MSU Fen Bil. Dergi., Cilt 5, Sayı 2, s 471-477 *Araştırma Makalesi/ Research Article*
MSU J. of Sci., Volume 5, Issue 2, p 471-477 DOI : 10.18586/msufbd.351271

Düzlemsel Bezier Eğrilerinin S(2) Denklik Şartları

Muhsin İNCESU[1], Osman GÜRSOY[2]
[1]Elementary Mathematics Education Department, Education Faculty, Muş Alparslan University, Muş.
[2] Mathematics Department, Education Faculty, Maltepe University, Istanbul.
✉: m.incesu@alparslan.edu.tr

Geliş (Received):11.11.2017 Düzeltme (Revision):25.11.2017 Kabul (Accepted):30.11.2017

ÖZ

Bu çalışmada R^2 de vektörlerden oluşan iki sistemin, yine R^2 de tüm benzerlik dönüşümlerinin grubu olan G=S(2) grubuna göre denklik şartlarının; bu vektörlerin G-invaryant rasyonel fonksiyonlar cismi olan $R(x_1, x_2, \dots, x_k)^{S(2)}$ cisminin üreteçleri cinsinden ifade edilmesi çalışılmıştır. Böylece R^2 de verilen düzlemsel Bezier eğrilerinin S(2) grubuna göre denklik şartları da ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Benzerlik dönüşümleri, Bezier eğrileri, denklik koşulları, İnvaryantlar, üreteçler

The S(2) equivalence Conditions of Planar Bezier Curves

ABSTRACT

In this paper it is studied that the equivalence conditions of two systems consisted of vectors according to the group G=S(2) of similarity transformations in R^2 in terms of the generator invariants of the field G-invariant rational functions $R(x_1, x_2, \dots, x_k)^{S(2)}$. So the equivalence conditions of two splanar Bezier curves are expressed.

Keywords: Bezier curves, Equivalence conditions, Similarity transformations, Generators, Invariants
AMS: 13A50 14L24 03D50 51L10

GİRİŞ

Uygulamada Kurşun [1], Yaprak [2] gibi örneklerden de anlaşılacağı gibi özellikle haritaların elde edilmesi için, NAVSTAR GPS sisteminden elde edilen dataların ülke koordinatlarına dönüştürülmesinde; S. Özer [3] örneğindeki gibi nonlineer dağılan dalgaların incelenmesi için Korteweg-de Vries denkleminin adi diferensiyel denkleme indirgen-mesinde; Kai tai Fang [4], L X Wang [5] çalışmalarına göre parmak izlerinin analizinde; Martin Dresner [6] den görülebileceği gibi, uçakla seyahat eden yolcuların tercih ve profillerinin benzerliklerinde; Horikawa [7, 8] örneklerinde olduğu gibi görüntü işleme ve Pattern Recognition süreçlerinde ve daha pek çok alanda benzerlik dönüşümleri kullanıl-maktadır. İnvaryant teori açısından O(n) grubunu 1897 de E. Study incelemiş, daha sonra O(n) grubu için noktaların tam invaryant sistemini Hermann Weyl [9] 1946 da vermiştir. 1988 de, D. Khadjiev ve R. Aripov [10] tüm öklid hareketlerinin grubu E(n) için bu problemi çözmüştür. Invaryant teori açısından bu problem Minkowski space time grubu için İ.Oren [11], GL(n,R) de diferensiyel eğriler için Y. Sagiroglu [12], GL(n,C) deki tensör alt cebiri ve O(n,C) için Schrijver [13] tarafından çalışılmıştır. Bundan önceki çalışmalarımızda Benzerlik dönüşümleri ve bu dönüşümlere göre invaryant rasyonel fonksiyonlar ile bu fonksiyonların üreteç kümeleri [14] de, noktaların lineer olan benzerlik dönüşümlerine göre denklik şartları [15] de verilmiştir. Bu çalışmada da düzlemde benzerlik dönüşümlerinin lineer olmayanları da kapsayacak şekilde tamamının grubu olan S(2) grubuna göre denklik şartları genişletilmektedir.

Tanım 1.1. G bir grup ve $G : X$ etkisi verilmiş olsun. Eğer, $\exists g \in G$ öyle ki $x_2 = gx_1$ ise $x_1, x_2 \in X$ noktalarına G-denk noktalar denir. $x_1 \overset{G}{\sim} x_2$ ile gösterilir [15].

Tanım 1.2. X de $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ ve $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ noktalar sistemi ve $G : X$ etkisi verilmiş olsun. Eğer her $i = 1, 2, \dots, k$ için bir $g \in G$, $y_i = gx_i$ olacak biçimde bulunabilirse $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ ve $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ noktalar sistemine G- denk sistem denir ve $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \overset{G}{\approx} \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ şeklinde gösterilir [15].

Tanım 1.3. İki vektör arasında tanımlanan iç çarpım $\langle , \rangle$ olmak üzere,

$$Gr(x_1, \dots, x_k) = \begin{bmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \dots & \langle x_1, x_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_k, x_1 \rangle & \dots & \langle x_k, x_k \rangle \end{bmatrix} \quad (4)$$

matrisine $\{x_1, \dots, x_k\}$ sisteminin Gram matrisi denir [16].

Teorem 1.1. F bir benzerlik dönüşümü ise her $x \in R^2$ için $\exists \lambda \in R$, $g \in O(2)$, $b \in R^2$ öyle ki

$$F(\mathbf{x}) = \lambda g x + b \quad (1)$$

yazılabilir [14].

Teorem 1.2. k tane vektör için S(2) invaryant rasyonel fonksiyonlar cisminin üreteçleri

1. $k \le 2$ ise $\{1\}$ dir.
2. $k \ge 3$ ise $\left\{\dfrac{\langle x_i - x_1, x_j - x_1\rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle}\right\}$ dir.Burada

$i = 2,...,k$, $j = 2,...,k$ ve $i \le j$ dir [14].

Tanım 1.4. Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ olan bir Bezier eğrisi, $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(t)$$

ile tanımlanır. Burada

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i$$

olarak tanımlanan Bernstein taban polinomlarıdır.

Teorem 1.3. B(t), Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ olan bir Bezier eğrisi ve F herhangi bir afin dönüşüm ise

$F\left(\sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(t)\right) = \sum_{i=0}^{n} F(b_i) B_i^n(t)$ dir[17].

