

CRAMER-RAO ALT SINIRI İLE AR METODUNDA PARAMETRE KESTİRİM PERFORMANSININ ANALİZİ

Elif Derya ÜBEYLİ, İnan GÜLER
Gazi Üniversitesi, Teknik Eğitim Fakültesi, Elektronik-Bilgisayar Bölümü
06500 Teknikokullar, ANKARA

ÖZET

Bu çalışmada, kutup, varyans ve ortalama karesel hata gibi istatistiksel ölçümlerin değerlendirilmesi ile minimum varyanslı kutupsuz kestirim metodlarının belirlenmesi incelenmiştir. Kutupsuz kestirim metodlarında Cramer-Rao alt sınırının hesaplanması ile kestirim metodlarının varyansları belirlenmiştir. Parametrik metodlarda işaretin, nedensel, sıfır-kutup, ayrık, girişi beyaz gürültü olan filtrenin çıkışı olarak modellenmesi ve bu modelin parametre kestirimi açıklanmıştır. Bu çalışmada kullanılan test işaretinin AR parametrelerinin kestirimi, Yule-Walker AR metodu ve en küçük kareler AR metodu ile yapılmıştır. Kestirim sonuçlarından Yule-Walker AR metodu ve en küçük kareler AR metodunun asimptotik olarak kutupsuz kestirim metodu oldukları gösterilmiştir. AR parametre kestiriminin asimptotik Cramer-Rao alt sınırı hesaplanmış ve böylece kestirim metodunun performansı belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Parametre kestirimi, Yule-Walker AR metodu, En küçük kareler AR metodu, Doğrusal öngörme, Cramer-Rao alt sınırı

PERFORMANCE ANALYSIS OF PARAMETER ESTIMATION IN AR METHOD WITH CRAMER-RAO LOWER BOUND

ABSTRACT

In this study, determination of minimum variance unbiased estimation methods was examined by the evaluation of statistical measurements such as bias, variance and mean square error. Variances of estimation methods were determined by calculation of Cramer-Rao lower bound in unbiased estimation methods. In parametric methods, modeling the signal as output of causal, zero-pole, discrete filter that has white noise input and parameter estimation of this model were explained. AR parameter estimation of test signal used in this study was done by Yule-Walker AR method and least square AR method. From the results of estimation it was indicated that Yule-Walker AR method and least square AR method were asymptotically unbiased estimation methods. Asymptotic Cramer-Rao lower bound of AR parameter estimation was calculated and thus performance of estimation method was determined.

Key Words: Parameter estimation, Yule-Walker AR method, Least square AR method, Linear Prediction, Cramer-Rao lower bound

1. GİRİŞ

Zaman serilerinin sonlu sayıdaki ölçümlerinden spektral içeriğin belirlenmesi işleme spektral analiz denir. Spektral analiz konusunda iki farklı yaklaşım vardır: Parametrik olmayan (klasik) metodlar ve parametrik (model-tabanlı) metodlar. Parametrik metodlarda, işaret fonksiyonel formu bilinen modele uygulanır ve bu modelin parametrelerinin kestirimi yapılır. Parametrik metodlar ilk olarak Yule tarafından 1927'de tanımlanmıştır. Daha sonra, bu metodlar Walker (1931), Burg (1967) ve diğer araştırmacılar tarafından geliştirilmiştir. Zaman serileri analizi olarak da bilinen parametrik modellerin belli başlıları, özbağlı model (autoregressive model, AR modeli), yürüyen ortalamalı model (moving average model, MA modeli) ve bunların birleşimi olan özbağlı yürüyen ortalamalı modeldir (autoregressive moving average model, ARMA modeli) (1-5).

Model parametrelerinin kestiriminde farklı kestirim metodları kullanılmaktadır. İşaretin spektral karakteristikleri kestirilen model parametreleri ile belirlenir. Parametrik metodlar ile sürekli güç yoğunluk spektrumları rasyonel güç yoğunluk spektrumları şeklinde incelenebilir. Doğrusal denklemlerin çözülmesi ile AR parametrelerinin kestirimleri kolaylıkla yapılabildiği için AR metodu çok kullanılan parametrik metodlardandır. Parametre kestiriminde kutupsuz ve varyansı en düşük olan kestirim metodları seçilmelidir. Cramer-Rao alt sınırı kestirimlerin varyansı için alt sınır belirlemede kullanılan bir metoddur. Cramer-Rao alt sınırı kutupsuz kestirimler için hesaplanmaktadır (6-10).

Bu çalışmada kullanılan test işaretinin AR parametrelerinin kestirimi, Yule-Walker AR metodu ve en küçük kareler AR metodu ile yapılmıştır. Kestirim sonuçlarından Yule-Walker AR me-

todu ve en küçük kareler AR metodunun asimptotik olarak kutupsuz kestirim metodu oldukları gösterilmiştir. AR parametre kestiriminin asimptotik Cramer-Rao alt sınırı hesaplanarak kutupsuz AR parametre kestirim metodunun minimum varyansı belirlenmiştir. Test işareti olarak beyaz gürültü içinde bulunan sinüs ve kare dalga işaretleri AR modelinin çıkışına uygulanmıştır. Yule-Walker AR metodu ve en küçük kareler AR metodu ile parametre kestirim hataları hesaplanmıştır. Parametre kestirim hataları ile bu hatalara karşılık gelen Cramer-Rao alt sınırları karşılaştırılarak Yule-Walker AR metodu ve en küçük kareler AR metodunun performansları değerlendirilmiştir.

2. CRAMER-RAO ALT SINIRI

Zaman serileri analizinde, bir sistem veya modelin parametrelerinin kestirimi önemli bir konudur. Parametre kestirimlerinde değişik metodlar kullanılmaktadır. Kutup, varyans, ortalama karesel hata gibi istatistiksel ölçümlerin değerlendirilmesi ile parametre kestirim metodlarının performansları belirlenebilir. θ kestirimi yapılacak parametre vektörü olarak belirtilirken $\hat{\theta}$ kestirilen parametre vektörü olarak belirtilir. Kestirimin “iyi” olarak değerlendirilmesi, $\hat{\theta}$ 'nin θ 'ya olan yakınlığına bağlıdır. Kestirim hatası (E_e) şu şekilde bulunur,

$$E_e = \theta - \hat{\theta} \quad (1)$$

Kestirimin varyansı şu şekilde ifade edilir,

$$\text{var}(\hat{\theta}) = E\left[\left(\hat{\theta} - E[\hat{\theta}]\right)^2\right] \quad (2)$$

burada, $E[\cdot]$ beklenen değer işlemidir. Varyansın küçük olması olasılık yoğunluğunun ortalama değere yakınlaştığını gösterir. Varyansın sifıra yaklaşması durumunda kestirim tutarlı olmaktadır.

