Ordu Üniv. Bil. Tek. Derg., 2017; 7(2): 353-366
Ordu Univ. J. Sci. Tech., 2017; 7(2): 353-366
e-ISSN: 2146-6459

Araştırma Makalesi / Research Article

Tanjant Demet İzdüşümü ile Tanımlı Tensör Demetinin Pull-Back Demeti

Furkan Yıldırım*

Atatürk Üniversitesi, Narman Meslek Yüksek Okulu, Erzurum

(Geliş Tarihi/Recived Date: 12.07.2017; Kabul Tarihi/Accepted Date: 28.09.2017)

Öz

Bu çalışmada, M manifoldu üzerinde tanımlı TM tanjant demetinin izdüşümü (submersionu) ile (p,q) tipli tM yarı-tensör (pull-back) demeti tanımlanmıştır. Ayrıca tM yarı-tensör (pull-back) demetinin bu özel sınıfında kesitler incelenmiştir.

***Anahtar Kelimeler*:** Kesit, Pull-back demeti, Tam lift, Tanjant demeti**,** Vektör alanı

A Pull-Back Bundle of Tensor Bundles Defined by Projection of The Tangent Bundle

Abstract

Using projection (submersion) of the tangent bundle TM over a manifold M, we define a semi-tensor (pull-back) bundle tM of type (p,q). In this context cross-sections in a special class of semi-tensor (pull-back) bundle tM can be also defined.

Keywords: Complete lift, cross-section pull-back bundle**,** tangent bundle, vector field

1. Giriş

M_n, C^∞ sınıfından n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve $\left(T(M_n),\pi_1,M_n\right)$ ise M_n üzerinde tanjant demet olsun. x^α lar M_n deki baz koordinatları, $x^{\bar{\alpha}}=y^\alpha$ lar ise $T(M_n)$ tanjant demetindeki fibre koordinatları olmak üzere $(x^i)=\left(x^{\bar{\alpha}},x^\alpha\right)$ notasyonu kullanılmaktadır. Burada $i,j,\ldots$ indisleri 1 den $2n$ e; $\bar{\alpha},\bar{\beta},\ldots$ indisleri 1 den n e; $\alpha,\beta,\ldots$ indisleri ise $n+1$ den $2n$ e kadar değer alır.

Sorumlu Yazar / Corresponding Author: furkan.yildirim@atauni.edu.tr

$\left(T_q^p(M_n),\pi,M_n\right)$, M_n üzerinde bir tensör demet (Gezer & Salimov 2008; Ledger & Yano 1967; Salimov 2013) ve $T(M_n)$ ise $\pi_1 : T(M_n)\to M_n$ izdüşümüyle (submersion) ile tanımlı tanjant demet olsun.

$\left(T_q^p(M_n),\pi,M_n\right)$ tensör demetinin $T(M_n)$ tanjant demeti üzerindeki $\left(t_q^p(M_n),\pi_2,T(M_n)\right)$ yarı-tensör demeti (induced veya pull-back):

$$t_q^p(M_n)=\left\{\left(\left(x^{\bar{\alpha}},x^{\alpha}\right),x^{\bar{\bar{\alpha}}}\right)\in T(M_n)\times\left(T_q^p\right)_x(M_n):\pi_1\left(x^{\bar{\alpha}},x^{\alpha}\right)=\pi\left(x^{\alpha},x^{\bar{\bar{\alpha}}}\right)=\left(x^{\alpha}\right)\right\}\subset T(M_n)\times\left(T_q^p\right)_x(M_n)$$

ile tanımlıdır. Burada $\pi_2(x^{\bar{\alpha}},x^{\alpha},x^{\bar{\bar{\alpha}}})=\left(x^{\bar{\alpha}},x^{\alpha}\right)$ ile $\pi_2 : t_q^p(M_n)\to T(M_n)$ izdüşümü tanımlı olup $\left(T_q^p\right)_x(M_n)\left(x=\pi_1\left(x\right),x=\left(x^{\bar{\alpha}},x^{\alpha}\right)\in T(M_n)\right)$ ise M_n nin bir x noktasındaki tensör uzayıdır. Ayrıca $x^{\bar{\bar{\alpha}}}=t_{\alpha_1\dots\alpha_q}^{\beta_1\dots\beta_p}$ $\left(\bar{\bar{\alpha}},\bar{\bar{\beta}},\dots=2n+1,\dots,2n+n^{p+q}\right)$ lar $T_q^p(M_n)$ tensör demetinin fibre koordinatlarıdır (pull-back demeti bkz: (Husemoller 1994; Lawson & Michelsohn 1989; Salimov & Kadıoğlu 2000; Steenrod 1951; Yıldırım 2015; Yıldırım & Salimov 2014). Ayrıca pull-back demetlerinin genelleşmiş hali Pontryagin demetleri olarak bilinir (Pontryagin 1947).

