

Radyal Yönde Basınç Uygulanan Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeden Yapılmış Uzun Tüplerde Von Mises Kriterine Göre Akmanın Başlaması

Tolga AKIŞ, Ömür EREN

* Atılım Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü İncek 06836, ANKARA

SUFEN Proje Yazılım Müh. İnş. ve Tic. Ltd. Şti. Bağlıca Etimesgut, ANKARA

(Geliş / Received : 21.07.2014 ; Kabul / Accepted : 28.01.2015)

ÖZ

İç ya da dış yüzeyden radyal yönde basınçlandırılmış, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış uçları sabitlenmiş uzun bir tüpün elastik davranışı analitik olarak incelenmiştir. Tüpün elastisite modülünün ve akma dayanımının radyal koordinat boyunca lineer olmayan formda değiştikleri varsayılmıştır. Von Mises akma kriteri kullanılarak, fonksiyonel derecelendirme parametrelerinin tüpteki plastik akmanın başlangıcına etkileri incelenmiş, akmanın bu parametrelere bağlı olarak her iki basınç durumu için de önce iç yüzeyden, önce dış yüzeyden, ya da her iki yüzeyden de aynı anda başlayabileceği gözlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Gerilme analizi; fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler; von Mises kriteri.

Yielding of Radially Pressurized Functionally Graded Long Tubes Based on Von Mises Criterion

ABSTRACT

The elastic behaviour of functionally graded long tubes with axially constrained ends subject to either internal or external pressure is investigated analytically. The modulus of elasticity and the yield limit of the tube material are assumed to vary radially in nonlinear forms. Making use of von Mises yield criterion, the effect of grading parameters on the yielding behavior of the tube is investigated and it is observed that for both pressure cases, the plastic flow may commence at the inner surface, at the outer surface or simultaneously at both surfaces depending on the functionally grading parameters.

Keywords: Stress analysis; functionally graded materials; von Mises criterion.

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerden yapılmış elemanların önemli bazı mekanik özellikleri bu elemanların boyutları boyunca değişebilir. Aynı yükleme ve sınır koşulları altında, bu tip malzemelerden yapılmış temel elemanların mekanik dayanımının homojen malzemeden yapılmış olanlardan daha yüksek olduğu bilinmektedir. Bu nedenle fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerden yapılmış elemanların üretimi ve kullanımı son yıllarda giderek artmıştır. Bu tip malzemelerde seramik-metal karışımların kullanılmasının yanında, bu çalışmada ele alınan problemde olduğu gibi metal malzemeler de yaygın olarak kullanılmaktadır [1].

Homojen malzemeden yapılmış tüplerin basınç altındaki elastik ve elastik-plastik davranışları çeşitli çalışmalarda incelenmiştir [2-6]. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış tüp ve shaft gibi temel elemanların çeşitli yükleme koşulları altında elastik ve elastik plastik davranışlarını analitik olarak ele alan çalışmalar da

literatürde yer almaktadır [7-14]. Yapılmış diğer çalışmalardan farklı olarak, burada basınç altındaki fonksiyonel derecelendirilmiş uzun tüplerde derecelendirme parametrelerinin plastik akma durumlarına etkileri incelenmiştir. Ayrıca daha önce analitik olarak incelenmeyen radyal dış basınç etkisindeki fonksiyonel derecelendirilmiş tüplerdeki akma durumu da bu çalışmanın konuları arasında yer almaktadır.

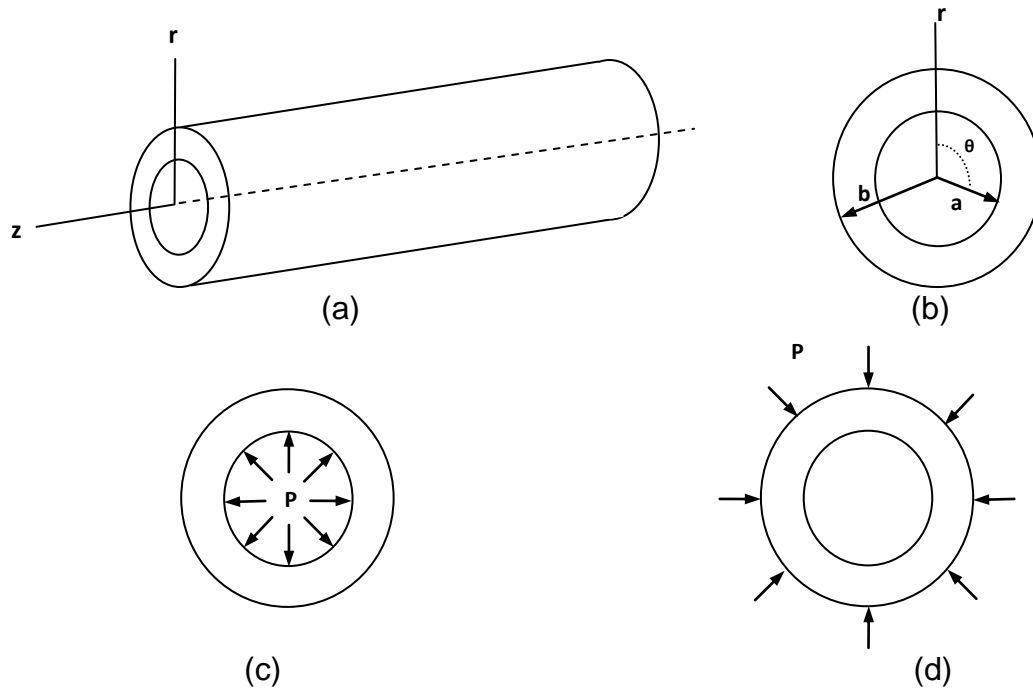
İç yarıçapı a ve dış yarıçapı b olan, aksenal simetriye sahip, uçları aksiyel yönde sabitlenmiş, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış uzun bir tüpün düzlemsel şekil değiştirdiği ve şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayılmaktadır. Ele alınan tüp sistemine ait geometri ve yükleme durumları Şekil 1'de yer almaktadır.