Kutup, kestirimin gerçek değerden ortalama sapmasını ölçer. Kestirimin kutbu, gerçek değerden kestirimin beklenen değerinin çıkarılması ile bulunur:

$$\text{kutup}(\hat{\theta}) = \theta - E(\hat{\theta}) \quad (3)$$

Kutbun sifıra eşit olması durumunda kestirim kutupsuz olarak belirtilir ve $\theta = E(\hat{\theta})$ olur.

Asimptotik istatistiksel ölçümler, kestirim metodlarının karakteristiklerini tanımlamada kul-

lanılabilmektedir. Data sayısının (N) sonsuza yaklaşması durumunda,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}) = \theta \quad (4)$$

olur ve asimptotik olarak kutupsuz kestirim elde edilir.

Kestirimlerin performanslarının karşılaştırılmasında varyans ve kutuplarına bakılır. Ortalama karesel hata, kestirimin varyans ve kutuplarına bağlı olarak ifade edilebilir (1,2,6). Bundan dolayı, kestirimlerin incelenmesinde ortalama karesel hata dikkate alınır:

$$\begin{aligned} \text{ortalama karesel hata } (\hat{\theta}) &= E\left[(\theta - \hat{\theta})^2\right] \\ &= \text{var}(\theta - \hat{\theta}) + E^2(\theta - \hat{\theta}) \\ &= \text{var}(\hat{\theta}) + (\theta - E[\hat{\theta}])^2 \\ &= \text{var}(\hat{\theta}) + \text{kutup}^2(\hat{\theta}) \end{aligned} \quad (5)$$

Parametre kestiriminde kestirim metodlarından varyansı en düşük olan metod seçilmelidir çünkü varyansı düşük olan metodlar ile kestirilen parametreler gerçek değerlerine yakındır. Kestirimin kutupsuz olması ortalamasının gerçek değere eşit olacağını gösterir. Denklem (5)'te kutup terimi sıfır olduğunda kestirimin ortalama karesel hatası varyansına eşit olur. Bu durumda, parametre kestiriminin “iyi” olarak yapılabilmesi için kutbu sıfır ve varyansı en düşük olan kestirim metodu seçilmelidir. Kutupsuz kestirimlerin arasından varyansı en düşük olan kestirim metodunun seçilebilmesi için bir alt sınır belirlenmelidir. Bu şekilde, farklı kutupsuz kestirimlerin varyansları karşılaştırılır ve performans analizleri yapılır. Ziv ve Zakai (1969), Seidman (1970), McAulay ve Hofstetter (1971), Kendall ve Stuart (1979), varyans için alt sınır belirleme metodları geliştirmişlerdir (8). Bununla birlikte, Cramer-Rao alt sınırı, kolay hesaplanmasından dolayı varyans için alt sınır belirlemede en çok kullanılan metod olmuştur. Cramer-Rao alt sınırı kutupsuz kestirimler için hesaplanır ve böylece minimum varyanslı kutupsuz kestirimler belirlenebilir (1,8).

İşaret hakkındaki bütün bilgi, gözlenen datadan ve datanın olasılık yoğunluk fonksiyonundan bulunmaktadır. Bundan dolayı, kestirimin performansı data için varsayılan olasılık yoğunluk fonksiyonuna bağlıdır (5,9,10). Olasılık yoğunluk fonksiyonuna bağlı olan kestirimlerde, kestirimi yapılacak olan parametre deterministik ise kestirim metodları klasik kestirim olarak adlandırılır. Cramer-Rao alt sınırının belirlenmesinde gözlenen datanın olasılık yoğunluk fonksiyonu kestirimi ya-

pılacak parametrenin fonksiyonu olarak ifade edilir ve bu fonksiyon “olabilirlik fonksiyonu” olarak adlandırılır: $p(x;\theta)$, burada θ kestirimi yapılacak olan parametre vektörüdür ($\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_p]^T$). Önce $p(x;\theta)$ 'nın doğal logaritması alınır ($\ln p(x;\theta)$). Cramer-Rao alt sınırı kutupsuz kestirimlerde belirlendiği için kestirimin kutupsuz olduğu gösterilmelidir. Parametre kestirimlerinin varyansları için Cramer-Rao alt sınırı şu şekilde ifade edilir:

$$\text{var}(\hat{\theta}_i) \geq [I^{-1}(\theta)]_{ii} \quad (6)$$

Denklem (6)'daki $I(\theta)$ $p \times p$ boyutlu Fisher bilgi matrisidir ve şu şekilde hesaplanır:

$$[I(\theta)]_{ij} = -E \left[\frac{\partial^2 \ln p(x;\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] \quad (7)$$

burada, $i = 1, 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots, p$, $E[\cdot]$ beklenen değer işlemidir ve $p(x;\theta)$ 'ya göre bulunur.

Denklem (6)'dan görüldüğü gibi, parametre kestirimlerinin varyansları için belirlenen Cramer-Rao alt sınırı Fisher bilgi matrisinin tersine eşittir ($[I^{-1}(\theta)]_{ii}$). Kestirim asimptotik olarak kutupsuz ise Cramer-Rao alt sınırı da asimptotik olarak hesaplanır (1,8).

3. AR MODELİ

Parametrik modellerde data, girişi beyaz Gauss gürültüsü ($w(n)$ varyansı σ^2) olan nedensel, sıfır-kutup, ayrık filtrenin çıkışı olarak modellenir. Bu modellerde filtrenin transfer fonksiyonu rasyoneldir ve sürekli güç yoğunluk spektrumları rasyonel olarak yazılabilir:

$$\phi(\omega) = \frac{\sum_{k=-m}^m \gamma_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=-p}^p \rho_k e^{-j\omega k}} \quad (8)$$

burada, $\phi(\omega)$ güç yoğunluk spektrumu, $\gamma_{-k} = \gamma_k^*$ (γ_k 'nın kompleks eşleniği) ve $\rho_{-k} = \rho_k^*$ (ρ_k 'nin kompleks eşleniği). Weierstrass teoremine göre denklem (8)'deki m ve p dereceleri yeterli büyüklükte seçilir ise sürekli güç yoğunluk spektrumu rasyonel olarak yazılabilmektedir. Bundan dolayı, spektral kestirim konusunda denklem (8)'deki model üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Spektral faktörlerine ayırma teoremine göre denk-

lem (8)'deki rasyonel güç yoğunluk spektrumu şu şekilde yazılabilir:

