

ROBOT SİSTEMLERİNDE KİNEMATİK YÖNTEMLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

Serdar KÜÇÜK*, Zafer BİNGÜL**

* Kocaeli Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Elektronik-Bilgisayar Eğitimi Bölümü
KOCAELİ

** Kocaeli Üniversitesi Mekatronik Mühendisliği Mühendislik Fakültesi
KOCAELİ

ÖZET

Robotların kinematik modelinin çıkarılması için Kartezyen ve Kartonyum olmak üzere iki farklı uzay kullanılmıştır. Bu yöntemlerden bazıları ileri yön kinematik için uygunken diğerleri ise ters kinematik çözümler için kullanılmıştır. Aynı kinematik ilişkiyi açıklarken Kartezyen uzayındaki yöntemlerinden elde edilen matrisler, Kartonyum uzayında elde edilen vektörlerden daha fazla eleman içerir. Bundan dolayı, bilgisayar ortamında Kartonyum uzayında açıklanan kinematik yöntem, Kartezyen uzayında açıklanan kinematik yöntemlerden daha hızlı çalışır.

Anahtar sözcükler: Robot manipulatorleri, Homojen Dönüşüm, Lie cebri, kartezyen uzayı, kartonyum uzayı,

THE COMPARISON OF KINEMATIC MODELS OF ROBOT SYSTEMS

ABSTRACT

In this paper, six methods for the formulation of the robot kinematic equations with serial links are presented. Two different spaces are used in kinematic modeling of robots namely Cartesian space and Quaternion space. Five kinematic methods in Cartesian space and one kinematic method in Quaternion space are described and they are compared to each other. Some of these methods are useable for forward kinematic solutions while some others are for inverse kinematic solutions. Kinematic analysis in Quaternion space does not include redundant elements while Cartesian space analysis does. Therefore, the kinematic models defined in Quaternion space run faster than those defined in Cartesian space in computer environment.

Key words : Robot manipulators, Homogeneous transformation, Lie algebra, Cartesian Space, Quaternion Space

1. GİRİŞ

Robotik biliminin analitik araçlarının en önemlilerinden biri olan kinematik modelleme, robot biliminin birçok alanında kullanılmaktadır. Bunların başlıcaları: Mekanizmaların, hareket ettiricilerin (actuators) ve algılayıcıların (sensors) modellenmesi, eş zamanlı (on-line) robot kontrol uygulamaları, robot simülasyonu ve off-line (eş zamansız) programlama işlemleridir. Robotların kinematik modelinin çıkarılması robot çalışmalarının en önemli aşamalarından birini oluşturmaktadır. Robotların kinematik modelini çıkarmak amacıyla bir çok yöntem geliştirilmiştir. Kinematik problemlerin çözümü üç boyutlu Kartezyen ve dört boyutlu Kartonyum olmak üzere iki farklı uzayda gerçekleştirilebilir. Kartezyen Uzayı'nda, matris veya vektörler gibi dönüşüm operatörleri kullanılarak kinematik model çıkarıldığından bu yönteme nokta dönüşüm, Kartonyum Uzayı'nda ise doğrusal vektörler ve dönüşüm operatörleri (quaternion) kullanıldığından, bu yönteme ise doğrusal dönüşüm yöntemi denir (1). Maxwell (2) nokta vektörlerin Kartezyen Uzayı'ndaki dönüşümlerini kullanarak 4x4 homojen dönüşüm matrisini tanımladı. Denavit-Hartenberg (3) bu homojen dönüşüm matrisini kullanarak bir koordinat sisteminin oryantasyonunu ve konumunu başka bir koor-

dinat sistemine göre tanımladı. Bir koordinat sisteminin başka bir koordinat sistemine göre dönüşüm matrisi vida yer değiştirmesiyle (screw displacement) de ifade edilebilir. Doğrusal dönüşüm olarak ifade edilen bu yöntemde, aynı eksen üzerinde hem bir öteleme hem de dönme gerçekleşmektedir (4). Funda ve Paul (5) vida yer değiştirmesinin, doğrusal vektörler ve dönüşüm operatörleri (quaternion) kullanılarak en iyi şekilde ifade edilebileceğini gösterdi. Kim ve Kumar (6) ise doğrusal vektörler ve dönüşüm operatörlerini (quaternion) robot kinematiğine uyguladı.

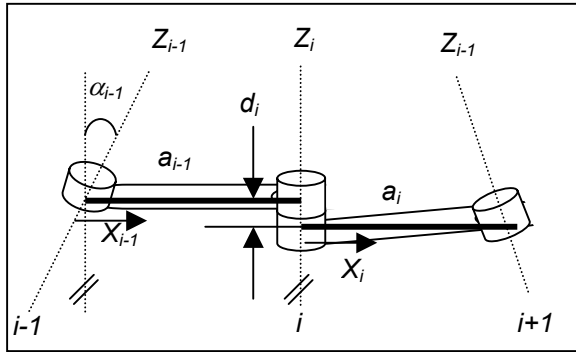
Robotların kartezyen uzayda kinematik modelini çıkarmak için başlıca beş yöntem kullanılmaktadır. Bu makalede ilk olarak bu beş yöntem: Homojen dönüşüm yöntemi, Üssel yöntem, SRK (Sıfır Referans Konum) yöntemi, Pieper-Roth yöntemi ve TPS (Tam ve Parametrik olarak Sürekli) yöntem anlatılarak, her bir yöntem, PUMA-560 (Programmable Universal Machine for Assembly) robotuna uygulanmıştır. İkinci aşamada üç boyutlu kartezyen uzayındaki dönme kavramını dört boyutlu uzaydaki dönme kavramına genişleten kartonyum uzayı tanıtılarak bu uzayda kullanılan denklemeleştirme ve modelleme yöntemi açıklanmıştır. Aynı zamanda, kartonyum uzayı ile kartezyen uzayı arasında birbirine dönüşüm eşit-

likleri verilmiştir. Sonuç bölümünde ise bu iki uzayda gerçekleştirilen modelleme yöntemleri karşılaştırılarak, her birinin birbirlerine göre üstün yönleri incelenmiştir.

2. ROBOTLARIN KARTEZYEN UZAYINDA KİNEMATİK MODELLERİNİN ÇIKARILMASI

2.1. Homojen Dönüşüm Yöntemi

Robotların kinematik modelini çıkarırken en çok kullanılan yöntem Denavit-Hartenberg gösterimini kullanan homojen dönüşüm yöntemidir. Bu yöntemde dört ana değişken kullanılarak robot kinematiği çıkarılır. Bu değişkenler, iki eksen arasındaki bağ uzunluğu (link length) a_{i-1} , $i-1$ ile i . eksenleri arasındaki bağ açısı (link twist) α_{i-1} , üst üste çakışan bağlar arasındaki bağ kayması (link offset) d_i , ve iki bağ arasında oluşan eklem açısı (joint angle) θ_i 'dir (3). Bu dört değişkene Denavit-Hartenberg değişkenleri (D-H değişkenleri) denir. Bu değişkenleri belirlemek için öncelikle robotun dönme eksenleri belirlenir ve dönme eksenleri bağlardan bir fazla olacak şekilde numaralandırılır. Bu aşamadan sonra bu eksenlerin her birine koordinat çerçevesi yerleştirilir ve bağ dönme eksenine Şekil 1'de görüldüğü gibi koordinat çerçevesinin Z eksenine kabul edilir. Robotun bir eklemine ait dönüşüm matrisi bu dört değişkenden yararlanılarak yazılır.



