

Pasternak Zemine Oturan Eksenel Yüke Maruz Homojen Olmayan Kirişin Serbest Titreşimi

Mehmet AVCAR

Süleyman Demirel Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü, Isparta, Türkiye

(Geliş / Received : 12.02.2016 ; Kabul / Accepted : 04.04.2016)

ÖZ

Sunulan çalışmada, elastik zemine oturan eksenel yüke maruz homojen olmayan (HO) malzemelerden oluşan kirişin serbest titreşimi incelenmiştir. Malzemenin homojen olmaması kalınlık doğrultusunda elastisite modülünün üstel fonksiyon şeklinde değişimi ile karakterize edilmiş, yoğunluğun sabit kaldığı varsayılmıştır. Ayrıca, elastik zeminin lineer, homojen ve izotrop olduğu varsayılmış, zeminin kirişe tepkisi iki parametrelili Pasternak modeli kullanılarak modellenmiştir. İlk olarak Bernoulli-Euler kiriş teorisi kullanılarak Pasternak zemine oturan HO kirişin hareket denklemleri elde edilmiştir. Elde edilen denklemler basit mesnetli sınır koşulları için çözülmüştür. Sunulan formülasyonun doğruluğu bir karşılaştırma çalışması yapılarak teyit edilmiştir. HO malzeme özelliklerinin, elastik zemin parametrelerinin ve eksenel yükün kirişin ilk üç moddaki serbest titreşim frekans parametresi değerlerine etkileri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Titreşim, Homojen Olmayan Malzeme, Elastik Zemin, Eksenel Yük, Kiriş

Free Vibration of Non-Homogeneous Beam Subjected to Axial Force Resting on Pasternak Foundation

ABSTRACT

In the present study free vibration of non-homogeneous beam subjected to the axial force resting on elastic foundation has been examined. Non-homogeneity of the material is characterized considering the exponential variation of the Young's modulus along the thickness direction of the beam while the value of density is assumed to remain constant. The foundation medium is assumed to be linear, homogenous and isotropic, and it is modeled by the Pasternak model with two parameters for describing the reaction of the elastic foundation on the beam. Firstly, the equation of motion of non-homogeneous beam subjected to axial force resting on Pasternak foundation is provided within the frame work of Bernoulli-Euler beam theory. The resulting equation is solved according to the simply supported boundary conditions. To show the accuracy of the present results, a comparison is performed and a good agreement is achieved. The effects of non-homogeneous material properties, elastic foundation parameters and axial load on the values of frequency parameters of the first three modes are examined.

Key Words: Vibration, Non-homogeneous Material, Elastic Foundation, Axial Load, Beam

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Yapıların modern tasarımı ve analizinde, üst yapı-temel-zemin etkileşimi doğru ve uygulama amaçlarına hizmet edecek basitliğe sahip bir şekilde hesaba katılmalıdır. Bu bağlamda, elastik zemine oturan kiriş kavramı, yapı, geoteknik, karayolu ve demiryolu mühendisliği problemlerinin modellenmesi ve analizi için önemli bir araçtır. Demiryolu hatları, otoyol asfaltları, sürekli mesnetli boru hatları ve şerit temeller elastik zemine oturan kirişlere verilebilecek pratik örneklerdendir [1-3].

Zemin çok karmaşık bir yapıya sahiptir ve bu nedenle zemin davranışını modellemek için çeşitli yaklaşımlar geliştirilmiştir. Bu yaklaşımlar arasında bilimsel çalışmalarda ve uygulamalarda en fazla benimsenen varsayım Winkler zemin modelidir [4-11]. Fakat Winkler tek parametrelili modelinde, zeminin sürekli dağılımlı birbirinden bağımsız doğrusal yaylardan oluştuğu

varsayıldığından, zeminin yüklü ve yüksüz kısımları arasındaki yer değiştirme süreksizliği önemli bir sorun oluşturur, çünkü gerçekte zemin yüzeyi herhangi bir süreksizlik göstermez. Bu nedenle, fiziksel olarak daha hassas ve matematiksel açıdan basit bir model olan Pasternak iki parametrelili zemin modeli geliştirilmiştir [12]. Pasternak modelindeki ilk zemin parametresi Winkler modelindekiyle aynı olup, ikinci parametre ise kayma tabakasının rijitliğidir. Hâlihazırda, iki parametrelili Pasternak zemine oturan kirişlerin serbest titreşimi literatürde oldukça ilgi çeken konulardan biridir. [13-26].

