

Bir Üretim Sistemi İçin Üçgenin İç Teğet Çemberinin Merkezi Yardımıyla Bulanık Risk Analizi

Handan AKYAR

Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, 26470 Eskişehir
(Geliş / Received : 19.02.2016 ; Kabul / Accepted : 01.04.2016)

ÖZ

Bulanık sayıların sıralanması ve karşılaştırılması sosyal ve ekonomik sistemler, hava durumu tahmini, optimizasyon ve risk analizi problemleri gibi karar verme problemlerinde önemli bir rol oynar. Bu çalışmada, sol ve sağ yükseklikleri farklı, genelleştirilmiş yamuk bulanık sayıları sıralamak için üçgenin iç teğet çemberinin merkezi ile bulanık sayının sol ve sağ yükseklikleri kullanılarak yeni bir sıralama yöntemi sunulmuştur. Önerilen yöntem kullanılarak bulanık sayıları sıralamak için yeni bir algoritma verilmiştir. Sunulan yöntem literatürdeki mevcut sıralama yöntemlerinin bazı eksikliklerini gidermektedir. Verilen sıralama yöntemi, genelleştirilmiş yamuk ve üçgenel bulanık sayıların yanında aynı ağırlık merkezine sahip genelleştirilmiş üçgenel bulanık sayılar ve gerçel (crisp) sayıları da sıralayabilmektedir. Ayrıca verilen sıralama yönteminin hesaplama değerleri sol ve sağ yükseklikleri farklı, genelleştirilmiş yamuk bulanık sayılar olan bir üretim sistemi için bulanık risk analizi uygulaması yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bulanık risk analizi, Genelleştirilmiş bulanık sayı, Genelleştirilmiş bulanık sayıları sıralama

Fuzzy Risk Analysis Based on the Incenter of a Triangle for a Production System

ABSTRACT

Ordering and ranking fuzzy numbers and their comparisons play a significant role in decision-making problems such as social and economic systems, forecasting, optimization, and risk analysis problems. In this paper, we present a new method for ordering generalized trapezoidal fuzzy numbers with different left and right heights based on the incenter of a triangle with the left and right heights. Using this presented method a new algorithm for ordering fuzzy numbers is given. The proposed method overcomes the certain drawbacks of the existing methods in the literature. The suggested method can order generalized trapezoidal and triangular fuzzy numbers as well as crisp numbers and generalized triangular fuzzy numbers with the same centroid point. We also give an application of the proposed fuzzy ordering method to the fuzzy risk analysis problem for a production system, where the evaluating values are represented by generalized trapezoidal fuzzy numbers with different left and right heights.

Keywords: Fuzzy risk analysis, Generalized fuzzy number, Ranking generalized fuzzy numbers

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Bulanık sayıların sıralanması, risk analizi, optimizasyon, sosyal ve ekonomik sistemler, hava durumu tahmini gibi günlük hayatın birçok alanında önemli bir yere sahiptir [1-8]. Bulanık sayıları sıralamak için ilk yöntemin Jain tarafından sunulmasından bu yana, çeşitli yöntemler çok sayıda araştırmacı tarafından önerilmiştir [9-25]. Sunulan bu yöntemlerin çoğu ağırlık merkezi kavramını kullanmaktadır. Ağırlık merkezi kavramının bulanık sayıların sıralanmasında kullanılması ilk olarak Yager tarafından önerilmiştir [10]. Ancak Yager'in yöntemi, ağırlık merkezinin sadece yatay koordinatını dikkate almakta, bu da yöntemin güvenilirliğini düşürmektedir. Murakami vd., Yager'in yöntemini geliştirerek ağırlık merkezinin her iki koordinatını da kullanan bir başka yöntem sunmuştur [11]. Murakami vd. çalışmasında düşey koordinat ek olarak kullanılsa da, farklı üçgenler aynı ağırlık merkezine sahip olabileceğinden, bu yöntem üçgenel bulanık sayıları dahi düzgün sıralayama-

maktadır. Bu problemin üstesinden gelebilmek için, Cheng ağırlık merkezinin her iki koordinatı ile hesaplanan bir uzaklık indeksinin kullanılmasını önermiştir [12]. Fakat Cheng'in yöntemi y -eksenine göre simetrik olan bulanık sayılar için anlamlı olmayan sonuçlar vermektedir. Chen ve Chen yaptıkları çalışmada, yukarıda söz edilen sonuçların bazı eksikliklerini göstermiş ve bu yöntemlerin gerçel sayıları sıralamadığını da ifade etmiştir [1]. Aynı çalışmada Chen ve Chen bu eksikleri ortadan kaldırmak için üçgenin ağırlık merkezi ile birlikte standart sapmayı da dikkate alan bir sıralama yöntemi vermiştir [1].