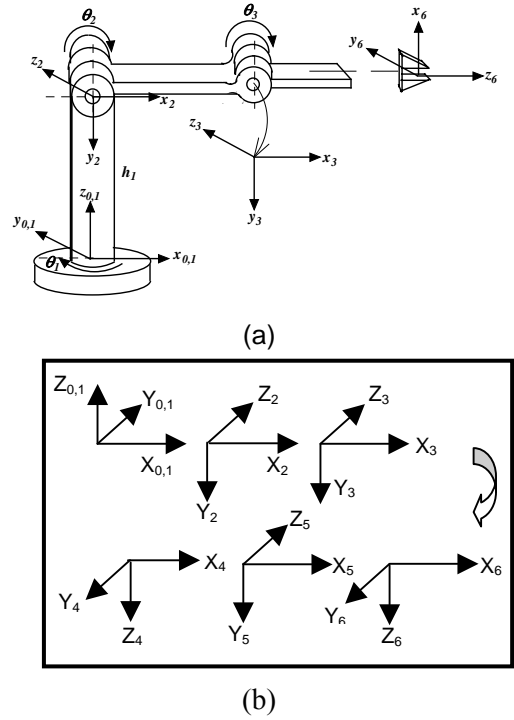
Şekil 1. D-H Gösterimi.

$${}^{i-1}T = R_x(\alpha_{i-1})D_x(a_{i-1})R_z(\theta_i)Q_i(d_i) \quad (1)$$

Denklem 1'deki dört matrisin çarpımıyla n serbestlik derecesine sahip bir robotun bir eklemine ait dönüşüm matrisi elde edilir.

$${}^{i-1}T = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Robotların kinematik modelini çıkartmak için her bir eksene bir koordinat çerçevesi yerleştirilir. Koordinat çerçeveleri belirlenirken döner eksenler için dönme yönü Z, buna dik olan bağ uzunluğu X eksenine kabul edilir. Y eksenine ise sağ el kuralına göre bulunur. Şekil 2.a'da görülen PUMA-560 robotunun kartezyen uzayda koordinat çerçevelerinin gösterimi, Şekil 2.b'de verilmiştir. Yerleştirilen bu koordinat çerçevelerine göre D-H değişkenleri bulunur. Buna göre çıkarılan PUMA-560 robotunun D-H değişkenleri Tablo 1'de görülmektedir.



Şekil 2. a) PUMA-560 robotu, b) Koordinat çerçevelerinin gösterimi.

Tablo 1. DH değişkenleri.

i	θ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i
1	θ_1	0	0	0
2	θ_2	$-\pi/2$	0	0
3	θ_3	0	a_2	d_3
4	θ_4	$-\pi/2$	a_3	d_4
5	θ_5	$\pi/2$	0	0
6	θ_6	$\pi/2$	0	0

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1_2T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^2_3T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^4_5T = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^5_6T = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_6T = \begin{bmatrix} c_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] + s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) & c_1[c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5c_6] + s_1(c_4c_6 + s_4c_5s_6) & \dots \\ s_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] - c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) & s_1[c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5c_6] - c_1(c_4c_6 - s_4c_5s_6) & \dots \\ -s_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_{23}s_5c_6 & -s_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) - c_{23}s_5s_6 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (4)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dots & -c_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) - s_1s_4s_5 & c_1[a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}] - d_3s_1 \\ \dots & -s_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) + c_1s_4s_5 & s_1[a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}] - d_3c_1 \\ \dots & s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 & -a_3s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23} \\ \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tablo 1'deki DH değişkenleri denklem (2)'de yerine konarak denklem (3)'deki matrisler bulunur. ${}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T {}^3_4T {}^4_5T {}^5_6T$ matrisleri çarpılarak robotun ileri yön kinematığı 0_6T hesaplanır. Bu ileri yön kinematik matrisi denklem 4' deki gibi elde edilir.

2.2 Üssel Yöntem

Üssel yöntem temelde Lie cebirinden (1) faydalanılarak gerçekleştirilmiş bir yöntemdir. Lie cebirinde bir nokta vektörünün başka bir nokta vektöre göre oryantasyonu üç değişkenden oluşan bir oryantasyon vektörüyle aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$s = \tan \frac{\varphi}{2} n \quad (5)$$

Denklemden, Rodriguez değişkenleri (7) olarak bilinen n dönme yönündeki birim vektörü, φ ise dönme açısını verir. n vektörü, R oryantasyon matrisi değişse bile herhangi bir değişime uğramaz. Bundan dolayı, n vektörü, R oryantasyon matrisinin birim öz vektörüdür (8).

Bir $s = [a, b, c]^T$ vektörünün çapraz çarpım operatörü denklem 6'da görüldüğü gibi eksi bakışlı vektörel çapraz çarpım matrisi (S) (skew symmetric cross product matrix) üretir (9).

$$S = (sx) = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

3x3 eksi bakışlı vektörel çapraz çarpım matrisi kullanılarak rotasyon matrisi aşağıdaki gibi yazılır.

$$R = (I + S)(I - S) - 1 \quad (7)$$

Lie cebirinde iki oryantasyon vektörünün çarpılması aşağıdaki gibi gerçekleştirilir.

$$s = (s_1 \circ s_2) = \frac{s_1 + s_2 + s_1 \times s_2}{1 - s_1 \cdot s_2} \quad (8)$$

Lie cebirini kullanarak n özgürlük derecesine sahip bir robotun kinematik eşitliklerini bulmak için D-H değişkenleri ve homojen dönüşüm yöntemindeki koordinat sistemi kullanılır. i . koordinat çerçevesinin $i-1$. koordinat çerçevesine göre oryantasyonu n vektörüyle ${}^{i-1}s_i$ şeklinde gösterilir.

$${}^{i-1}s_i = \begin{bmatrix} \frac{\sin \alpha_{i-1}}{1 + \cos \alpha_{i-1}} \\ -\frac{\sin \theta_i \sin \alpha_{i-1}}{(1 + \cos \theta_i)(1 + s \cos \alpha_{i-1})} \\ \frac{\sin \theta_i}{(1 + \cos \theta_i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan \frac{\alpha_{i-1}}{2} \\ \tan \frac{\theta_i}{2} \tan \frac{\alpha_{i-1}}{2} \\ \tan \frac{\theta_i}{2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

0s_i oryantasyonu her bir eklemin oryantasyonunun çarpılmasıyla aşağıdaki gibi gerçekleştirilir.

$${}^0s_i = {}^0s_1 \circ {}^1s_2 \circ \dots \circ {}^{i-2}s_{i-1} \circ {}^{i-1}s_i \quad i = 1 \dots n \quad (10)$$

Uç işlevcinin ana çerçeveye göre konumu denklem 11'deki gibi bulunur.

$$r_n = {}^0P_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (R({}^0s_i))^i P_{i+1} \quad (11)$$

Denklemden $R({}^0s_i)^i P_{i+1}$ 3×3 oryantasyon matrisiyle bir vektörün çarpımını göstermektedir ve Lie cebriinde bu çarpım aşağıdaki gibi gerçekleştirilir.

$$R(s)r = \frac{(1-s^2)r + 2s(s \cdot r) + 2sxr}{(1+s^2)} \quad (12)$$

Denklemden r herhangi bir vektördür. Lie cebri kullanarak n özgürlük derecesine sahip bir robotun ileri kinematiği aşağıdaki adımlar takip edilerek bulunur.