Yukarıda bahsi geçen tüm çalışmalar homojen (H) kirişler için, yani kirişin her bir noktasında mekanik özelliklerinin sabit olduğu varsayımı ile yapılmıştır. Hâlbuki doğada oldukça çok HO malzeme mevcuttur, örneğin kontrplak, kereste, fiber takviyeli plastik doğal olarak HO malzeme ve çelik alaşımlarda yer alan cam epoksi ve bor epoksi yapay olarak HO malzemedir. Bu malzemelerin mekanik özellikleri uzay koordinatlarıyla sürekli ya da süreksiz olarak keyfi bir biçimde değişebilir

*Sorumlu Yazar (Corresponding Author)

e-posta: mehmetavcar@sdu.edu.tr

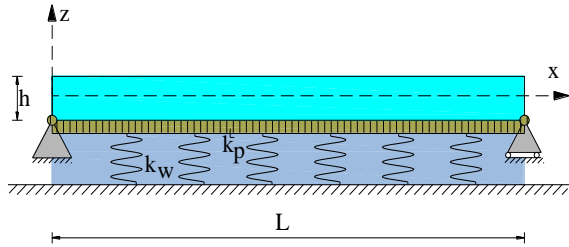
Digital Object Identifier (DOI) : 10.2339/2016.19.4 507-512

[27-29]. HO malzemelerin günümüz mühendislik uygulamalarında ve teknolojilerinde giderek artan kullanımı, araştırmacıları elastik zemine oturan HO kirişlerin titreşim problemlerini incelemeye yöneltmiştir [30-36].

Yapılan literatür araştırmasına göre, Pasternak zemine oturan eksenel yüke maruz ve elastisite modülünün kalınlık doğrultusunda üstel fonksiyon şeklinde değişimi ile karakterize edilen HO malzeme özelliklerine sahip kirişin serbest titreşimi henüz incelenmemiştir. Sunulan çalışmada bu problemin çözümü ele alınmıştır.

2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU VE ÇÖZÜMÜ (FORMULATION AND SOLUTION OF THE PROBLEM)

Uzunluğu L , yüksekliği h olan Pasternak zemine oturan kirişi ele alalım (Şekil 1.)



Şekil 1. Pasternak zemine oturan kiriş (Beam resting on Pasternak foundation)

Pasternak zemine oturan eksenel basınç yüküne maruz H kirişin temel denklemi aşağıdaki şekildedir [16,17,24]:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k_w w - k_p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

Burada, E elastisite modülü, I atalet momenti, P eksenel yük, ρ yoğunluk, A enkesit alanı, k_w Winkler zemin-katsayısı, k_p Pasternak zemin-katsayısı, w çökme, t zamandır. Ayrıca, sunulan çalışmada eksenel yükün basınç olması hali (+), çekme olması ise (-) olarak dikkate alınmıştır.

HO kiriş malzemesi, elastisite modülünün kalınlık doğrultusunda üstel fonksiyon şeklinde değişimiyle karakterize edilmiştir [31,36]:

$$E_1 = E e^{\alpha(\bar{z}-0.5)} \quad (2)$$

Burada, $\bar{z} = z/h$, α homojen olmama parametresi ($-1 \leq \alpha \leq 1$) olup yoğunluğun sabit kaldığı varsayılmıştır.

(2) ifadesi (1)'de dikkate alındığında Pasternak zemine oturan eksenel basınç yüküne maruz HO kirişin hareket denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\lambda \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k_w w - k_p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

Burada λ , HO kirişin eğilme rijitliği olup aşağıdaki tanım geçerlidir:

$$\lambda = E b h^3 \int_{-1/2}^{1/2} \bar{z}^2 e^{\alpha(1-\bar{z})} d\bar{z} \quad (4)$$

(3) denkleminin çözümü aşağıdaki şekilde aranabilir [37]:

$$w(x,t) = a(x)b(t) \quad (5)$$

Burada a ve b sırasıyla zaman ve konumdan bağımsızdır.