Bu teorem Bezier eğrileri için çok önemli bir teoremdir. Bunun nedeni bir Bezier eğrisini afin dönüşümler altında incelemek için yalnızca kontrol noktalarını incelemek yeterlidir. İnvaryant teori açısından da bir Bezier eğrisinin invaryantını çalışmak, onun kontrol noktalarının invaryantlarını çalışmak anlamındadır. Buna göre çalışmamızda önce noktalar sisteminin denklik şartlarını inceleyeceğiz.

Noktaların S(2)-Denklik Şartları

Önerme 2.1. R^2 de keyfi x ve y vektörleri her zaman S(2)- denkdir.

İspat. $\lambda = 1$, $I \in O(2)$ ve $y - x = b \in R^2$ seçilirse denk oldukları görülür. ♦

Teorem 2.1.

1- $x_2 \ne x_1$ ve $y_2 \ne y_1$ ise $\{x_1, x_2\} \overset{S(2)}{\approx} \{y_1, y_2\}$

2- $x_2 \ne x_1$ ve $y_2 = y_1$;veya $x_2 = x_1$ ve $y_2 \ne y_1$ ise $\{x_1, x_2\} \overset{S(2)}{\not\approx} \{y_1, y_2\}$ dir. Yani, denk olamazlar.

İspat.1. $x_2 \ne x_1$ ve $y_2 \ne y_1$ olsun. Bu durumda $\|x_2 - x_1\| \ne 0$ dır. $\lambda = \frac{\|y_2 - y_1\|}{\|x_2 - x_1\|}$ seçilirse $\|y_2 - y_1\| = \|\lambda(x_2 - x_1)\|$ yazılabilir. Buradan $\exists g \in O(2)$ öyle ki, $y_2 - \lambda g x_2 = y_1 - \lambda g x_1$ elde edilir. Bu elde edilen $y_1 - \lambda g x_1$ vektörünü b vektörü olarak alırsak,

$$y_1 = \lambda g x_1 + b$$

$$y_2 = \lambda g x_2 + b$$

olur ki bu ise $\{x_1, x_2\} \overset{S(2)}{\approx} \{y_1, y_2\}$ olduklarını gösterir

2. $x_2 \ne x_1$ ve $y_2 = y_1$ ve $\{x_1, x_2\} \overset{S(2)}{\approx} \{y_1, y_2\}$ olsun. Bu durumda $\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle \ne 0$, $\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1\rangle = 0$ dır. Ayrıca bir $\lambda > 0$, $g \in O(2)$ ve $b \in R^2$ vardır öyle ki, $y_2 - y_1 = \lambda g(x_2 - x_1)$ dir.

$\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1\rangle = \lambda^2 \langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle$

dir. Buradan $\lambda > 0$ ve $\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle \ne 0$ olduğundan $\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1\rangle \ne 0$ olur ki buradan $y_2 \ne y_1$ çelişkisi elde edilir. böylece $\{x_1, x_2\} \overset{S(2)}{\not\approx} \{y_1, y_2\}$ dir, yani denk olamazlar.

İkinci durumda benzer şekilde gösterilir. ♦

Teorem 2.2. R^2 de $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_k\}$ sistemleri için

1- $\exists i = 2,...,k$ için $x_i = x_1$, $y_i \ne y_1$ veya $x_i \ne x_1$, $y_i = y_1$ ise $\{x_1, \dots, x_k\} \overset{S(2)}{\not\approx} \{y_1, \dots, y_k\}$ denk olamazlar.

2- $\exists i = 2$, k için $x_i = x_1$, $y_i = y_1$ ise $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_k\}$ denklik şartı R^2 de k-1 vektörün denklik şartına indirgenir. Yani, $x_i = x_1$, $y_i = y_1$ ise $\{x_1, \dots, x_k\} \overset{S(2)}{\approx} \{y_1, \dots, y_k\}$ dir ancak ve ancak, $\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k\} \overset{S(2)}{\approx} \{y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_k\}$ise .

3- $x_i \ne x_1$, $y_i \ne y_1$; $i = 2,...,k$ ise

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{rank}(\|x_2 - x_1 \quad x_3 - x_1 \quad \cdots \quad x_k - x_1\|) = r_1 \\ \operatorname{rank}(\|y_2 - y_1 \quad y_3 - y_1 \quad \cdots \quad y_k - y_1\|) = r_2 \end{array}\right\}$$

olmak üzere

i) $r_1 = r_2 = 2$ ise $\{x_1, \dots, x_k\} \overset{S(2)}{\approx} \{y_1, \dots, y_k\}$ dir ancak ve ancak $\dfrac{\langle x_i - x_1, x_j - x_1\rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle} = \dfrac{\langle y_i - y_1, y_j - y_1\rangle}{\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1\rangle}$ $i \le j$; $i, j = 2,...,k$ dir.

ii) $r_1 = r_2 = 1$ ise, $\{x_1, \dots, x_k\} \overset{S(2)}{\approx} \{y_1, \dots, y_k\}$ dir ancak ve ancak $\dfrac{\langle x_2 - x_1, x_j - x_1\rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle} = \dfrac{\langle y_2 - y_1, y_j - y_1\rangle}{\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1\rangle}$; $j = 2,3,...k$ dir.

iii) $r_1 \ne r_2$ ise $\{x_1, \dots, x_k\} \overset{S(2)}{\not\approx} \{y_1, \dots, y_k\}$ denk olamazlar.

İspat.2.

1-Bir önceki teoremin genelenmiş halidir. $\exists i = 2,...,k$ için $x_i = x_1$, $y_i \ne y_1$ ise $\{x_1, \dots, x_k\} \overset{S(2)}{\not\approx} \{y_1, \dots, y_k\}$ denk olamadıklarını gösterelim. Varsayalım ki bunlar denk olsunlar. Bu durumda $\exists g \in O(2)$, $\lambda > 0$ ve $b \in R^2$ için,

$y_i = \lambda g x_i + b$ dir. Burada $x_i = x_1$ ise $y_i = y_1$ olur ki bu hipotezle çelişir. Benzer şekilde $y_i = y_1$, $x_i \neq x_1$ ise, $\{x_1, \dots, x_k\} \underset{\not\approx}{\overset{S(2)}{}} \{y_1, \dots, y_k\}$ denk olamadıklarını gösterelim. Varsayalım ki bunlar denk olsunlar. Bu durumda $\exists g \in O(2)$, $\lambda > 0$ ve $b \in R^2$ için, $y_i = \lambda g x_i + b$ dir. g ortogonal dönüşüm olduğundan $x_i = \frac{1}{\lambda} g^T (y_i - b)$ dir. $y_i = y_1$ olduğundan $x_i = x_1$ elde edilir ki, bu da yine hipotezle çelişir. O halde $\exists i = 2,\dots,k$ için $y_i = y_1$, $x_i \neq x_1$ veya $x_i = x_1$, $y_i \neq y_1$ ise $\{x_1, \dots, x_k\} \underset{\not\approx}{\overset{S(2)}{}} \{y_1, \dots, y_k\}$ dir, yani denk olamazlar.