Lee ve Chen, bulanık sayılar için standart sapmaya bağlı yeni bir sıralama yöntemi önermiştir [14]. Chen ve Chen, genelleştirilmiş bulanık sayıları sıralamak için aritmetik ortalamadan yararlanarak ve standart sapmayı göz önüne alarak bir skor belirlemiştir [15]. Chen vd., çalışmaları sırasında sol ve sağ yükseklikleri farklı, genelleştirilmiş bulanık sayıları sıralamaktadır [18]. Bu yöntemde verilen bir dizi bulanık sayının belirlediği bölge yardımıyla oluşturulan alanların hesaplanması ve ağırlık merkezi yardımıyla elde edilen skor kullanılmaktadır. Bakar ve

*Sorumlu Yazar (Corresponding Author)

e-posta: hakyar@anadolu.edu.tr

Digital Object Identifier (DOI) : 10.2339/2016.19.4 519-530

Gegov, ağırlık merkezi ve bulanık sayıların yayılımını kullanarak bulanık sayıları sıralamak için bir skor vermiştir [21]. Jiang vd., çalışmalarında Chen vd. ile verilen yöntemin eksikliklerini göstermiş ve bu eksiklikleri gidererek bir dizi genelleştirilmiş bulanık sayının belirlediği bölgeler yardımıyla oluşturulan alanların hesaplanması ve bulanık sayıların yayılımına bağlı yeni bir skor vermiştir [24]. Chutia vd., integral değerlerini kullanarak sol ve sağ yükseklikleri farklı genelleştirilmiş bulanık sayıları sıralamıştır [25]. Düzce, üçgenin dokuz nokta çemberini kullanarak bir başka sıralama yöntemi sunmuştur [23].

Bu çalışmada, bulanık sayıları sıralamak için [5,19] çalışmalarında üçgenin iç teğet çemberi kullanılarak verilen sıralama yöntemlerinin bazı eksiklikleri giderilerek, sol ve sağ yükseklikleri farklı, genelleştirilmiş yamuk bulanık sayılar için yeni bir sıralama yöntemi verilecektir. Bulanık sayıların sıralanmasında kullanılan yöntemlerin çoğu, gerçel sayı olan bir skor belirleyerek bu skor yardımıyla sıralama yapmaktadır. Ancak bir bulanık sayıya bir gerçel sayı karşılık getirerek sıralama yapmak, çoğu zaman bulanık sayıya ait birçok özelliğin kaybolmasına ve mantığa aykırı sıralama sonuçlarının ortaya çıkmasına yol açmaktadır. Bu nedenle çalışmada sunulan yöntemde sol ve sağ yükseklikleri farklı, genelleştirilmiş yamuk bulanık sayılara bir gerçel sayı karşılık getirmek yerine, bu sayılara bir sıralı üçlü karşılık getirilerek sözlük sıralama (lexicographical order) kullanılacaktır.

Çalışmanın ikinci bölümünde bulanık sayılar ve temel özellikleri verildikten sonra, bir üçgenin iç teğet çemberi tanımlanacak ve iç teğet çemberin merkezinin koordinatlarını hesaplamak için kullanılacak formüller verilecektir. Üçüncü bölümde ise, sol ve sağ yükseklikleri farklı, genelleştirilmiş yamuk bulanık sayılar için yeni bir sıralama yöntemi sunulacaktır. Dördüncü bölümde önerilen sıralama yönteminin karşılaştırıldığı bazı sıralama yöntemlerinin hesaplama formülleri kısaca sunulacaktır. Beşinci bölümde sayısal örneklerle verilen yöntemin son yıllarda sunulmuş bazı yöntemlerle karşılaştırılması yapılacaktır. Altıncı bölümde sunulan yöntemin bir üretim sistemi için bulanık risk analizi uygulaması yapılacaktır. Sonuçlar ise yedinci bölümde yer almaktadır.