Bilindiği gibi malzemenin mekanik özelliklerini belirleyen çeşitli parametreler mevcuttur. Bunların arasında malzemedeki deformasyonu belirleyen en önemli parametreler elastisite modülü (E) ve akma dayanımı (σ_0) olduğu bilinmektedir. Bu yüzden bu iki parametrenin değişimlerinin tüpün davranışına etkisi

* Sorumlu Yazar (Corresponding Author)

e-posta: tolga.atlis@atilim.edu.tr

Digital Object Identifier (DOI) : 10.2339/2015.18.2, 63-71



Şekil 1. Tüp geometrisi ve yükleme durumları: (a) Genel görünüş, (b) Tüp kesiti, (c) İç basınç durumu, (d) Dış basınç durumu (Geometry of the tube and loading conditions: (a) General view, (b) Cross-section of the tube, (c) Internal pressure case, (d) External pressure case)

öncelikli olarak incelenmiştir. Tüpü oluşturan malzemenin elastisite modülünün ve akma dayanımının radyal yönünde sırasıyla

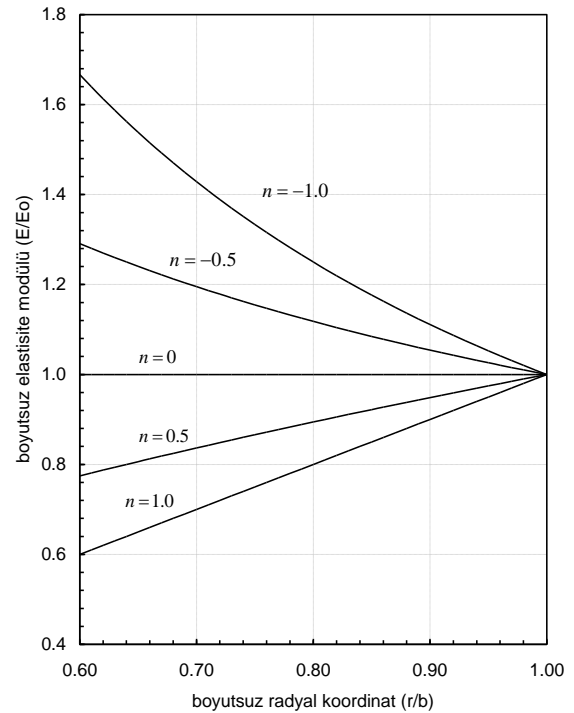
$$E(r) = E_0 \left(\frac{r}{b} \right)^n, \quad (1)$$

$$\sigma_0(r) = \sigma_C \left(\frac{r}{b} \right)^m, \quad (2)$$

şeklinde lineer olmayan formda değıştikleri kabul edilmiştir. Bu denklemlerde E_0 referans elastisite modülü, σ_C referans akma gerilmesi, r radyal koordinat n ve m de fonksiyonel derecelendirme parametreleridir. Boyutsuz elastisite modülünün boyutsuz iç yarıçapı $\bar{a} = a/b = 0.6$ olan tüpte farklı n parametre değeri için radyal koordinat boyunca dağılımı Şekil 2’de verilmektedir. Aynı grafik farklı m parametreleri kullanılarak akma gerilmesi için de çizilebilir.

Söz konusu sistem ilk anda gerilmemiş olup daha sonra iç ya da dış yüzeyden basınç uygulanmasıyla birlikte içerisinde radyal, teğetsel ve aksiyel yönlerde gerilmeler oluşur. Bu gerilmelerin hesabı ve elastik aralığın belirlenmesi bu çalışmanın temel amacını oluşturmaktadır. Yukarıda belirtilen kabuller altında, elastik gerilme durumu göz önünde bulundurularak, gerilme ve yer değıştirme dağılımları kapalı formda elde edilmiştir. Von Mises akma kriteri yardımı ile plastik

deformasyona yol açan kritik basınç değeri bulunmuş ve tüpteki çeşitli akma durumları değerlendirilmiştir.



Şekil 2. Boyutsuz elastisite modülünün (E/E_0) farklı n parametre değeri için radyal koordinat boyunca dağılımı (Variation of nondimensional modulus of elasticity (E/E_0) for different values of n)

2. TEMEL DENKLEMLER VE ÇÖZÜM (BASIC EQUATIONS AND SOLUTION)

Küçük deformasyonlar için birim şekil-yer değiştirme denklemleri, genelleştirilmiş Hooke kanunu denklemleri ve radyal yönde denge denklemi sistemin elastik çözümüne yönelik temel denklemleri oluşturur. Timoshenko ve Goodier [2] notasyonu kullanılarak, uzun bir tüp için genelleştirilmiş Hooke kanunu

$$\varepsilon_r(r) = \frac{1}{E(r)} [\sigma_r(r) - \nu(\sigma_\theta(r) + \sigma_z(r))] \quad (3)$$

$$\varepsilon_\theta(r) = \frac{1}{E(r)} [\sigma_\theta(r) - \nu(\sigma_r(r) + \sigma_z(r))], \quad (4)$$

$$\varepsilon_z(r) = \frac{1}{E(r)} [\sigma_z(r) - \nu(\sigma_r(r) + \sigma_\theta(r))], \quad (5)$$

şeklinde ifade edilir. Düzlemsel şekil değiştirme durumunda $\varepsilon_z = 0$ olur ve denklem (5) aksiyel gerilme bileşeni σ_z için çözüldüğünde

$$\sigma_z(r) = \nu(\sigma_\theta(r) + \sigma_r(r)), \quad (6)$$

ifadesi bulunur. Bu ifade (3) ve (4) denklemlerinde yerine yazılması ve şekil-yer değiştirme denklemlerinin ($\varepsilon_r = du/dr$, $\varepsilon_\theta = u/r$) kullanılmasıyla aşağıdaki gerilme-yer değiştirme bağıntıları elde edilir.

$$\sigma_r(r) = \frac{E(r)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{\nu u(r)}{r} + (1-\nu)u'(r) \right], \quad (7)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{E(r)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{(1-\nu)u(r)}{r} + \nu u'(r) \right], \quad (8)$$