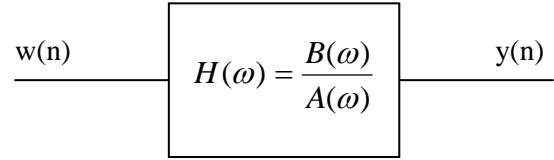
$$\phi(\omega) = \left| \frac{B(\omega)}{A(\omega)} \right|^2 \sigma^2 \quad (9)$$

burada, σ^2 beyaz Gauss gürültüsünün varyansı (pozitif bir skalar) ve $A(\omega)$, $B(\omega)$ aşağıda verilen polinomlardır,

$$A(\omega) = 1 + a_1 e^{-j\omega} + \dots + a_p e^{-jp\omega} \quad \text{ve}$$

$$B(\omega) = 1 + b_1 e^{-j\omega} + \dots + b_m e^{-jm\omega}$$

Denklem (9)'daki rasyonel $\phi(\omega)$, varyansı σ^2 olan beyaz Gauss gürültüsünün transfer fonksiyonu $H(\omega) = B(\omega)/A(\omega)$ olan rasyonel filtreden geçirilmesi ile elde edilen işaretin güç yoğunluk spektrumudur (Şekil 1).



Şekil 1. Rasyonel $\phi(\omega)$ 'nın gösterimi.

Şekil 1'deki filtreleme zaman domeninde şu şekilde yazılır,

$$y(n) = \frac{B(q)}{A(q)} w(n)$$

veya

$$A(q)y(n) = B(q)w(n) \quad (10)$$

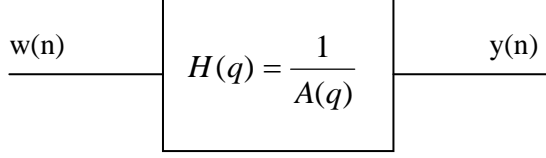
burada, $y(n)$ filtrenin çıkışı, q^{-1} birim gecikme işlemi ($q^{-k} y(n) = y(n-k)$), $w(n)$ varyansı σ^2 olan beyaz Gauss gürültüsüdür. Bu durumda, spektral faktörlerine ayırma teoremi ile spektral kestirim problemi işaret modelleme problemine dönüşür. Rasyonel güç yoğunluk spektrumunun spektral faktörlerine ayrılmış şeklinin çözümlerinden biri ARMA modelidir. Denklem (10)'u sağlayan $y(n)$ işareti ARMA(p, m) olarak adlandırılır. $m = 0$ olması durumunda $y(n)$ AR(p) işareti olur ve $p = 0$ olması durumunda $y(n)$ MA(m) işareti olarak belirtilir. Burada, p ve m sırası ile AR ve MA modellerinin derecesini gösterir. Bu durumda,

$$\text{ARMA: } A(q)y(n) = B(q)w(n)$$

$$\text{AR: } A(q)y(n) = w(n)$$

$$\text{MA: } y(n) = B(q)w(n)$$

AR modelinde, data girişi beyaz Gauss gü-
rültüsü ($w(n)$ varyansı σ^2) olan nedensel, tüm-
kutup, ayrık filtrenin çıkışı olarak modellenir (Şe-
kil 2). AR modeli, tüm-kutup modeli olarak da
adlandırılır.



Şekil 2. AR modeli.

$AR(p)$ modeli (p 'inci dereceden AR mo-
deli) AR parametreleri $\{a[1], a[2], \dots, a[p], \sigma^2\}$ ile
karakterize edilebilir. Doğrusal denklemlerin çö-
zülmesi ile AR parametrelerinin kestirimleri ko-
laylıkla yapılabilir. Bundan dolayı, AR mo-
deli zaman serilerinin modellenmesinde en çok kul-
lanılan spektral kestirim modelidir (1-5).

3.1. AR Modelinin Otokorelasyon Yapısı

AR modelinin otokorelasyon fonksiyonları
 $\{a_i\}_{i=1}^p$, ve σ^2 parametrelerine bağlı olarak elde
edilebilir. Denklem (10)'da verilen ARMA modeli
ele alınır ve $A(q)y(n) = B(q)w(n)$ ifadesi şu şe-
kilde yazılabilir,

$$y(n) + \sum_{i=1}^p a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^m b_j w(n-j) \quad (11)$$

burada, $a_0 = 1$ ve $b_0 = 1$ 'dir.

Bu ifade $y^*(n-k)$ ($y(n)$ işaretinin
($n-k$)'daki kompleks eşleniği) ile çarpılır ve
beklenen değerleri hesaplanır:

$$r(k) + \sum_{i=1}^p a_i r(k-i) = \sum_{j=0}^m b_j E\{w(n-j)y^*(n-k)\} \quad (12)$$

burada, $r(k)$ otokorelasyon fonksiyonudur.

$H(q) = B(q)/A(q)$ filtresi asimptotik ola-
rak kararlı ve nedensel olduğu için şu şekilde ya-
zılabilir,

$$H(q) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k q^{-k} \quad , \quad (h_0 = 1)$$

burada, h filtrenin impuls cevabıdır ve $y(n)$

$$y(n) = H(q)w(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k w(n-k) \quad (13)$$

olarak ifade edilir.

Bu durumda denklem (12)'deki ifadesi

$E\{w(n-j)y^*(n-k)\}$ şu şekilde bulunur,

$$\begin{aligned} E\{w(n-j)y^*(n-k)\} &= E\left\{w(n-j) \sum_{s=0}^{\infty} h_s^* w^*(n-k-s)\right\} \\ &= \sigma^2 \sum_{s=0}^{\infty} h_s^* \delta_{j,k+s} = \sigma^2 h_{j-k}^* \quad (14) \end{aligned}$$

burada, δ impuls fonksiyonudur. Denklem (14)
denklem (12)'de yerine konur ve aşağıdaki ifade
elde edilir:

$$r(k) + \sum_{i=1}^p a_i r(k-i) = \sigma^2 \sum_{j=0}^m b_j h_{j-k}^* \quad (15)$$

AR modelinde $m = 0$ ve $B(q) = 1$ 'dir.

$y(n)$: AR(p) için denklem (15) şu şekilde ifade
edilir:

$$r(k) + \sum_{i=1}^p a_i r(k-i) = \sigma^2 \sum_{j=0}^0 b_j h_{j-k}^* = \sigma^2 b_0 h_{-k}^* \quad (16)$$

Sistemin nedensel olmasından dolayı $k < 0$
için $h(k) = 0$ 'dır ve aşağıdaki ifade elde edilir:

$$r(0) + \sum_{i=1}^p a_i r(-i) = \sigma^2 \quad , \quad k = 0 \quad (17a)$$

$$r(k) + \sum_{i=1}^p a_i r(k-i) = 0, \quad k > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p) \quad (17b)$$

Denklem (17)'deki ifadeler AR modeli ile
otokorelasyon fonksiyonu arasındaki ilişkiyi gös-
termektedir. Bu ifadeler Yule-Walker veya normal
denklemler olarak adlandırılır (1-5).