1. Homojen dönüşüm yönteminde kullanılan koordinat çerçevelerinin gösterimi ve D-H değişkenleri belirlenir.
2. Denklem 9 kullanılarak i . koordinat çerçevesinin $i-1$. koordinat çerçevesine göre oryantasyon vektörü bulunur.
3. Denklem 10 kullanılarak uç işlevcinin ana koordinat çerçeveye göre oryantasyon vektörü denklem 8'de açıklanan Lie cebri çarpım yöntemi kullanılarak hesaplanır (0s_i).
4. Elde edilen sonuç oryantasyon vektörü 0s_i 'yi 3×3 oryantasyon matrisine dönüştürmek için denklem 7 kullanılır.
5. Uç işlevcinin ana koordinat çerçeveye göre konum vektörünü bulmak için ilk önce

$${}^i P_{i+1} = \begin{bmatrix} a_i \\ -\sin \alpha_i d_{i+1} \\ -\cos \alpha_i d_{i+1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

hesaplanır. Daha sonra denklem 11 kullanılarak sonuç 0P_n vektörü bulunur.

Lie cebriinin uyarlanmış bir şekli olan üssel yöntemde kinematik problem üssel dönme matrisi (rotation matrix) tabanlı cebir kullanılmak suretiyle sistematik olarak çözülür (10). Bu yöntemde sabit eksene göre oryantasyon matrisi oluşturularak toplam ileri yön kinematiği hesaplanır (11). Üssel yöntemde B koordinat çerçevesinin A koordinat çerçevesine göre dönüşüm matrisi $\hat{C}^{(a,b)}$ şeklinde ifade edilir. Bu matris denklem 14'deki gibi açık şekilde ifade edilebilir.

$$\hat{C}^{(a,b)} = e^{\hat{n}\theta} = \hat{I} \cos \theta + \hat{n} \sin \theta + \hat{n}\hat{n}^T [1 - \cos \theta] \quad (14)$$

Bu denklemde \hat{I} birim vektör, \hat{n} ise (\bar{n}) kolon vektöründen elde edilen eksi bakışimli vektörel çarpım matrisidir.

$$\bar{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \hat{n} = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Denklem 14 açılırsa genel dönme matrisi elde edilir.

$$\hat{C}^{(a,b)} = \begin{bmatrix} n_1 n_1 (1 - c\theta) + c\theta & n_1 n_2 (1 - c\theta) - n_3 s\theta & n_1 n_3 (1 - c\theta) + n_2 s\theta \\ n_2 n_1 (1 - c\theta) + n_3 s\theta & n_2 n_2 (1 - c\theta) + c\theta & n_2 n_3 (1 - c\theta) - n_1 s\theta \\ n_3 n_1 (1 - c\theta) - n_2 s\theta & n_3 n_2 (1 - c\theta) + n_1 s\theta & n_3 n_3 (1 - c\theta) + c\theta \end{bmatrix} \quad (16)$$

$\bar{n} = \bar{u}_k^{(a)}$ burada k , a . eksenin k . birim vektörüdür.

$\bar{n} = \bar{u}_k$ ve $\hat{C}^{(a,b)} = e^{\hat{u}_k \theta}$ olur. Aynı zamanda denklemde, \bar{u} dönme yönündeki birim vektörü göstermektedir.

$$\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

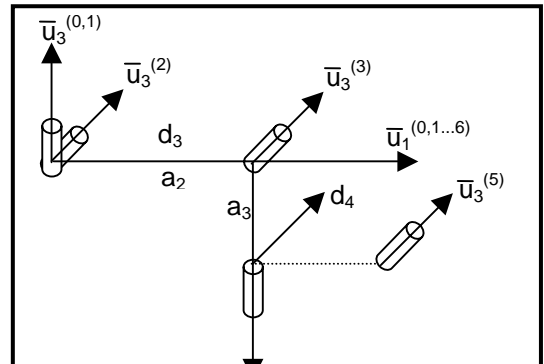
Üssel yöntemde koordinat çerçevelerini belirlemek için vektörel gösterim kullanılır. D-H yöntemde olduğu gibi dönme yönü Z eksenine, buna dik olan bağ uzunluğu X eksenine, sağ el kuralına göre Y eksenine bulunur ve bu eksenler Şekil 3'de görüldüğü gibi sırasıyla, \bar{u}_3 , \bar{u}_1 ve \bar{u}_2 şeklinde gösterilir. Buna göre çizilmiş PUMA-560 robotuna ait koordinat çerçevelerinin gösterimi Şekil 3'de görülmektedir. Üssel yöntemde D-H değişkenlerini kullandığından ileri yön kinematiğini oluşturan $\hat{C}^{(0,6)}$ dönüşüm matrisleri Tablo 1'deki verilere göre gerçekleştirilir.

PUMA-560 robotu için üssel yöntemde ileri yön kinematik $\hat{C}^{(0,6)}$ dönme matrisi denklem 7'deki gibi yazılır.

$$\hat{C}^{(0,6)} = \hat{C}^{(0,1)} \hat{C}^{(1,2)} \hat{C}^{(2,3)} \hat{C}^{(3,4)} \hat{C}^{(4,5)} \hat{C}^{(5,6)} \quad (18)$$

$$\hat{C}^{(0,6)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_3 \theta_2} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_3} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_5} e^{\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}} e^{\tilde{u}_3 \theta_6} e^{-\tilde{u}_1 \frac{\pi}{2}}$$

Üssel yöntemde ileri yön kinematiği oryantasyon matrisi ve konum vektörü olmak üzere iki ayrı aşamada gerçekleştirilir. Denklem 18'deki genel matris formatını kullanarak $\hat{C}^{(0,6)}$ 'yı oluşturan oryantasyon matrisleri denklem 19'deki gibi sırayla bulunur.



Şekil 3. Koordinat çerçevelerinin gösterimi.