Yukarıdaki gerilme bileşenleri, aşağıda verilen denge denkleminde

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (9)$$

yerlerine yazıldığında, gerekli sadeleştirmeler yapılarak

$$r^2(1-\nu)\frac{d^2u}{dr^2} + r(1+\nu)(1-\nu)\frac{du}{dr} - [1-\nu(1+\nu)]u = 0, \quad (10)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin genel çözümü ise

$$u(r) = C_1 r^{-(n-K)/2} + C_2 r^{-(n+K)/2}, \quad (11)$$

olarak bulunur. Burada C_1 ve C_2 integrasyon sabitleri ve

$$K = \sqrt{4 + n^2 - \frac{4n\nu}{1-\nu}}, \quad (12)$$

şeklinde yer değiştirme genel çözümü (11 nolu denklik), (7) ve (8) ile verilen gerilme denklemlerinde

yerine yazıldığında radyal, teğetsel ve aksiyel gerilme bileşenleri

$$\sigma_r(r) = -\frac{E_0}{2(1+\nu)(1-2\nu)b^n} \left[C_1 r^{(K+n-2)/2} (n-K(1-\nu)-(2+n)\nu) + C_2 r^{(n-K-2)/2} (K+n-(2+K+n)\nu) \right], \quad (13)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{E_0}{2(1+\nu)(1-2\nu)b^n} \left[C_1 r^{(K+n-2)/2} (2-(2-K+n)\nu) + C_2 r^{(n-K-2)/2} (2-(2+K+n)\nu) \right], \quad (14)$$

$$\sigma_z(r) = \frac{E_0}{2(1+\nu)(1-2\nu)b^n} \left[C_1 r^{(K+n-2)/2} (2+K-n)\nu + C_2 r^{(n-K-2)/2} (2-K-n)\nu \right], \quad (15)$$

olarak belirlenir. İç yüzeyden basınç uygulanan bir tüp için C_1 ve C_2 integrasyon sabitlerinin belirlenmesinde $\sigma_r(a) = -P$ ve $\sigma_r(b) = 0$ sınır koşulları kullanılır. Buna göre integrasyon sabitleri:

$$C_1 = \frac{2a^{(2+K-n)/2} P(1+\nu)(1-2\nu)}{(b^K - a^K)b^{-n} [K(1-\nu) + (2+n)\nu - n]E_0}, \quad (16)$$

$$C_2 = \frac{2a^{(2+K-n)/2} P(1+\nu)(1-2\nu)}{(b^K - a^K)b^{-(n+K)} [K+n-(2+K+n)\nu]E_0}, \quad (17)$$

olarak bulunur. Dış basınç altındaki tüpte ise sınır koşulları $\sigma_r(a) = 0$ ve $\sigma_r(b) = -P$ şeklindedir. Bu durum için ise integrasyon sabitleri

$$C_1 = -\frac{2b^{(2+K+n)/2} P(1+\nu)(1-2\nu)}{(b^K - a^K)[K(1-\nu) + (2+n)\nu - n]E_0}, \quad (18)$$

$$C_2 = -\frac{2a^K b^{(2+K+n)/2} P(1+\nu)(1-2\nu)}{(b^K - a^K)[K+n-(2+K+n)\nu]E_0}, \quad (19)$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan, düzlem şekil değiştirme durumu için deviyatorik gerilme tensörü S_{ij}

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_r - \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta - \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z - \bar{\sigma} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

şeklinde. Burada $\bar{\sigma}$ hidrostatik gerilme olup, diğer gerilmeler cinsinden

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z}{3}, \quad (21)$$

olarak verilir. Von Mises akma gerilmesi σ_Y , deviyatorik gerilme tensörü S_{ij} cinsinden

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}}, \quad (22)$$

şeklinde ifade edilir [15]. Gerekli indis toplamları yapılarak, düzlem şekil değiştirme hali için herhangi bir r_Y koordinatındaki von Mises akma gerilmesi

$$\sigma_y(r_y) = \sqrt{\frac{1}{2} \{ [\sigma_r(r_y) - \sigma_\theta(r_y)]^2 + [\sigma_r(r_y) - \sigma_z(r_y)]^2 + [\sigma_\theta(r_y) - \sigma_z(r_y)]^2 \}}, \quad (23)$$

olarak bulunur. Bu denklem kullanılarak elde edilen akma gerilmesinin akma dayanımından büyük olduğu basınçta akma başlar ve elastik limit basınç değeri $\sigma_Y = \sigma_0$ denkleğinden hesaplanır. Von Mises akma gerilmesi (2) nolu ifadedeki akma dayanımına bölündüğünde ve gerilme bileşenleri için $\bar{\sigma}_i = \sigma_i / [\sigma_0(a)]$ boyutsuz büyüklüğü kullanıldığında aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\phi = \left(\frac{a}{r_y} \right)^m \sqrt{\frac{1}{2} \{ (\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta)^2 + (\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_z)^2 + (\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_z)^2 \}}, \quad (24)$$

Bu denklemde yer alan ϕ boyutsuz gerilme değışkeni olarak tanımlanmıştır. Von Mises akma kriterine göre boyutsuz elastik limit basınç değeri $\phi = 1$ denkleğinden hesaplanır. Yapılan çalışmalar fonksiyonel derecelendirilmiş tüplerde her iki basınç durumunda da (iç ya da dış basınç) plastik akmanın, fonksiyonel derecelendirme parametrelerine bağılı olarak, önce iç yüzeyden, önce dış yüzeyden, ya da her iki yüzeyden de aynı anda başlayacağını göstermiştir. Akmanın iç yüzeyden ($r = a$) başlaması için gerekli koşul

$$\sqrt{\frac{1}{2} \{ [\bar{\sigma}_r(\bar{a}) - \bar{\sigma}_\theta(\bar{a})]^2 + [\bar{\sigma}_r(\bar{a}) - \bar{\sigma}_z(\bar{a})]^2 + [\bar{\sigma}_\theta(\bar{a}) - \bar{\sigma}_z(\bar{a})]^2 \}} = 1, \quad (25)$$

şekindedir. Burada boyutsuz iç yarıçap $\bar{a} = a/b$ olarak ifade edilmiştir. Dış yüzeyden başlayan akma için ise

$$(\bar{a})^m \sqrt{\frac{1}{2} \{ [\bar{\sigma}_r(1) - \bar{\sigma}_\theta(1)]^2 + [\bar{\sigma}_r(1) - \bar{\sigma}_z(1)]^2 + [\bar{\sigma}_\theta(1) - \bar{\sigma}_z(1)]^2 \}} = 1, \quad (26)$$

koşulu yazılabilir (boyutsuz dış yarıçap: $\bar{b} = b/b = 1$). Aşağıda, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış tüplerin iç ve dış basınç altındaki akma davranışları incelenmektedir.