2- $\exists i = 2,\dots,k$ için $y_i = y_1$, $x_i = x_1$ ve $\{x_1, \dots, x_k\} \underset{\approx}{\overset{S(2)}{}} \{y_1, \dots, y_k\}$ olsun. Bu durumda $\exists g \in O(2)$, $\lambda > 0$ ve $b \in R^2$ için $y_j = \lambda g x_j + b$; $j = 1,2,\dots,k$ dir. Buradan $y_j = \lambda g x_j + b$; $j = 1,2,\dots,i-1,i+1,\dots k$ olduğu görülür. Böylece,
$\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k\} \underset{\approx}{\overset{S(2)}{}} \{y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_k\}$
dir. Tersine,
$\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k\} \underset{\approx}{\overset{S(2)}{}} \{y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_k\}$
olsun. O halde $\exists g \in O(2)$, $\lambda > 0$ ve $b \in R^2$ için, $y_j = \lambda g x_j + b$; $j = 1,2,\dots,i-1,i+1,\dots k$ dir. $y_i = y_1$, $x_i = x_1$ olduğundan $y_j = \lambda g x_j$; $j = 1,2,\dots,k$ dir. Böylece,
$\{x_1, \dots, x_k\} \underset{\approx}{\overset{S(2)}{}} \{y_1, \dots, y_k\}$ elde edilmiş olur.

3- i) $x_i \neq x_1$, $y_i \neq y_1$; $i = 2,\dots,k$ olmak üzere $r_1 = r_2 = 2$ ve $\{x_1, \dots, x_k\} \underset{\approx}{\overset{S(2)}{}} \{y_1, \dots, y_k\}$ olsun. O halde $\exists \lambda \in R^*$, $g \in O(2)$ ve $b \in R^2$ öyle ki, $s = 1,2,..,k$ için $y_s = \lambda g x_s + b$ dir. Buradan, $i \leq j$; $i, j = 2,\dots,k$ için $\frac{\langle y_i - y_1, y_j - y_1 \rangle}{\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1 \rangle}$ ifadelerinde $s = 1,2,..,k$ için $y_s = \lambda g x_s + b$ eşitlikleri yerlerine konulursa

$$\frac{\langle y_i - y_1, y_j - y_1 \rangle}{\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1 \rangle} = \frac{\langle x_i - x_1, x_j - x_1 \rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle}$$

elde edilir. Tersine, $r_1 = r_2 = 2$ ve ancak $\frac{\langle x_i - x_1, x_j - x_1 \rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle} = \frac{\langle y_i - y_1, y_j - y_1 \rangle}{\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1 \rangle}$; $i \leq j$; $i, j = 2,\dots,k$ eşitlikleri verilsin. $\{x_1, \dots, x_k\} \underset{\approx}{\overset{S(2)}{}} \{y_1, \dots, y_k\}$ olduklarını gösterelim. Verilen eşitliklerden $i \leq j$; $i, j = 2,\dots,k$ için $\frac{\langle y_i - y_1, y_j - y_1 \rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle} = \lambda^2$ olmak üzere

$$\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1 \rangle = \lambda^2 \langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle$$

veya $\langle y_i - y_1, y_j - y_1 \rangle = \langle \lambda(x_i - x_1), \lambda(x_j - x_1) \rangle$ (2) eşitlikleri elde edilir. $\{x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1\}$ ve $\{y_2 - y_1, \dots, y_k - y_1\}$ vektör sistemleri lineer bağımlı ve $r_1 = r_2 = 2$ olduğundan Varsayalım $\{x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1\}$ sisteminde lineer bağımsız olan vektörler $\{x_i - x_1, x_j - x_1\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{vmatrix} \langle \lambda(x_i - x_1), \lambda(x_i - x_1) \rangle & \langle \lambda(x_i - x_1), \lambda(x_j - x_1) \rangle \\ \langle \lambda(x_j - x_1), \lambda(x_i - x_1) \rangle & \langle \lambda(x_j - x_1), \lambda(x_j - x_1) \rangle \end{vmatrix} \neq 0$$

dır. Buna göre verilen (2) eşitliklerinden

$$\begin{vmatrix} \langle y_i - y_1, y_i - y_1 \rangle & \langle y_i - y_1, y_j - y_1 \rangle \\ \langle y_j - y_1, y_i - y_1 \rangle & \langle y_j - y_1, y_j - y_1 \rangle \end{vmatrix} \neq 0$$

olur. Böylece $\{y_2 - y_1, \dots, y_k - y_1\}$ sisteminde $\{y_i - y_1, y_j - y_1\}$ vektörleri lineer bağımsızdır. Bu durumda

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \alpha_{2i}(x_i - x_1) + \alpha_{2j}(x_j - x_1) \\ &\vdots \\ x_k - x_1 &= \alpha_{ki}(x_i - x_1) + \alpha_{kj}(x_j - x_1) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= \beta_{2i}(y_i - y_1) + \beta_{2j}(y_j - y_1) \\ &\vdots \\ y_k - y_1 &= \beta_{ki}(y_i - y_1) + \beta_{kj}(y_j - y_1) \end{aligned} \quad (3)$$

yazılabilir.