3.2. AR Modeli ile Doğrusal Öngörmenin İlişkisi

Doğrusal öngörme, gözlenmemiş örnek
 $y(n)$ 'in gözlenen örneklerden öngörülmesidir
 $\{y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-p)\}$. p tane geçmiş ör-
neğin doğrusal kombinasyonu olan bir kestirim in-
celenirse,

$$\hat{y}(n) = - \sum_{k=1}^p \alpha_k y(n-k) \quad (18)$$

burada, öngörme katsayıları $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$ ön-
görme hatası $e(n)$ 'in gücünü minimum yapacak
şekilde seçilir.

$$\rho = E\left(|e(n)|^2\right) = E\left(|y(n) - \hat{y}(n)|^2\right) \quad (19)$$

ρ 'u minimum yapmak için aşağıda belirtilen diklik prensibi kullanılır,

$$E\left\{y^*(n-k)(y(n) - \hat{y}(n))\right\} = 0, k = 1, 2, \dots, p \quad (20)$$

veya

$$r(k) = -\sum_{l=1}^p \alpha_l r(k-l), k = 1, 2, \dots, p \quad (21)$$

Denklem (20) kullanılarak minimum öngörme hatasının gücü şu şekilde bulunur,

$$\begin{aligned} \rho_{\min} &= E\left\{y^*(n)(y(n) - \hat{y}(n))\right\} \\ &= r(0) + \sum_{k=1}^p \alpha_k r(-k) \end{aligned} \quad (22)$$

Denklem (21) ve (22) doğrusal öngörme teorisinde Wiener-Hopf denklemleri olarak adlandırılır. Bu denklemler AR modelinin Yule-Walker denklemlerine eşit olduğundan dolayı $k = 1, 2, \dots, p$ için $\alpha_k = a[k]$ ve $\rho_{\min} = \sigma^2$ olur. Bu durumda, optimum doğrusal öngörme katsayıları AR parametrelerine ve minimum öngörme hatasının gücü gürlütünün varyansına eşittir. Öngörme hatası $e(n)$ beyaz Gauss gürültüsü $w(n)$ 'e eşittir:

$$\begin{aligned} e(n) &= y(n) - \hat{y}(n) = y(n) - \left[-\sum_{k=1}^p \alpha_k y(n-k)\right] \\ &= y(n) + \sum_{k=1}^p a[k]y(n-k) = w(n) \end{aligned} \quad (23)$$

Bu durumda, AR(p) modeli şu şekilde yazılabilir,

$$y(n) = \hat{y}(n) + w(n) \quad (24)$$

burada, $\hat{y}(n) = -\sum_{k=1}^p a[k]y(n-k)$ (p tane geçmiş örneğe bağlı) olarak belirtilir (1-3).

3.3. AR Parametrelerinin Kestirim Metodları

Bu çalışmada, AR parametrelerinin kestiriminde iki farklı metod kullanılmıştır. Bu metodlardan biri, denklem (17)'de verilen AR modeli ve otokorelasyon fonksiyonu arasındaki ilişkiye bağlıdır ve Yule-Walker metodu olarak adlandırılır. Diğer metod ise denklem (21) ve (22)'de verilen AR modeli ve doğrusal öngörme arasındaki ilişkiye bağlıdır ve en küçük kareler metodu olarak adlandırılır.

Yule-Walker AR Metodu: Denklem (17)'de verilen Yule-Walker denklemleri AR parametre kestirim metodlarının temelini oluşturur. Yule-Walker denklemleri incelendiğinde $y(n)$ AR(p) işaretinde $p+1$ tane bilinmeyen parametre olduğu görülür. Bu denklemlerdeki $a[k]$ ($k = 1, 2, \dots, p$) parametrelerinin ve σ^2 'nin kestirimi yapılır. Yule-Walker denklemlerinden denklem (17b) matris şeklinde yazılır:

$$\begin{bmatrix} r(1) \\ \vdots \\ r(p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r(0) & \cdots & r(-p+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r(p-1) & \cdots & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

veya

$$r_p + R_p a = 0 \quad (25)$$

burada, $k > 0$ için $r(-k) = r^*(k)$ 'dir ve otokorelasyon matrisi R_p Hermitian, Toeplitz matristir. Aynı zamanda tekil olmayan bir matris olduğu için tersi alınabilmektedir (11).

Otokorelasyon fonksiyonları $\{r(k)\}_{k=0}^p$ kullanılarak $a = [a_1 \ \cdots \ a_p]^T$ parametreleri hesaplanır:

$$a = -R_p^{-1} r_p \quad (26)$$

Hesaplanan $a = [a_1 \ \cdots \ a_p]^T$ parametreleri denklem (17a)'da yerine konur ve σ^2 bulunur.

Eldeki $\{y(n)\}_{n=1}^N$ sonlu sayıdaki datadan otokorelasyon fonksiyonlarının kestirimi yapılır. \hat{R}_p 'nin pozitif olması ve tek bir çözüm elde edilmesi için otokorelasyon fonksiyonlarının kutuplu kestirimleri hesaplanır. Otokorelasyon fonksiyonlarının kutuplu kestirimleri şu şekilde ifade edilir:

$$\hat{r}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=k+1}^N y(n)y^*(n-k), 0 \leq k \leq N-1 \quad (27)$$

Yule-Walker denklemlerinde otokorelasyon fonksiyonları $\{r(k)\}_{k=0}^p$ yerine otokorelasyon fonksiyonlarının kutuplu kestirimleri $\{\hat{r}(k)\}_{k=0}^p$ konur,

$$ve \ \hat{\sigma}^2 = \hat{r}(0) + \sum_{i=1}^p \hat{a}_i \hat{r}(-i) \quad (28)$$

elde edilir. Denklem (28) kullanılarak $a = [a_1 \ \cdots \ a_p]^T$ ve σ^2 parametrelerinin kestirimi Yule-Walker metodu ile hesaplanmış olur (1-5).

En Küçük Kareler AR Metodu: Denklem (21) ve (22)'de Yule-Walker denklemleri ile doğrusal öngörmenin ilişkisi verilmiştir. Bilinmeyen α_k katsayılarını belirlemek için minimum ortalama karesel hata belirlenir. Eldeki $\{y(n)\}_{n=1}^N$ sonlu sayıdaki datadan $E\left(|e(n)|^2\right)$ 'nin α_k 'ya ($k = 1, 2, \dots, p$) göre minimumu hesaplanır.