3. SAYISAL SONUÇLAR (NUMERICAL RESULTS)

Bu bölümde, elde edilen sonuçlar sunulurken aşağıdaki boyutsuz büyüklükler kullanılmıştır:

$$\bar{r} = \frac{r}{b}; \quad \bar{\sigma}_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_0(a)}; \quad \bar{u} = \frac{uE_0}{\sigma_0(a)b};$$

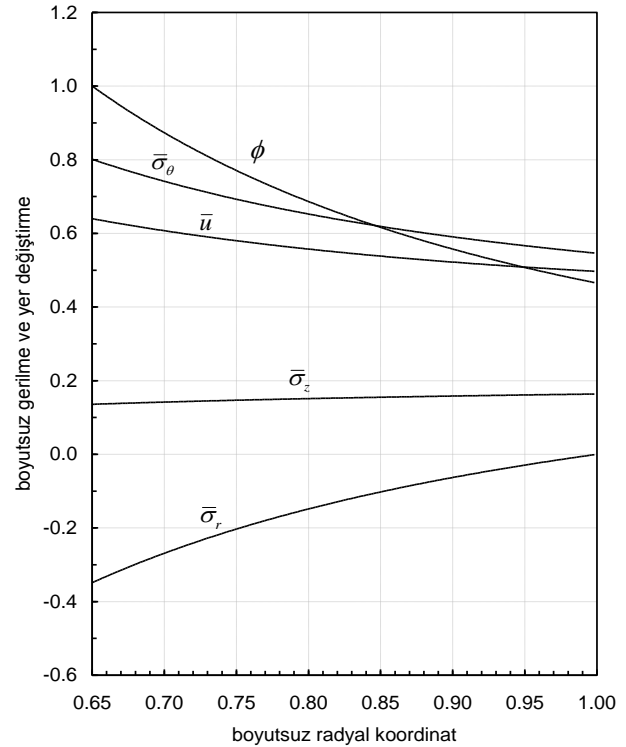
$$\bar{C}_1 = \frac{C_1}{b^{(2-n+K)/2}}; \quad \bar{C}_2 = \frac{C_2}{b^{(2-n-K)/2}} \quad (27)$$

İncelenen fonksiyonel derecelendirilmiş tüplerde kullanılan çeliğın mekanik özellikleri ise $E_0 = 200 \text{ GPa}$, $\sigma_C = 430 \text{ MPa}$ ve $\nu = 0.30$ şeklindedir [3].

3.1. İç Basınç Durumu (Internal Pressure Case)

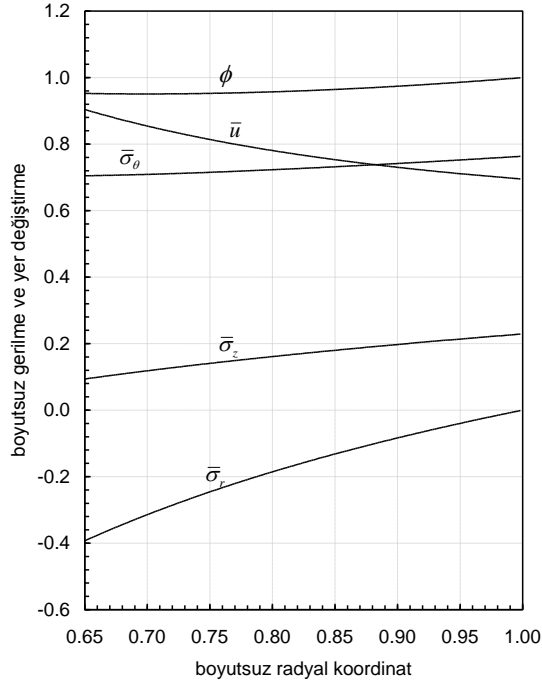
İç yarıçapı $\bar{a} = a/b = 0.65$ olan bir tüpte $n = 0.3$ ve $m = 0.1$ fonksiyonel derecelendirme parametreleri için

plastik akma iç yüzeyden başlar. Akmaya yol açan boyutsuz kritik iç basınç (25) nolu denklik kullanılarak $\bar{P}_e = 0.348650$ olarak hesaplanır. İntegrasyon sabitleri de (16) ve (17) nolu denklemler kullanılarak $\bar{C}_1 = 3.60845 \times 10^{-4}$ ve $\bar{C}_2 = 6.62299 \times 10^{-4}$ olarak bulunur. Bu kritik basınçta elde edilen yer değıştirme ve gerilme dağılımları Şekil 3'te verilmiştir. Görüldüğü gibi iç yüzeyde ($r = a$) boyutsuz gerilme değışkeni $\phi = 1$ değeri almakta, diğeri tüm koordinatlarda 1'den küçük olmaktadır.

