminde çoklu temsillerden yararlanmanın o kavramın daha iyi anlaşılması için önem oluşturduğu görülmektedir.

Fonksiyonlar konusunda yapılan hataların çeşitlerini, öğrencilerin bu kavrama yönelik algılarını ve çoklu temsilleri araştıran birçok çalışma yapılmıştır. Fonksiyon konusu, tanım kümesi, görüntü kümesi, bağıntı gibi birçok kavramla birlikte tanımlama, dönüşüm yapma, modelleme gibi birçok beceriyi içermektedir. Literatürde genel olarak, fonksiyonun matematiksel dilini anlama, günlük hayat durumlarını cebirsel ve grafiksel fonksiyon gösterimlerini kullanarak gösterme, fonksiyonların genel doğasını anlama, cebirsel gösterimdeki bağımsız ve bağımlı değişkenlerin rollerini anlama gibi konularda kavram yanlışları olduğu belirlenmiştir (Polat ve Şahiner, 2007). Fonksiyonla ilgili yapılan çalışmalarda ortak olarak tespit edilen yanlışlardan biri de öğrencilerin bir temsil durumunun fonksiyon olup olmadığını belirlemede “bilindik” ya da diğer bir deyişle “alışılmış” olup olmamasına göre karar vermeleridir. Örneğin çemberi “bilindik” olması gerekçesi ile bir fonksiyon grafiği ya da verilen bir parabolü, kollarının hangi değişkene ait eksenini sardığını göz önüne almaksızın fonksiyon grafiği olarak belirleme davranışına sıklıkla rastlanmaktadır (Kabael, 2011). Bu sonuçlar Erdoğan ve diğerleri (2012) nin öğrencilerin cebirsel temsil ile verilen durumlardan fonksiyon olanları tanıma ile ilgili olarak çoğunlukla daha önceden tanıdıkları yapılardan (doğrusal fonksiyon, parabol, vs.) hareket ettikleri sonucuyla örtüşmektedir. Yapılan bir başka çalışmada Akkoç (2005) de öğrencilerin küme eşlemesi, diyagram, sıralı ikili kümeleri, fonksiyonun çoklu temsilleri hakkındaki yorumları ve tanımsal özelliklerini kullanabilme becerilerini incelemiş ve öğrencilerin çok azının çoklu temsillerden ve fonksiyonun tanımsal özelliklerinden yararlanabildiğini tespit etmiştir. Hatisaru ve Erbaş (2013) de çalışmalarında öğrencilerin fonksiyon kavramını anlamalarının sınırlı olduğu ve fonksiyon kavramını çoğunlukla “işlev” olarak tanımladıkları sonuçlarına ulaşmışlardır. Çalışmalardan da görüldüğü üzere fonksiyon kavramıyla ilgili günümüze kadar birçok araştırma yapıldığı fakat özelde fonksiyonun tanım, değer ve görüntü kümelerine yönelik yapılan çalışmaların sayısının az olduğu söylenebilir. Bu bağlamda yapılan bu çalışmanın lisans öğrencilerinin fonksiyonlarda tanım, değer ve görüntü kümeleri kavramlarına yönelik algılarını ortaya koyarak bu kavramların çoklu temsiller açısından değerlendirilmesiyle mevcut literatüre katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Bu amaçlar doğrultusunda gerçekleştirilen bu çalışmayla aşağıdaki sorulara yanıt aranmıştır:

- I. Lisans öğrencilerinin fonksiyonlar konusunda kullandıkları farklı temsil türleri nelerdir?
- II. Lisans öğrencilerinin fonksiyonlarda tanım, değer ve görüntü kümeleri kavramlarına yönelik algıları nelerdir?

Yöntem

Bu araştırma, lisans öğrencilerinin fonksiyonlarda tanım, değer ve görüntü kümeleri kavramlarına yönelik algılarını tespit etmek amacıyla yapılmış nitel bir çalışmadır. Araştırmaya, 2013-2014 eğitim-öğretim yılının güz döneminde, İstanbul'daki bir devlet üniversitesinde öğrenim görmekte olan toplam 77, 1. sınıf lisans öğrencisi katılmıştır. Araştırma kapsamında katılımcılara 7 sorudan oluşan bir anket uygulanmıştır. Bu anket hazırlanırken öncelikle literatür taraması yapılmış ve bir soru havuzu oluşturulmuştur. Uzman görüşleri doğrultusunda da bu soru havuzundan 7 soruluk bir anket oluşturularak ankete son hali verilmiştir. Bu soruların hepsi öğrencilerin fonksiyon kavramına yönelik algıları ve fonksiyonlarda grafik kullanımı ile ilgilidir. Sorulardan sadece bir tanesi doğrudan fonksiyonlarda tanım, değer ve görüntü kümeleriyle ilgili olduğundan bu makalede söz konusu soruya verilen cevapların analizinden elde edilen bulgulara yer verilmiştir. Makalede kullanılan soru aşağıda verilmiştir:

“ $f: R \rightarrow R$, olmak üzere $f(x) = 4$ için ;

a) 2 ; -5 ; 3,7 ; 9,08 ; 0 sayılarından hangisi ya da hangileri f fonksiyonunun tanım kümesinin elemanları içerisindedir. Açıklayınız.

b) 12 ; 0 ; 4 ; 3,3 ; 0,7 sayılarından hangisi ya da hangileri f fonksiyonunun değer kümesinin elemanları içerisindedir. Açıklayınız.”

Öğrencilerin yukarıda ifade edilen soruya verdikleri cevaplar içerik analizi yoluyla çözümlenmiştir. Her bir öğrencinin vermiş olduğu cevaplar doğrultusunda ana temalar belirlenmiş ve sürekli diğer cevaplarla karşılaştırılarak ortak kategorilerin oluşturulması sağlanmıştır (Miles ve Huberman, 1994; Yıldırım ve Şimşek, 2011). Yapılan çalışmanın güvenilirliğini arttırmak için de tespit edilen kategoriler araştırmacının dışında nitel araştırma konusunda uzman bir kişi tarafından incelenmiş; daha sonra bir araya gelinerek verilerle saptanan ortak temalar arasında ortaya çıkan anlaşmazlıklar giderilmiştir (Yıldırım ve Şimşek, 2011).

Bulgular

Öğrencilere yöneltilen,

“ $f: R \rightarrow R$, olmak üzere $f(x) = 4$ için ;

a) 2 ; -5 ; 3,7 ; 9,08 ; 0 sayılarından hangisi ya da hangileri f fonksiyonunun tanım kümesinin elemanları içerisindedir. Açıklayınız.

b) 12 ; 0 ; 4 ; 3,3 ; 0,7 sayılarından hangisi ya da hangileri f fonksiyonunun değer kümesinin elemanları içerisindedir. Açıklayınız.” sorusuna verilen cevaplar incelendiğinde öğrencilerin büyük çoğunluğunun fonksiyonun tanım kümesinin elemanlarını bulmaya yönelik sorulan a) şıkkına doğru cevaplar verdiği; buna karşılık fonksiyonun değer kümesini bulmaya yönelik sorulan b) şıkkına da genelde değer ve görüntü kümelerini eşdeğer kavramlar olarak görüp yanlış cevaplar verdikleri tespit edilmiştir. Bu bölümde öğrencilerin verdikleri doğru cevaplar ile kullandıkları temsil türleri ve hatalı yanıtlarının analizlerine yer verilmiştir.