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}^{(0,1)} = e^{\tilde{u}_3\theta_1} &= \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \tilde{C}^{(1,2)} &= \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 \end{bmatrix}, & \tilde{C}^{(2,3)} &= \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \tilde{C}^{(3,4)} &= \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 \end{bmatrix}, & \tilde{C}^{(4,5)} &= \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 \end{bmatrix}, & \tilde{C}^{(5,6)} &= \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (19)$$

Uç işlevcinin ana çerçeveye göre oryantasyonu yukarıdaki matrislerin çarpılmasıyla elde edilir. Konum vektörü ise ana koordinat çerçevesinden a ve d değişkenlerinin ait olduğu koordinat çerçevesine göre ifade edilen dönme matrisi ile bunların birim yön vektörlerinin çarpılıp ve bulunan matrislerin toplanmasıyla elde edilir.

$$\vec{r} = a_2\tilde{C}^{(0,2)}\vec{u}_1 + d_3\tilde{C}^{(0,2)}\vec{u}_3 + a_3\tilde{C}^{(0,3)}\vec{u}_1 + d_4\tilde{C}^{(0,3)}\vec{u}_2 \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 a_2\tilde{C}^{(0,2)}\vec{u}_1 &= a_2 \begin{bmatrix} c_1c_2 \\ s_1c_2 \\ -s_2 \end{bmatrix}, & d_3\tilde{C}^{(0,2)}\vec{u}_3 &= d_3 \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 a_3\tilde{C}^{(0,3)}\vec{u}_1 &= a_3 \begin{bmatrix} c_1c_2c_3 - c_1s_2s_3 \\ c_1c_2c_3 - c_1s_2s_3 \\ s_2c_3 - c_2s_3 \end{bmatrix}, & d_4\tilde{C}^{(0,3)}\vec{u}_2 &= d_4 \begin{bmatrix} -c_1c_2c_3 - c_1s_2c_3 \\ -s_1c_2s_3 - s_1s_2c_3 \\ s_2s_3 - c_2c_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Buradaki matrisler aşağıda verilmiştir.

Bu dört matris toplandığı zaman denklem 4'deki konum vektörü elde edilir. Beklendiği gibi bulunan oryantasyon ve konum vektörü denklem 4'deki kinematik çözümle aynıdır.

2.3. Sıfır Referans Konum Yöntemi

Kısaca SRK olarak tanımlanan bu yöntem, bütün değişkenlere bir sıfır referans değeri atayarak robotun geometrisini tanımlar ve hareket işlemlerini gerçekleştirir (12). Bu yöntemde robot uygun bir şekilde dondurulur ve oluşan sıfır referans konumda, eksen değişkenleri (θ_i döner

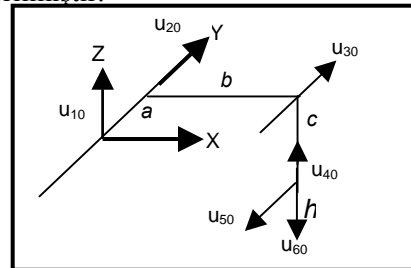
ve s_j prizmatik) tanımlanır. Daha sonra bu konumda, robotun geometrisini tanımlayan eksen doğrultuları (u_{i0}) ve bağ yerleşimleri (Q_{i0}) belirlenir. Burada u dönme veya kayma eksen yönündeki birim vektör, Q ise eklem eksenlerinin yerleşimini gösteren değişkendir.

Bu yöntemde birden fazla sıfır referans konum noktası seçilebilir. Dolayısıyla, bu durum, uygun olan bir çok SRK'a ulaşılmasından dolayı

avantaj sağlar. Fakat bu uç seçimlerden dolayı da aynı robot için iki farklı matematiksel sonuç çıkabilir. Bu açıdan sonuçlar DH yöntemiyle karşılaştırılmalıdır.

İleri yön kinematik analizde n tane 4×4 boyutlu D_i matrislerin çarpımından yer değiştirme matrisi D_h ($D_h = D_1.D_2.D_3.D_4.D_5.D_6$) bulunur. Şekil 4'deki robotun geometrisini tanımlayan eksen doğrultuları u_{i0} ve bağ yerleşimleri Q_{i0} Tablo

2'de verilmiştir.



Şekil 4. Koordinat çerçevelerinin gösterimi.

Tablo 2. PUMA 560 robotuna ait SRK verileri.

i	Eksen türü	u_{i0} doğrultusu	Q_{i0} yerleşimi
1	R	0,0,1	0,0,0

2	R	0,1,0	0,0,0
3	R	0,1,0	b,0,0
4	R	0,0,1	b,a,0
5	R	0,-1,0	b,a,-c
6	R	0,0,-1	b,a,0

$D_1=[R \ d]$ 'i bulmak için, bu matrisdeki R dönme ve d konum matrisleri sırayla bulunur.

$$R(\theta, k) = I + U \sin \theta + U^2(1 - \cos \theta) \quad (21)$$

Denklemden U eksi bakışlı matristir. Dönme matrisi R , denklem 22'de verilmiştir.

$$R(\theta, U) = \begin{bmatrix} 1 + (u_y^2 - u_z^2)(1 - \cos \theta) & u_x u_y(1 - \cos \theta) - U_z s \theta & u_x u_z(1 - \cos \theta) + u_y s \theta \\ -u_x u_y(1 - \cos \theta) + u_z s \theta & 1 - (u_z^2 + u_x^2)(1 - \cos \theta) & u_z u_y(1 - \cos \theta) - U_x s \theta \\ u_x u_z(1 - \cos \theta) + u_y s \theta & -u_y u_z(1 - \cos \theta) & 1 + (u_y^2 - u_x^2)(1 - \cos \theta) \end{bmatrix} \quad (22)$$

$d=(0,0,0)$ olduğundan, D_1 ve D_2 aşağıdaki gibi bulunur.

$$D_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

d vektörü sıfırdan farklı olduğunda konum vektörü denklem 24'den yararlanılarak bulunur. Bu durumda D_3 matrisi denklem 25'deki gibi elde edilir.

$$d = sU - (R - I)Q, \quad s = 0, \quad d = -(R - I)Q \quad (24)$$

$$d = \begin{bmatrix} b(1 - c_3) \\ 0 \\ bs_3 \end{bmatrix}, \quad D_3 = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & b(1 - c_3) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_3 & 0 & c_3 & bs_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Diğer matrisler denklem 26'da verilmiştir.

$$D_4 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & as_4 + b(1 - c_4) \\ s_4 & c_4 & 0 & -bs_4 + a(1 - c_4) \\ 0 & 0 & 1 & -bs_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & -s_5 & -cs_5 + b(1 - c_5) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_5 & 0 & c_5 & -bs_5 - c(1 - c_5) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_6 = \begin{bmatrix} c_6 & s_6 & 0 & (a_2 + a_3 + a_4)(1 - c_6) \\ -s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -(a_2 + a_3 + a_4)s_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Bu robotun ileri yön kinematiği $D_h = D_1 \cdot D_2 \cdot D_3 \cdot D_4 \cdot D_5 \cdot D_6$ matrislerinin çarpılmasıyla

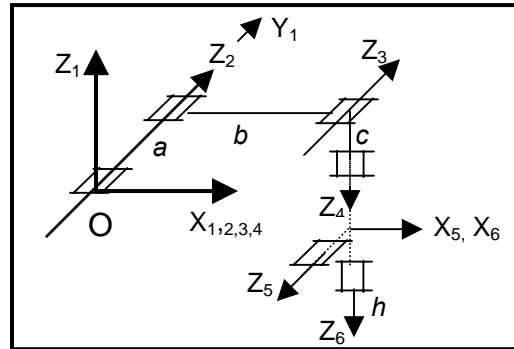
elde edilir. Bulunan sonuç denklem 4'deki sonuçla aynıdır.