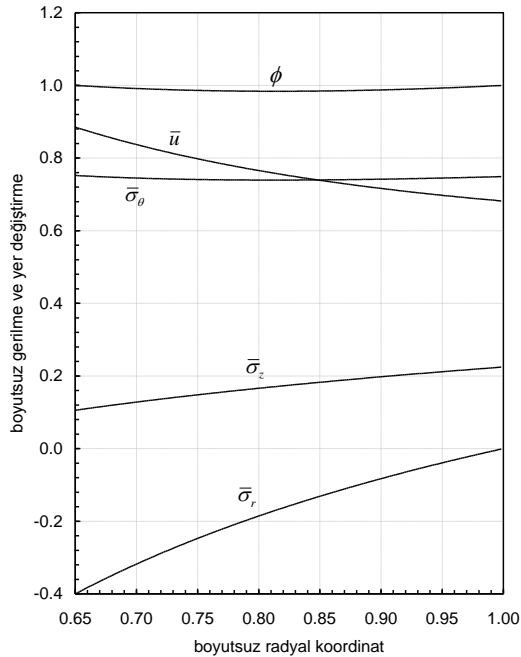


Şekil 3. Elastik limit iç basınç altındaki ($\bar{P}_e = 0.348650$) fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış bir tüpte ($\bar{a} = 0.65, n = 0.3$ ve $m = 0.1$) boyutsuz yer değıştirme ve gerilmeler (The distributions of displacement and stresses in an FGM tube of $\bar{a} = 0.65, n = 0.3$ and $m = 0.1$ at the elastic limit internal pressure $\bar{P}_e = 0.348650$)

Aynı tüp için $n = 1.3$ ve $m = -0.9$ parametre değeri kullanıldığında ise akmanın dış yüzeyden başladığı görülmüştür. Bu duruma ait boyutsuz kritik iç basınç (26) nolu denklik kullanılarak $\bar{P}_e = 0.392744$ olarak hesaplanır. İntegrasyon sabitleri ise $\bar{C}_1 = 1.3626 \times 10^{-3}$ ve $\bar{C}_2 = 8.38635 \times 10^{-4}$ olarak elde edilir. Hesaplanan boyutsuz gerilme ve yer değıştirme dağılımları Şekil 4'te gösterilmektedir. Bu şekilde görüldüğü gibi tüpün dış yüzeyinde, $r = b$ de, $\phi = 1$ olmaktadır.

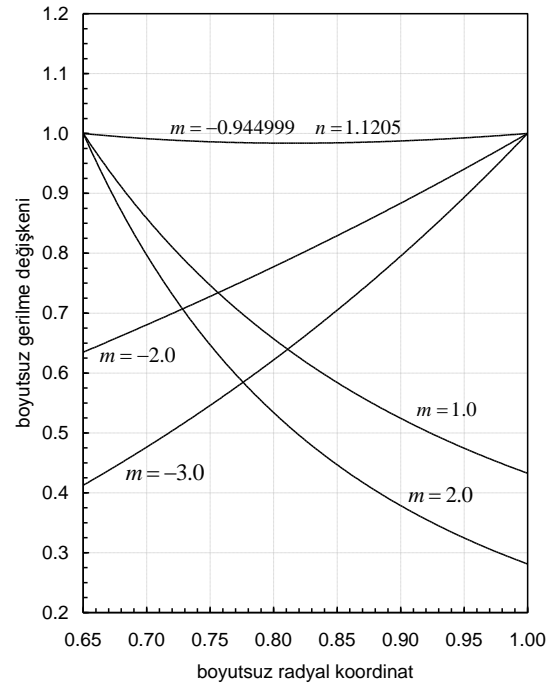


Şekil 4. Elastik limit iç basınç altındaki ($\bar{P}_e = 0.392744$) fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış bir tüpte ($\bar{a} = 0.65, n = 1.3$ ve $m = -0.9$) boyutsuz yer değiştirme ve gerilmeler (The distributions of displacement and stresses in an FGM tube of $\bar{a} = 0.65, n = 1.3$ and $m = -0.9$ at the elastic limit internal pressure $\bar{P}_e = 0.392744$)

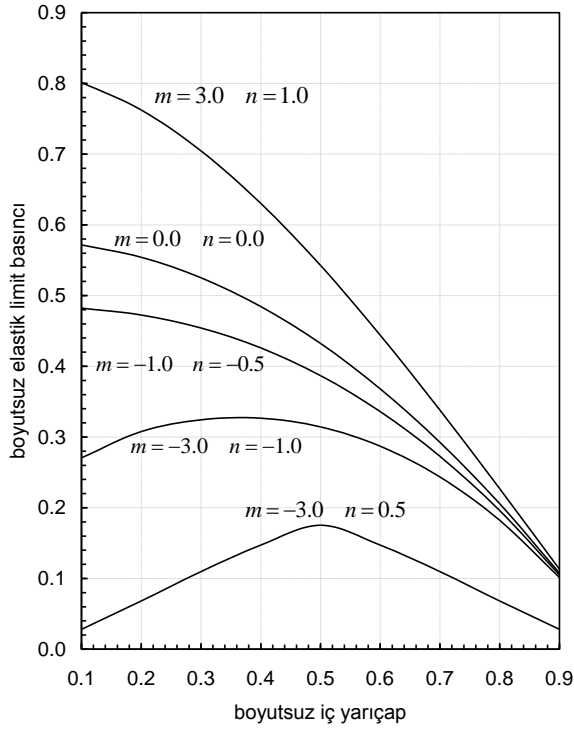


Şekil 5. Elastik limit iç basınç altındaki ($\bar{P}_e = 0.4$) fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış bir tüpte ($\bar{a} = 0.65, n = 1.1205$ ve $m = -0.944999$) boyutsuz yer değiştirme ve gerilmeler (The distributions of displacement and stresses in an FGM tube of $\bar{a} = 0.65, n = 1.1205$ and $m = -0.944999$ at the elastic limit internal pressure $\bar{P}_e = 0.4$)