$(x^{i'})=(x^{\bar{\alpha}'},x^{\alpha'},x^{\bar{\bar{\alpha}}'})$, $t_q^p(M_n)$ yarı-tensör demetindeki bir diğer lokal adapte olmuş koordinat sistemi olmak üzere

$$\begin{cases} x^{\bar{\alpha}'}=\dfrac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}y^{\beta}, \\ x^{\alpha'}=x^{\alpha'}\left(x^{\beta}\right), \\ x^{\bar{\bar{\alpha}}'}=t_{\alpha_1'\dots\alpha_q'}^{\beta_1'\dots\beta_p'}=A_{\alpha_1\dots\alpha_p}^{\beta_1'\dots\beta_p'}A_{\alpha_1'\dots\alpha_q'}^{\beta_1\dots\beta_q}t_{\beta_1\dots\beta_q}^{\alpha_1\dots\alpha_p}=A_{(\alpha)}^{(\beta')}A_{(\alpha')}^{(\beta)}x^{\bar{\bar{\beta}}}, \end{cases} \tag{1}$$

dönüşümü tanımlıdır.

(1) dönüşümünün jakobiyeni

$$\bar{A}=\left(A_J^{I'}\right)=\begin{pmatrix} A_{\beta}^{\alpha'} & A_{\beta\varepsilon}^{\alpha'}y^{\varepsilon} & 0 \\ 0 & A_{\beta}^{\alpha'} & 0 \\ 0 & t_{(\sigma)}^{(\alpha)}\partial_{\beta}A_{(\alpha)}^{(\beta')}A_{(\alpha')}^{(\sigma)} & A_{(\alpha)}^{(\beta')}A_{(\alpha')}^{(\beta)} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

bileşenlerine sahiptir. Burada $I=(\overline{\alpha},\alpha,\overline{\overline{\alpha}})$, $J=(\overline{\beta},\beta,\overline{\overline{\beta}})$, $I,J,...=1,...,2n+n^{p+q}$,

$t_{(\sigma)}^{(\alpha)}=t_{\sigma_1...\sigma_q}^{\alpha_1...\alpha_p}$, $A_{\beta}^{\alpha'}=\dfrac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}$, $A_{\beta\varepsilon}^{\alpha'}=\dfrac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\varepsilon}}$

ile tanımlıdır.

(2) de belirtilen matris için

$$Det(A_{\overline{\beta}}^{\overline{\alpha}'})\neq 0,\ Det(A_{\beta}^{\alpha'})\neq 0,\ Det(A_{(\alpha)}^{(\beta')}A_{(\alpha')}^{(\beta)})\neq 0$$

olduğundan $Det\overline{A}\neq 0$ dır.

Ayrıca $\dim t_q^p(M_n)=2n+n^{p+q}$ olmaktadır.

Yarı-tensör demetin özel bir sınıfı (Fattaev 2009) da çalışılmıştır. Bu çalışmanın amacı $T(M_n)$ tanjant demetinin izdüşümü yardımıyla $T_q^p(M_n)$ tensör demetinin yarı-tensör demetini tanımlamaktır.

$F(T(M_n))$ ve $F(M_n)$, $T(M_n)$ ve M_n üzerindeki $C^{\infty}-$sınıfından reel değerli fonksiyonların belirttiği halka olmak üzere, $T(M_n)$ ve M_n üzerindeki (p,q) tipli tüm tensör alanlarının $F(T(M_n))$ ve $F(M_n)$ üzerindeki modülü sırasıyla $\Im_q^p(T(M_n))$ ve $\Im_q^p(M_n)$ ile gösterilir.

2. Materyal ve Yöntem

Tensör Alanlarının Dikey Liftleri ve $\gamma-$Operatörü

$A\in\Im_q^p(T(M_n))$ olmak üzere ${}^{vv}A$ vektör alanı

$$ {}^{vv}A=\begin{pmatrix} {}^{vv}A^{\overline{\alpha}} \\ {}^{vv}A^{\alpha} \\ {}^{vv}A^{\overline{\overline{\alpha}}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_{\beta_1...\beta_q}^{\alpha_1...\alpha_p} \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(3)}$$

bileşenlerine sahiptir. (2) ve (3) kullanılarak ${}^{vv}A' = \bar{A}\left({}^{vv}A\right)$ olduğu gösterilebilir. ${}^{vv}A \in \Im_0^1(t_q^p(M_n))$ vektör alanı $A \in \Im_q^p(T(M_n))$ nın $t_q^p(M_n)$ yarı-tensör demetine dikey lifti olarak adlandırılır.