2.4. Pieper-Roth Yöntemi

Pieper-Roth yöntemi D-H değişkenlerini kullanarak denklem 27'deki gibi yeni bir dönüşüm matrisi düzenlemiştir (13). Bu yöntemde dönüşüm matrisi, D-H yönteminin aksine $(i+1)$. ekseninden i . eksene doğru bakılarak oluşturulur. İleri yön kinematik analizde 90° açı farkı D-H dönüşüm matrisi ile Pieper-Roth dönüşüm matrisinin aynı sonucu üretmesine neden olur.

$$A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

İleri yön kinematik problem A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ve A_6 matrislerinin yan yana çarpılmasıyla bulunur.



Şekil 5. Koordinat çerçevelerinin gösterimi.

Tablo 3. Pieper-Roth değişkenleri.

i	θ_i	s_i	α_i	a_i
1	θ_1	0	-90°	0
2	θ_2	a	0°	B
3	θ_3	0	-90°	0
4	θ_4	-c	90°	0
5	θ_5	0	-90°	0

$$A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & 0 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & bc\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & bs\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & 0 & -s\theta_3 & 0 \\ s\theta_3 & 0 & c\theta_3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & -c\theta_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} c\theta_5 & 0 & -s\theta_5 & 0 \\ s\theta_5 & 0 & c\theta_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_6 = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6	θ_6	h	0°	0
---	------------	---	-----------	---

Denklem 27'deki A_i genel matrisi kullanılarak A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ve A_6 dönüşüm matrisleri sırayla bulunur. Bu robotun ileri yön kinematiği altı dönüşüm matrisinin çarpılmasıyla bulunur.

2.5 Tam ve Parametrik Sürekli Yöntem

Kısaca TPS olarak isimlendirilen bu yönteme, robot hata modelinin uygulanmasından dolayı robot kalibrasyonu için önemli avantaj sağlar (14), (15). Robotun her türlü hareketini modelleyecek değişkenleri içeren yöntem Tam kinematik yöntem denir. Robot eklemlerinin oryantasyonu veya konumu değiştiğinde kinematik yöntem bağ değişkenleri de bu değişime cevap verebiliyorsa, bu yönteme de parametrik olarak sürekli kinematik yöntem denir. Bir robot kalibrasyonu için uygun olan bir kinematik yöntem hem 'tam', hem de parametrik olarak sürekli olmalıdır (16), (17).

TPS yönteminin kullandığı dönme matrisi aşağıda verilmiştir.

$$R_i = \begin{bmatrix} 1 - \frac{b_{i,x}^2}{1 + b_{i,z}} & \frac{-b_{i,x}b_{i,y}}{(1 + b_{i,z})} & b_{i,x} \\ \frac{-b_{i,x}b_{i,y}}{(1 + b_{i,z})} & 1 - \frac{b_{i,y}^2}{1 + b_{i,z}} & b_{i,y} \\ -b_{i,x} & -b_{i,y} & b_{i,z} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Uç işlevcinin ana koordinat çerçevesine göre oryantasyonu ve konumu 4×4 homojen dönüşüm matrisinin yan yana çarpılmasıyla bulunur.

$$T_n = B_0 B_1 B_2 \dots B_{n-1} B_n \quad (30)$$

Bu kinematik yöntemde B_i homojen dönüşüm matrisi oluşturulurken, Şekil 6'da verilen $\{b_{i,x}, b_{i,y}, b_{i,z}, l_{i,x}, l_{i,y}, l_{i,z}, \beta_i\}$ değişkenlerine ek olarak döner eklem değişkeni θ_i veya prizmatik eklem değişkeni d_i kullanılır. Ayrıca,

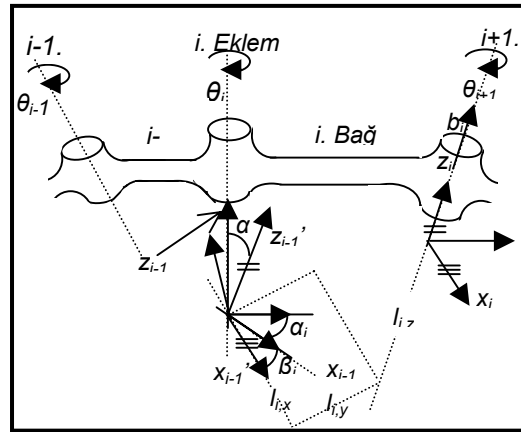
$$A_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & 0 & -s\theta_3 & 0 \\ s\theta_3 & 0 & c\theta_3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

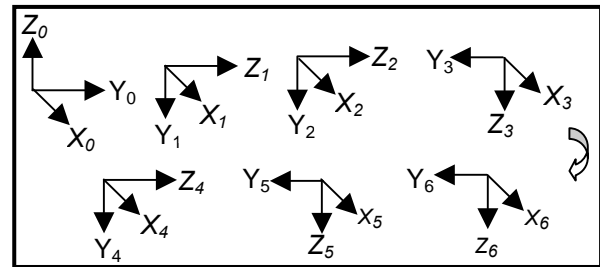
b_i : Dönme eksenindeki birim vektör,

β_i : x ekseninin doğrultusuna bağımlı açı,

l_i : Döndürülmüş ($i-1$). çerçevesine göre i . bağ eksenidir.



(a)



(b)

Şekil 6. a) TPS yönteminin gösterimi, b) Koordinat çerçevelerinin gösterimi.

Denklem 20'de verilen R_i matrisini belirlemek için i . eksen üzerindeki k vektörü α_i kadar döndürülerek, z_{i-1} eksenini ile z_i eksenini birbirine paralel yapar. Daha sonra z_{i-1} eksenini β_i kadar döndürülerek x_{i-1}' eksenini ile x_i eksenini birbirine

paralel yapılıdır. Bu durumda oryantasyonlar eşitlenir. Konum vektörünün belirlenmesi için oryantasyonların eşit olduğu durumda $(i-1)$. ile i . eksenlerin arasındaki $l_{i,x}, l_{i,y}$ ve $l_{i,z}$ uzunlukları belirlenir. Sonuç olarak bir döner eklem için genel dönüşüm matrisi aşağıdaki gibi yazılır.

$$R(z, \theta_i), R_i, R(z, \beta_i) \text{ Trans}(l_{i,x}, l_{i,y}, l_{i,z}) \quad (31)$$

Koordinat çerçeveler arasındaki x bileşenlerinin yönünde herhangi bir değişme olmadığından $\beta_i = 0$ alınır. B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 ve B_6 dönüşüm matrisleri denklem 31'e Tablo 4'de ki değişkenleri koyarak bulunur.