Akmanın tüpün her iki yüzeyinden aynı anda başlamasına yol açan parametre değerlerini bulmak için (25) ve (26) denkliklerinin aynı anda çözülmesi gerekmektedir. Bu çözüm için fonksiyonel derecelendirme parametrelerinden birinin (m veya n) ya da elastik limit iç basıncının (P_e) verilmesi gerekmektedir. Kalan iki bilinmeyen (25) ve (26) denkliklerinin aynı anda çözümü ile bulunabilir. Örneğin $\bar{a} = 0.65$ ve $n = 1.1205$ değerleri kullanıldığında söz konusu denkliklerin sayısal çözümü sonucu $m = -0.944999$ ve $\bar{P}_e = 0.4$ olarak bulunur. Aynı tüpte $\bar{P}_e = 0.4$ için (25) ve (26) denkliklerinin sayısal çözümünden $m = -0.944999$ ve $n = 1.1205$ olarak bulunur. Yine aynı şekilde $m = -0.944999$ verildiğinde çözüm $n = 1.1205$ ve $\bar{P}_e = 0.4$ olarak elde edilir. Bu değerler kullanılarak hesaplanan boyutsuz gerilme ve yer değiştirme dağılımları Şekil 5'te gösterilmektedir. İntegrasyon sabitleri de $\bar{C}_1 = 1.25935 \times 10^{-3}$ ve $\bar{C}_2 = 9.41886 \times 10^{-4}$ olarak bulunmuştur. Şekilde görüldüğü gibi tüpün iç ve dış yüzeyinde $\phi = 1$ olmakta, bu da akmanın her iki yüzeyden de aynı anda başladığını göstermektedir. Şekil 6'da ise fonksiyonel derecelendirme parametresi m nin boyutsuz gerilme değişkeni ϕ nin dağılımı üzerine etkileri gösterilmiştir. Hesaplamalarda $\bar{a} = 0.65$ ve $n = 1.1205$ olarak alınmıştır. Son olarak, Şekil 7'de farklı n ve m parametreleri için boyutsuz elastik limit iç basıncın farklı boyutsuz iç yarıçaplardaki değişimi verilmektedir. Bu şekilde $n = 0.0$ ve $m = 0.0$ değerleri için çizilen eğri homojen tüp davranışını göstermektedir.



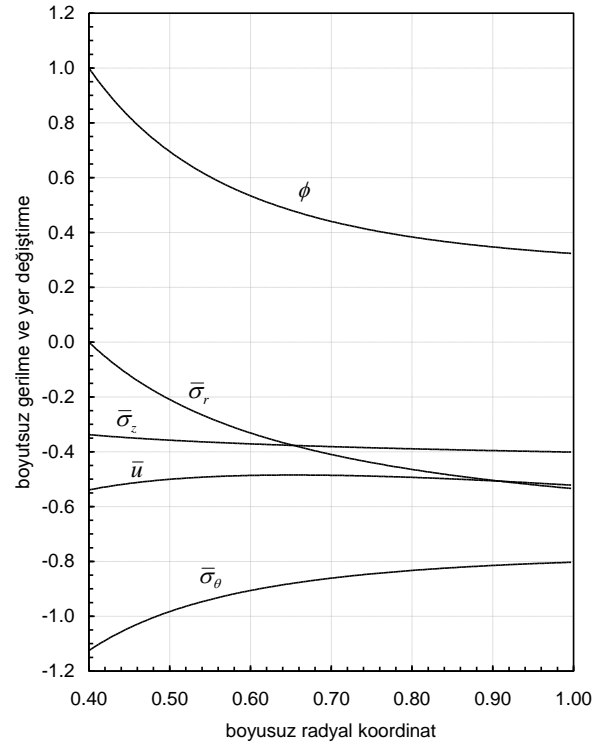
Şekil 6. İç basınç altındaki fonksiyonel derecelendirilmiş bir tüpte ($\bar{a} = 0.65, n = 1.1205$) boyutsuz gerilme değişkeninin farklı m parametre değerleri için radyal koordinat boyunca dağılımı (Variation of yield variable in an internally pressurized FGM tube ($\bar{a} = 0.65, n = 1.1205$) using m as a parameter)



Şekil 7. Değişik n ve m parametre değerleri için boyutsuz elastik limit iç basıncının (\bar{P}_e) boyutsuz iç yarıçapa göre değişimi (Variation of elastic limit internal pressure \bar{P}_e with dimensionless inner radius using n and m as parameters)

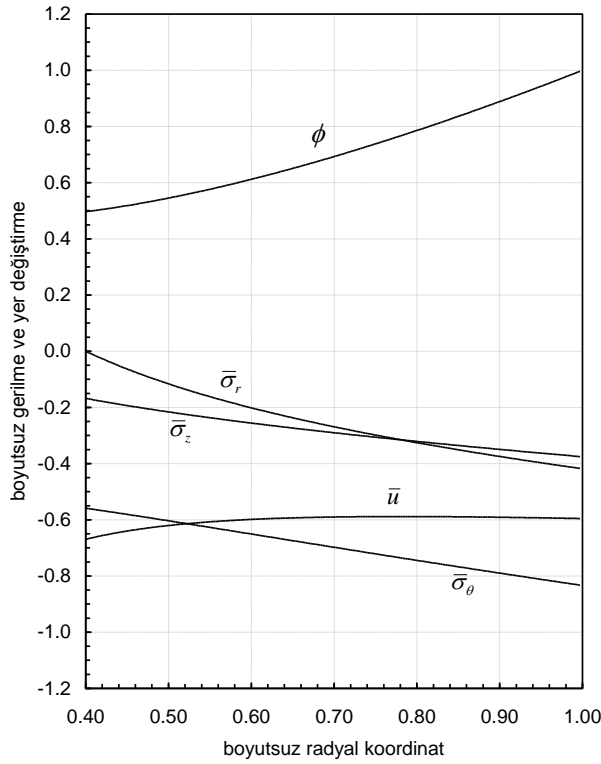
3.2. Dış Basınç Durumu (External Pressure Case)

Burada, iç yarıçapı $\bar{a} = 0.4$ olan dış basınç altındaki fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış olan tüp incelenecektir. $n = 0.3$ ve $m = 0.1$ fonksiyonel derecelendirme parametreleri için akma iç yüzeyden başlar ve boyutsuz kritik dış basınç (25) denkliği kullanılarak $\bar{P}_e = 0.534562$ olarak hesaplanır. Bu basınç değeri için integrasyon sabitleri ise (18) ve (19) denklemleri kullanılarak $\bar{C}_1 = -7.73126 \times 10^{-4}$ ve $\bar{C}_2 = -2.50898 \times 10^{-4}$ olarak elde edilir. Bu basıncın neden olduğu boyutsuz yer değiştirme ve gerilme dağılımları Şekil 8'de verilmiştir. Görüldüğü gibi iç yüzeyde ($r = a$) boyutsuz gerilme değişkeni $\phi = 1$ değerine sahiptir.