$\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ olmak üzere $\pi^{-1}(U)$ daki $\gamma\varphi$ vektör alanı $t_q^p(M_n)$ üzerindeki $(x^{\bar{\beta}}, x^{\beta}, x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatlarına göre

$$\begin{cases} \gamma\varphi = \left(\sum_{\lambda=1}^{p} t_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \varepsilon \ldots \alpha_p} \varphi_{\varepsilon}^{\alpha_\lambda} \right) \dfrac{\partial}{\partial x^{\bar{\bar{\beta}}}}, & \left(p \geq 1, q \geq 0 \right) \\ \gamma\varphi = \left(\sum_{\mu=1}^{q} t_{\beta_1 \ldots \varepsilon \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \varphi_{\beta_\mu}^{\varepsilon} \right) \dfrac{\partial}{\partial x^{\bar{\bar{\beta}}}}, & \left(p \geq 0, q \geq 1 \right) \end{cases} \tag{4}$$

bileşenlerine sahiptir. (2) den $\gamma\varphi$ ve $\gamma\varphi$ vektör alanlarının herbir $\pi^{-1}(U) \subset t_q^p(M_n)$ da dikey vektör alanları tanımlar. $\gamma\varphi$ (veya $\gamma\varphi$), $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ tensör alanının $t_q^p(M_n)$ yarı-tensör demetine dikey-vektör lifti olarak adlandırılır.

Keyfi $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ için, (2) ve (4) kullanılarak, $(\gamma\varphi)' = \bar{A}(\gamma\varphi)$ olduğu gösterilebilir. Burada $\gamma\varphi$ vektör alanı

$$\gamma\varphi = \left(\gamma\varphi\right)^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{\lambda=1}^{p} t_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \varepsilon \ldots \alpha_p} \varphi_{\varepsilon}^{\alpha_\lambda} \end{pmatrix} \tag{5}$$

ile tanımlıdır. $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ olmak üzere $\gamma\varphi$

$$\gamma\varphi = \left(\gamma\varphi\right)^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{\mu=1}^{q} t_{\beta_1 \ldots \varepsilon \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \varphi_{\beta_\mu}^{\varepsilon} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

bileşenlerine sahiptir. (2) kullanılarak $(\gamma\varphi)' = \bar{A}(\gamma\varphi)$ olduğu gösterilebilir.

Keyfi $\varphi \in \Im_1^1(T(M_n))$ için, $\gamma\varphi$ vektör alanı $(x^{\bar{\beta}}, x^{\beta}, x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatlarına göre

$$\gamma\varphi = \begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\varphi_{\varepsilon}^{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

bileşenlerine sahiptir. (2) kullanılarak $(\gamma\varphi)' = \bar{A}(\gamma\varphi)$ olduğu gösterilebilir.

Vektör Alanlarının Tam Lifti

$X \in \Im_0^1(T(M_n))$, $X = X^{\alpha}(x^{\alpha})\partial_{\alpha}$ olmak üzere X vektör alanının tanjant demete ${}^{c}X$ tam lifti

$${}^{c}X = X^{\alpha}\partial_{\alpha} + y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha}\partial_{\bar{\alpha}}$$

ile tanımlıdır (Yano & Ishihara 1973).

Keyfi $X \in \Im_0^1(T(M_n))$ için, ${}^{cc}X$ vektör alanı $(x^{\bar{\beta}}, x^{\beta}, x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatlarına göre

$${}^{cc}X = \begin{pmatrix} {}^{cc}X^{\bar{\beta}} \\ {}^{cc}X^{\beta} \\ {}^{cc}X^{\bar{\bar{\beta}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\beta} \\ X^{\beta} \\ \sum_{\lambda=1}^{p} t_{\beta_1\ldots\beta_q}^{\alpha_1\ldots\varepsilon\ldots\alpha_p}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha_\lambda} - \sum_{\mu=1}^{q} t_{\beta_1\ldots\varepsilon\ldots\beta_q}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}\partial_{\beta_\mu}X^{\varepsilon} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

bileşenlerine sahiptir. (2) kullanılarak ${}^{cc}X' = \bar{A}({}^{cc}X)$ olduğu gösterilebilir. ${}^{cc}X$ vektör alanı ${}^{c}X \in \Im_0^1(T(M_n))$ vektör alanının $t_q^p(M_n)$ e tam lifti olarak adlandırılır.