Tablo 4. TPS yöntem değişkenleri.

Eklem no	$b_{i,x}$	$b_{i,y}$	$b_{i,z}$	$l_{i,x}$	$l_{i,y}$	$l_{i,z}$	β_i
1	0	1	0	0	0	$l_{1,z}$	0
2	0	0	1	$l_{2,x}$	0	0	0
3	0	1	0	$l_{3,x}$	0	$-l_{3,z}$	0
4	0	-1	0	0	0	0	0
5	0	1	0	0	0	0	0
6	0	0	1	0	0	0	0

$$B_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & -s\theta_1 & -s\theta_1 l_{1,z} \\ s\theta_1 & 0 & c\theta_1 & -c\theta_1 l_{1,z} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & c\theta_2 l_{2,x} \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & s\theta_2 l_{2,x} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & 0 & -s\theta_3 & c\theta_3 l_{3,x} + s\theta_3 l_{3,z} \\ s\theta_3 & 0 & c\theta_3 & s\theta_3 l_{3,x} - c\theta_3 l_{3,z} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & -c\theta_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_5 = \begin{bmatrix} c\theta_5 & 0 & -s\theta_5 & 0 \\ s\theta_5 & 0 & c\theta_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_6 = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu robotun ileri yön kinematiği B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 ve B_6 dönüşüm matrislerinin çarpılmasıyla bulunur.

3. ROBOTLARIN KARTONYUM UZAYINDA KİNEMATİK MODELİNİN ÇIKARILMASI

Kartonyum uzayı kompleks sayıların genişletilmiş şeklidir. Bu uzay i, j, k ve s olmak üzere dört farklı değişkenle ifade edilir. $q = s + xi + yj + zk$ veya $q = (s, v)$ şeklinde gösterilir. Burada s skaler bir sayı, $v = (x, y, z)$ bir vektördür. Aslında kartonyum vektör çifti üç boyutlu uzaydaki dönme kavramını dört boyutlu uzaydaki dönme kavramına genişletmiştir. Bir oryantasyondan diğerine geçişde

küresel yüzeydeki noktalar küresel lineer bir hareket gerçekleştirir.

Robot kinematiğinin çözülmesinde alternatif bir yöntem olan kartonyum uzayı teorik olarak bir çok robot kinematik analiz problemine uygulanmasına karşın pratikte bu yöntem pek tercih edilmemiştir (8,18,19). Kartonyum uzayında robot kinematiğinin modellenmesi iki farklı gösterimle gerçekleştirilebilir: birim kartonyum gösterimi ve çift sayı kartonyum gösterimi. Çift sayı kartonyum gösterimi ilk olarak Hamilton (20) tarafından ortaya atılmıştır. Perwin ve Webb (21) çift sayı kartonyum gösterimi özelliklerini açıklarken Taylor (22) ise çift sayı kartonyum gösterimini robot kinematiğine uygulamıştır. Çift sayı kartonyum vıda yer değiştirmesini en kısa ve en iyi şekilde gösterir. Birim kartonyum gösteriminin bazı avantajları olmasına rağmen robot kinematiğinde dönme ve öteleme dönüşümlerini ifade etmenin en iyi yolu çift sayı kartonyum gösterimidir. Bu gösterimde kartonyum vektörü $q = (s, v)$, $q = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)k)$ $s \in R$ ve $v \in R^3$ şeklinde tanımlanmıştır. Burada θ ve k sırasıyla açı ve birim vektörleri göstermektedir. Kartonyum vektör çifti ise rotas-

yon q ve öteleme p elemanlarından oluşmaktadır ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$Q = (q, p) = [\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)(k_x, k_y, k_z), \langle p_x, p_y, p_z \rangle] \quad (33)$$

$T = [n \ o \ a \ p]$ homojen dönüşüm matrisi, $Q = (q, p)$ kartonyum vektör çifti ve r rasgele bir nokta vektördür. Bu değişkenler arasında birbirine karşılık gelen temel matematiksel eşitlikler Tablo 5'de verilmiştir.

Tablo 5. Karşılıklı temel matematiksel ifadeler.

Kartezyen	Kartonyum
Bir nokta vektörle gerçekleştirilen dönme	
$r' = [n \ o \ a \ p][r]$	$r' = q * r * q^{-1} + p$

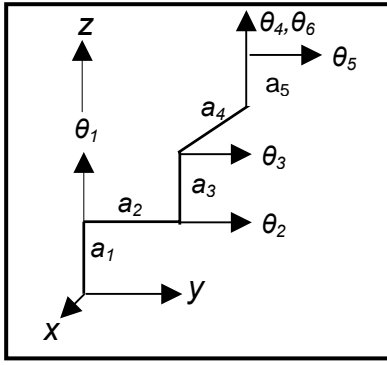
İki uzay operatörünün çarpımı	
$T' = [n \ o \ a \ p] [n' \ o' \ a' \ p']$	$Q' = (q, p) * (q', p')$ $q * q', q * p * q^{-1} + p$

Tablo 5.'de kullanılan "*" kartonyum çarpımını göstermektedir ve aşağıdaki gibi gerçekleştirilir.

$$q_1 * q_2 = [s_1, v_1] * [s_2, v_2] = [s_1 s_2 - v_1 \cdot v_2, s_1 v_2 + s_2 v_1 + v_1 \times v_2] \quad (34)$$

$q = [s, v]$ gibi bir kartonyumun bir vöckerle döndürülmesiyle oluşan denklem aşağıda verilmiştir.

$$q * r * q^{-1} = r + 2s(v \times r) + 2v \times (v \times r) + q \quad (35)$$



Şekil 8. Koordinat çerçevelerinin gösterimi.

Kartonyum vektör çiftini kullanan PUMA-560 robotunun ileri yön kinematiği denklem 36'da verilmiştir.

$$(R_w, T_w) = T(z, a_1)R(z, \theta_1)T(x, s_2 a_3)T(z, c_2 a_3)R(y, \theta_{23})T(x, a_4)T(y, a_2)T(z, a_5)R(z, \theta_4)R(y, \theta_5)R(z, \theta_6) \quad (36)$$

Denklem 36 kullanılarak eşdeğer uzaysal ilişki denklem 38'deki gibi yazılır.