(5) ifadesi (1) denkleminde dikkate alındığında aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\lambda a^{iv}(x)b(t) + P a^{ii}(x)b(t) + \rho A a(x)b^{ii}(t) + k_w a(x)b(t) - k_p a^{ii}(x)b(t) = 0 \quad (6)$$

Zamana bağlı fonksiyon aşağıdaki şekildedir:

$$b(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \quad (7)$$

(7) denklemi (6)'da yerine yazılıp bazı matematiksel işlem uygulandıktan sonra aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\lambda a^{iv}(x) + P a^{ii}(x) - \rho A a(x)\omega^2 + k_w a(x) - k_p a^{ii}(x) = 0 \quad (8)$$

(8) denkleminin çözümü aşağıdaki gibi aranır:

$$a(x) = d_1 \sinh(\beta x) + d_2 \cosh(\beta x) + d_3 \sin(\beta x) + d_4 \cos(\beta x) \quad (9)$$

(9) denklemi (8)'te yerine yazıldığında şu denklem elde edilir:

$$\lambda \beta^4 [d_1 \sinh(\beta x) + d_2 \cosh(\beta x) + d_3 \sin(\beta x) + d_4 \cos(\beta x)] + [P - k_p] \beta^2 [d_1 \sinh(\beta x) + d_2 \cosh(\beta x) - d_3 \sin(\beta x) - d_4 \cos(\beta x)] - [\rho A \xi \omega^2 - k_w] [d_1 \sinh(\beta x) + d_2 \cosh(\beta x) + d_3 \sin(\beta x) + d_4 \cos(\beta x)] = 0 \quad (10)$$

İncelenen problemde sınır koşulları basit mesnetli olduğundan aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

$$a(0) = a^{ii}(0) = a(L) = a^{ii}(L) = 0 \quad (11)$$

(11), sırasıyla (9) ve (10) denklemlerinde dikkate alınıp bazı matematiksel işlemlerden sonra Pasternak zemine oturan eksenel basınç yüküne maruz her iki ucu basit mesnetli HO kiriş için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\lambda \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 - [P - k_p] \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 - [\rho A \omega^2 - k_w] = 0 \quad (12)$$

(12) denkleminde Pasternak zemine oturan eksenel basınç yüküne maruz basit mesnetli HO kirişin serbest titreşim frekansı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\omega = \sqrt{\frac{(n\pi)^2 [\lambda(n\pi)^2 - PL^2 + k_p L^2] + k_w L^4}{\rho A L^4}} \quad (13)$$

Burada n , mod sayısıdır.

3. SAYISAL HESAPLAMALAR VE TARTIŞMA (NUMERICAL COMPUTATIONS AND DISCUSSION)

Bu bölümde sunulan problemi incelemek için çeşitli sayısal örnekler verilmiştir. Tüm sayısal hesaplamalarda aşağıdaki boyutsuz parametreler kullanılmıştır:

$$\varpi = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}, \quad T = \frac{PL^2}{(\pi^2 EI)}, \quad K_w = \frac{k_w L^4}{EI}, \quad K_p = \frac{k_p L^2}{\pi^2 EI} \quad (14)$$

3.1. Karşılaştırma Çalışması (Comparative Study)

Çizelge 1’de, Winkler-Pasternak zemine oturan eksenel basınç yüküne maruz homojen kirişin ilk üç mod için elde edilen frekans parametre değerleri Yokoyama[16] çalışmasında sonlu elemanlar yöntemiyle sekiz elemanlı model için elde edilmiş sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar sunulan formülasyonun doğruluğunu kanıtlamaktadır.

Çizelge 1. Winkler-Pasternak zemine oturan eksenel basınç yüküne maruz homojen kirişin frekans parametre değerlerinin karşılaştırılması (Comparison of the values of frequency parameter of homogeneous beam subjected to axial compressive force resting on Winkler-Pasternak foundations)

ϖ				
$K_w = K_p = 0, T = 0$		$K_w = K_p = 0, T = 0.6$		
n	Yokoyama [16]	Sunulan Çalışma	Yokoyama [16]	Sunulan Çalışma
1	9.87	9.870	6.24	6.242
2	39.49	39.478	36.41	36.397
3	88.94	88.826	85.93	85.814
$K_w = 0.6\pi^4, K_p = 0, T = 0.6$ (Winkler Zemin)		$K_w = 0.6\pi^4, K_p = 1, T = 0.6$ (Pasternak Zemin)		
n	Yokoyama [16]	Sunulan Çalışma	Yokoyama [16]	Sunulan Çalışma
1	9.87	9.870	13.96	13.958
2	37.20	37.192	42.11	42.105
3	86.27	86.154	91.21	91.100