Vektör Alanlarının Yatay Lifti

Keyfi $X \in \Im_0^1(T(M_n))$, $X = X^{\alpha}(x^{\alpha})\partial_{\alpha}$ için ${}^{HH}X \in \Im_0^1(t_q^p(M_n))$ vektör alanı $(x^{\bar{\beta}}, x^{\beta}, x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatlarına göre

$$
{}^{HH}X = \begin{pmatrix} -\Gamma^{\beta}_{\alpha} X^{\alpha} \\ X^{\beta} \\ X^{l}\left(\sum_{\mu=1}^{q} \Gamma^{\varepsilon}_{l\beta_\mu} t^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \varepsilon \ldots \beta_q} - \sum_{\lambda=1}^{p} \Gamma^{\alpha_\lambda}_{l\varepsilon} t^{\alpha_1 \ldots \varepsilon \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q}\right) \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(9)}
$$

bileşenlerine sahiptir. (2) kullanılarak ${}^{HH}X' = \bar{A}\left({}^{HH}X\right)$ olduğu gösterilebilir. ${}^{HH}X$ vektör alanı X vektör alanının $t^{p}_{q}(M_n)$ e yatay lifti olarak adlandırılır. Burada

$$
\Gamma^{\beta}_{\alpha} = y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha}
$$

ile tanımlıdır.

Teorem 2.1. $X \in \Im^{1}_{0}(T(M_n))$ olmak üzere

$$
{}^{cc}X - {}^{HH}X = \gamma(\hat{\nabla} X) - \gamma(\hat{\nabla} X) + \gamma(\nabla X),
$$

eşitliği bulunmaktadır. Burada $\hat{\nabla}$ simetrik afin konneksiyonu $\hat{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\theta} = \Gamma^{\alpha}_{\theta\beta}$ ile tanımlıdır.

İspat. (5), (6), (7), (8) ve (9) kullanılarak

$$
{}^{cc}X - {}^{HH}X = \begin{pmatrix} y^{\varepsilon} \partial_{\varepsilon} X^{\beta} \\ X^{\beta} \\ \sum_{\lambda=1}^{p} t^{\alpha_1 \ldots \varepsilon \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \partial_{\varepsilon} X^{\alpha_\lambda} - \sum_{\mu=1}^{q} t^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \varepsilon \ldots \beta_q} \partial_{\beta_\mu} X^{\varepsilon} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha} X^{\alpha} \\ X^{\beta} \\ X^{l}\left(\sum_{\mu=1}^{q} \Gamma^{\varepsilon}_{l\beta_\mu} t^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \varepsilon \ldots \beta_q} - \sum_{\lambda=1}^{p} \Gamma^{\alpha_\lambda}_{l\varepsilon} t^{\alpha_1 \ldots \varepsilon \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q}\right) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} y^{\varepsilon} \partial_{\varepsilon} X^{\beta} + y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha} X^{\alpha} \\ 0 \\ \sum_{\lambda=1}^{p} t^{\alpha_1 \ldots \varepsilon \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} (\partial_{\varepsilon} X^{\alpha_\lambda} + \Gamma^{\alpha_\lambda}_{l\varepsilon} X^{l}) - \sum_{\mu=1}^{q} t^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \varepsilon \ldots \beta_q} (\partial_{\beta_\mu} X^{\varepsilon} + \Gamma^{\varepsilon}_{l\beta_\mu} X^{l}) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{\lambda=1}^{p} t^{\alpha_1 \ldots \varepsilon \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \left(\partial_{\varepsilon} X^{\alpha_\lambda} + \Gamma^{\alpha_\lambda}_{l\varepsilon} X^{l}\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{\mu=1}^{q} t^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \varepsilon \ldots \beta_q} \left(\partial_{\beta_\mu} X^{\varepsilon} + \Gamma^{\varepsilon}_{l\beta_\mu} X^{l}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\left(\partial_{\varepsilon} X^{\beta} + \Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha} X^{\alpha}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{\lambda=1}^{p} t_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \varepsilon \ldots \alpha_p} (\underbrace{\partial_\varepsilon X^{\alpha_\lambda} + \Gamma_{\varepsilon l}^{\alpha_\lambda} X^l}_{\hat{\nabla}_\varepsilon X^{\alpha_\lambda}}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{\mu=1}^{q} t_{\beta_1 \ldots \varepsilon \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} (\underbrace{\partial_{\beta_\mu} X^{\varepsilon} + \Gamma_{\beta_\mu l}^{\varepsilon} X^l}_{\hat{\nabla}_{\beta_\mu} X^{\varepsilon}}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^\varepsilon \left(\underbrace{\partial_\varepsilon X^\beta + \Gamma_{\varepsilon\ \alpha}^{\ \beta} X^\alpha}_{\nabla_\varepsilon X^\beta} \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{\lambda=1}^{p} t_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \varepsilon \ldots \alpha_p} \left(\hat{\nabla}_\varepsilon X^{\alpha_\lambda} \right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{\mu=1}^{q} t_{\beta_1 \ldots \varepsilon \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \left(\hat{\nabla}_{\beta_\mu} X^{\varepsilon} \right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^\varepsilon \left(\nabla_\varepsilon X^\beta \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \gamma(\hat{\nabla}_\varepsilon X^{\alpha_\lambda}) - \gamma\left(\hat{\nabla}_{\beta_\mu} X^{\varepsilon}\right) + \gamma\left(\nabla_\varepsilon X^\beta\right) = \gamma(\hat{\nabla} X) - \gamma(\hat{\nabla} X) + \gamma(\nabla X),$$

elde edilir.