Şimdi $\{\lambda(x_i - x_1), \lambda(x_j - x_1)\}, \{y_i - y_1, y_j - y_1\}$ vektörlerini

$$\lambda(x_i - x_1) = (\lambda(x_{i1} - x_{11}), \lambda(x_{i2} - x_{12}))$$
$$\lambda(x_j - x_1) = (\lambda(x_{j1} - x_{11}), \lambda(x_{j2} - x_{12}))$$
$$y_i - y_1 = (y_{i1} - y_{11}, y_{i2} - y_{12})$$
$$y_j - y_1 = (y_{j1} - y_{11}, y_{j2} - y_{12})$$

biçiminde yazarsak,

$$\| \lambda(x_i - x_1) \quad \lambda(x_j - x_1) \| = \begin{bmatrix} \lambda(x_{i1} - x_{11}) & \lambda(x_{j1} - x_{11}) \\ \lambda(x_{i2} - x_{12}) & \lambda(x_{j2} - x_{12}) \end{bmatrix}$$

$$\| y_i - y_1 \quad y_j - y_1 \| = \begin{bmatrix} y_{i1} - y_{11} & y_{j1} - y_{11} \\ y_{i2} - y_{12} & y_{j2} - y_{12} \end{bmatrix}$$

matrislerini göz önüne aldığımızda

$$\| \lambda(x_i - x_1) \quad \lambda(x_j - x_1) \|^T \| \lambda(x_i - x_1) \quad \lambda(x_j - x_1) \| = \begin{vmatrix} \langle \lambda(x_i - x_1), \lambda(x_i - x_1) \rangle & \langle \lambda(x_i - x_1), \lambda(x_j - x_1) \rangle \\ \langle \lambda(x_j - x_1), \lambda(x_i - x_1) \rangle & \langle \lambda(x_j - x_1), \lambda(x_j - x_1) \rangle \end{vmatrix}$$

yazabiliriz.

Benzer şekilde

$$\| y_i - y_1 \quad y_j - y_1 \|^T \| y_i - y_1 \quad y_j - y_1 \| = \begin{vmatrix} \langle y_i - y_1, y_i - y_1 \rangle & \langle y_i - y_1, y_j - y_1 \rangle \\ \langle y_j - y_1, y_i - y_1 \rangle & \langle y_j - y_1, y_j - y_1 \rangle \end{vmatrix}$$

dir. (2) eşitliklerinden

$$\left\|\lambda(x_i - x_1) \quad \lambda(x_j - x_1)\right\|^T \left\|\lambda(x_i - x_1) \quad \lambda(x_j - x_1)\right\| = \left\|y_i - y_1 \quad y_j - y_1\right\|^T \left\|y_i - y_1 \quad y_j - y_1\right\|$$

eşitliği elde edilir. $\left\{\lambda\left(x_i - x_1\right), \lambda\left(x_j - x_1\right)\right\}$ vektörleri lineer bağımsız olduğundan $\left\|\lambda\left(x_i - x_1\right) \quad \lambda\left(x_j - x_1\right)\right\|$ determinantı sıfırdan farklı ve tersinirdir. Benzer şekilde $\left\{y_i - y_1, y_j - y_1\right\}$ vektörleri de lineer bağımsız olduklarından $\left\|y_i - y_1 \quad y_j - y_1\right\|$ de tersinir-dir. Bu durumda bir g matrisi mevcut ve $\left\|y_i - y_1 \quad y_j - y_1\right\| = g\left\|\lambda\left(x_i - x_1\right) \quad \lambda\left(x_j - x_1\right)\right\|$dir.

Bu eşitliği bir önceki eşitlikte yerine yazarsak,

$$\left\|\lambda(x_i - x_1) \quad \lambda(x_j - x_1)\right\|^T \left\|\lambda(x_i - x_1) \quad \lambda(x_j - x_1)\right\| =$$
$$= \left\|\lambda(x_i - x_1) \quad \lambda(x_j - x_1)\right\|^T g^T g \left\|\lambda(x_i - x_1) \quad \lambda(x_j - x_1)\right\|$$

elde edilir. Burada eşitliğin her iki tarafını , soldan $\left(\left\|\lambda\left(x_i - x_1\right) \quad \lambda\left(x_j - x_1\right)\right\|^T\right)^{-1}$ile sağdan da $\left(\left\|\lambda\left(x_i - x_1\right) \quad \lambda\left(x_j - x_1\right)\right\|\right)^{-1}$ ile çarparsak, $I = g^T g$ elde edilir ki bu, g nin ortogonal olduğunu gösterir. Dolayısıyla $g \in O(2)$ dir.

$\left\|y_i - y_1 \quad y_j - y_1\right\| = g\left\|\lambda\left(x_i - x_1\right) \quad \lambda\left(x_j - x_1\right)\right\|$ olduğundan

$$\begin{aligned} y_i - y_1 &= \lambda g\left(x_i - x_1\right) \\ y_j - y_1 &= \lambda g\left(x_j - x_1\right) \end{aligned} \tag{44}$$

elde edilir. Buradan ve (3) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \lambda\left(x_2 - x_1\right) &= \alpha_{2i}\lambda\left(x_i - x_1\right) + \alpha_{2j}\lambda\left(x_j - x_1\right) \\ &\vdots \\ \lambda\left(x_k - x_1\right) &= \alpha_{ki}\lambda\left(x_i - x_1\right) + \alpha_{kj}\lambda\left(x_j - x_1\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g\lambda(x_2 - x_1) &= \alpha_{2i}(y_i - y_1) + \alpha_{2j}(y_j - y_1) \\ &\vdots \\ g\lambda(x_k - x_1) &= \alpha_{ki}(y_i - y_1) + \alpha_{kj}(y_j - y_1) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $s = 2, \ldots, k$ için

$$y_s - y_1 = \beta_{si}\left(y_i - y_1\right) + \beta_{sj}\left(y_j - y_1\right)$$

ve $\lambda g\left(x_s - x_1\right) = \alpha_{si}\left(y_i - y_1\right) + \alpha_{sj}\left(y_j - y_1\right)$

elde edilmiş olur. Bu iki vektörün birbirine eşit olması, ancak $s = 2, \ldots, k$ için $\alpha_{si} = \beta_{si}$ ve $\alpha_{sj} = \beta_{sj}$ eşitliklerinin var olmasına bağlıdır. Şimdi bu eşitliklerin var olduğunu gösterelim: (3) eşitliğinden $s = 2, \ldots, k$ için

$$\begin{aligned} \left\langle\lambda\left(x_i - x_1\right), \lambda\left(x_s - x_1\right)\right\rangle &= \left\langle\lambda\left(x_i - x_1\right), \lambda\left(\alpha_{si}\left(x_i - x_1\right) + \alpha_{sj}\left(x_j - x_1\right)\right)\right\rangle \\ &= \alpha_{si}\left\langle\lambda\left(x_i - x_1\right), \lambda\left(x_i - x_1\right)\right\rangle + \alpha_{sj}\left\langle\lambda\left(x_i - x_1\right), \lambda\left(x_j - x_1\right)\right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle\lambda\left(x_j - x_1\right), \lambda\left(x_s - x_1\right)\right\rangle &= \left\langle\lambda\left(x_j - x_1\right), \lambda\left(\alpha_{si}\left(x_i - x_1\right) + \alpha_{sj}\left(x_j - x_1\right)\right)\right\rangle \\ &= \alpha_{si}\left\langle\lambda\left(x_i - x_1\right), \lambda\left(x_i - x_1\right)\right\rangle + \alpha_{sj}\left\langle\lambda\left(x_i - x_1\right), \lambda\left(x_j - x_1\right)\right\rangle \end{aligned}$$