2. ÖN BİLGİLER (PRELIMINARIES)

2.1. Bulanık Sayılar (Fuzzy Numbers)

Bu bölümde bulanık sayılar ile ilgili sonraki bölümler için gerekli olan bazı temel tanım ve özellikler verilecektir. Bulanık sayılar ile ilgili daha detaylı bilgi için [26,27] incelenebilir.

Bir X kümesi üzerinde \tilde{A} bulanık kümesi, $\tilde{A}:X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu olarak tanımlanır. \tilde{A} fonksiyonu için genellikle $\mu_{\tilde{A}}$ simgesi kullanılır ve \tilde{A} bulanık kümesi her $x \in X$ ögesini $\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]$ ile eşleyen $\mu_{\tilde{A}}:X \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir. Burada $\mu_{\tilde{A}}(x)$

değeri $x \in X$ ögesinin \tilde{A} bulanık kümesine ait olma derecesini göstermektedir.

\tilde{A}, X kümesi üzerinde tanımlı bir bulanık küme olsun. Bu durumda

$$S(\tilde{A}) = \{x \in X: \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\} \quad (1)$$

kümesine \tilde{A} bulanık kümesinin desteği (support'u) denir.

\tilde{A} bulanık kümesinin yüksekliği ise

$$h(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) \quad (2)$$

olarak tanımlanır.

$\alpha \in [0,1]$ ve \tilde{A}, X kümesi üzerinde bir bulanık küme olsun. Bu durumda

$$[\tilde{A}]^{\alpha} = \begin{cases} \{x \in X: \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} & , \alpha \in (0,1] \text{ ise} \\ \text{cl } S(\tilde{A}) & , \alpha = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

kümesine \tilde{A} bulanık kümesinin α -kesmesi denir. Burada $\text{cl } S(\tilde{A})$ ile $S(\tilde{A})$ kümesinin kapanışı gösterilmektedir.

\tilde{A} bulanık kümesi \mathbb{R}^n kümesi üzerinde tanımlı olsun. Eğer her $\alpha \in [0,1]$ için $[\tilde{A}]^{\alpha}$ α -kesme kümeleri konveks küme ise \tilde{A} bulanık kümesine konveks bulanık küme denir.

\mathbb{R} üzerinde tanımlı bir \tilde{A} bulanık kümesi, konveks, $0 < h(\tilde{A}) \leq 1$, $\mu_{\tilde{A}}$ üyelik fonksiyonu üst yarı sürekliliği ve $S(\tilde{A})$ destek kümesi sınırlı ise \tilde{A} bulanık kümesine bir genelleştirilmiş bulanık sayı denir.

Uygulamalarda çoğunlukla üçgensel, yamuk, LR-bulanık sayılar gibi özel tipteki bulanık sayılar kullanılmaktadır. Bu çalışmada üçgensel ve yamuk bulanık sayıların bir genellemesi olan sol ve sağ yükseklikleri farklı genelleştirilmiş yamuk bulanık sayılar üzerinde durulacaktır.

$a \leq b \leq c \leq d$ ve $\omega_L, \omega_R \in (0,1]$ gerçel sayıları verilsin. \tilde{A} genelleştirilmiş bulanık sayısı aşağıdaki üyelik fonksiyonu yardımı ile karakterize edilebilir:

$$\mu_{\tilde{A}}(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow [0,1], \mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \mu_1(x) & , a \leq x \leq b \text{ ise} \\ \mu_2(x) & , b \leq x \leq c \text{ ise} \\ \mu_3(x) & , c \leq x \leq d \text{ ise} \\ 0 & , \text{d.d.} \end{cases}$$

Burada $\mu_1: [a, b] \rightarrow [0, \omega_L]$,

$\mu_2: [b, c] \rightarrow [\min\{\omega_L, \omega_R\}, \max\{\omega_L, \omega_R\}]$ ve

$\mu_3: [c, d] \rightarrow [0, \omega_R]$ sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca μ_1

kesin artan, μ_3 kesin azalan fonksiyon ve $\omega_L < \omega_R$ ise

μ_2 kesin artan, $\omega_L > \omega_R$ ise μ_2 kesin azalan fonksiyondur.

Yukarıdaki gibi verilen \tilde{A} bulanık sayısına *sol ve sağ yükseklikleri farklı genelleştirilmiş bulanık sayı* denir.