3.2. Sayısal Örnekler (Numerical Examples)

Örnek 1. Çizelge 2’de, α homojen olmama parametresinin eksenel basınç yüküne maruz Winkler-Pasternak elastik zemine oturan/oturmayan kirişin, ϖ , serbest titreşim frekans parametre değerlerine etkisi incelenmiştir. Burada eksenel basınç yükü parametresi $T = 0.6$ olarak dikkate alınmıştır. Elde edilen sonuçlardan, α homojen olmama parametresi arttığında her üç durumda da, ϖ , frekans parametre değerlerinin azaldığı görülmüştür. Ayrıca, α homojen olmama parametresinin, ϖ , frekans parametre değerleri üzerinde en yüksek etkiye $\alpha = -1$ olduğunda, en az etkiye $\alpha = 0.5$ olduğunda sahip olduğu bulunmuştur. Elastik zemin etkisi dikkate alındığında, α homojen olmama parametresinin değişiminin, kirişin ϖ , frekans

parametre değerleri üzerindeki etkisinin azaldığı görülmüştür.

Gizelge 2. Winkler-Pasternak zemine oturan eksenel basınç yüküne maruz kirişin ϖ frekans parametre değerlerinin α homojen olmama parametresine göre değişimi (Variation of the values of frequency parameter, ϖ , of beam subjected to axial compressive force resting on Winkler-Pasternak foundations versus non-homogeneity parameter, α)

ϖ					
Zeminsiz ($K_w = 0, K_p = 0$)					
n	$\alpha = -1$	$\alpha = -0.5$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$
1	10.695	8.306	6.242	4.341	2.266
2	50.313	42.486	36.397	31.668	27.991
3	116.073	98.974	85.814	75.726	67.999
Winkler Zemin ($K_w = 0.6\pi^4, K_p = 0$)					
n	$\alpha = -1$	$\alpha = -0.5$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$
1	13.146	11.288	9.870	8.791	7.974
2	50.891	43.169	37.192	32.578	29.016
3	116.324	99.269	86.154	76.111	68.428
Pasternak Zemin ($K_w = 0.6\pi^4, K_p = 1$)					
n	$\alpha = -1$	$\alpha = -0.5$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$
1	16.439	14.995	13.958	13.217	12.688
2	54.585	47.468	42.105	38.091	35.094
3	120.033	103.590	91.100	81.668	74.559

Örnek 2. Çizelge 3’te, K_w ve K_p zemin parametrelerinin eksenel basınç yüküne maruz Winkler-Pasternak elastik zemine oturan H ve HO kirişin, ϖ , titreşim frekans parametre değerlerine etkisi incelenmiştir. Burada homojen olmama parametresi, $\alpha = 1$ ve eksenel basınç parametresi $T=0.6$ olarak dikkate alınmıştır. Elde edilen sonuçlardan, K_w ve K_p zemin parametreleri arttıkça H ve HO kirişin, ϖ , frekans parametre değerlerinin arttığı görülmüştür. Elastik zemin parametrelerinin değişiminin, H ve HO kirişin, ϖ , frekans parametre değerlerine olan etkisinin temel modda (n=1) en yüksek olduğu, fakat mod sayısı arttıkça bu etkinin giderek azaldığı saptanmıştır. Ayrıca, elastik zemin parametrelerinin değişiminin, HO kirişin, ϖ , frekans parametre değerlerine olan etkisi, H kirişin, ϖ , frekans parametre değerlerine olan etkisine kıyasla daha fazla olduğu bulunmuştur. Bunlarla birlikte, Pasternak zeminin H ve HO kirişin, ϖ , frekans parametre değerlerine etkisi Winkler zeminden daha yüksek olduğu görülmüştür.