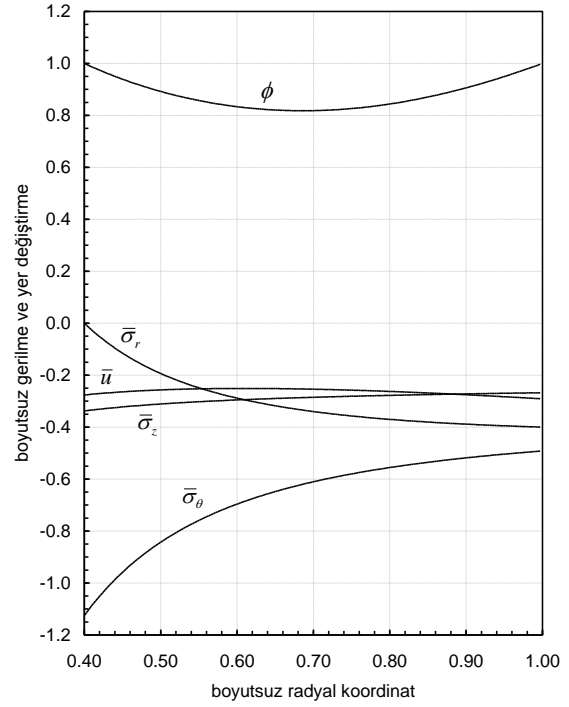
Şekil 8. Elastik limit dış basınç altındaki ($\bar{P}_e = 0.534562$) fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış bir tüpte ($\bar{a} = 0.4, n = 0.3$ ve $m = 0.1$) boyutsuz yer değiştirme ve gerilmeler (The distributions of displacement and stresses in an FGM tube of $\bar{a} = 0.4, n = 0.3$ and $m = 0.1$ at the elastic limit internal pressure $\bar{P}_e = 0.534562$)

Aynı tüp için $n = 1.3$ ve $m = -0.9$ değerleri kullanıldığında ise akmanın önce dış yüzeyde başladığı görülmüştür. Bu değerler için (26) denkliği kullanıldığında boyutsuz kritik dış basınç $\bar{P}_e = 0.418163$ olarak hesaplanır. Integrasyon sabitleri de $\bar{C}_1 = -2.62695 \times 10^{-3}$ ve $\bar{C}_2 = -2.93963 \times 10^{-4}$ olarak bulunur. Hesaplanan değişkenler için elde edilen boyutsuz gerilme ve yer değiştirme dağılımları Şekil 9'da gösterilmektedir. Görüldüğü gibi tüpün dış yüzeyinde, $r = b$ de, $\phi = 1$ olmaktadır.

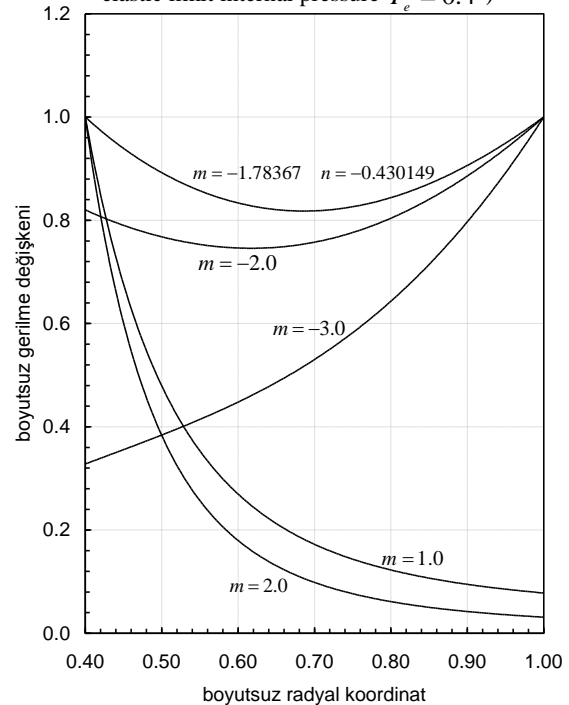


Şekil 9. Elastik limit dış basınç altındaki ($\bar{P}_e = 0.418163$) fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış bir tüpte ($\bar{a} = 0.4, n = 1.3$ ve $m = -0.9$) boyutsuz yer değiştirme ve gerilmeler (The distributions of displacement and stresses in an FGM tube of $\bar{a} = 0.4, n = 1.3$ and $m = -0.9$ at the elastic limit internal pressure $\bar{P}_e = 0.418163$)

Akmanın her iki yüzeyden de aynı anda başlaması için, iç basınç durumunda olduğu gibi, (25) ve (26) nolu denklemlerin aynı anda çözülmesi gerekmektedir. Bu denklemler $\bar{P}_e = 0.4$ dış basınç değeri için çözüldüğünde kritik fonksiyonel derecelendirme parametreleri $n = -0.430149$ ve $m = -1.78367$ olarak bulunur. Bu değerler için integrasyon sabitleri de $\bar{C}_1 = -2.14971 \times 10^{-3}$ ve $\bar{C}_2 = -1.05968 \times 10^{-3}$ olarak hesaplanır. Bu parametre ve basınç değerleri için boyutsuz yer değiştirme ve gerilme dağılımları Şekil 10'da verilmiştir. Şekil incelendiğinde boyutsuz gerilme değişkeninin iç ve dış yüzeyde 1 e eşit olduğu görülebilir. Şekil 11'de ise fonksiyonel derecelendirme parametresi m nin boyutsuz gerilme değişkeni dağılımı üzerine etkileri gösterilmiştir. Hesaplamalarda $\bar{a} = 0.4$ ve $n = -0.430149$ olarak alınmıştır. Son olarak farklı n ve m parametreleri için boyutsuz elastik limit dış basıncın farklı boyutsuz iç yarıçaplarıdaki değişimi Şekil 12 de verilmektedir. Söz konusu şekilde $n = 0.0$ ve $m = 0.0$ değerleri için çizilen eğri homojen tüp davranışını göstermektedir.