Doğru cevaplar ve kullanılan temsil türlerine ilişkin bulgular

Çalışmadan elde edilen bulgulara göre öğrencilerin fonksiyonun tanım, değer ve görüntü kümelerini açıklarken dört farklı temsil türünden yararlandıkları görülmektedir. Bunlar; sözel ifade, venn şeması, grafik ve tablo (nümerik temsil) şeklindedir. Aşağıdaki tabloda kullanılan temsil türlerinin yüzde ve frekans değerleri verilmiştir:

Tablo 1. Kullanılan temsil türlerinin yüzde ve frekans dağılımları

Temsil türleri	Sözel	Şema	Tablo	Grafik	Toplam
Frekans	73	34	9	2	118
Yüzde %	62	29	8	1	100

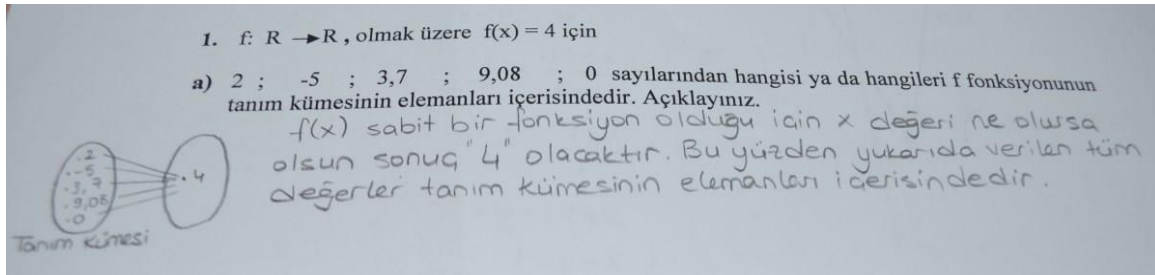
Tablo 1 incelendiğinde 77 kişinin 73 ünün soruyu sözel olarak cevaplandırmayı tercih ettiği görülmektedir. Bu da mevcut temsil türleri içerisinde en çok kullanılanın sözel ifade olduğunu göstermektedir. Sözel ifadeden sonra tercih edilen bir başka temsil türü de Venn şemasıdır. Bu durum, fonksiyon konusunun anlatımının genelde küme kavramı üzerinden başlamasıyla ilişkilendirilebilir. Fonksiyon kavramının yanı sıra, fonksiyon çeşitleri, tanım, değer ve görüntü kümeleri gibi kavramların anlatımında Venn şemasından sıkça faydalanılması, öğrencilerin zihinlerinde fonksiyon kavramını bu şekilde yapılandırmalarında etkin olduğu söylenebilir. Öte yandan tablo ve grafik temsillerini de az sayıda (tablo: 9 kişi, grafik: 2 kişi) öğrencinin kullandığı görülmektedir. Bu da derslerde öğretmenlerin farklı temsil türlerinden faydalanmadıkları, dolayısıyla öğrencilerin de bu temsil türlerini kullanma ve yorumlama noktasında zayıf kaldıkları şeklinde ifade edilebilir.

Sözel İfadeyle yapılan açıklama

Cevap kâğıtları incelendiğinde sözel ifadenin çalışmadaki mevcut temsil türleri içerisinde en sık başvurulan yöntem olduğu tespit edilmiştir. Yalnızca bu temsil türünden yararlanan 11 nolu öğrenci cevabını “*Bu fonksiyon reel sayılardan reel sayılara tanımlanan bir fonksiyondur ve tanım kümesi x 'in aldığı değerlerin oluşturduğu bir kümedir. Bu yüzden tanım kümesinde 2, -5, 3,7, 9,08, 0 sayılarının hepsi bulunur.*” şeklinde ifade etmiştir.

Venn Şeması kullanarak yapılan açıklama

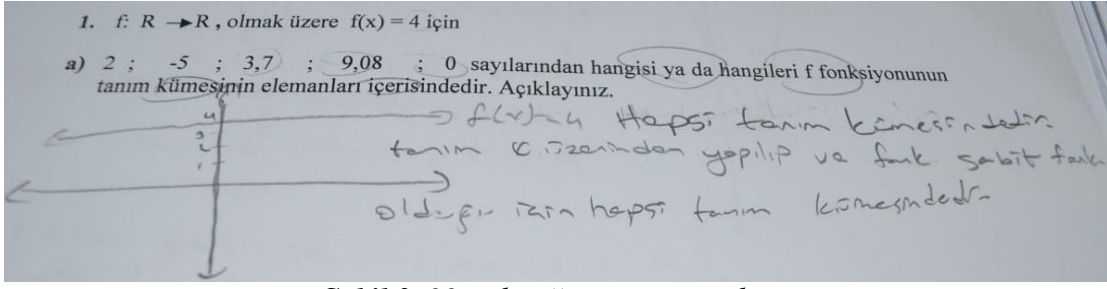
3 nolu öğrenci de cevabını “ *$f(x)$ sabit bir fonksiyon olduğu için x değeri ne olursa olsun sonuç “4” olacaktır. Bu yüzden yukarıda verilen tüm değerler tanım kümesinin elemanları içerisindedir.*” cümleleriyle açıklamıştır ve aşağıdaki şemayı çizmiştir.



Şekil 2. 3 nolu öğrencinin cevabı

Grafik kullanarak yapılan açıklama

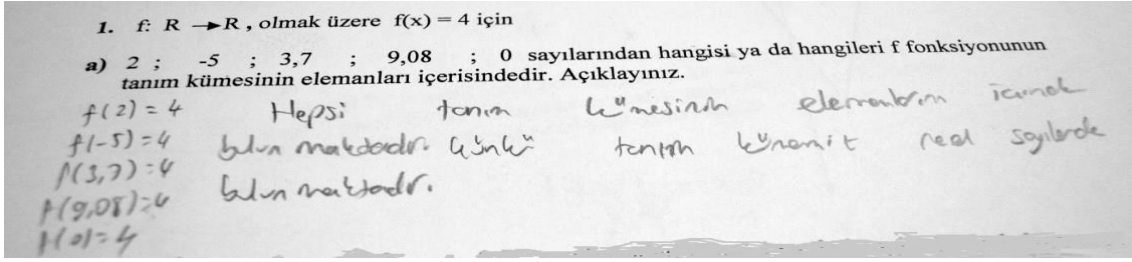
22 nolu öğrenci ise “*Hepsi tanım kümesindedir.*” şeklinde bir açıklama ile soruyu cevaplandırmış ve fonksiyonun grafiğini çizerek de farklı temsil türlerinden yararlanmıştır.



Şekil 3. 22 nolu öğrencinin cevabı

Tablo (Nümerik temsil) kullanarak yapılan açıklama

Nümerik temsili kullanmaya çalışan 36 nolu öğrenci ise “Hepsi tanım kümesi elemanları içerisindedir.” ifadesinin yanı sıra tanım kümesinin elemanlarının tek tek görüntüsünü ifade etmiştir.