3. Bulgular ve Tartışma

Yarı-Tensör Demette Kesitler

$\xi \in \Im_q^p(M_n)$, M_n manifoldu üzerinde bir (p,q) tipli tensör alanı olmak üzere, $x \to \xi_x$ dönüşümü ($\xi_x ; x \in T(M_n)$ noktasındaki ξ değerini belirtir) yarı-tensör demetin β_ξ kesitini tanımlar. $\sigma_\xi : M_n \to T_q^p(M_n)$ ile $\left(T_q^p(M_n), \pi, M_n\right)$ tensör demetinin kesiti tanımlanmak üzere $\pi \circ \sigma_\xi = I_{(M_n)}$ eşitliği bulunmaktadır. $\left(t_q^p(M_n), \pi_2, T(M_n)\right)$ yarı-tensör demetinin $\beta_\xi : T(M_n) \to t_q^p(M_n)$ kesiti:

$$\beta_\xi\left(x^{\bar{\alpha}}, x^\alpha\right) = \left(x^{\bar{\alpha}}, x^\alpha, \sigma_\xi \circ \pi_1\left(x^{\bar{\alpha}}, x^\alpha\right)\right) = \left(x^{\bar{\alpha}}, x^\alpha, \sigma_\xi\left(x^\alpha\right)\right) = \left(x^{\bar{\alpha}}, x^\alpha, \xi_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}\left(x^\beta\right)\right)$$

ile tanımlıdır (Isham 1999; Husemoller 1994; Lawson & Michelsohn 1989; Yano & Ishihara 1973).

ξ tensör alanı $\xi^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}\left(x^{\beta}\right)$ bileşenlerine sahip olmak üzere $x^B = (x^{\overline{\beta}}, x^{\beta}, x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre $\beta_{\xi}\left(T(M_n)\right)$ kesiti

$$\begin{cases} x^{\overline{\beta}} = y^{\beta} = V^{\beta}\left(x^{\alpha}\right), \\ x^{\beta} = x^{\beta}, \\ x^{\overline{\overline{\beta}}} = \xi^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}\left(x^{\alpha}\right), \end{cases} \tag{10}$$

ile tanımlıdır. $x^{\overline{\alpha}} = y^{\alpha}$ lar değişkenler olarak alınırsa, $x^{\overline{\alpha}} = y^{\alpha}$ ların (10)'a göre diferensiyeli alınarak bileşenleri

$$B_{(\overline{\theta})} = \frac{\partial x^B}{\partial x^{\overline{\theta}}} = \partial_{\overline{\theta}} x^B = \begin{pmatrix} \partial_{\overline{\theta}} V^{\beta} \\ \partial_{\overline{\theta}} x^{\beta} \\ \partial_{\overline{\theta}} \xi^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} \end{pmatrix},$$

şeklinde olan $B_{(\overline{\theta})}$, $(\overline{\theta} = 1, \dots, n)$ vektör alanları elde edilir.

Buradaki $B_{(\overline{\theta})}$ vektör alanları $\beta_{\xi}\left(T(M_n)\right)$ kesitine teğettir. $t^p_q(M_n)$ yarı-tensör demetinde $(x^{\overline{\beta}}, x^{\beta}, x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre $B_{(\overline{\theta})}$ nin bileşenleri,

$$B_{(\overline{\theta})} : \left(B^B_{(\overline{\theta})}\right) = \begin{pmatrix} \delta^{\beta}_{\overline{\theta}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

şeklindedir. Burada

$$\delta^{\beta}_{\overline{\theta}} = A^{\beta}_{\overline{\theta}} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\overline{\theta}}}$$

eşitliği bulunmaktadır.

$X \in \Im_0^1(T(M_n))$, $X = X^{\alpha}(x^{\alpha})\partial_{\alpha}$ olmak üzere BX vektör alanının $t_q^p(M_n)$ yarı-tensör demetinde $(x^{\overline{\beta}}, x^{\beta}, x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre bileşenleri

$$BX : \left(B^{B}_{(\overline{\theta})} X^{\overline{\theta}}\right) = \begin{pmatrix} \delta^{B}_{\overline{\theta}} X^{\overline{\theta}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{B}_{\overline{\theta}} X^{\overline{\theta}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(11)}$$

ile tanımlıdır.