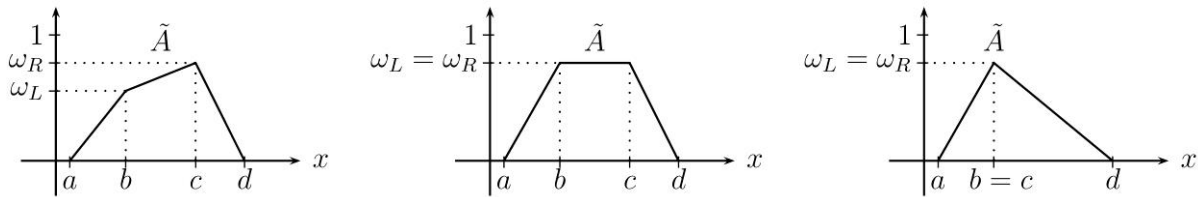
Burada ω_L ve ω_R , \tilde{A} genelleştirilmiş bulanık sayısının sırasıyla sol ve sağ yüksekliklerini göstermektedir.

Eğer μ_1, μ_2 ve μ_3 fonksiyonları lineer ise üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{\omega_L(x-a)}{b-a} & , a \leq x \leq b \text{ ise} \\ \frac{\omega_L(c-b) + (\omega_R - \omega_L)(x-b)}{c-b} & , b \leq x \leq c \text{ ise} \\ \frac{\omega_R(x-d)}{c-d} & , c \leq x \leq d \text{ ise} \\ 0 & , \text{d.d.} \end{cases}$$

Bu durumda \tilde{A} bulanık sayısına *sol ve sağ yükseklikleri farklı genelleştirilmiş yamuk bulanık sayı* denir ve $\tilde{A} = (a, b, c, d; \omega_L, \omega_R)$ ile gösterilir.

Eğer $\omega_L = \omega_R$ ise \tilde{A} bulanık sayısına *genelleştirilmiş yamuk bulanık sayı* adı verilir. Ayrıca $b = c$ ise $\omega_L = \omega_R$ olur. Bu durumda \tilde{A} bulanık sayısına *genelleştirilmiş üçgensel bulanık sayı* denir (bkz Şekil 1).



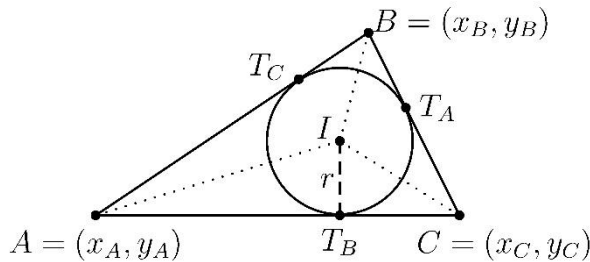
Şekil 1. Sırasıyla sol ve sağ yükseklikleri farklı genelleştirilmiş yamuk bulanık sayı, genelleştirilmiş yamuk bulanık sayı ve genelleştirilmiş üçgensel bulanık sayı (Generalized trapezoidal fuzzy number with different left and right heights, generalized trapezoidal fuzzy number and generalized triangular fuzzy number respectively)

Bu çalışmada tüm sol ve sağ yükseklikleri farklı genelleştirilmiş yamuk bulanık sayılar kümesi \mathbf{F} ile gösterilecektir.

2.2. Bir Üçgenin İç Teğet Çemberi (Incircle of a Triangle)

Bu bölümde bir üçgenin iç teğet çemberi tanımlanarak, iç teğet çemberin merkezinin koordinatları ve yarıçapı ile ilgili gerekli formüller verilecektir.

Teorem 1. ([28]) Bir üçgenin açortay doğruları üçgenin içinde kalan aynı I noktasında kesişir. Bu I noktası üçgenin içinde kalan, üçgenin tüm kenarlarına teğet olan ve iç teğet çember olarak adlandırılan tek çemberin merkezidir.



Şekil 2. ABC üçgeninin iç teğet çemberi, iç teğet çemberinin merkezi I ve yarıçapı r (Incircle of triangle ABC , incenter I and radius r of the incircle)

Teorem 2. (Heron Formülü) Öklid uzayında bir ABC üçgeninin alanı

$$\text{Alan}(ABC) = \sqrt{s(s - |BC|) \cdot (s - |AC|) \cdot (s - |AB|)} \quad (3)$$

formülü ile verilebilir. Burada $s = \frac{|AB| + |BC| + |AC|}{2}$ üçgenin çevresinin yarısıdır.