Şekil 4. 36 nolu öğrencinin cevabı

Hatalı cevaplara ilişkin bulgular

Öğrencilerin cevap kağıtları incelenirken nasıl ki soruyu doğru cevaplandıranlar ve bu cevaplarını farklı temsil türlerinde ifade edenler olmuşsa aynı soruda farklı türlerde hata yapanların da olduğu görülmüştür. Bu bağlamda verilen hatalı cevaplar ortak özelliklerine göre 4 ana başlık altında toplanmıştır. Bu başlıklar ve akabinde yapılan hataların yüzde ve frekans dağılımları aşağıda gösterilmiştir:

- Fonksiyon kavramlarıyla ilgili bilgi eksikliği veya yanlış öğrenmeler
- Farklı temsil türleri arasında bağlantının kurulamaması
- Matematiksel/sembolik dilin doğru bir şekilde anlaşılması/kullanılmaması
- Sayı kümeleri kavramlarıyla ilgili bilgi eksikliği/yanlış algılamalar

Tablo 2: Yapılan hataların yüzde ve frekans dağılımları

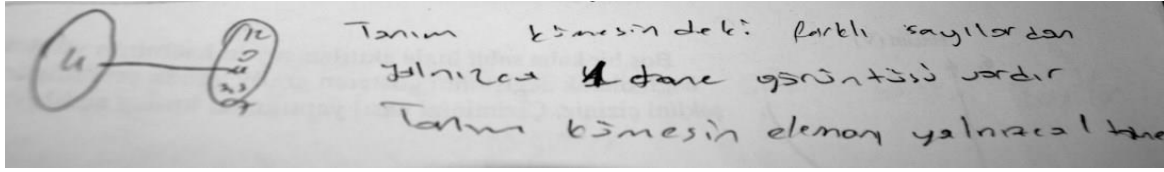
Hata türleri	Fonksiyon kavramına ilişkin Hatalar	Farklı temsil türlerine ilişkin hatalar	Matematiksel dile ilişkin hatalar	Sayı kümeleri kavramlarına ilişkin hatalar	Toplam
Frekans	51	8	14	7	80
Yüzde %	63,8	10	17,5	8,7	100

Tablo 2 de öğrencilerin yaptıkları 4 farklı hata türünün yüzde ve frekans dağılımları verilmiştir. Tablo 2 incelendiğinde öğrencilere ait toplam 80 hatanın; 51 tanesinin yani toplam hataların % 63,8 inin fonksiyon kavramına yönelik bilgi eksikliği ve yanlış öğrenmeler başlığı altında toplandığı, 8 tanesinin yani tüm hataların % 10 unun farklı temsil türleri arasında bağlantının kurulamamasından kaynaklandığı, 14 tanesinin yani yapılan hataların % 17,5 inin matematiksel dilin doğru bir şekilde kullanılmaması şeklinde oluştuğu ve son olarak da 7

hatanın yani yapılan tüm hataların % 8,7 sinin sayı kümeleri kavramlarına ilişkin bilgi eksikleri şeklinde tespit edilmiştir. Bu hatalara ait incelemeler detaylı olarak aşağıda gösterilmiştir:

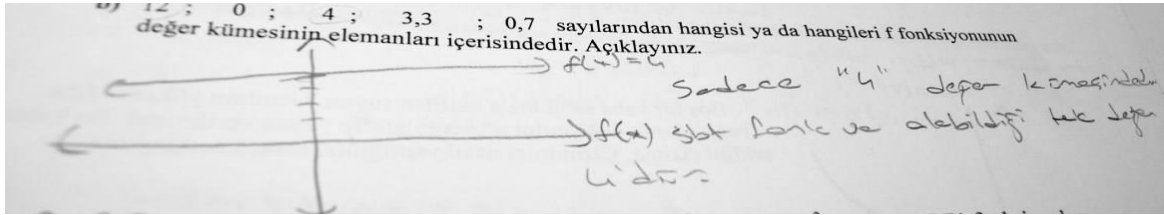
Fonksiyon kavramıyla ilgili bilgi eksikliği veya yanlış öğrenmelere ilişkin bulgular

İlgili soruya verilen cevaplardan hareketle öğrencilerin fonksiyon; fonksiyonun tanım, değer ve görüntü kümeleri; fonksiyon çeşitleri kavramlarıyla ilgili yanlış öğrenme/ bilgi eksikliğine dayalı hatalar yaptıkları tespit edilmiştir. Bununla ilgili öğrenci cevapları aşağıdaki gibidir:



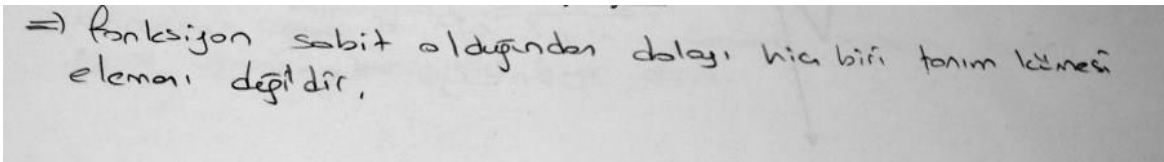
Şekil 5. 14 nolu öğrencinin cevabı

14 nolu öğrenci cevabını “Tanım kümesindeki farklı sayıların yalnızca bir tane görüntüsü vardır. Tanım kümesinin elemanı yalnızca bir tanedir.” şeklinde ifade etmiştir. Bu öğrencinin ifadesinden de anlaşılacağı üzere öğrencinin yalnızca görüntü ve değer kümelerini değil, tanım kümesi kavramını da karıştırdığı söylenebilir.



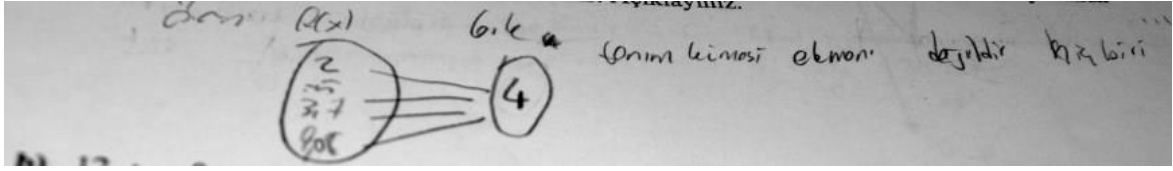
Şekil 6. 22 nolu öğrencinin cevabı

22 nolu öğrenci ise sözel ifadesini çizdiği grafikte desteklemeye çalışmıştır. Öğrenci, fonksiyonun grafiğini doğru çizmesine rağmen fonksiyonun değer kümesinde sadece “4” sayısının bulunduğunu belirtmiştir. Bu da bize öğrencinin fonksiyonda görüntü ve değer kümelerini eşdeğer olarak algıladığını göstermektedir.



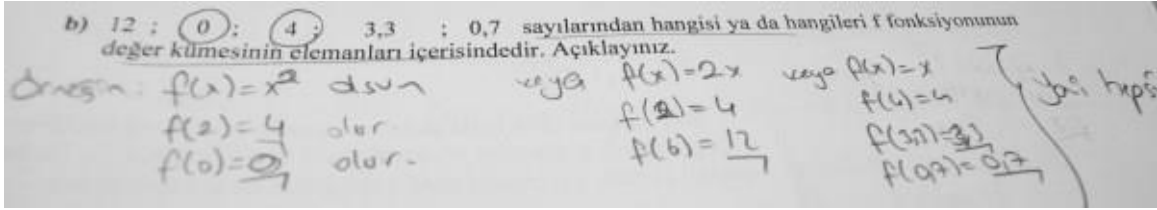
Şekil 7. 26 nolu öğrencinin cevabı

Benzer şekilde 26 nolu öğrenci “Fonksiyon sabit olduğundan hiçbiri tanım kümesinin elemanı değildir.” cümlesini kullanmıştır. Öğrencinin bu ifadesiyle, fonksiyonlarda tanım kümesi kavramını görüntü kümesi kavramıyla karıştırdığı göstermektedir.