$$\begin{cases} x^{\overline{\beta}} = y^{\beta} = sabit, \\ x^{\overline{\overline{\beta}}} = \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q}\left(x^{\alpha}\right) = sabit, \\ x^{\beta} = x^{\beta}, \end{cases}$$

olmak üzere; x^{θ} ları değişkenler olarak kabul edersek (10)'a göre x^{θ} ların diferensiyeli alınarak bileşenleri

$$C_{(\theta)} = \frac{\partial x^{B}}{\partial x^{\theta}} = \partial_{\theta} x^{B} = \begin{pmatrix} \partial_{\theta} x^{\overline{\beta}} \\ \partial_{\theta} x^{\beta} \\ \partial_{\theta} \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \end{pmatrix},$$

olan $C_{(\theta)}$, $(\theta = n+1, \ldots, 2n)$ vektör alanları elde edilir. Burada $C_{(\theta)}$ vektör alanları $\beta_{\xi}(T(M_n))$ kesitine teğettir. $t_q^p(M_n)$ yarı-tensör demetinde $(x^{\overline{\beta}}, x^{\beta}, x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre $C_{(\theta)}$ nın bileşenleri,

$$C_{(\theta)} : \left(C^{B}_{(\theta)}\right) = \begin{pmatrix} \partial_{\theta} V^{\beta} \\ \delta^{\beta}_{\theta} \\ \partial_{\theta} \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \end{pmatrix},$$

şeklindedir. Burada

$$\delta^{\beta}_{\theta} = A^{\beta}_{\theta} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\theta}}$$

eşitliği geçerlidir.

$X \in \Im_0^1\left(T(M_n)\right)$, olmak üzere CX vektör alanının $t_q^p(M_n)$ yarı-tensör demetinde $(x^{\overline{\beta}}, x^{\beta}, x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre bileşenleri

$$CX:\left(C^B_{(\theta)}X^\theta\right)=\begin{pmatrix} X^\theta\partial_\theta V^\beta \\ X^\beta \\ X^\theta\partial_\theta\xi^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\end{pmatrix}, \quad \textbf{(12)}$$

ile tanımlıdır.

$$\begin{cases} x^{\overline{\beta}}=y^\beta=sabit, \\ x^\beta=x^\beta=sabit, \\ x^{\overline{\overline{\beta}}}=\xi^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\left(x^\alpha\right), \end{cases}$$

olmak üzere, $t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}$ lar değişkenler olarak kabul edilip $x^{\overline{\overline{\beta}}}=t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}$ e göre diferensiyeli alındığında bileşenleri

$$E_{\left(\overline{\overline{\theta}}\right)}:\left(E^B_{\left(\overline{\overline{\theta}}\right)}\right)=\partial_{\overline{\overline{\theta}}}x^B=\begin{pmatrix}\partial_{\overline{\overline{\theta}}}y^\beta \\ \partial_{\overline{\overline{\theta}}}x^\beta \\ \partial_{\overline{\overline{\theta}}}t^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ \delta^{\theta_1}_{\beta_1}\ldots\delta^{\theta_q}_{\beta_q}\delta^{\alpha_1}_{\gamma_1}\ldots\delta^{\alpha_p}_{\gamma_p}\end{pmatrix}$$

olan $E_{\left(\overline{\overline{\theta}}\right)}$ $(\overline{\theta}=2n+1,\ldots,2n+n^{p+q})$ vektör alanları elde edilir. $E_{\left(\overline{\overline{\theta}}\right)}$ vektör alanları fibreye teğet olup burada δ, Kronecker sembolüdür:

$$\delta^{\theta_1}_{\beta_1}=\frac{\partial x^{\theta_1}}{\partial x^{\beta_1}}.$$

ξ, M_n üzerinde (p,q) tipli

$$\xi=\xi^{\gamma_1\ldots\gamma_p}_{\theta_1\ldots\theta_q}dx^{\theta_1}\otimes\ldots\otimes dx^{\theta_q}\otimes\partial_{\gamma_1}\otimes\ldots\otimes\partial_{\gamma_p}$$

şeklinde tanımlı bir tensör alanı olmak üzere fibreye teğet olan $E\xi$ vektör alanı

$$E\xi : \left(E^{B}_{\left(\bar{\bar{\theta}}\right)} \xi^{\gamma_1 \ldots \gamma_p}_{\theta_1 \ldots \theta_q} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

ile tanımlıdır.

Teorem 3.1. X , $T(M_n)$ üzerinde bir vektör alanı olmak üzere, $\beta_{\xi}\left(T(M_n)\right)$ kesiti boyunca

$$^{cc}X = CX + B\left(L_V X\right) + E\left(-L_X \xi\right),$$

eşitliği tanımlıdır. Burada X e göre V nin Lie türevlemesi $L_V X$ ile, X e göre ξ nin Lie türevlemesi $L_X \xi$ gösterilmiştir.