ve

$$\langle y_i - y_1, y_s - y_1\rangle = \beta_{si}\langle y_i - y_1, y_i - y_1\rangle + \beta_{sj}\langle y_i - y_1, y_j - y_1\rangle$$
$$\langle y_j - y_1, y_s - y_1\rangle = \beta_{si}\langle y_j - y_1, y_i - y_1\rangle + \beta_{sj}\langle y_j - y_1, y_j - y_1\rangle$$

yazılabilir. Bu lineer denklemlerin çözümünden

$$\alpha_{si} = \frac{\left\langle\lambda\left(x_i - x_1\right), \lambda\left(x_s - x_1\right)\right\rangle\left\langle\lambda\left(x_j - x_1\right), \lambda\left(x_j - x_1\right)\right\rangle - \left\langle\lambda\left(x_i - x_1\right), \lambda\left(x_j - x_1\right)\right\rangle\left\langle\lambda\left(x_j - x_1\right), \lambda\left(x_s - x_1\right)\right\rangle}{\left\langle\lambda\left(x_i - x_1\right), \lambda\left(x_i - x_1\right)\right\rangle\left\langle\lambda\left(x_j - x_1\right), \lambda\left(x_j - x_1\right)\right\rangle - \left\langle\lambda\left(x_i - x_1\right), \lambda\left(x_j - x_1\right)\right\rangle^2}$$
$$= \frac{\begin{vmatrix} \left\langle\lambda\left(x_i - x_1\right), \lambda\left(x_s - x_1\right)\right\rangle & \left\langle\lambda\left(x_i - x_1\right), \lambda\left(x_j - x_1\right)\right\rangle \\ \left\langle\lambda\left(x_j - x_1\right), \lambda\left(x_s - x_1\right)\right\rangle & \left\langle\lambda\left(x_j - x_1\right), \lambda\left(x_j - x_1\right)\right\rangle \end{vmatrix}}{\det Gr\left(\lambda\left(x_i - x_1\right), \lambda\left(x_j - x_1\right)\right)}$$

$$\alpha_{sj} = \frac{\left\langle\lambda\left(x_i - x_1\right), \lambda\left(x_i - x_1\right)\right\rangle\left\langle\lambda\left(x_j - x_1\right), \lambda\left(x_s - x_1\right)\right\rangle - \left\langle\lambda\left(x_i - x_1\right), \lambda\left(x_s - x_1\right)\right\rangle\left\langle\lambda\left(x_j - x_1\right), \lambda\left(x_i - x_1\right)\right\rangle}{\left\langle\lambda\left(x_i - x_1\right), \lambda\left(x_i - x_1\right)\right\rangle\left\langle\lambda\left(x_j - x_1\right), \lambda\left(x_j - x_1\right)\right\rangle - \left\langle\lambda\left(x_i - x_1\right), \lambda\left(x_j - x_1\right)\right\rangle^2}$$
$$= \frac{\begin{vmatrix} \left\langle\lambda\left(x_i - x_1\right), \lambda\left(x_i - x_1\right)\right\rangle & \left\langle\lambda\left(x_i - x_1\right), \lambda\left(x_s - x_1\right)\right\rangle \\ \left\langle\lambda\left(x_j - x_1\right), \lambda\left(x_i - x_1\right)\right\rangle & \left\langle\lambda\left(x_j - x_1\right), \lambda\left(x_s - x_1\right)\right\rangle \end{vmatrix}}{\det Gr\left(\lambda\left(x_i - x_1\right), \lambda\left(x_j - x_1\right)\right)}$$

ve

$$\beta_{si} = \frac{\left\langle y_i - y_1, y_s - y_1\right\rangle\left\langle y_j - y_1, y_j - y_1\right\rangle - \left\langle y_i - y_1, y_j - y_1\right\rangle\left\langle y_j - y_1, y_s - y_1\right\rangle}{\left\langle y_i - y_1, y_i - y_1\right\rangle\left\langle y_j - y_1, y_j - y_1\right\rangle - \left\langle y_i - y_1, y_j - y_1\right\rangle^2}$$
$$= \frac{\begin{vmatrix} \left\langle y_i - y_1, y_s - y_1\right\rangle & \left\langle y_i - y_1, y_j - y_1\right\rangle \\ \left\langle y_j - y_1, y_s - y_1\right\rangle & \left\langle y_j - y_1, y_j - y_1\right\rangle \end{vmatrix}}{\det Gr\left(y_i - y_1, y_j - y_1\right)}$$

$$\beta_{sj} = \frac{\left\langle y_i - y_1, y_i - y_1\right\rangle\left\langle y_j - y_1, y_s v\right\rangle - \left\langle y_i - y_1, y_s - y_1\right\rangle\left\langle y_j - y_1, y_i - y_1\right\rangle}{\left\langle y_i - y_1, y_i - y_1\right\rangle\left\langle y_j - y_1, y_j - y_1\right\rangle - \left\langle y_i - y_1, y_j - y_1\right\rangle^2}$$
$$= \frac{\begin{vmatrix} \left\langle y_i - y_1, y_i - y_1\right\rangle & \left\langle y_i - y_1, y_s - y_1\right\rangle \\ \left\langle y_j - y_1, y_i - y_1\right\rangle & \left\langle y_j - y_1, y_s - y_1\right\rangle \end{vmatrix}}{\det Gr\left(y_i - y_1, y_j - y_1\right)}$$

eşitlikleri elde edilir. (2) eşitlikleri kullanılarak $\alpha_{si} = \beta_{si}$ ve $\alpha_{sj} = \beta_{sj}$ oldukları görülür. Böylece, $s = 2, \ldots, k$ için $y_s - \lambda g x_s = y_1 - \lambda g x_1$ olur. $\left(y_1 - \lambda g x_1\right) \in R^2$ İfadesine b dersek, $s = 1, \ldots, k$ için $y_s = \lambda g x_s + b$ elde edilir. Buna göre $\{x_1, \ldots, x_k\} \overset{S(2)}{\approx} \{y_1, \ldots, y_k\}$ dir.