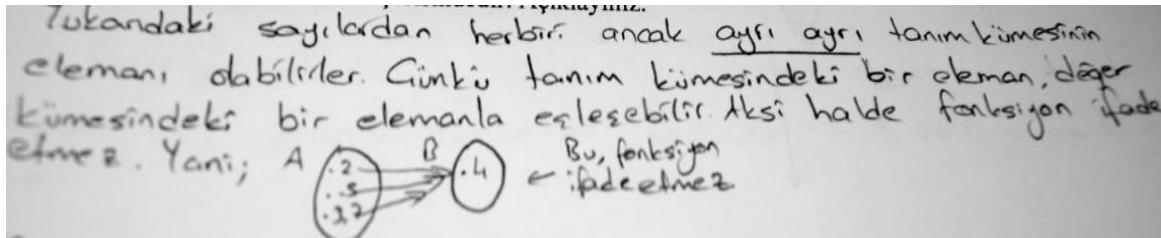
Şekil 8. 40 nolu öğrencinin cevabı

40 nolu öğrencinin Venn şemasını çizerek açıklama yapmaya çalıştığı görülmektedir. Öğrencinin çizdiği şemada bir takım hatalar göze çarpmaktadır. Öğrenci, fonksiyonun tanım kümesini $f(x)$ şeklinde yanlış isimlendirmiştir fakat açıklaması incelendiğinde $f(x)$ 'i tanım kümesi olarak düşünmediği anlaşılmaktadır. Çünkü verilen sayıları $f(x)$ olarak adlandırdığı kümenin içerisine yazıp bu elemanlardan hiçbirinin tanım kümesinin elemanı olmadığını ifade etmiştir. Buradan öğrencinin fonksiyonda tanım ve değer kümeleri kavramlarıyla ilgili yanlış algılamalarının olduğu sonucuna varılabilir.



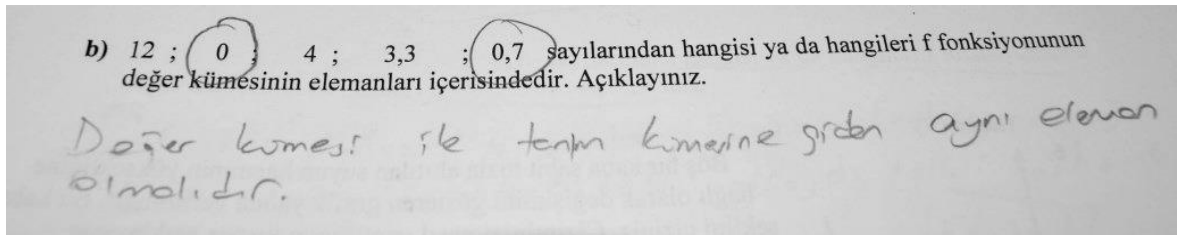
Şekil 9. 50 nolu öğrencinin cevabı

Bu öğrenci de verilen fonksiyondan başka 3 farklı fonksiyon daha tanımlayarak fonksiyonların çıktılarını b şıkkında verilen sayıların tamamını içerecek şekilde oluşturmuştur. Burada öğrencinin fonksiyon denince ilk akla gelenin içerisinde "x" bulunan cebirsel ifadelerin olduğu ve $f(x) = 4$ 'ün bir fonksiyon olarak değerlendirilmediği görülmektedir. Buda bize sınıflarda cebirsel temsilin fonksiyonları ifade etmede daha baskın olduğunu göstermektedir.



Şekil 10. 54 nolu öğrencinin cevabı

54 nolu öğrencinin cevabı incelendiğinde öğrencinin fonksiyon çeşitlerinden sabit fonksiyonu fonksiyon olma şartlarından "Tanım kümesinin bir elemanı değer kümesinin yalnızca bir elemanı ile eşleşebilir." kuralıyla karıştırdığı belirlenmiştir. Bu da öğrencinin fonksiyon konusunu kavramsal anlamadan uzak bir anlayışla, verilen kuralları ezberleyerek öğrenmeye çalıştığını göstermektedir.

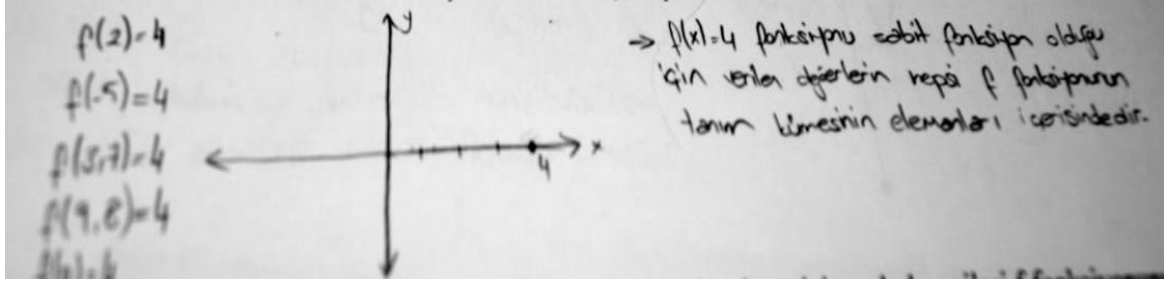


Şekil 11. 60 nolu öğrencinin cevabı

60 nolu öğrencinin yanıtında da görüldüğü üzere öğrencinin sabit fonksiyonu birim fonksiyonla karıştırdığı sonucuna varılabilir.

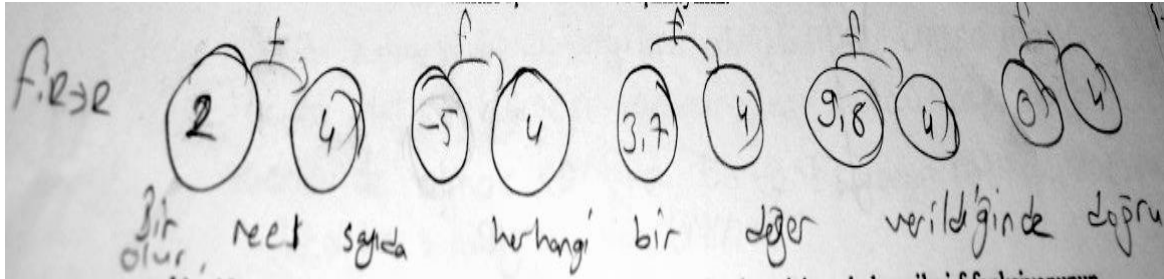
Farklı temsil türleri arasında bağlantının kurulamamasına ilişkin bulgular

Öğrencilerin cevap kağıtları incelendiğinde öğrencilerin fonksiyonun çoklu gösterimleriyle ilgili hatalar yaptıkları görülmüştür. Bu hatalar genelde bir temsil türünden diğerine geçişin sağlanamaması şeklindedir. Bununla ilgili öğrenci cevapları ise aşağıdaki gibidir:



Şekil 12. 9 nolu öğrencinin cevabı

9 nolu öğrenci sözel olarak ve nümerik temsil kullanarak fonksiyonun tanım kümesini doğru ifade ederken fonksiyona ait çizdiği grafik incelendiğinde yaptığı çizimin hatalı olduğu görülmüştür. $y=4$ denkleminde ait grafiği koordinat düzleminde $(4,0)$ noktası olarak göstermiştir. Buradan öğrencinin yaptığı hata; literatürde geçen ve Koca (2010)'nın grafikte sunulan ilişkinin genel olarak değerlendirilmesi yerine sadece belli bir noktaya odaklanması sonucu ortaya çıkan kavram yanılgısıyla ilişkilendirilebilir.