İspat. (8), (11), (12) ve (13) kullanılarak,

$$CX + B\left(L_V X\right) + E\left(-L_X \xi\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} X^{\theta} \partial_{\theta} V^{\beta} \\ X^{\beta} \\ X^{\theta} \partial_{\theta} \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V^{\alpha} \partial_{\alpha} X^{\beta} - X^{\alpha} \partial_{\alpha} V^{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -X^{\theta} \partial_{\theta} \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} - \sum_{\mu=1}^{q} \partial_{\beta_\mu} X^{\beta} \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta \ldots \beta_q} + \sum_{\lambda=1}^{p} \partial_{\beta} X^{\alpha_\lambda} \xi^{\alpha_1 \ldots \varepsilon \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} V^{\alpha} \partial_{\alpha} X^{\beta} \\ X^{\beta} \\ -\sum_{\mu=1}^{q} \partial_{\beta_\mu} X^{\beta} \xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta \ldots \beta_q} + \sum_{\lambda=1}^{p} \partial_{\beta} X^{\alpha_\lambda} \xi^{\alpha_1 \ldots \varepsilon \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \end{pmatrix} = {}^{cc}X$$

elde edilir.

$C_{\left(\overline{\overline{\beta}}\right)} = E_{\left(\overline{\overline{\beta}}\right)}$ olup $\beta_\xi\left(T(M_n)\right)$ kesiti boyunca adapte olunmuş çatı $\left\{B_{\left(\overline{\beta}\right)}, C_{(\beta)}, C_{\left(\overline{\overline{\beta}}\right)}\right\}$ üçlüsü ile gösterilecektir. $\beta_\xi\left(T(M_n)\right)$ kesiti boyunca adapte olunmuş $\left\{B_{\left(\overline{\beta}\right)}, C_{(\beta)}, C_{\left(\overline{\overline{\beta}}\right)}\right\}$ çatısının belirtmiş olduğu matris

$$A = \left(A_B^A\right) = \begin{pmatrix} \delta_\beta^\alpha & \partial_\beta V^\alpha & 0 \\ 0 & \delta_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & \partial_\beta \xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}^{\sigma_1 \ldots \sigma_p} & \delta_{\alpha_1}^{\beta_1} \ldots \delta_{\alpha_q}^{\beta_q} \delta_{\gamma_1}^{\sigma_1} \ldots \delta_{\gamma_p}^{\sigma_p} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(14)}$$

olup, burada

$$\delta_\beta^\alpha = A_\beta^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta},$$

eşitlikliği geçerlidir. (14) de yer alan A matrisi singüler olmadığı için tersi mevcuttur. $\left(A\right)^{-1}$ ile A matrisinin tersi gösterilmek üzere $\left(A\right)^{-1}$ matrisi

$$\left(A\right)^{-1} = \left(A_C^B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \delta_\theta^\beta & -\partial_\theta V^\beta & 0 \\ 0 & \delta_\theta^\beta & 0 \\ 0 & -\partial_\theta \xi_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\sigma_1 \ldots \sigma_p} & \delta_{\beta_1}^{\theta_1} \ldots \delta_{\beta_q}^{\theta_q} \delta_{\gamma_1}^{\sigma_1} \ldots \delta_{\gamma_q}^{\sigma_p} \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(15)}$$

bileşenlerine sahip olup,

$$A\left(A\right)^{-1} = A_B^A\left(A_C^B\right)^{-1} = \delta_C^A = \tilde{I}$$

eşitliği geçerlidir. Burada $A = \left(\overline{\alpha}, \alpha, \overline{\overline{\alpha}}\right)$, $B = \left(\overline{\beta}, \beta, \overline{\overline{\beta}}\right)$, $C = \left(\overline{\theta}, \theta, \overline{\overline{\theta}}\right)$ şeklindedir.

İspat. (14) ve (15) kullanılarak,

$$A\left(A\right)^{-1}=(A_{B}^{A})\left(A_{C}^{B}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\delta_{\beta}^{\alpha} & \partial_{\beta}V^{\alpha} & 0\\ 0 & \delta_{\beta}^{\alpha} & 0\\ 0 & \partial_{\beta}\xi_{\alpha_1\ldots\alpha_q}^{\sigma_1\ldots\sigma_p} & \delta_{\alpha_1}^{\beta_1}\ldots\delta_{\alpha_q}^{\beta_q}\delta_{\gamma_1}^{\sigma_1}\ldots\delta_{\gamma_p}^{\sigma_p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_{\theta}^{\beta} & -\partial_{\theta}V^{\beta} & 0\\ 0 & \delta_{\theta}^{\beta} & 0\\ 0 & -\partial_{\theta}\xi_{\beta_1\ldots\beta_q}^{\sigma_1\ldots\sigma_p} & \delta_{\beta_1}^{\theta_1}\ldots\delta_{\beta_q}^{\theta_q}\delta_{\gamma_1}^{\sigma_1}\ldots\delta_{\gamma_q}^{\sigma_p}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\delta_{\theta}^{\alpha} & -\partial_{\theta}V^{\alpha}+\partial_{\theta}V^{\alpha} & 0\\ 0 & \delta_{\theta}^{\alpha} & 0\\ 0 & \partial_{\theta}\xi_{\alpha_1\ldots\alpha_q}^{\sigma_1\ldots\sigma_p}-\partial_{\theta}\xi_{\alpha_1\ldots\alpha_q}^{\sigma_1\ldots\sigma_p} & \delta_{\alpha_1}^{\theta_1}\ldots\delta_{\alpha_q}^{\theta_q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta_{\theta}^{\alpha} & 0 & 0\\ 0 & \delta_{\theta}^{\alpha} & 0\\ 0 & 0 & \delta_{\alpha}^{\theta}\end{pmatrix}=\delta_{C}^{A}=\tilde{I}$$