Aşağıdaki Yardımcı Teorem iç teğet çemberin yarıçapını vermektedir [29].

Yardımcı Teorem 3. Öklid uzayında bir ABC üçgeninin alanı üçgenin iç teğet çemberinin yarıçapı ile üçgenin çevresinin yarısının çarpımına eşittir.

Yardımcı Teorem 3 kullanılarak

$$\text{Alan}(ABC) = rs$$

ya da

$$r = \frac{\text{Alan}(ABC)}{s}$$

yazılabilir. Buradan Teorem 2 kullanılırsa,

$$r = \frac{\sqrt{(s - |BC|) \cdot (s - |AC|) \cdot (s - |AB|)}}{s} \quad (4)$$

formülü elde edilir.

Diğer taraftan, iç teğet çemberin merkezi I , üçgenin üç kenarına da eşit uzaklıkta olduğundan (bkz. Şekil 1) iç teğet çemberin merkezi için bir formül aşağıdaki şekilde verilebilir [30].

Teorem 4. Öklid uzayında bir ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi I ,

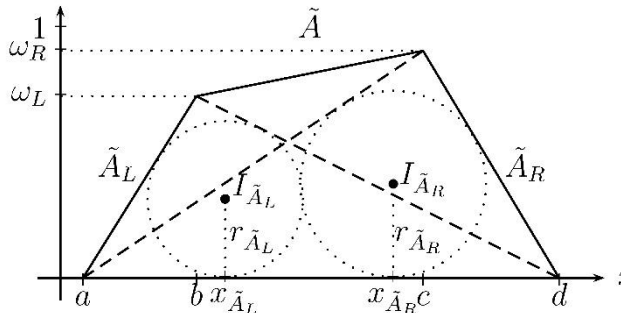
$$I = \frac{|BC| \cdot (x_A, y_A) + |AC| \cdot (x_B, y_B) + |AB| \cdot (x_C, y_C)}{P} \quad (5)$$

eşitliğini sağlar. Burada $P = |BC| + |AC| + |AB|$, ABC üçgeninin çevresinin uzunluğunu göstermektedir.

3. SOL VE SAĞ YÜKSEKLİKLERİ FARKLI GENELLEŞTİRİLMİŞ YAMUK BULANIK SAYILAR İÇİN YENİ BİR SIRALAMA YÖNTEMİ (A NEW METHOD TO ORDER GENERALIZED TRAPEZOIDAL FUZZY NUMBERS WITH DIFFERENT LEFT AND RIGHT HEIGHTS)

Bu bölümde üçgenin iç teğet çemberi kullanılarak sol ve sağ yükseklikleri farklı genelleştirilmiş yamuk bulanık sayıları sıralamak için yeni bir yöntem sunulmuştur. Sunulan yöntem hem gerçel (crisp) sayıları hem de aynı ağırlık merkezine sahip genelleştirilmiş üçgensel bulanık sayıları da sıralayabildiğinden literatürdeki diğer yöntemlere göre daha kullanışlıdır.

Herhangi bir sol ve sağ yükseklikleri farklı genelleştirilmiş yamuk bulanık sayı $\tilde{A} = (a, b, c, d; \omega_L, \omega_R)$ için $\tilde{A}_L = (a, b, b, d; \omega_L, \omega_L)$ ve $\tilde{A}_R = (a, c, c, d; \omega_R, \omega_R)$ şeklinde iki tane genelleştirilmiş üçgensel bulanık sayı elde edilebilir (bkz. Şekil 3).



Şekil 3. \tilde{A} sol ve sağ yükseklikleri farklı genelleştirilmiş yamuk bulanık sayı ile \tilde{A}_L ve \tilde{A}_R genelleştirilmiş üçgensel bulanık sayılarıyla iç teğet çemberleri (Generalized trapezoidal fuzzy number \tilde{A} with different left and right heights and generalized triangular fuzzy numbers \tilde{A}_L and \tilde{A}_R with their incircles)

İlk önce $\tilde{A}_L = (a, b, b, d; \omega_L, \omega_L)$ genelleştirilmiş üçgensel bulanık sayısı göz önünde bulundurulursa köşe noktaları