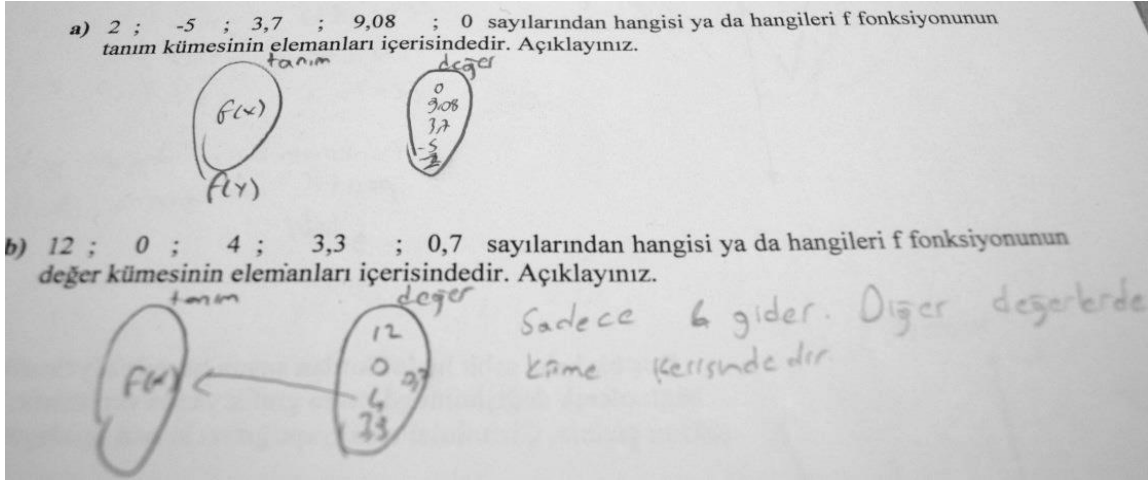


Şekil 13. 15 nolu öğrencinin cevabı

15 nolu öğrenci de soruyu doğru bir şekilde cevaplandırmasına rağmen çizdiği Venn şemaları incelendiğinde tanım ve görüntü kümelerinin elemanlarını ayrı ayrı kümeler içerisine yazdığı tespit edilmiştir. Tüm bu verilenler çoklu temsillerden yararlanmak isteyen öğrencilerin yaptıkları hatalara örnek olarak gösterilebilir.

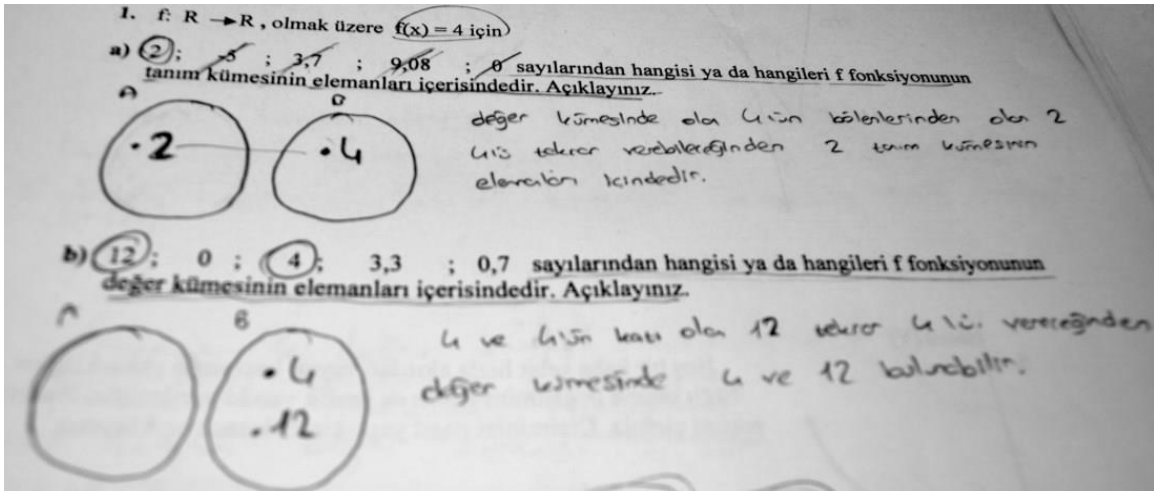
Matematiksel/sembolik dilin doğru bir şekilde anlaşılması/kullanılmamasına ilişkin bulgular

Öğrencilere yöneltilen sorulara verdikleri cevaplar incelendiğinde öğrencilerin genellikle matematiksel dili doğru bir şekilde kullanamadıkları ve sorularda kullanılan dili de doğru bir şekilde okuyup yorumlayamadıkları görülmüştür. Yaptıkları hataların da onlara sorulan soruları, zihinlerinde var olan ve sorulan soruyla alakası olmayan başka durumlara benzetmeye çalışmaları sonucu oluştuğu söylenebilir. Bununla ilgili öğrenci cevapları ise şu şekildedir:



Şekil 14. 7 nolu öğrencinin cevabı

Öğrencinin cevabı incelendiğinde, cevabın Venn şemasında gösterilirken hatalar yapıldığı görülmektedir. a) ve b) şıklarında verilen sayıları değer kümelerinin içerisine yerleştirilmiş ve tanım kümesinin elemanları da x olarak ifade edilmesi gerekirken $f(x)$ şeklinde gösterilmiştir. Ayrıca b) şıkkında çizilen şemada okun yönü değer kümesinden tanım kümesine şeklindedir. Bu bağlamda, öğrencinin fonksiyonlar konusunda kullanılan simgeler hakkında bilgi eksikliklerinin ya da yanlış öğrenmelerinin olduğu sonucuna varılabilir.

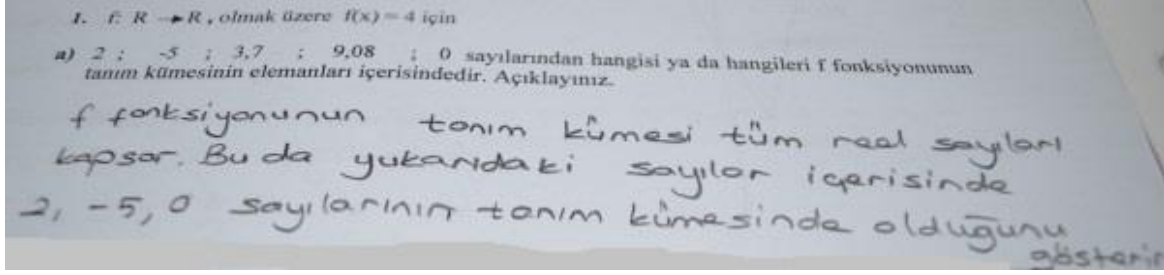


Şekil 15. 31 nolu öğrencinin cevabı

Bu öğrenci verilen fonksiyon için kendince bir kural belirleyip fonksiyonun tanım kümesini bu şekilde oluşturmuştur. Öğrencinin yapmış olduğu bu hata, cebirsel olarak ifade edilen fonksiyonun ve sembolik olarak verilen fonksiyonun tanım aralığının; yani kullanılan matematiksel dilin öğrenci tarafından anlaşılmadığını göstermektedir. Öğrencinin vermiş olduğu cevaptan, $f(x) = 4$ şeklindeki fonksiyonu $f(x) = 4x$ şeklinde algılamış olabileceği çıkarımı yapılabilir. Bu sebeple bu hata Bayazıt (2010)'un belirttiği "fonksiyon konusunda kullanılan sembol ve simgelere ilişkin zorluklar" kapsamında düşünülebilir.