ii) $r_1 = r_2 = 1$ ve $\{x_1, \ldots, x_k\} \overset{S(2)}{\approx} \{y_1, \ldots, y_k\}$ olsun.

$$\frac{\left\langle x_2 - x_1, x_j - x_1\right\rangle}{\left\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\right\rangle} = \frac{\left\langle y_2 - y_1, y_j - y_1\right\rangle}{\left\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1\right\rangle} \quad ; \quad j = 2, 3, \ldots k$$

eşitliklerinin mevcut olduğunu gösterelim. $\{x_1, \ldots, x_k\} \overset{S(2)}{\approx} \{y_1, \ldots, y_k\}$ olduğundan $\exists g \in O(2)$, $\lambda > 0$ ve $b \in R^2$ için, $y_i = \lambda g x_i + b$; $i = 1, 2, \ldots, k$ dir. $r_1 = r_2 = 1$ olduğundan her iki vektör sisteminde de bir tane lineer bağımsız vektör var demektir. O halde lineer bağımsız olan vektörler $\exists s = 2, \ldots, k$ için $\left\{x_s - x_1\right\}$ ve $\left\{y_s - y_1\right\}$ olsun. Bu durumda,

$$x_2 - x_1 = l_2(x_s - x_1)$$
$$\vdots$$
$$x_k - x_1 = l_k(x_s - x_1)$$

ve (4)

$$y_2 - y_1 = m_2(y_s - y_1)$$
$$\vdots$$
$$y_k - y_1 = m_k(y_s - y_1)$$

yazılabilir. Buna göre,

$$\frac{\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1\rangle}{\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1\rangle} = \frac{m_2}{m_2} = \frac{l_2}{l_2}$$

$$\frac{\langle y_2 - y_1, y_3 - y_1\rangle}{\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1\rangle} = \frac{m_3}{m_2} = \frac{l_3}{l_2}$$
$$\vdots$$
$$\frac{\langle y_2 - y_1, y_k - y_1\rangle}{\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1\rangle} = \frac{m_k}{m_2} = \frac{l_k}{l_2}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan da,

$$\frac{\langle x_2 - x_1, x_j - x_1\rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle} = \frac{\langle y_2 - y_1, y_j - y_1\rangle}{\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1\rangle} \quad ; \quad j = 2,3,...,k$$

bulunur. Ayrıca burada, $r_1 = r_2 = 1$ ve $\{x_2 - x_1, ..., x_k - x_1\}$ ve $\{y_2 - y_1, ..., y_k - y_1\}$ vektörleri (4) biçiminde yazıldığında $\{x_1, \dots, x_k\} \overset{S(2)}{\approx} \{y_1, \dots, y_k\}$ ise

$$\frac{l_2}{l_2} = \frac{m_2}{m_2} \;;\; \frac{l_3}{l_2} = \frac{m_3}{m_2} \;;\; \dots ;\; \frac{l_k}{l_2} = \frac{m_k}{m_2}$$

elde edilir. Tersine, $r_1 = r_2 = 1$ ve

$$\frac{\langle x_2 - x_1, x_j - x_1\rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle} = \frac{\langle y_2 - y_1, y_j - y_1\rangle}{\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1\rangle} \quad ; \quad j = 2,3,...k$$

eşitlikleri mevcut olsun. $\{x_1, \dots, x_k\} \overset{S(2)}{\approx} \{y_1, \dots, y_k\}$ olduğunu gösterelim. Yani, $\{x_2 - x_1, ..., x_k - x_1\}$ ve $\{y_2 - y_1, ..., y_k - y_1\}$ vektörleri (4) biçiminde yazıldığında $\frac{l_2}{l_2} = \frac{m_2}{m_2} \;;\; \frac{l_3}{l_2} = \frac{m_3}{m_2} \;;\; \dots ;\; \frac{l_k}{l_2} = \frac{m_k}{m_2}$ iken $\{x_1, \dots, x_k\} \overset{S(2)}{\approx} \{y_1, \dots, y_k\}$ olduğunu gösterelim: $r_1 = r_2 = 1$ ve $\{x_2 - x_1, ..., x_k - x_1\}$ ve $\{y_2 - y_1, ..., y_k - y_1\}$ sistemleri için (4) eşitlikleri verilsin. her zaman $\{x_s\} \overset{S(2)}{\approx} \{y_s\}$ dir. Buna göre, $\exists g \in O(2)$, $\lambda > 0$ ve $b \in R^2$ için, $y_s = \lambda g x_s + b$ dir. $\frac{l_2}{l_2} = \frac{m_2}{m_2}, \frac{l_3}{l_2} = \frac{m_3}{m_2}$, $\frac{l_k}{l_2} = \frac{m_k}{m_2}$ ve (4) eşitliklerinden $j = 2,3,\dots,k$ için

$$m_j = \frac{m_2}{l_2} l_j$$

elde edilir. Burada $\frac{m_2}{l_2} = \sqrt{\frac{\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1\rangle}{\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle}} > 0$ dır. $\frac{m_2}{l_2}\lambda = \tilde{\lambda}$ dersek $\tilde{\lambda} > 0$ dır. Şimdi $y_s = \lambda g x_s + b$ olduğundan $b = y_s - \lambda g x_s$ ve

$$y_2 - y_1 = m_2(y_s - y_1) = \frac{m_2}{l_2} l_2(\lambda g(x_s - x_1)) = \tilde{\lambda} g(x_2 - x_1)$$
$$\vdots$$
$$y_k - y_1 = m_k(y_s - y_1) = \frac{m_2}{l_2} l_k(\lambda g(x_s - x_1)) = \tilde{\lambda} g(x_k - x_1)$$

yazılabilir. Buradan $j = 2,3,...,k$ için, $y_j - y_1 = \tilde{\lambda} g(x_j - x_1)$ bulunur. Bu ifade açıldığında $j = 2,3,\dots,k$ için $y_j - \tilde{\lambda} g x_j = b = y_1 - \tilde{\lambda} g x_1$ olduğu görülür. Sonuç olarak , $j = 1,2,3,\dots,k$ için $y_j = \lambda g x_j + b$ dir. Buna göre $\{x_1, \dots, x_k\} \overset{S(2)}{\approx} \{y_1, \dots, y_k\}$ dir.