elde edilir.

Teorem 3.1 kullanılarak, M_n üzerinde $X\in\Im_0^1(T(M_n))$ vektör alanının ${}^{cc}X$ tam liftinin $\beta_{\xi}\left(T(M_n)\right)$ kesiti boyunca $\left\{B_{(\overline{\beta})},C_{(\beta)},C_{\left(\overline{\overline{\beta}}\right)}\right\}$ adapte olunmuş çatısına göre bileşenleri

$${}^{cc}X:\begin{pmatrix}L_V X\\ X\\ -L_X\xi\end{pmatrix},$$

şeklinde tanımlıdır.

BX , CX ve $E\xi$; $T(M_n)$ deki (p,q) tipli ξ tensör alanı ile tanımlanan $\beta_{\xi}\left(T(M_n)\right)$ kesiti boyunca $\left\{B_{(\overline{\beta})},C_{(\beta)},C_{\left(\overline{\overline{\beta}}\right)}\right\}$ adapte olunmuş çatısına göre sırasıyla

$$BX=\begin{pmatrix}X^{\alpha}\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\ CX=\begin{pmatrix}0\\ X^{\alpha}\\ 0\end{pmatrix},\ E\xi=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \xi_{\beta_1\ldots\beta_q}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}\end{pmatrix}$$

bileşenlerine sahiptir.

4. Sonuç

Bu çalışmada, M manifoldu üzerinde tanımlı $T(M_n)$ tanjant demetinin izdüşümü (submersionu) ile (p,q) tipli $t_q^p(M_n)$ yarı-tensör (pull-back) demeti tanımlanmıştır. $t_q^p(M_n)$ yarı-tensör (pull-back) demetinde vektör alanlarının ${}^{cc}X$ tam ve ${}^{HH}X$ yatay liftleri verilmiştir. Son olarak $T(M_n)$ tanjant demet izdüşümlü $t_q^p(M_n)$ yarı-tensör (pull-back) demetinde $\beta_\xi\left(T(M_n)\right)$ kesitleri incelenmiştir.

Kaynakça

1. Isham C J, (1999)."Modern differential geometry for physicists". World Scientific.
2. Fattaev H, (2009). The Lifts of Vector Fields to the Semitensor Bundle of the Type (2,0). *Journal of Qafqaz University*, 25, no. 1, 136-140.
3. Gezer A, Salimov A A, (2008). Almost complex structures on the tensor bundles. *Arab. J. Sci. Eng. Sect. A Sci*. 33, no. 2, 283–296.
4. Husemoller D, (1994). Fibre Bundles. Springer, New York.
5. Lawson H B, Michelsohn M L, (1989). Spin Geometry. Princeton University Press., Princeton.
6. Ledger A J, Yano K, (1967). Almost complex structure on tensor bundles. *J. Dif. Geom*. 1, 355-368.
7. Pontryagin L S, (1947). Characteristic cycles on differentiable manifolds. *Rec. Math*. (Mat. Sbornik) N.S.,
8. 21(63):2, 233-284.
9. Salimov A, (2013). Tensor Operators and their Applications. Nova Science Publ., New York.
10. Salimov A A, Kadıoğlu E, (2000). Lifts of Derivations to the Semitangent Bundle. *Turk J. Math*. 24(2000), 259-266. Ata Uni.
11. Steenrod N, (1951). The Topology of Fibre Bundles. Princeton University Press., Princeton.
12. Yano K, Ishihara S, (1973). Tangent and Cotangent Bundles. Marcel Dekker, Inc., New York.
13. Yıldırım F, (2015). On a special class of semi-cotangent bundle. *Proceedings of the Institute of*
14. *Mathematics and Mechanics, (ANAS)* 41, no. 1, 25-38.
15. Yıldırım F, Salimov A, (2014). Semi-cotangent bundle and problems of lifts. *Turk J. Math*, 38, 325-339.