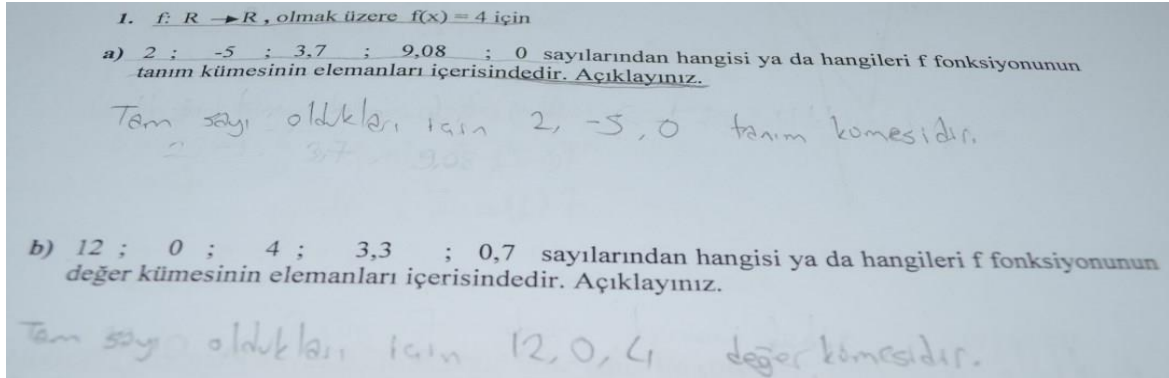
Sayı kümeleri kavramlarıyla ilgili bilgi eksikliği/yanlış algılamalara ilişkin bulgular

Bu grupta bulunan öğrencilerin de sayı kümeleriyle ilgili yanlış algılamalar sonucunda hatalar yaptıkları söylenebilir. Öğrencilerin yaptıkları hatalar da genelde sayı kümelerinin birbiriyle karıştırılması şeklinde olmuştur. Bu hatalara ait öğrenci cevapları aşağıda gösterilmiştir:



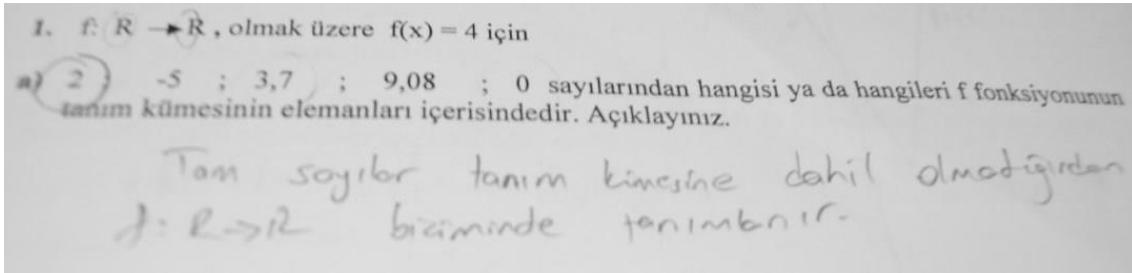
Şekil 16. 45 nolu öğrencinin cevabı

45 nolu öğrencinin cevabından da anlaşılacağı üzere öğrencinin reel sayılar kümesini tam sayılar kümesiyle karıştırdığı görülmektedir.



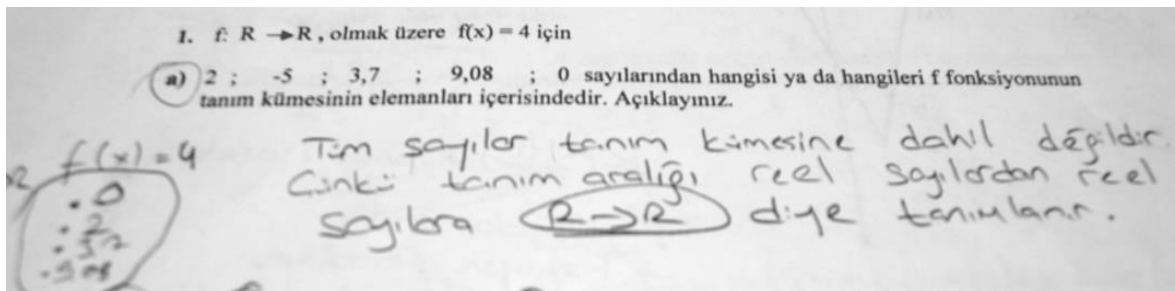
Şekil 17. 57 nolu öğrencinin cevabı

Bu öğrenci de hem tanım hem değer kümesinin içine verilen sayılardan tam olanları yerleştirmiştir. Buradan öğrencinin tam sayıları reel sayılar kapsamına almadığı yorumu yapılabilir.



Şekil 18. 60 nolu öğrencinin cevabı

Öğrencinin cevabı incelendiğinde öğrencinin tam sayıları reel sayılar kümesine dahil etmediği için tanım kümesinden tam sayıları çıkardığı tespit edilmiştir.



Şekil 19. 68 nolu öğrencinin cevabı

68 nolu öğrenci de verilen sayıların tamamının tanım kümesi içerisinde bulunmadığını çünkü fonksiyonun tanım aralığının reel sayılardan reel sayılara olduğunu belirtmiştir. Hâlbuki verilen sayıların hepsi birer reel sayıdır. Ayrıca öğrencinin çizdiği Venn Şeması'na bakıldığında -5 sayısını tanım kümesi içerisinde göstermediğini yani -5'i bir reel sayı olarak görmediğini söyleyebiliriz. Tüm bu bulgular ışığında öğrencinin sayı kümeleri kavramlarıyla ilgili yanlış kavramlarının olduğu söylenebilir.

Sonuç ve Tartışma

Bu çalışmada öncelikli olarak, matematik eğitiminin önemli kavramlarından biri olan çoklu temsillerin lisans öğrencileri tarafından nasıl ve ne amaçla kullanıldığı fonksiyon kavramı bağlamında incelenmiştir. Yapmış olduğumuz bu incelemenin nedeni ise, kompleks kavramlar tek bir temsil türüyle yeterli denilebilecek seviyede çok nadir olarak ifade edilebilirler. Her bir temsil türü bir diğer temsil türünün bazı yönlerinin daha net anlaşılmasını sağlarken öte yandan başka yönlerini gizler. Temsiller arası bağlantı kurabilme yeteneği karmaşık bir kavramın farklı yönlerinin açıkça ve dinamik bir biçimde ortaya konulmasını sağlar. Böylece önemli matematiksel kavramlar öğrenciler tarafından daha kolay anlaşılır hale gelir (Kaput, 1992; Aviles-Garay, 2001). Fonksiyon kavramı matematiğin birçok dalı arasında bağlantı kurmayı sağlar. Dolayısıyla fonksiyonun öğrencilerin muhakeme ve sorgulama yeteneklerinin gelişimi için kullanılacak önemli bir araç olduğu söylenebilir (NCTM, 2009). Bu perspektiften bakıldığında öğretmenlerin fonksiyon kavramıyla ilgili yapılan öğrenci hataları ve yaşanan zorluklar hakkında derinlemesine bilgi sahibi olmaları gerekmektedir. Öğretmenlerin bu alanlardaki bilgileri fonksiyon kavramının esasından ödün vermeden konunun mantığını öğrencilerin anlayış düzeyine uyarlamak amaçlı gösterecekleri pedagojik yaklaşımlarda belirleyici olacağı için oldukça önemlidir (Bayazıt, 2010).