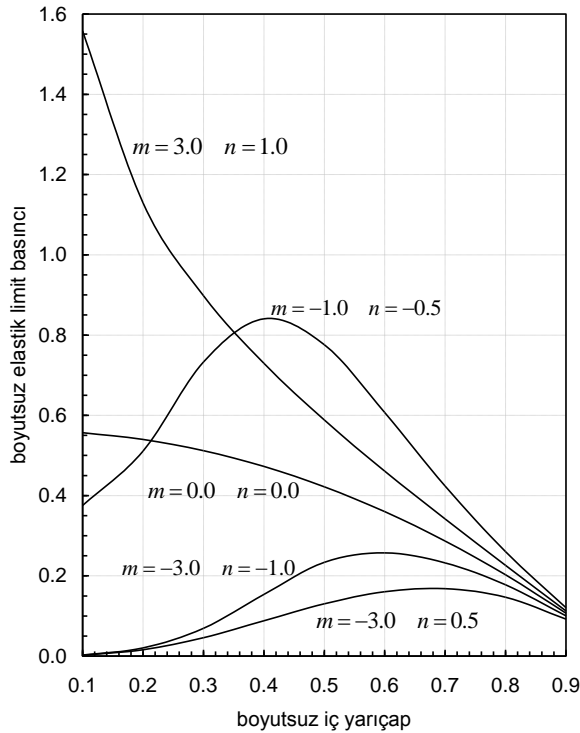
Şekil 10. Elastik limit dış basınç altındaki ($\bar{P}_e = 0.4$) fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış bir tüpte ($\bar{a} = 0.4, n = -0.430149$ ve $m = -1.78367$) boyutsuz yer değiştirme ve gerilmeler (The distributions of displacement and stresses in an FGM tube of $\bar{a} = 0.4, n = -0.430149$ and $m = -1.78367$ at the elastic limit internal pressure $\bar{P}_e = 0.4$)



Şekil 11. Dış basınç altındaki fonksiyonel derecelendirilmiş bir tüpte ($\bar{a} = 0.4, n = -0.430149$) boyutsuz gerilme değişkeninin farklı m parametre değerleri için radyal koordinat boyunca dağılımı (Variation of yield variable in an internally pressurized FGM tube ($\bar{a} = 0.4, n = -0.430149$) using m as a parameter)

4. SONUÇ (CONCLUSION)

Bu çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış basınç altındaki uzun tüplerin akma davranışı incelenmiştir. Bu tip tüplerdeki akma davranışının homojen malzemeden imal edilmiş tüplerden farklı olduğu belirlenmiştir. Yapılan analizlerde, seçilen parametre değerlerine göre iç veya dış radyal basınç durumu için akmanın tüpün farklı bölgelerinden başlayabileceği belirlenmiştir. Söz konusu akma durumları ayrı ayrı ele alınmış ve farklı tüp geometrileri için akmaya yol açacak elastik limit basınç değeri analitik olarak hesaplanmıştır.



Şekil 12. Değişik n ve m parametre değerleri için boyutsuz elastik limit dış basıncının (\bar{P}_e) boyutsuz iç yarıçapa göre değişimi (Variation of elastic limit external pressure \bar{P}_e with dimensionless inner radius using n and m as parameters)

5. SEMBOLLER LİSTESİ (LIST OF SYMBOLS)

r, θ, z	silindirik koordinatlar
a, b	tüpün iç ve dış yarıçapı
C_i	integrasyon sabitleri
E	elastisite modülü
E_0	referans elastisite modülü
ν	Poisson oranı
u	radyal yerdeğiştirme
ε_i	şekil değiştirme bileşenleri

σ_i	gerilme bileşenleri
σ_0, σ_y	başlangıç ve daha sonraki akma gerilmesi
n, m	fonksiyonel derecelendirme parametreleri
ϕ	boyutsuz gerilme değişkeni
σ_C	referans akma gerilmesi
P	basınç

6. KAYNAKLAR (REFERENCES)

- Alagöz H., Gülgeç M. ve Konez A., "Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler ve kullanım alanları" *Mühendis ve Makine*, 532, (2004).
- Timoshenko S.P. ve Goodier J.N., "Theory of Elasticity", 3. baskı, *McGraw Hill*, New York, (1970).
- Uğural A.C. ve Fenster S.K., "Advanced Strength and Applied Elasticity", 3. baskı, *Prentice Hall International*, Londra, (1995).
- Boresi A.P., Schmidt R.J. ve Sidebottom O.M., "Advanced Mechanics of Materials", 5. baskı, *Wiley*, New York, (1993).
- Parker A.P., "Autofrettage of open-end tubes - Pressures, stresses, strains, and code comparisons", *Journal of Pressure Vessel Technology - Transactions of the ASME*, 123: 271-281, (2001).
- Perry J. ve Aboudi J., "Elasto-plastic stresses in thick walled cylinders", *Journal of Pressure Vessel Technology - Transactions of the ASME*, 125: 248-252, (2003).
- Obata Y. ve Noda N., "Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally graded material", *Journal of Thermal Stresses*, 17: 471-487, (1994).
- Reddy J.N. ve Chin C.D., "Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates", *Journal of Thermal Stresses*, 21: 593-626, (1998).
- Zimmerman R.W. ve Lutz M.P., "Thermal stresses and thermal expansion in a uniformly heated functionally graded cylinder", *Journal of Thermal Stresses*, 22: 177-188, (1999).
- Jabbari M., Sohrabpour S. ve Eslami M.R., "Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 79: 493-497, (2002).
- Akis T., "Isı etkisi altındaki fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış uzun tüplerde plastik akmanın başlaması", *Gazi Üniversitesi Müh. Mim. Fak. Dergisi*, 21: 737-743, (2007).
- Eraslan A.N., "Stresses in FGM pressure tubes under non-uniform temperature distribution",

- Structural Engineering and Mechanics*, 26: 393-408, (2007).
13. Akis T., “Elastoplastic analysis of functionally graded spherical pressure vessels”, *Computational Materials Science*, 46: 545-554, (2009).
14. Topal S. ve Gulgec M., “Thermal stress analysis of an FGM cylinder under the effect of convection and radially varying temperature distribution” *Materials Science Forum*, 631-632: 23-28, (2010).
15. Hill R., “The Mathematical Theory of Plasticity”, *Clarendon Press*, Oxford, (1950).