$$\bar{c}_1 = c\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \quad \bar{s}_1 = s\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \quad (37)$$

$$s_{12} = s_1 c_2 + c_1 s_2, \quad c_{12} = c_1 c_2 - s_1 s_2 \quad (38)$$

$$A_1 = R(z, \theta_1) = ([\bar{c}_1, \bar{s}_1 k], 0), A_2 = T(x, \bar{s}_2 a_3)T(z, \bar{c}_2 a_3) = (1, < \bar{s}_2 a_3, 0, \bar{c}_2 a_3 >)$$

$$A_3 = R(y, \theta_{23}) = ([\bar{c}_{23}, \bar{s}_{23} j], 0), A_4 = T(x, a_4)T(y, a_2)T(z, a_5)$$

$$R(z, \theta_4) = ([\bar{c}_4, \bar{s}_4 k], < a_4, a_2, a_5 >), A_5 = R(y, \theta_5) = ([\bar{c}_5, \bar{s}_5 j], 0)$$

$$A_6 = R(y, \theta_6) = ([\bar{c}_6, \bar{s}_6 k], 0) \quad (39)$$

$$(R_w, T_w) = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 = ([\bar{c}_1, \bar{s}_1 k], 0)(1, < \bar{s}_2 a_3, 0, \bar{c}_2 a_3 >)([\bar{c}_{23}, \bar{s}_{23} j], 0)$$

$$([\bar{c}_4, \bar{s}_4 k], < a_4, a_2, a_5 >)([\bar{c}_5, \bar{s}_5 j], 0)([\bar{c}_6, \bar{s}_6 k], 0) \quad (40)$$

$$A_1 A_2 = ([\bar{c}_1, \bar{s}_1 k], 0)(1, < \bar{s}_2 a_3, 0, \bar{c}_2 a_3 >)$$

$$= ([\bar{c}_1, \bar{s}_1 (0,0,1)], 0)([\bar{c}_2, \bar{s}_2 (1,1,1)], < \bar{s}_2 a_3, 0, \bar{c}_2 a_3 >) \quad (41)$$

$$q_1 * q_2 = [\bar{c}_1 \bar{c}_2 - \bar{s}_1 \bar{s}_2, \bar{c}_1 (1,1,1) + \bar{s}_2 (0,0,1) + (-\bar{s}_1 \bar{s}_2, \bar{s}_2 \bar{s}_1, 0),$$

$$= [\bar{c}_1 \bar{c}_2 - \bar{s}_1 \bar{s}_2, \bar{c}_1 - \bar{s}_1 \bar{s}_2, \bar{c}_1 + \bar{s}_1 \bar{s}_2, \bar{c}_1 \bar{s}_2, \quad (42)$$

$$q_1 * p_2 * q_1^{-1} + p_1 = < \bar{s}_2 a_3 - 2\bar{s}_1 \bar{s}_2, 2\bar{c}_1 \bar{s}_2 a_3, \bar{c}_2 a_3 > \quad (43)$$

$$A_1 A_2 = ([\bar{c}_1 \bar{c}_2 - \bar{s}_1 \bar{s}_2, \bar{c}_1 - \bar{s}_1 \bar{s}_2, \bar{c}_1 + \bar{s}_1 \bar{s}_2, \bar{c}_1 \bar{s}_2], < \bar{s}_2 a_3 - 2\bar{s}_1 \bar{s}_2, 2\bar{c}_1 \bar{s}_2 a_3, \bar{c}_2 a_3 >) \quad (44)$$

Matematiksel işlemlerin kolay olması için kısaltmalar yapılacaktır.

$$s_{12} = \bar{c}_1 \bar{c}_2 - \bar{s}_1 \bar{s}_2, \quad v_{12x} = \bar{c}_1 - \bar{s}_1 \bar{s}_2, \quad v_{12y} = \bar{c}_1 + \bar{s}_1 \bar{s}_2, \quad v_{12z} = \bar{c}_1 \bar{s}_2,$$

$$p_{12x} = \bar{s}_2 a_3$$

$$p_{12y} = -2\bar{s}_1 \bar{s}_2, 2\bar{c}_1 \bar{s}_2 a_3, \quad p_{12z} = \bar{c}_2 a_3 \quad (45)$$

$$A_1 A_2 = [s_{12}, (v_{12x}, v_{12y}, v_{12z}), < p_{12x}, p_{12y}, p_{12z} >]$$

şeklinde daha kısa bir ifade bulunur.

$$A_3 A_4 A_5 A_6 = [\bar{c}_{(23)} \bar{c}_4, (\bar{s}_{(23)} \bar{s}_4, \bar{s}_{(23)} \bar{c}_4, \bar{c}_{(23)} \bar{s}_4)],$$

$$< a_4 + 2(\bar{c}_{(23)} \bar{s}_{(23)} a_5 - \bar{s}_{(23)} \bar{s}_{(23)} a_2),$$

$$a_2, a_5 - 2(\bar{c}_{(23)} \bar{s}_{(23)} a_2 + \bar{s}_{(23)} \bar{s}_{(23)} a_5) >] * [\bar{c}_5 \bar{c}_6, (\bar{s}_5 \bar{s}_6, \bar{c}_6 \bar{s}_5, \bar{c}_5 \bar{s}_6), < 0,0,0 >] \quad (46)$$

Kısaltmalar yaparak işlemler basitleştirilebilir.

$$p_{36x} = a_4 + 2(\bar{c}_{(23)} \bar{s}_{(23)} a_5 - \bar{s}_{(23)} \bar{s}_{(23)} a_2), \quad p_{36y} = a_2,$$

$$p_{36z} = a_5 - 2(\bar{c}_{(23)} \bar{s}_{(23)} a_2 + \bar{s}_{(23)} \bar{s}_{(23)} a_5) \quad (47)$$

$$A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 = [s, v, p] = [(s_{12} s_{36} - v_{12x} v_{36x} - v_{12y} v_{36y} - v_{12z} v_{36z}),$$

$$(s_{12} v_{36x} + s_{36} v_{12x} + v_{12y} v_{36z} - v_{12z} v_{36y}, s_{12} v_{36y} + s_{36} v_{12y} + v_{12z} v_{36x} - v_{36z} v_{12x},$$

$$(s_{12} v_{36z} + s_{36} v_{12z} + v_{12x} v_{36y} - v_{12y} v_{36x}),$$

$$< p_{36x} + 2s_{12}(v_{12y} p_{36z} - v_{12z} p_{36y})$$

$$+ 4v_{12y}(s_{12} v_{12x} p_{36y} - s_{12} v_{12y} p_{36x})$$

$$- v_{12z}(s_{12} v_{12z} p_{36x} - s_{12} v_{12x} p_{36z}) + p_{12x},$$

$$p_{36y} + 2s_{12}(v_{12z} p_{36x} - v_{12x} p_{36z})$$

$$+ 4v_{12z}(s_{12} v_{12y} p_{36z} - s_{12} v_{12z} p_{36y})$$

$$- v_{12x}(s_{12} v_{12x} p_{36y} - s_{12} v_{12y} p_{36x}) + p_{12y},$$

$$p_{36z} + 2s_{12}(v_{12x} p_{36y} - v_{12y} p_{36x}) + 4v_{12x}(s_{12} v_{12z} p_{36x} - s_{12} v_{12x} p_{36z})$$

$$- v_{12y}(s_{12} v_{12y} p_{36z} - s_{12} v_{12z} p_{36y}) + p_{12z} > \quad (48)$$

bulunur.