Bu bağlamda yapılan bu çalışmada tespit edilen hatalar, fonksiyon kavramlarıyla ilgili bilgi eksikliği veya yanlış öğrenmeler; farklı temsil türleri arasında bağlantının kurulamaması; matematiksel/sembolik dilin doğru bir şekilde anlaşılması/kullanılmaması ve sayı kümeleri kavramlarıyla ilgili bilgi eksikliği/yanlış algılamalar şeklindedir. Ayrıca öğrencilerin fonksiyonun tanım, değer ve görüntü kümelerini açıklarken dört farklı temsil türünden faydalandıkları tespit edilmiştir. Bunlar; Sözel İfade; Venn Şeması; Grafik ve Tablo (Nümerik Temsil) şeklindedir. Bu temsil türleri Bayazıt ve Aksoy (2013); Tall ve DeMarois (1999); Bowman (1993); NCTM, (2009) da bahsedilen temsil türleriyle benzerlik göstermektedir.

Çalışmada öğrencilerin; fonksiyonda tanım, değer, görüntü kümesi ve fonksiyon çeşitleri kavramlarıyla ilgili yanlış öğrenme ya da bilgi eksikliğinden kaynaklı hatalar yaptıkları görülmüştür. Öğrencilerden bazılarının fonksiyonda görüntü ve değer kümelerini eşdeğer olarak algıladığı, bir kısmının da yalnızca görüntü ve değer kümelerini değil, tanım kümesini de diğerlerinin yerine kullandığı, bir başka öğrencinin ise fonksiyon çeşitlerinden sabit fonksiyonu fonksiyon olma şartlarından "Tanım kümesinin bir elemanı değer kümesinin yalnızca bir elemanıyla eşleşebilir." kuralıyla karıştırdığı belirlenmiştir. Elde edilen bulgular Özkaya ve İşleyen (2012)'nin sonuçlarıyla paralellik göstermektedir ve bu durum öğrencilerin fonksiyon kavramı ve temsilleri üzerine yeterince kavramsal öğrenmeye sahip olmadıklarını göstermektedir. Bunun nedeni, Bayazıt (2010)'ın da belirttiği gibi sınıflarımızda kavramsal bilgiden ziyade işlemsel bilgiye önem verilmesi neticesinde kurallar ve formüller arkasında yatan matematiksel düşüncenin öğrenciler tarafından tam olarak algılanamaması olabilir.

Öğrencilerin sahip oldukları bir başka hata türü de fonksiyonun çoklu gösterimleriyle ilgili olup bu hatalar genelde bir temsil türünden diğerine geçişin sağlanamaması şeklindedir. Bu hatayı yapan öğrencilerin fonksiyonun tanım, değer ve görüntü kümelerini bir temsil

türünde (örneğin; sözel ve nümerik) doğru ifade etmelerine karşın aynı öğrencilerin fonksiyona ait kullandıkları başka bir temsilde (örneğin grafik çizerken) bir takım hatalar yaptıkları gözlenmektedir. Bu ise literatürde geçen ve Koca (2010)'un "grafikte sunulan ilişkinin genel olarak değerlendirilmesi yerine sadece belli bir noktaya odaklanması sonucu ortaya çıkan kavram yanılgısı" ile ilişkilendirilebilir. Temsiller arası geçişle ilgili sık rastlanan bir başka hata da öğrencilerin çizdikleri Venn şemalarında tanım ve görüntü kümelerinin elemanlarını ayrı ayrı kümeler içerisine yazmalarıdır. Bu bulgular Even (1998) in yaptığı çalışmasında öğrencilerin fonksiyonların farklı temsilleri arasında bağlantı kurarken zorlandıkları şeklindeki sonuçlarıyla örtüşmektedir.

Çalışma grubundaki öğrencilerinin büyük çoğunluğunun matematiksel dili doğru bir şekilde okuyup yorumlayamadığı ve kullanamadığı; ayrıca onlara yöneltilen soruları, zihinlerinde kendilerinin oluşturduğu ve sorulan soruyla alakası olmayan durumlara benzetmeye çalıştığı görülmüştür.

Bu bağlamda, öğrencilerin fonksiyonlar konusunda kullanılan simgeler hakkında bilgi eksikliklerinin ya da yanlış öğrenmelerinin olduğu söylenebilir. Bu çalışmaya katılan lisans öğrencilerinin henüz 1. sınıfta olmaları; yani ortaöğretim kurumlarından üniversiteye yeni geçiş yapmış olmaları, ayrıca daha önceki eğitim hayatlarında SBS, YGS, LYS gibi sınav odaklı çalışmalar yapmaları neticesinde matematiksel ifade ve sembollerini çok fazla kullanmamış veya bu dilin gerekliliğinin çok fazla farkına varamamış olmaları bu durumun oluşmasına zemin hazırlamış olabilir. Tüm bu bulgular gösteriyor ki öğrencilerin üniversiteye başlarken sahip oldukları matematiksel semboller, kavramlar ve ifade güçleri yetersizdir, ayrıca matematiği algılama ve anladığını ifade etme hususunda da sıkıntı yaşamaktadırlar. Bu durumda yaşanabilecek sıkıntıları en aza indirebilmek için konuyu anlatmaya başlamadan önce öğrencilerin konuyla ilgili ön bilgileri kontrol edilebilir, yanlış yapılandırılmış matematiksel sembol ve kavramlar düzeltilerek, bu ifadeleri kullanmalarına yönelik ortamlar oluşturularak matematiksel dil becerileri geliştirilebilir (Doğan ve Güner, 2012).

Son olarak öğrencilerin bazılarının sayı kümeleriyle ilgili bir takım hatalar yaptığı tespit edilmiştir. Yapılan hatalar da genelde sayı kümelerinin birbiriyle karıştırılması şeklindedir. Öğrencilerin bir kısmının reel sayılar kümesini tam sayılar kümesiyle karıştırdığı, bir diğer grubun da tam sayıları reel sayılar kapsamında düşünmediği görülmüştür. Ayrıca reel sayı kavramının ne anlama geldiğini, hangi sayıların reel sayı olduğunu bilmeyen öğrencilerin olduğu da gözlenmiştir. Yani öğrencilerin sayı kümeleri kavramlarıyla ilgili yanlış algılamalarının olduğu söylenebilir. Tüm bu bulgular gösteriyor ki öğrencilerin sayı kümeleri gibi temel kavramların edinilmesindeki hata ya da eksikleri fark edip tespit etmek oldukça önemlidir. Matematik yığılmalı bir bilim dalı olduğundan öğrenilen bir kavram sonraki kavramlar için bir basamak oluşturmakta dolayısıyla herhangi bir kavrama ilişkin edinilmiş yanlış bilgi sonrasında birçok kavramın öğrenilmesinde güçlükler yaşanmasına ve kavramların yanlış algılanmasına neden olmaktadır (Moralı ve diğerleri, 2004; Paksu, 2010).