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= E\left(|e(n)|^2\right) = \sum_{n=N_1}^{N_2} |e(n)|^2 \\ &= \sum_{n=N_1}^{N_2} \left| y(n) + \sum_{k=1}^p \alpha[k]y(n-k) \right|^2, \quad k = 1, 2, \dots, p \\ &= \left\| \begin{bmatrix} y(N_1) \\ y(N_1+1) \\ \vdots \\ y(N_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y(N_1-1) & \dots & \dots & y(N_1-p) \\ y(N_1) & \dots & \dots & y(N_1+1-p) \\ \vdots & & & \vdots \\ y(N_2-1) & \dots & \dots & y(N_2-p) \end{bmatrix} \alpha \right\|^2 \\ &= \|y + Y\alpha\|^2 \end{aligned} \quad (29)$$

$f(\alpha)$ 'yı minimum yapan α vektörü şu şekilde hesaplanır:

$$\min_{\alpha} \|y + Y\alpha\|^2$$

Bu ifade yaklaşık olarak şu şekilde bulunur:

$$y \cong -Y\alpha$$

Elde edilen bu ifadeden α 'nın kestirilen değerleri hesaplanır,

$$\hat{\alpha} = -Y^{\#} y \quad (30)$$

burada, $Y^{\#}$ Y matrisinin genelleştirilmiş tersidir (pseudo tersi) ve şu şekilde hesaplanır,

$$Y^{\#} = (Y^* Y)^{-1} Y^*$$

$$\hat{\alpha} = -(Y^* Y)^{-1} Y^* y \quad (31)$$

Denklem (31)'deki Y ve y matrisleri N_1 , N_2 için seçilen değerlere bağlıdır (11).

Denklem (22)'de otokorelasyon fonksiyonları $\{r(k)\}_{k=0}^p$ yerine otokorelasyon fonksiyonlarının kestirimleri $\{\hat{r}(k)\}_{k=0}^p$ konur ve α yerine α 'nın kestirilen değerleri $\hat{\alpha}$ konur,

$$\hat{\rho}_{\min} = \hat{r}(0) + \sum_{k=1}^p \hat{\alpha} \hat{r}(-k) \quad (32)$$

elde edilir.

Denklem (31)'de elde edilen $\hat{\alpha}$, $a = [a_1 \dots a_p]^T$ parametrelerinin kestirilen değerleridir ve denklem (32)'de elde edilen $\hat{\rho}_{\min}$, σ^2 'nin kestirilen değeridir. Denklem (31) ve (32) kullanılarak $a = [a_1 \dots a_p]^T$ ve σ^2 parametrelerinin kestirimi en küçük kareler metodu ile hesaplanmış olur (1-3).

4. AR METODUNDA PARAMETRE KESTİRİMLERİNİN ASİMPTOTİK CRAMER-RAO ALT SINIRLARI

AR (p) modeli aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$w(n) = y(n) + \sum_{k=1}^p a[k]y(n-k) \quad (33)$$

Denklem (33)'teki $w(n)$ beyaz Gauss gürültüsüdür ve $w(n)$ 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu şu şekilde belirtilir:

$$\begin{aligned} p(w) &= \prod_{n=p}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{w^2(n)}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{(N-p)/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=p}^{N-1} w^2(n)\right) \end{aligned} \quad (34)$$

Eldeki $\{y(n)\}_{n=1}^N$ sonlu sayıdaki datanın olabirlik fonksiyonu şu şekilde verilir,

$$\begin{aligned} p(y; a, \sigma^2) &= p(w(y)) \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{(N-p)/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=p}^{N-1} \left(y(n) + \sum_{j=1}^p a[j]y(n-j)\right)^2\right] \end{aligned} \quad (35)$$

Fisher bilgi matrisi şu şekilde belirtilir:

$$\begin{aligned} [I_{\theta}]_{ij} &= -E \left[\frac{\partial^2 \ln p(y; \theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] \\ i, j &= 1, 2, \dots, p+1 \end{aligned} \quad (36)$$

burada bilinmeyen parametre vektörü $\theta = [a \sigma^2]^T$ 'dir. $p(y; a, \sigma^2)$ kullanılarak Fisher bilgi matrisi elde edilir.

$$\begin{aligned} p(y; a, \sigma^2) & \text{nin doğal logaritması alınır,} \\ \ln p(y; a, \sigma^2) &= -\ln(2\pi\sigma^2)^{(N-p)/2} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=p}^{N-1} \left(y(n) + \sum_{j=1}^p a[j]y(n-j)\right)^2 \end{aligned} \quad (37)$$

Birinci-dereceden kısmi türevleri,

$$\frac{\partial \ln p(y; a, \sigma^2)}{\partial a[k]} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=p}^{N-1} \left(y(n) + \sum_{j=1}^p a[j] y(n-j) \right) y(n-k)$$

$$\frac{\partial \ln p(y; a, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{N-p}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{n=p}^{N-1} \left(y(n) + \sum_{j=1}^p a[j] y(n-j) \right)^2 \quad (38)$$

İkinci-dereceden kısmi türevleri,

$$\frac{\partial^2 \ln p(y; a, \sigma^2)}{\partial a[k] \partial a[l]} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=p}^{N-1} y(n-l) y(n-k)$$

$$\frac{\partial^2 \ln p(y; a, \sigma^2)}{\partial a[k] \partial \sigma^2} = \frac{1}{\sigma^4} \sum_{n=p}^{N-1} \left(y(n) + \sum_{j=1}^p a[j] y(n-j) \right) y(n-k)$$

$$\frac{\partial^2 \ln p(y; a, \sigma^2)}{\partial \sigma^2 \partial \sigma^2} = \frac{N-p}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6} \sum_{n=p}^{N-1} \left(y(n) + \sum_{j=1}^p a[j] y(n-j) \right)^2$$

$$= \frac{N-p}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6} \sum_{n=p}^{N-1} w^2(n) \quad (39)$$

Beklenen değerleri alındığında,

$$E \left[\frac{\partial^2 \ln p(y; a, \sigma^2)}{\partial a[k] \partial a[l]} \right] = -\frac{N-p}{\sigma^2} r(k-l)$$

$$E \left[\frac{\partial^2 \ln p(y; a, \sigma^2)}{\partial a[k] \partial \sigma^2} \right] = \frac{N-p}{\sigma^4} \left[r(k) + \sum_{j=1}^p a[j] r(k-j) \right] = 0$$

burada, parantez içindeki $r(k) + \sum_{j=1}^p a[j] r(k-j)$

ifadesi denklem (17b)'de verilen Yule-Walker denklemdir ve 0'a eşittir.

$$E \left[\frac{\partial^2 \ln p(y; a, \sigma^2)}{\partial \sigma^2 \partial \sigma^2} \right] = \frac{N-p}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6} E \left[\sum_{n=p}^{N-1} w^2(n) \right]$$

$$= \frac{N-p}{2\sigma^4} - \frac{N-p}{\sigma^6} \sigma^2 = -\frac{N-p}{2\sigma^4} \quad (40)$$

Bu durumda Fisher bilgi matrisi şu şekilde yazılır:

$$I_{a, \sigma^2}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{N-p}{\sigma^2} R & 0 \\ 0^T & \frac{N-p}{2\sigma^4} \end{bmatrix} \quad (41)$$

burada, 0 px1 boyutlu sıfır vektörü ve R otokorelasyon matrisidir. R pxp boyutlu Toeplitz matris olduğundan dolayı $[R]_{ij} = r[i-j]$ olur (11).