ii) $r_1 \neq r_2$ ise

b$\{x_1, \dots, x_k\} \overset{S(2)}{\not\approx} \{y_1, \dots, y_k\}$ denk olamayacağını gösterelim. Bu ranklar sıfır olamaz. Çünkü ranklardan biri 0 olsa, örneğin $rank(\|x_2 - x_1 \quad \cdots \quad x_k - x_1\|) = 0$ olsa, bu durumda $\{x_1, ..., x_k\}$ vektör sistemi $\{x_1\}$ vektöründen ibaret olur ki, bu durum tek vektörün denklik şartında incelenmiştir. O halde ranklardan birinin 1 diğerinin 2 olması durumu söz konusu olabilir. Öncelikli olarak r_1 =1 ve r_2 =2 olsun. Bu durumda $\exists i, j, s = 2,\dots,k$ için $\{x_2 - x_1, ..., x_k - x_1\}$ sisteminde lineer bağımsız olan vektör $\{x_i - x_1\}$, $\{y_2 - y_1, ..., y_k - y_1\}$ sisteminde lineer bağımsız olan vektörler de $\{y_j - y_1, y_s - y_1\}$ olsunlar. O halde,

$$x_2 - x_1 = a_2(x_i - x_1) \text{ ve } y_2 - y_1 = b_{2j}(y_j - y_1) + b_{2s}(y_s - y_1)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$x_k - x_1 = a_k(x_i - x_1) \qquad y_k - y_1 = b_{kj}(y_j - y_1) + b_{ks}(y_s - y_1)$$

(5)

yazabiliriz. Varsayalım ki $\{x_1, \dots, x_k\} \overset{S(2)}{\approx} \{y_1, \dots, y_k\}$ olsun. Bu durumda $\exists g \in O(2)$ ve $\lambda > 0$ için, $y_i = \lambda g x_i$; $i = 1,2,\dots,k$ dir.

Buna göre

$$y_2 - y_1 = \lambda g(x_2 - x_1) = \lambda g a_2(x_i - x_1) = a_2(\lambda g(x_i - x_1)) = a_2(y_i - y_1)$$
$$\vdots$$
$$y_k - y_1 = \lambda g(x_k - x_1) = \lambda g a_k(x_i - x_1) = a_k(\lambda g(x_i - x_1)) = a_k(y_i - y_1)$$

oldukları görülür ki bunun anlamı $\{y_2-y_1,...,y_k-y_1\}$ vektörleri $\{y_i-y_1\}$ vektörü ile ifade edilebilmektedir. Bu ise $r_2=2$ olması ile çelişir. O halde $\{x_1,\ldots,x_k\}\overset{S(2)}{\not\approx}\{y_1,\ldots,y_k\}$ denk olamazlar.

İkinci olarak $r_1=2$ ve $r_2=1$ olsun. Ayrıca, $\exists i,j,s=2,...,k$ için $\{x_2-x_1,...,x_k-x_1\}$ sisteminde lineer bağımsız olan vektörler $\{x_i-x_1,x_j-x_1\}$, $\{y_2-y_1,...,y_k-y_1\}$ sisteminde lineer bağımsız olan vektör de $\{y_s-y_1\}$ olsun. Bu durumda,

$$y_2-y_1=a_2(y_s-y_1)$$
$$\vdots$$
$$y_k-y_1=a_k(y_s-y_1)$$

yazılabilir. Varsayalım ki $\{x_1,\ldots,x_k\}\overset{S(2)}{\approx}\{y_1,\ldots,y_k\}$ olsun. Bu durumda $\exists g\in O(2)$ ve $\lambda>0$ için, $y_i=\lambda g x_i\,;i=1,2,...,k$ dir. Bu ifade matrisel formda

$$\|y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_k\| = g\,\|\lambda x_1 \quad \lambda x_2 \quad \cdots \quad \lambda x_k\|$$

yazılabilir.

Buradan

$\|\lambda x_1 \quad \lambda x_2 \quad \cdots \quad \lambda x_k\| = g^T\,\|y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_k\|$ olur. Bu durumda $i=1,2,...,k$ için $\lambda x_i=g^T y_i$ dir. Böylece,

$$\lambda(x_2-x_1)=g^T(y_2-y_1)=g^T(a_2(y_s-y_1))=a_2(g^T(y_s-y_1))=a_2\lambda(x_s-x_1)$$
$$\vdots$$
$$\lambda(x_k-x_1)=g^T(y_k-y_1)=g^T(a_k(y_s-y_1))=a_k(g^T(y_s-y_1))=a_k\lambda(x_s-x_1)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklere göre $\{x_2-x_1,...,x_k-x_1\}$ vektörleri $\{x_s\}$ vektörü ile ifade edilebilmektedir. Bu ise $rank(\|x_2-x_1 \quad \cdots \quad x_k-x_1\|)=2$ olmasıyla çelişir. Buna göre $\{x_1,\ldots,x_k\}\overset{S(2)}{\approx}\{y_1,\ldots,y_k\}$ varsayımı yanlıştır. Dolayısıyla, $r_1=2$ ve $r_2=1$ durumunda $\{x_1,\ldots,x_k\}\overset{S(2)}{\not\approx}\{y_1,\ldots,y_k\}$ denk olamazlar.♦

Bezier Eğrilerinin Denklik Şartları

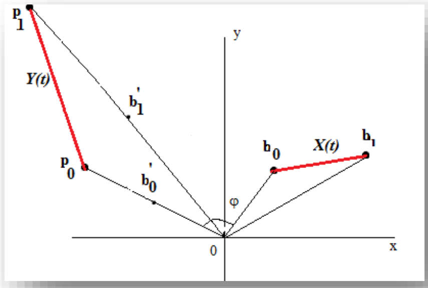
Linear Bezier Eğrileri

Kontrol noktaları b_0,b_1 olan bir lineer Bezier eğrisi, $t\in[0,1]$ olmak üzere

$$B(t)=(1-t)b_0+tb_1$$

olarak tanımlanır. Teorem 1.3 ve Teorem 2.1 den aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 3. Keyfi verilen X(t) ve Y(t) iki lineer Bezier eğrisi her zaman S(2)- denktir.