$A = (x^A, y^A) = (a, 0)$, $B = (x^B, y^B) = (b, \omega_L)$ ve $C = (x^C, y^C) = (d, 0)$ olan ABC üçgeni elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} |BC| &= \sqrt{(b-d)^2 + \omega_L^2}, \\ |AC| &= d-a, \\ |AB| &= \sqrt{(a-b)^2 + \omega_L^2}, \\ P &= |BC| + |AC| + |AB| \end{aligned} \quad (6)$$

bulunur. (4) formülünden

$$r_{\tilde{A}_L} = \frac{\omega_L |AC|}{P} \quad (7)$$

elde edilir. (5) formülünden ise

$$I_{\tilde{A}_L}(x_{\tilde{A}_L}, y_{\tilde{A}_L}) = \frac{|AC| \cdot (b, \omega_L) + |BC| \cdot (a, 0) + |AB| \cdot (d, 0)}{P} \quad (8)$$

olur.

Benzer olarak, $\tilde{A}_R = (a, c, c, d; \omega_R, \omega_R)$ genelleştirilmiş üçgensel bulanık sayısı için köşe noktaları

$A' = (x_{A'}, y_{A'}) = (a, 0)$, $B' = (x_{B'}, y_{B'}) = (c, \omega_R)$ ve $C' = (x_{C'}, y_{C'}) = (d, 0)$ olan $A'B'C'$ üçgeni için

$$\begin{aligned} |B'C'| &= \sqrt{(c-d)^2 + \omega_R^2}, \\ |A'C'| &= d-a, \\ |A'B'| &= \sqrt{(a-c)^2 + \omega_R^2}, \\ P' &= |B'C'| + |A'C'| + |A'B'| \end{aligned} \quad (9)$$

olur. (4) ve (5) formüllerinden

$$r_{\tilde{A}_R} = \frac{\omega_R |A'C'|}{P'} \quad (10)$$

ve

$$I_{\tilde{A}_R}(x_{\tilde{A}_R}, y_{\tilde{A}_R}) = \frac{|A'C'| \cdot (c, \omega_R) + |B'C'| \cdot (a, 0) + |A'B'| \cdot (d, 0)}{P'} \quad (11)$$

bulunur.

\tilde{A}_L ve \tilde{A}_R bulanık sayılarına karşılık gelen iç teğet çemberler x -eksenine teğettir. Buradan $y_{\tilde{A}_L}$ ve $y_{\tilde{A}_R}$ ordinatları sırasıyla $r_{\tilde{A}_L}$ ve $r_{\tilde{A}_R}$ yarıçaplarına eşit olur. Üstelik $0 < y_{\tilde{A}_L} < \frac{\omega_L}{2}$ ve $0 < y_{\tilde{A}_R} < \frac{\omega_R}{2}$ eşitsizlikleri de geçerlidir (bkz. Şekil 3).

(7)–(11) denklemlerinden, iç teğet çemberlerin merkezleriyle bu çemberlerin yarıçaplarının \tilde{A} bulanık sayısının köşe noktalarının koordinatlarına sürekli bağımlı olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca bu çemberlerin merkezlerinin koordinatları \tilde{A} sol ve sağ yükseklikleri farklı genelleştirilmiş yamuk bulanık sayısının, sağa ve sola olan yayılımını da yansıtmaktadır. Bu nedenle, bu tür bulanık sayıları sıralamak için akla iç teğet çemberlerin merkezlerini kullanma fikri gelebilir. Yukarıda verilen gösterimlerle birlikte literatürde sunulan sonuçlarla tutarlı olmak açısından $\tilde{A} = (a, b, c, d; \omega_L, \omega_R)$ ve $\tilde{B} = (a', b', c', d'; \omega'_L, \omega'_R)$ sol ve sağ yükseklikleri farklı genelleştirilmiş yamuk bulanık sayıları için (12) deki gibi tanımlı bir “<” sıralama bağıntısı verilebilir:

$$\tilde{A} < \tilde{B} \Leftrightarrow (\omega_R x_{\tilde{A}_R}, \omega_L x_{\tilde{A}_L}, 1 - y_{\tilde{A}_R}) <_L (\omega'_R x_{\tilde{B}_R}, \omega'_L x_{\tilde{B}_L}, 1 - y_{\tilde{B}_R}). \quad (12)$$

Burada $<_L$ simgesi sözlük sıralamayı (lexicographical order) göstermektedir ve

$(x_1, x_2, x_3) <_L (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow (\exists m = 1, 2, 3)(\forall i < m)(x_i = y_i) \wedge (x_m < y_m)$ şeklinde tanımlanır.