Çizelge 3. Winkler-Pasternak zemine oturan aksel basınç yüküne maruz kirişin ω frekans parametre değerlerinin K_W ve K_P zemin parametrelerine göre değişimi (Variation of the values of frequency parameter, ω , of beam subjected to axial compressive force resting on Winkler-Pasternak foundations versus elastic foundation parameters, K_W and K_P)

		ω					
K_W	K_P	H Durum			HO Durum		
		n=1	n=2	n=3	n=1	n=2	n=3
		Zeminsiz					
0	0	6.242	36.397	85.814	2.266	27.991	67.999
Winkler Zemin							
$0.4\pi^4$	0	8.828	36.929	86.041	6.641	28.678	68.285
$0.6\pi^4$		9.870	37.192	86.154	7.974	29.016	68.428
π^4		11.678	37.712	86.380	10.126	29.680	68.712
Pasternak Zemin							
$0.4\pi^4$	0.5	11.253	39.478	88.552	9.633	31.895	71.423
$0.6\pi^4$		12.088	39.724	88.662	10.596	32.199	71.559
π^4		13.604	40.212	88.881	12.298	32.798	71.831
$0.4\pi^4$	1	13.241	41.873	90.993	11.896	34.815	74.428
$0.6\pi^4$		13.958	42.105	91.100	12.688	35.094	74.559
π^4		15.290	42.565	91.314	14.140	35.644	74.820

Çizelge 4. Winkler-Pasternak zemine oturan H ve HO kirişlerin frekans parametre değerlerinin T aksel yük parametresine göre değişimi (Variation of the values of frequency parameter, ω , of beam resting on Winkler-Pasternak foundations versus axial load parameter, T)

		ω									
		H Durum					HO Durum				
n		Zeminsiz($K_W = 0, K_P = 0$)					Zeminsiz($K_W = 0, K_P = 0$)				
		$T = -0.6$	$T = -0.3$	$T = 0$	$T = 0.3$	$T = 0.6$	$T = -0.6$	$T = -0.3$	$T = 0$	$T = 0.3$	$T = 0.6$
1		12.484	11.253	9.870	8.258	6.242	15.208	14.214	13.146	11.983	10.695
2		42.336	40.932	39.478	37.969	36.397	54.763	53.685	52.585	51.462	50.313
3		91.740	90.295	88.826	87.333	85.814	120.519	119.423	118.317	117.200	116.073
n		Winkler Zemin($K_W = 0.6\pi^4, K_P = 0$)					Winkler Zemin($K_W = 0.6\pi^4, K_P = 0$)				
		$T = -0.6$	$T = -0.3$	$T = 0$	$T = 0.3$	$T = 0.6$	$T = -0.6$	$T = -0.3$	$T = 0$	$T = 0.3$	$T = 0.6$
1		14.639	13.604	12.484	11.253	9.870	17.021	16.140	15.208	14.214	13.146
2		43.021	41.640	40.212	38.731	37.192	55.294	54.227	53.138	52.027	50.891
3		92.058	90.618	89.155	87.667	86.154	120.762	119.668	118.564	117.449	116.324
n		Pasternak Zemin ($K_W = 0.6\pi^4, K_P = 1$)					Pasternak Zemin ($K_W = 0.6\pi^4, K_P = 1$)				
		$T = -0.6$	$T = -0.3$	$T = 0$	$T = 0.3$	$T = 0.6$	$T = -0.6$	$T = -0.3$	$T = 0$	$T = 0.3$	$T = 0.6$
1		17.655	16.807	15.914	14.968	13.958	19.676	18.918	18.130	17.305	16.439
2		47.333	46.082	44.795	43.471	42.105	58.712	57.708	56.686	55.645	54.585
3		96.702	95.332	93.943	92.532	91.100	124.338	123.276	122.205	121.124	120.033

Örnek 3. Çizelge 4’te, aksel yükün yönü ve şiddetinin Winkler-Pasternak elastik zemine oturan/oturmayan H ve HO kirişin, ω , titreşim frekansı parametre değerlerine etkisi incelenmiştir. Burada homojen olmama parametresi $\alpha = -1$ olarak dikkate alınmıştır. Elde

edilen sonuçlardan, T aksel yük parametresinin çekme olması durumunda kirişin frekans parametrelerinin arttığı, basınç olduğunda ise azaldığı görülmektedir. Aksel yükün değişiminin H ve HO kirişin, ω , frekans parametre değerlerine etkisi, yükün basınç olması

durumunda çekmeye kıyasla daha fazla olduğu ve gözlemlenmiştir. Eksenel yük parametresinin değişiminin kirişin, ω , frekans parametre değerlerine etkisi artan mod sayısı elastik zemin parametrelerinin ve HO malzeme özelliklerinin dikkate alınmasıyla azaldığı görülmüştür.

4. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Sunulan çalışmada, elastik zemine oturan eksenel yüke maruz HO malzemelerden oluşan kirişin serbest titreşimi incelenmiştir. HO malzeme özelliklerinin, elastik zemin parametrelerinin ve eksenel yükün kirişin ilk üç moddaki serbest titreşim frekans parametre değerlerine olan etkilerini göstermek için üç sayısal örnek sunulmuştur.

Kısaca aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

- HO malzeme özelliklerinin, kirişin frekans parametre değerlerine olan etkisi, homojen olmama parametresinin seçimine bağlı olarak değişmektedir
- Elastik zemin parametrelerinin değişiminin, kirişin frekans parametre değerlerine olan etkisi, temel modda ve HO durumda en yüksek etkiye sahiptir
- Pasternak zemin, Winkler zemine kıyasla kirişin frekans parametre değerleri üzerinde daha büyük etkiye sahiptir
- Eksenel yük basınç olduğunda, kirişin frekans parametre değerlerine olan etkisi çekmeye kıyasla daha fazladır.
- Eksenel yükün değerinin değişiminin frekans parametre değerlerine olan etkisi, artan mod sayısı, elastik zemin katsayıları ve HO malzemelerin dikkate alınmasıyla azalmaktadır.

Sonuç olarak, HO malzeme özelliklerinin, eksenel yükün ve elastik zeminin kirişin serbest titreşim frekans parametre değerleri üzerinde önemli etkiye sahip olduğu görülmüştür. Ayrıca, bu makalede analitik olarak elde edilen çözümler, ileriki çalışmalarda sonlu elemanlar veya farklı çözüm yöntemleri ile elde edilecek sonuçlarla kıyaslanabilir.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

- [1] Hetenyi, M., "Beams on Elastic Foundations", *The University of Michigan Press*, Ann Arbor, (1946).
- [2] Selvadurai, A.P.S., "Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction", Amsterdam: Elsevier; (1979).
- [3] Kerr, A.D., "Elastic and viscoelastic foundation models", *Journal of Applied Mechanics*, 31: 3491-498, (1964).
- [4] Winkler, E., "Die Lehre Von Der Elastizität Und Festigkeit, Dominicus", Prague, (1867).
- [5] Eisenberger, M. and Clastornik, J. "Vibration and buckling of beam on a variable Winkler elastic foundation", *Journal of Sound and Vibration*, 115: 233-241, (1987).
- [6] Civalek, Ö. ve Demir, Ç., "Elastik zemine oturan kirişlerin ayırık tekil konvolüsyon ve harmonik diferansiyel quadrature yöntemleriyle analizi", *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 11: 56-71, (2009).
- [7] Motaghian, S., Mofid, M. and Alanjari, P., "Exact solution to free vibration of beams partially supported by an elastic foundation", *Scientia Iranica*, 18: 861-866, (2011).
- [8] Mutman, U., "Free vibration analysis of an Euler beam of variable width on the Winkler foundation using homotopy perturbation method", *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 721294, 9 pages, (2013).
- [9] Ozturk B. and Coskun, S.B., "Analytical solution for free vibration analysis of beam on elastic foundation with different support conditions", *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 470927, 7 pages, (2013).
- [10] Yanık, F. ve Yaylı M.O., "Rijit olmayan sinir koşullarında elastik zemine oturan bir çubuğun eksenel titreşim analizi", *Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 2: 35-44, (2015).
- [11] Emsen E., Mercan K., Akgöz, B. and Civalek O., "Modal analysis of tapered beam-column embedded in Winkler elastic foundation", *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 7: 25-35, (2015).
- [12] Pasternak, P.L., "On a new method of analysis of anelastic foundation by means of two foundation constants", Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu i Arkhitekture, Moscow, (1954).
- [13] Wang, T.M. and Stephens, J.E., "Natural frequencies of Timoshenko beams on Pasternak foundations", *Journal of Sound Vibration*, 51: 149-155, (1977).
- [14] Zhaohua, F. and Cook, R.D., "Beam elements on two-parameter elastic foundations", *Journal of Engineering Mechanics*, 109: 1390-402, (1983).
- [15] Franciosi, C. and Masi, A., "Free vibration of foundation beams on two-parameter elastic soil", *Computers and Structures*, 47: 419-426, (1993).
- [16] Yokoyama, T., "Vibration analysis of Timoshenko beam-columns on two-parameter elastic foundations", *Computers and Structures*, 61: 995-1007, (1996).
- [17] Matsunaga, H., "Vibration and buckling of deep beam-columns on two-parameter elastic foundations", *Journal of Sound and Vibration*, 228: 359-376, (1999).
- [18] Morfidis, K. and Avramidis, I.E., "Formulation of a generalized beam element on a two-parameter elastic foundation with semi-rigid connections and rigid offsets", *Computers and Structures*, 80: 1919-1934, (2002).
- [19] Chen, W.Q., Lü, C.F. and Bian, Z.G., "A mixed method for bending and free vibration of beams resting on a Pasternak elastic foundation", *Applied Mathematical Modelling*, 28: 877-890, (2004).
- [20] Auciello, N.M., "Vibrations of Timoshenko beams on two-parameter elastic soil", *Engineering Transactions*, 56: 187-200, (2008).
- [21] Balkaya, M., Kaya M.O. and Saglamer A., "Analysis of the vibration of an elastic beam supported on elastic soil using the differential transform method", *Archives of Applied Mechanics*, 79: 135 - 146, (2009).
- [22] Civalek, Ö and Öztürk, B., "Free vibration analysis of tapered beam-column with pinned ends embedded in