Fisher bilgi matrisinin tersi alınır,

$$I_{a, \sigma^2}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{N-p} R^{-1} & 0 \\ 0^T & \frac{2\sigma^4}{N-p} \end{bmatrix}$$

$N \gg p$ olması durumunda,

$$I_{a, \sigma^2}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{N} R^{-1} & 0 \\ 0^T & \frac{2\sigma^4}{N} \end{bmatrix} \quad (42)$$

elde edilir.

Denklem (6)'da verildiği gibi parametre kestirimlerinin varyansları için hesaplanan Cramer-Rao alt sınırı Fisher bilgi matrisinin tersine eşittir. Bu durumda,

$$\text{var}(\hat{a}[k]) \geq \frac{\sigma^2}{N} [R^{-1}]_{kk}, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$\text{var}(\hat{\sigma}^2) \geq \frac{2\sigma^4}{N} \quad (43)$$

elde edilir (1,2,8). Burada otokorelasyon matrisinin tersi ($i \geq j$ için) AR(p) modeli için genellikle şu şekilde hesaplanır (12,13):

$$[R^{-1}]_{ij} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^N [a(i-k)a^*(j-k) - a^*(N-i+k)a(N-j+k)]$$

$$, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (44)$$

5. İRDELEME

Bu çalışmada, aşağıda belirtilen test işareti ($y(n)$) kullanılarak Yule-Walker AR metodu ve en küçük kareler AR metodu ile AR parametrelerinin kestirimi yapılmıştır.

$$y(n) = \frac{1}{A(q)} w(n)$$

burada,

$$A(q) = 1 - 1.3817q^{-1} - 1.2615q^{-2} + 0.9842q^{-3} + 1.1228q^{-4}$$

ve $w(n)$ sıfır ortalamalı varyansı (σ^2) 1 olan beyaz Gauss gürültüsü olarak alınmıştır. AR modelinin derecesi p , 4 olarak seçilmiştir. Data sayısı $N = 256$, $N = 512$, $N = 1024$ için AR parametrelerinin kestirimi ($a[1], a[2], a[3], a[4], \sigma^2$) Yule-Walker ve en küçük kareler metodu ile yapılmıştır. Yule-Walker AR metodu ve en küçük kareler AR metodu ile parametre kestirimlerinin hesaplanmasında MATLABR12 (MATrix LABORatory) program paketi kullanılmıştır. Tablo 1'de Yule-Walker AR metodu ile hesaplanan parametre kestirim değerleri ve Tablo 2'de en küçük kareler AR metodu ile hesaplanan parametre kestirim değerleri verilmektedir.

Tablo1. Yule-Walker AR metodu ile hesaplanan parametre kestirim değerleri

Parametre	Gerçek Değer	Kestirilen Değer		
		N=256	N=512	N=1024
a[1]	-1.3817	-1.3854	-1.3835	-1.3826
a[2]	-1.2615	-1.2638	-1.2627	-1.2621
a[3]	0.9842	0.9840	0.9841	0.9842
a[4]	1.1228	1.1217	1.1223	1.1226
σ^2	1.0000	1.0078	1.0039	1.0020

Tablo 2. En küçük kareler AR metodu ile hesaplanan parametre kestirim değerleri

Parametre	Gerçek Değer	Kestirilen Değer		
		N=256	N=512	N=1024
a[1]	-1.3817	-1.3856	-1.3836	-1.3826
a[2]	-1.2615	-1.2639	-1.2627	-1.2622
a[3]	0.9842	0.9841	0.9841	0.9842
a[4]	1.1228	1.1218	1.1224	1.1226
σ^2	1.0000	1.0079	1.0038	1.0019

Tablo1 ve Tablo 2'den görüldüğü gibi data sayısı N arttıkça parametrelerin kestirilen değerleri gerçek değerlerine yakınlaşmaktadır. Bundan dolayı, Yule-Walker AR metodu ve en küçük kareler AR metodu asimptotik olarak kutupsuz kestirim metodlarıdır. Cramer-Rao alt sınırının belirlenebilmesi için kestirim metodlarının kutupsuz olmaları gerekmektedir. Bu çalışmada elde edilen kestirim sonuçlarından Yule-Walker AR metodu ve en küçük kareler AR metodunun asimptotik olarak kutupsuz kestirim metodu oldukları görülmektedir. AR metodunun kutupsuz kestirim metodu olmasından dolayı AR parametre kestirimlerinin varyansları için asimptotik Cramer-Rao alt sınırı hesaplanabilmektedir. Denklem (43)'te verilen ifadeler kullanılarak parametre kestirimlerinin varyansları için asimptotik Cramer-Rao alt sınırı elde edilir:

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{a}[1]) &\geq \frac{\sigma^2}{N} [R^{-1}]_{11}, \\ \text{var}(\hat{a}[2]) &\geq \frac{\sigma^2}{N} [R^{-1}]_{22}, \\ \text{var}(\hat{a}[3]) &\geq \frac{\sigma^2}{N} [R^{-1}]_{33}, \\ \text{var}(\hat{a}[4]) &\geq \frac{\sigma^2}{N} [R^{-1}]_{44} \end{aligned} \quad (45)$$

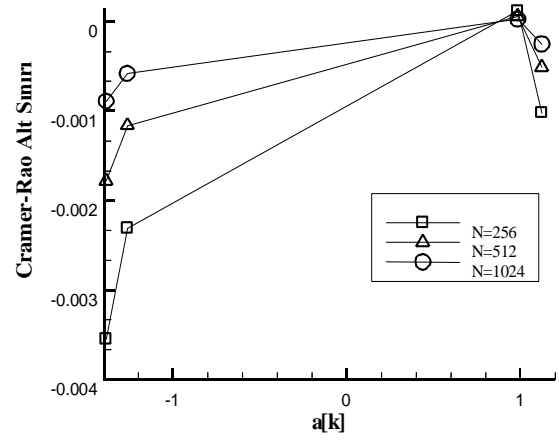
Denklem (44)'ün kullanılması ile

$$\begin{aligned} [R^{-1}]_{11} &= \frac{1}{\sigma_1^2} (1 - a^2[1]), \\ [R^{-1}]_{22} &= \frac{1}{\sigma_1^2} (1 - a^2[2]), \\ [R^{-1}]_{33} &= \frac{1}{\sigma_1^2} (1 - a^2[3]), \\ [R^{-1}]_{44} &= \frac{1}{\sigma_1^2} (1 - a^2[4]) \end{aligned} \quad (46)$$

elde edilir.