4.YÖNTEMLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

Homojen dönüşüm yöntemi, sıfır referans konum yöntemi, Pieper-Roth yöntemi ve tam ve parametrik sürekli yöntem, robot kinematiğini doğrudan 12 yararlı eleman içeren matrislerle ifade etmektedir. Üssel yöntem 3 yararlı elemanla

dönme hareketini en iyi şekilde ifade etmektedir. Kartonyum yöntemi ise 4 yararlı elemanla dönme ve öteleme hareketini ifade etmektedir. Pratikte robotla uğraşan insanlar matris işlemlerine daha yatkın, diğer yöntemlerde kullanılan operatörlere de alışkın olmadıklarından dolayı homojen dönüşüm yöntemi gibi matrisleri kullanarak kinematik model çıkararak yöntemler daha sık kullanılmaktadırlar. Oysaki, bilgisayar ortamında hesaplama yükü göz önüne alındığında, kartonyum yöntemi, üssel yöntem ve matrisleri kullanan yöntemlerinden daha hızlı çalışmaktadır. Yöntemlerin hesap yükünü daha ayrıntılı gösteren veriler Tablo 6'da verilmiştir. Bu tablo (1)'den alınmıştır.

Tablo 6. Üç yöntemin hesap yükü

Yöntem	Hesap Yükü		Toplama sayısı
	+, -	*, /	
Homojen dönüşüm	36n-36	54n-48	126n-120
Lie cebri	33n-18	36+18	115n-48
Kartonyum	22n+3	39n-12	80n+12

Tablo 6'da her bir yöntemin bilgisayar ortamında meydana getirdikleri hesap yükü görülmektedir. Bilgisayarda her bir çarpma işlemi toplama işleminin iki katı zamanda gerçekleştiği varsayılmıştır. Tablo 6'nın son kolonunda bilgisayarda gerçekleşen eşdeğer toplama miktarı verilmiştir. Tablo 6'dan da görüldüğü gibi özgürlük derecesi 3'den fazla olan robotlar için çift sayı kartonyum gösterimi bilgisayar ortamında daha hızlı çalışmaktadır.

5. SONUÇ

Bu çalışmada iki farklı uzayda altı robot kinematik modelleme yöntemi anlatılmıştır. Bu yöntemler arasındaki farklılıkları görmek için PUMA-560 robotunun her bir yöntem için kinematik modeli çıkarılmıştır. Bütün bu yöntemlere kinematik açıdan bakıldığında; kartezyen uzay içinde incelenen üssel yöntem, robotun ileri yön kinematikliğini iki aşamada çıkarmasına karşın ağır trigonometrik ifadeler kullanmak yerine, işlenmesi daha basit olan üssel dönme matris tabanlı cebir kullanır. Pieper-Roth ve SRK yöntemi ise daha çok ters kinematik problemlerde avantaj sağlayan yöntemlerdir. TPS yöntemi bütün robot hareketlerini modelleyerek küçük hata değişkenleri içermek suretiyle robotun tekil noktalardan geçmesini en-

geller. Yukarıda anlatılan yöntemler birbirleriyle karşılaştırıldığında, D-H yöntemi ileri yön kinematikliğini doğrudan çıkararak ve daha basit gösterime sahip olduğundan en çok tercih edilen yöntemdir.

İnsanların alışkın olmadığı operatörleri kullanan kartonyum yöntemi bilgisayar ortamında daha hızlı çalışmasına karşın pratikte daha az tercih edilmiştir.

6. KAYNAKLAR

1. Nicholas A. Aspragathos and John K. Dimitros, 'A comparative study of three methods for robot kinematics', IEEE transactions on systems, man, and cybernetics-part B: Cybernetics, vol. 28, no. 2, April 1988.
2. E.A. Maxwell, 'General homogeneous coordinates in space of three dimensions', Cambridge. U. K.: Cambridge Univ. Press, 1900.
3. J. Denavit and R.S. Hartenberg, 'A kinematic notation for Lower-pair mechanisms based on matrices', ASME Jappl. Mechan. pp. 215-221, June 1955.
4. R.S. Ball, 'The theory of screws', Cambridge. U. K.: Cambridge Univ. Press, 1900.
5. J. Funda and R.P. Paul, 'Manipulator kinematics and epsilon algebra,' IEEE J. Robot. Automat., vol. 4, April 1988.
6. J.-H. Kim and V.R.Kumar, 'Kinematics of robot manipulator via line transformations,' J. Robot. Syst., vol. 7. no. 4, pp. 649-674, 1990.
7. K.E. Bishop, 'Rodriguez' formula and screw matrix,' Trans. ASME J. Eng. Ind., February 1969.
8. O. Bottema and B. Roth, 'Theoretical kinematics.' New York: Dover, 1979.
9. O.P.Agrawal, 'Hamilton operators and dual-number-quaternions in spatial kinematics,' Mechanism and Machine Theory, vol. 22, no. 6, pp. 569-575 1987.
10. Özgören, M.K., 'Application of exponential rotation matrices to the kinematic analysis of manipulators', Proceeding Seventh World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Seville, Spain, 1987.
11. Balkan, T., Özgören M.K., 'A method of inverse kinematics solution including singular and multiple configurations for a class of

- robotic manipulators', Mechanism and Machine Theory, Sep. 1999.
12. Gupta, K.C., 'Kinematic analysis of manipulators using zero reference position description', International Journal of Robotics Research:13 May 1986.
 13. Pieper, D.L. and Roth, B., 'The kinematics of manipulators under computer control', Proceedings of the IFToMM Congress on Theory of Machines and Mechanisms, Warsaw,2:159-168,1969.
 14. B.M. Mooring, Z. S. Roth and M. R. Driels, 'Fundamentals of manipulators calibration', New York: Wiley, 1991.
 15. J.M. Hollerbach, "A survey of kinematic calibration," in O. Khatib, J. J. Craig, and T. Lozano-Perez, Eds., Robotics Review Cambridge, MA: MIT press, pp, 208-242, 1988.
 16. L.J. Everett, M. Driels, and B.W. Mooring, "Kinematic modelling for robot calibration," in Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Automat., pp, 183-189, Nov. 1987.
 17. H. Zhuang, "Kinematic modelling, identification and compensation of robot manipulators," Ph.D. dissertation, Florida Atlantic Univ., Boca Raton, 1989
 18. W. Blaschke, Gesammelte Werke. Essen: Thales-Verlag, 1982.
 - A. T. Yang and F. Freudenstein, "Application of dual-number quaternion algebra to the analysis of spatial mechanisms," Tran. ASME, J. Appl. Mechanics, vol. 31, pp, 300-308. 1964
 19. W.R. Hamilton 'Elements of quaternions', Volume I and II Newyork Chelsea, 1869.
 20. E. Perwin and J.A. Webb, 'Quaternions in vision and robotics', Dept. Comput. Sci. Carnegie-Mellon Univ. Tech. Rep, 1982.
 21. R.H. Taylor, 'Planning and execution of straight line manipulators trajectories' IBM J.Res. Devl. vol. 23, pp, 424-436, July 1999.