KAYNAKÇA/REFERENCES

- Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computers & Education*, 33, 131-152.
- Akkoç, H. (2005) Fonksiyon kavramının anlaşılması: Çoğul temsiller ve tanımsal özellikler, *Eğitim Araştırmaları Dergisi*, 5 (20), 1-14.

- Aviles-Garay, E. J. (2001). Using multiple coordinated representations in a technology-intensive setting to teach linear functions at the college level. Proyecto Tesis. Submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Education in Education in the Graduate College of the University of Illinois at Urbana-Champaign.
- Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Ankara: Harf Eğitim Yayıncılık.
- Baştürk, S. (2010). Öğrencilerinin fonksiyon kavramının farklı temsillerindeki matematik dersi performansları. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30 (2), 465-482.
- Bayazit, İ. (2010). Fonksiyonlar konusunun öğreniminde karşılaşılan zorluklar ve çözüm önerileri. E. Bingölbali, M.F. Özmantar, H. Akkoç (editörler). *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri*. Ankara: Pegem Akademi Yayınevi.
- Bayazit, İ., & Aksoy, Y. (2013). Fonksiyon kavramının matematiksel manası ve tarihsel gelişimi. İ.Ö.Zembat, M.F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır, A. Delice (editörler). *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar*. Ankara: Pegem Akademi Yayınevi.
- Bowman, A. H. (1993). A Theoretical Framework for Research in Algebra: Modification of Janvier's "Star" Model of Function Understanding. The Annual Meeting Of The American Educational Research Association, Atlanta, GA, April 12-16.
- Doğan, M., & Güner, P. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematik dilini anlama ve kullanma becerilerinin incelenmesi. 10. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde bildiri olarak sunuldu. 27-30 Haziran 2012, Niğde Üniversitesi, Niğde.
- Dugdale, S. (1993). Functions and graphs-Perspectives on students thinking. In T.A. Romberg, E. Fennema and T.P. Carpenter (Eds.) *Integrating research on the graphical representation of functions*. 101-130. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Erdoğan, E. Ö., Erdoğan, A., & Yanık, H. B. (2012). İlköğretim matematik öğretmenliği programı birinci sınıf öğrencilerinin fonksiyonlar konusundaki hazır bulunuşlukları. *Gaziantep Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 11 (4), 1121-1149.
- Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17 (1), 105-121.
- Hatsaru, V., & Erbaş, A. K. (2013). Endüstri meslek lisesi öğrencilerinin fonksiyon kavramını anlama düzeylerinin incelenmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*. 21 (3), 865-882.
- Jones, M. (2006). Demystifying functions: The historical and pedagogical difficulties of the concept of the function. *Rose-Hulman Institute of Technology Undergraduate Math Journal*. 7 (2), 66-86.
- Kabael, T. U., & Tanışlı, D. (2010). Cebirsel düşünme sürecinde örüntüden fonksiyona öğretim. *İlköğretim Online Dergisi*, 9 (1), 213-228.

- Kabael, T. U. (2011). Tek değişkenli fonksiyonların iki değişkenli fonksiyonlara genellenmesi, fonksiyon makinesi ve apos. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri Dergisi*, 11 (1), 465-499.
- Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. 515-556. New York: Macmillan.
- Keller, B. A., & Hirsch, C. R. (1998). Student preferences for representations of functions. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 29 (1), 1-17.
- Koca, A. Ö. (2010). Öğrencilerin grafik okuma, yorumlama ve oluşturma hakkındaki kavram yanlışları. E. Bingölbali, M.F. Özmantar, H. Akkoç (editörler). *Matematiksel kavram yanlışları ve çözüm önerileri*. Pegem Akademi Yayınevi: Ankara.
- Malik, M. A. (1980). Historical and pedagogical aspects of the definition of function , *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 11 (4), 489-492.
- Meel, D. A. (1999). Prospective teachers' understandings: function and composite function. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*, 1, 1-14.
- Miles, M., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: an expanded sourcebook*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Milli Eğitim Bakanlığı. (2013a). *Ortaöğretim 9. sınıf matematik ders kitabı*. Ankara.
- Milli Eğitim Bakanlığı. (2013b). *Talim terbiye kurulu başkanlığı ortaöğretim matematik dersi öğretim programı (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar)*. Ankara.
- Moralı, S., Köroęlu, H., & Çelik, A. (2004). Buca eğitim fakóltesi matematik öğretmen adaylarının soyut matematik dersine yönelik tutumları ve rastlanan kavram yanlışları. *Gazi Eğitim Fakóltesi Dergisi*, 24 (1), 161-175.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2009). Reasoning with functions. Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making. Retrieved January 21, 2014 from http://www.nctm.org/uploadedFiles/Math_Standards/13494_chapter.pdf
- Özkaya, M., & İşleyen, T. (2012). Fonksiyonlarla ilgili bazı kavram yanlışları. *Çankırı Karatekin Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 3 (1), 01-32.
- Paksu, A. D. (2010). Üslü ve köklü sayılar konularındaki öğrenme güçlükleri. E. Bingölbali, M. F. Özmantar, H. Akkoç (editörler). *Matematiksel kavram yanlışları ve çözüm önerileri*. Ankara: Pegem Akademi Yayınevi.

- Polat, Z. S., & Şahiner, Y. (2007). Bağntı ve fonksiyonlar konusunda yapılan yaygın hataların belirlenmesi ve giderilmesi üzerine boylamsal bir çalışma. *Eğitim ve Bilim Dergisi*, 32 (146), 89-95.
- Ponte, J. P (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *Mathematics Educator*, 3 (2), 3-8.
- Seufert, T. (2003). Supporting coherence formation in learning from multiple representations. *Learning and Instruction*, 13 (2), 227-237.
- Sipahi, İ. A., & Özdemir, M. F. (2012). *12. sınıf matematik ders kitabı*. İzmir: Top Yayıncılık.
- Tall, D., & DeMarois, P. (1999). Function: organizing or cognitive root? In O. Zaslaysky (Ed.), *Proceedings of the 23 rd Conference of PME*, Haifa, Israel, 2, 257-264.
- Tall, D., McGowen, M., & DeMarois, P. (2000a). The function machine as a cognitive root for building a rich concept image of the function concept, *Proceedings of PME-NA*, 1, 247-254.
- Tall, D., McGowen, M., & DeMarois, P. (2000b). Using the function machine as a cognitive root for building a rich concept image of the function concept, *Proceedings of PME-NA*, 1, 255-261.
- Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education*, (Issues in *Mathematics Education*, 4, 21-44).
- Ural, A. (2006). Fonksiyon öğreniminde kavramsal zorluklar. *Ege Eğitim Dergisi*, 7 (2), 75–94.
- Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 356-366.
- Yavuz, İ. (2010). What does a graphical representation mean for students at the beginning of function teaching?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41 (4), 467-485.
- Yavuz, İ., & Kepçeoğlu, İ. (2010). Öğrencilerin fonksiyonlarda işlemler konusuna grafikler üzerinden yaklaşımlarının incelenmesi. *Sakarya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 20, 59-80.
- Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2011). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.