Denklem (46)'daki ifadeler denklem (45)'te yerine konur ve Cramer-Rao alt sınırı hesaplanır. Data sayısı N 'in 256, 512, 1024 değerleri için

elde edilen Cramer-Rao alt sınırları Şekil 3'te görülmektedir.

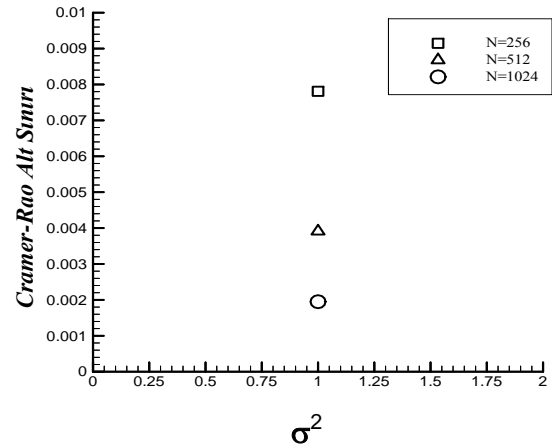


Şekil 3. AR Parametre kestirimlerinin ($a[k]$) Cramer-Rao alt sınırı (Data sayısı N=256, 512, 1024).

Denklem (43)'te verildiği gibi beyaz Gauss gürültüsünün varyansının kestirim varyansı için elde edilen asimptotik Cramer-Rao alt sınırı şu şekildedir:

$$\text{var}(\hat{\sigma}^2) \geq \frac{2\sigma^4}{N}$$

Data sayısı N 'in 256, 512, 1024 değerleri için elde edilen Cramer-Rao alt sınırları Şekil 4'te görülmektedir.



Şekil 4. AR parametre kestirimlerinin (σ^2) Cramer-Rao alt sınırı (Data sayısı N=256, 512, 1024).

Denklem (45) ve (43)'ün kullanılması ile elde edilen Cramer-Rao alt sınır değerleri Tablo 3'te verilmektedir

Tablo3.AR parametre kestirimlerinin ($a[k]$, σ^2) Cramer-Rao alt sınır değerleri

Parametre	Cramer-Rao Alt Sınırı		
	N=256	N=512	N=1024
a[1]	-0.00355	-0.00178	-0.00089
a[2]	-0.00231	-0.00116	-0.00058
a[3]	0.00012	0.00006	0.00003
a[4]	-0.00102	-0.00051	-0.00025
σ^2	0.00781	0.00391	0.00195

Bu çalışmada, test işareti olarak beyaz gürültü içinde bulunan sinüs işareti AR modelinin çıkışına uygulanmıştır.

$$y(n) = \sin(2\pi fn) + w(n)$$

burada, $f = 50\text{Hz}$, $w(n)$ sıfır ortalamalı varyansı (σ^2) 1 olan beyaz Gauss gürültüsü olarak alınmıştır. AR modelinin derecesi p , 4 olarak seçilmiştir. Yule-Walker AR metodu ve en küçük kareler AR metodu asimptotik olarak kutupsuz kestirim metodu olmalarından dolayı data sayısı N 'in oldukça büyük değerinde ($N = 1 \cdot 10^5$) elde edilen AR parametreleri gerçek değerler olarak alınmıştır. Data sayısı $N = 256$, $N = 512$, $N = 1024$ için AR parametrelerinin kestirimi ($a[1], a[2], a[3], a[4], \sigma^2$) Yule-Walker ve en küçük kareler metodu ile yapılmıştır. Tablo 4'te Yule-Walker AR metodu ile hesaplanan parametre kestirim değerleri ve

kestirim değerleri ve kestirim hataları verilmektedir.

Bu çalışmada, diğer bir test işareti olarak beyaz gürültü içinde bulunan kare dalga işareti AR modelinin çıkışına uygulanmıştır.

$y(n) = \text{kare}(2\pi fn) + w(n)$ burada, $f = 50\text{Hz}$, $w(n)$ sıfır ortalamalı varyansı (σ^2) 1 olan beyaz Gauss gürültüsü olarak alınmıştır. AR modelinin derecesi p , 4 olarak seçilmiştir. Yule-Walker AR metodu ve en küçük kareler AR metodu asimptotik olarak kutupsuz kestirim metodu olmalarından dolayı data sayısı N 'in oldukça büyük değerinde ($N = 1 \cdot 10^5$) elde edilen AR parametreleri gerçek değerler olarak alınmıştır. Data sayısı $N = 256$, $N = 512$, $N = 1024$ için AR parametrelerinin kestirimi ($a[1], a[2], a[3], a[4], \sigma^2$) Yule-Walker ve en küçük kareler metodu ile yapılmıştır. Tablo 6'da Yule-Walker AR metodu ile hesaplanan parametre kestirim değerleri ve kestirim hataları verilmektedir. Tablo 7'de en küçük kareler AR metodu ile hesaplanan parametre kestirim değerleri ve kestirim hataları verilmektedir.