- Winkler-Pasternak elastic foundation”, *Geomechanics and Engineering*, 2: 45-56, (2010).
- [23] Celep, Z., Güler K. and Demir, F., “Response of a completely free beam on a tensionless Pasternak foundation subjected to dynamic load”, *Structural Engineering and Mechanics*, 37: 61-77, (2011).
- [24] Calio, I., Greco, A., “Free vibrations of Timoshenko beam-columns on Pasternak foundations”, *Journal of Vibration and Control*, 19: 686-696, (2013).
- [25] Lee, J.K., Jeong, S. and Lee, J., “Natural frequencies for flexural and torsional vibrations of beams on Pasternak foundation”, *Soils and Foundations*, 54: 1202–1211, (2014).
- [26] Taha, H.M. and Mohamed, N., “Analysis of stressed Timoshenko beams on two parameter foundations”, *KSCE Journal Of Civil Engineering*, 19: 173-179, (2015).
- [27] Lal, R., Kumar, Y. “Transverse vibrations of nonhomogeneous rectangular plates with variable thickness”, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 20: 264-275, (2013).
- [28] Tounsi, A., Houari, M.S.A, Benyoucef, S. and Bedia E.A.A., “A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates”, *Aerospace Science and Technology*, 24: 209-220, (2013).
- [29] Avcar, M., “Effects of rotary inertia shear deformation and non-homogeneity on frequencies of beam”, *Structural Engineering and Mechanics*, 55: 871-884, (2015).
- [30] Elishakoff, I., “Some unexpected results in vibrations of non-homogeneous beams on elastic foundation”, *Chaos Solitons and Fractals*, 12: 2177–2218, (2001).
- [31] Avcar, M., “Elastik zemin üzerinde bulunan her iki ucu ankastre mesnetli rastgele ve sürekli homojen olmayan kirişin serbest titreşimi”, *Süleyman Demirel Üniversitesi Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi*, 1: 33-38, (2010).
- [32] Cetin D. and Simsek, M., “Free vibration of an axially functionally graded pile with pinned ends embedded in Winkler-Pasternak elastic medium”, *Structural Engineering and Mechanics*, 40: 583-594, (2011).
- [33] Duy H.T, Van T.N. and Noh H.C. “Eigen analysis of functionally graded beams with variable cross-section resting on elastic supports and elastic foundation”, *Structural Engineering and Mechanics*, 52: 1033-1049, (2014).
- [34] Esfahani, S.E., Kiani, Y., Komijani, M. and Eslami, M.R., “Vibration of a temperature dependent thermally pre/postbuckled FGM beam over a nonlinear hardening elastic foundation”, *Journal of Applied Mechanics*, 81, 011004, (2014).
- [35] Akbaş, Ş.D., “Free vibration and bending of functionally graded beams resting on elastic foundation”, *Research on Engineering Structures and Materials*, 1: 25-37, (2015).
- [36] Pan, E., “Exact solution for functionally graded anisotropic elastic composite laminates”, *Journal of Composite Materials*, 37: 1903-1920, (2003).
- [37] Avcar, M. and Saplioglu, K.,” An artificial neural network application for estimation of natural frequencies of beams”, *International Journal of Advanced Computer Sciences and Applications*, 6: 94-102, (2015).