Kuadratik Bezier Eğrileri

Kontrol noktaları b_0,b_1,b_2 olan bir kuadratik Bezier eğrisi, $t\in[0,1]$ olmak üzere

$$B(t)=(1-t)^2b_0+t(1-t)b_1+t^2b_2$$

olarak tanımlanır. Kuadratik Bezier eğrilerinin kontrol noktalarının rankları 2 olduğundan dolayı Teorem 1.3 ve Teorem 2.2 den aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

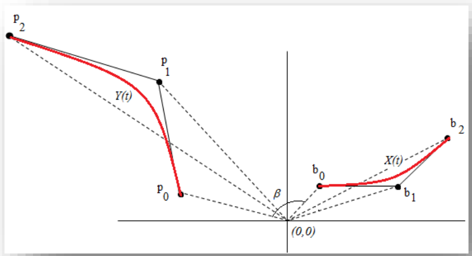
Teorem 3.2. Kontrol noktaları b_0,b_1,b_2 ve p_0,p_1,p_2 olan X(t) ve Y(t) iki kuadratik Bezier eğrisi S(2)- denktir ancak ve ancak

$$\frac{\langle b_1-b_0,b_2-b_0\rangle}{\langle b_1-b_0,b_1-b_0\rangle}=\frac{\langle p_1-p_0,p_2-p_0\rangle}{\langle p_1-p_0,p_1-p_0\rangle}$$

ve

$$\frac{\langle b_2-b_0,b_2-b_0\rangle}{\langle b_1-b_0,b_1-b_0\rangle}=\frac{\langle p_2-p_0,p_2-p_0\rangle}{\langle p_1-p_0,p_1-p_0\rangle}$$

dir.



Kubik Bezier Eğrileri:

Kontrol noktaları b_0,b_1,b_2,b_3 olan bir kubik Bezier eğrisi, $t\in[0,1]$ olmak üzere

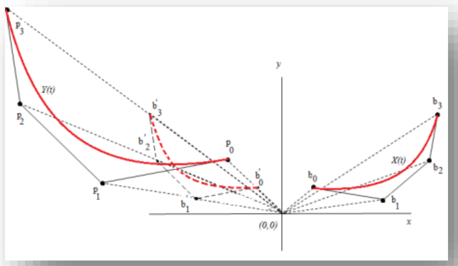
$$B(t)=(1-t)^3b_0+t(1-t)^2b_1+t^2(1-t)b_2+t^3b_3$$

olarak tanımlanır. Kubik Bezier eğrilerinin kontrol noktalarının rankları 2 olduğundan dolayı Teorem 1.3 ve Teorem 2.2 den aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 3.3. Kontrol noktaları b_0,b_1,b_2,b_3 ve p_0,p_1,p_2,p_3 olan X(t) ve Y(t) iki kubik Bezier eğrisi S(2)- denktir ancak ve ancak

$$\frac{\langle b_i-b_0,b_j-b_0\rangle}{\langle b_1-b_0,b_1-b_0\rangle}=\frac{\langle p_i-p_0,p_j-p_0\rangle}{\langle p_1-p_0,p_1-p_0\rangle}$$

$i \leq j;\;\; i, j = 1,2,3$ dir.



Genel Bezier Eğrileri:

Düzlemsel tüm Bezier eğrilerinin kontrol noktalarının rankları 2 olduğundan dolayı Teorem 1.3 ve Teorem 2.2 den aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 3.3. Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ve $p_0, p_1, \dots, p_n$ olan X(t) ve Y(t) iki Bezier eğrisi S(2)-denktir ancak ve ancak

$$\frac{\langle b_i - b_0, b_j - b_0 \rangle}{\langle b_1 - b_0, b_1 - b_0 \rangle} = \frac{\langle p_i - p_0, p_j - p_0 \rangle}{\langle p_1 - p_0, p_1 - p_0 \rangle}$$

$i \leq j;\;\; i, j = 1,2, \dots, n$ dir.

KAYNAKÇA

[1] Kurşun H., Kalkan Y. İstanbul' da farklı tarihlerde yapılmış doğalgaz alt yap haritalarının doğruluk yönünden bir karşılaştırılması, 2. mühendislik ölçmeleri sempozyumu. 23-25 Kasım 2005, İTÜ, s. 111-119.

[2] Yaprak S., Yaprak H. Comparison of GPS stop and go method and electronic tachometry technique in map production Gazi Üniversitesi Journal of Science. 18, 4, 627- 637, 2005.

[3] Özer S. Kortewed'de vries denklemlerinin nümerik çözümü, doktora tezi, İnönü Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü. 1995.

[4] Fang K.T, Liang Y.Z, Yin X.L, Chan K, Lu G.H. critical value determination on similarity of fingerprints, chemometrics and intelligent laboratory systems. 82:1, 236-240, 2006.

[5] Wang L.X., Xiao H. B, Liang X.M, Bi K.S. Vectorial angle method for evaluating the similarity between two chromatographic fingerprints of chinese herb, Acta Pharmaceutica Sinica. 37:9, 713-717, 2002.

[6] Dresner M. Leisure versus business passengers: Similarities, differences, and implications, Journal of Air Transport Menagement. 12, 28-32, 2006.

[7] Yo H. Bispectrum based feature of 2D and 3D images invariant to similarity Transformations, Proc. IEEE. 511-514, 2000.

[8] Horikawa Y. Pattern recognition with invariance to similarity transformations based on the third- order correlation, Proc. 13th. International Conference on Pattern Recognition (ICPR'96). 2, 200-204, 1996.

[9] Weyl H. The Classical groups, their invariants and representations, 2nd ed. with suppl. Princeton, Princeton University Press. 1946.

[10] Khadjiev Dj. An application of the invariant theory to the differential geometry of curves, fan, Tashkent. 1988.

[11] Oren İ. Invariants of points fort he orthogonal groups o(3,1), phd. thesis. Karadeniz Technical University. 2007.

[12] Sağıroğlu Y. Affine differential invariants of parametric curves, ph d. thesis. Karadeniz Technical University. 2002.

[13] Schrijver A., Tensor subalgebras and first fundamental theorems in invariant theory, journal of Algebra, 319, 1305-1319, 2008.

[14] Incesu M., Gursoy O. On similarity invarant rational function fot k vector variables and their genarators in r^2, modelling and application. Theory, 1:1, 37-53, 2016.

[15] Incesu M., Gursoy O., LS(2)-Equivalence conditions of control points and application to planar bezier curves New Trends in Mathematical Science, 5:3, 70-84. 2017.

[16] Greub W. H. Linear algebra, 3rd. Ed., springer verlag berlin heidelberg. Netherland. 1967.

[17] Marsh D. Applied Geometry for computer graphics and cad, springer-verlag london berlin heidelberg, London. 1999.