Tablo 4 ve Tablo 5'te, beyaz gürültü içinde bulunan sinüs işaretinin parametre kestirim hataları verilmektedir. Tablo 6 ve Tablo 7'de, beyaz gürültü içinde bulunan kare işaretinin parametre kestirim hataları verilmektedir. Parametre kestirim hataları ile bu parametrelere karşılık gelen Tablo

Tablo 4. Yule-Walker AR metodu ile hesaplanan parametre kestirim değerleri

Parametre	Gerçek Değer	Kestirilen Değer			Kestirim Hatası		
		N=256	N=512	N=1024	N=256	N=512	N=1024
a[1]	0.0225	0.0262	0.0248	0.0235	-0.0037	-0.0023	-0.0010
a[2]	-0.0037	-0.0063	-0.0056	-0.0044	0.0026	0.0019	0.0007
a[3]	-0.0050	-0.0056	-0.0054	-0.0053	0.0006	0.0004	0.0003
a[4]	0.0221	0.0246	0.0239	0.0227	-0.0025	-0.0018	-0.0006
σ^2	1.0000	1.0090	1.0046	1.0025	-0.0090	-0.0046	-0.0025

Tablo 5. En küçük kareler AR metodu ile hesaplanan parametre kestirim değerleri

Parametre	Gerçek Değer	Kestirilen Değer			Kestirim Hatası		
		N=256	N=512	N=1024	N=256	N=512	N=1024
a[1]	0.0226	0.0260	0.0250	0.0237	-0.0034	-0.0024	-0.0011
a[2]	-0.0037	-0.0059	-0.0054	-0.0043	0.0022	0.0017	0.0006
a[3]	-0.0051	-0.0055	-0.0054	-0.0054	0.0004	0.0003	0.0003
a[4]	0.0220	0.0244	0.0238	0.0227	-0.0024	-0.0018	-0.0007
σ^2	1.0000	1.0088	1.0042	1.0027	-0.0088	-0.0042	-0.0027

kestirim hataları verilmektedir. Tablo 5'te en küçük kareler AR metodu ile hesaplanan parametre

3'teki Cramer-Rao alt sınır değerleri karşılaştırıldığında, kestirim hatalarının Cramer-Rao alt sınır

değerlerine yakın olduğu görülmektedir. Yule-Walker AR metodu ve en küçük kareler AR metodunun parametre kestirim hataları Cramer-Rao alt sınır değerlerine yakın olduğundan dolayı bu parametrik metodların parametre kestirim performanslarının iyi olduğu belirtilebilir.

Parametre kestirim hataları ile bu hatalara karşılık gelen Cramer-Rao alt sınırları karşılaştırılarak Yule-Walker AR metodu ve en küçük kareler AR metodunun performansları değerlendirilmiştir. Kestirim metodlarının performans analizlerinde kestirimlerin varyansları için Cramer-Rao alt sınırı

Tablo 6. Yule-Walker AR metodu ile hesaplanan parametre kestirim değerleri

Parametre	Gerçek Değer	Kestirilen Değer			Kestirim Hatası		
		N=256	N=512	N=1024	N=256	N=512	N=1024
a[1]	0.1872	0.1908	0.1892	0.1882	-0.0036	-0.0020	-0.0010
a[2]	-0.2046	-0.2071	-0.2065	-0.2055	0.0025	0.0019	0.0009
a[3]	-0.2195	-0.2201	-0.2200	-0.2199	0.0006	0.0005	0.0004
a[4]	0.1849	0.1867	0.1858	0.1854	-0.0018	-0.0009	-0.0005
σ^2	1.0000	1.0085	1.0041	1.0022	-0.0085	-0.0041	-0.0022

Tablo 7. En küçük kareler AR metodu ile hesaplanan parametre kestirim değerleri

Parametre	Gerçek Değer	Kestirilen Değer			Kestirim Hatası		
		N=256	N=512	N=1024	N=256	N=512	N=1024
a[1]	0.1874	0.1910	0.1893	0.1883	-0.0036	-0.0019	-0.0009
a[2]	-0.2045	-0.2070	-0.2065	-0.2054	0.0025	0.0020	0.0009
a[3]	-0.2195	-0.2200	-0.2199	-0.2199	0.0005	0.0004	0.0004
a[4]	0.1848	0.1865	0.1857	0.1854	-0.0017	-0.0009	-0.0006
σ^2	1.0000	1.0084	1.0042	1.0021	-0.0084	-0.0042	-0.0021

6. SONUÇLAR

Parametrik metodlarda, işaret fonksiyonel formu bilinen modele uygulanmaktadır ve bu modelin parametrelerinin kestirimi yapılmaktadır. AR metodu en çok kullanılan parametrik metodlardandır çünkü doğrusal denklemlerin çözümü ile AR parametrelerinin kestirimleri kolaylıkla yapılabilmektedir. Parametre kestiriminin "iyi" olarak yapılabilmesi için kutupsuz ve varyansı en düşük olan kestirim metodu seçilmelidir. Cramer-Rao alt sınırı varyans için alt sınır belirlemede kullanılan bir methoddur. Cramer-Rao alt sınırı kutupsuz kestirimler için hesaplanmaktadır. Bu çalışmada, test işareti kullanılarak Yule-Walker AR metodu ve en küçük kareler AR metodu ile AR parametrelerinin kestirimi yapılmıştır. Kestirim sonuçlarından Yule-Walker AR metodu ve en küçük kareler AR metodunun asimptotik olarak kutupsuz kestirim metodu oldukları gösterilmiştir. AR metodunun kutupsuz kestirim metodu olmasından dolayı AR parametre kestirimlerinin varyansları için asimptotik Cramer-Rao alt sınırı hesaplanmıştır. Test işareti olarak beyaz gürültü içinde bulunan sinüs ve kare dalga işaretleri AR modelinin çıkışına uygulanmıştır. Yule-Walker AR metodu ve en küçük kareler AR metodu ile parametre kestirim hataları hesaplanmıştır.

hesaplanmaktadır ve bu şekilde minimum varyanslı kutupsuz kestirim metodları belirlenmektedir.

7. KAYNAKLAR

1. Kay, S.M., Modern Spectral Estimation: Theory and Application, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
2. Stoica, P., Moses, R., Introduction to Spectral Analysis, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997.
3. Proakis, J.G., Manolakis, D.G., Digital Signal Processing Principles, Algorithms and Applications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.
4. Kay, S.M., Marple, S.L., Spectrum Analysis- A Modern Perspective, Proceedings of the IEEE, vol.69, No.11, 1380-1419, 1981.
5. Shanmugan, K.S., Random Signals, John Wiley & Sons, 1988.
6. Oppenheim, A.V., Schafer, R.W., Digital Signal Processing, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.
7. Helstrom, C.W., Elements of Signal Detection and Estimation, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.

8. Kay, S.M., Fundamentals of Statistical Signal Processing Estimation Theory, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
9. Papoulis, A., Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, McGraw-Hill, New York, 1991.
10. Peebles, P.Z., Probability, Random Variables and Random Signal Principles, McGraw-Hill, New York, 1993.
11. Hohn, F.E., Elementary Matrix Algebra, The Macmillan Company, New York, 1967.
12. Siddiqui, M.M., On the Inversion of the Sample Covariance Matrix in a Stationary Autoregressive Process, Ann. Math. Statist., vol.58, 585-588, 1958.
13. Kailath, T., Vieira, A., Morf, M., Inverses of Toeplitz Operators, Innovations, and Orthogonal Polynomials, SIAM Rev., vol.20, 106-119, 1978.