Sıralı üçlüler üzerinde sözlük sıralama bir tam sıralama bağıntısı olduğundan önerilen sıralama yöntemi ile elde edilen sıralama da sol ve sağ yükseklikleri farklı genelleştirilmiş yamuk bulanık sayılar kümesi \mathbb{F} üzerinde bir tam sıralama bağıntısı olur.

Önerme 5. $0 < \omega \leq 1$, δ_1 ve δ_2 keyfi pozitif gerçel sayılar olmak üzere, bir genelleştirilmiş üçgensel bulanık sayısı verilsin. Bu bulanık sayıya karşılık gelen ABC üçgeninin A , B ve C köşe noktalarının koordinatları da sırasıyla $(b - \delta_1, 0)$, (b, ω) ve $(b + \delta_2, 0)$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{\delta_1, \delta_2 \rightarrow 0^+} I = (b, 0)$$

olur. Burada I , ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezini göstermektedir.

Kanıt. Eğer $\delta_1, \delta_2 \rightarrow 0^+$ ise $|BC|, |AB| \rightarrow \omega$ ve $|AC| \rightarrow 0^+$ olur. Denklem (5) de bu ifadeler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \lim_{\delta_1, \delta_2 \rightarrow 0^+} I &= \lim_{\delta_1, \delta_2 \rightarrow 0^+} \frac{|AC| \cdot (b, \omega) + |BC| \cdot (b - \delta_1, 0) + |AB| \cdot (b + \delta_2, 0)}{|BC| + |AC| + |AB|} \\ &= \frac{\omega(b, 0) + \omega(b, 0)}{2\omega} \\ &= (b, 0) \end{aligned}$$

olur.

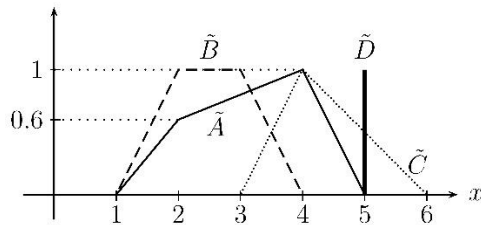
Uyarı 6. Önerme 5 yardımıyla $\tilde{A} = (a, b, c, d; \omega_L, \omega_R)$ sol ve sağ yükseklikleri farklı genelleştirilmiş yamuk bulanık sayısı gerçel (crisp) sayı olduğunda yani $a = b = c = d = \rho$ ve $\omega_L = \omega_R = 1$ ise iç teğet çemberin merkezinin koordinatları $x_{\tilde{A}_L} = x_{\tilde{A}_R} = \rho$ ve $y_{\tilde{A}_L} = y_{\tilde{A}_R} = 0$ olarak alınabilir. Buradan \tilde{A} gerçel sayısı için $(\rho, \rho, 1)$ sıralı üçlüsü alınarak (12) ifadesi yardımı ile gerçel sayılar da sıralanabilir.

Herhangi iki \tilde{A} ve \tilde{B} sol ve sağ yükseklikleri farklı genelleştirilmiş yamuk bulanık sayı verildiğinde Algoritma 7 yardımıyla bu bulanık sayılar kolayca sıralanabilir.

Algoritma 7.

1. **Adım:** $\tilde{A} = (a, b, c, d; \omega_L, \omega_R)$ ve $\tilde{B} = (a', b', c', d'; \omega'_L, \omega'_R)$ sol ve sağ yükseklikleri farklı genelleştirilmiş yamuk bulanık sayıları gir.
2. **Adım:** Denklem (11) yardımıyla sağ taraftaki üçgenlerin iç teğet çemberlerinin yatay koordinatları $x_{\tilde{A}_R}$ ve $x_{\tilde{B}_R}$ değerlerini hesapla. Eğer $\omega_R x_{\tilde{A}_R} < \omega'_R x_{\tilde{B}_R}$ ise $\tilde{A} < \tilde{B}$ veya $\omega'_R x_{\tilde{B}_R} < \omega_R x_{\tilde{A}_R}$ ise $\tilde{B} < \tilde{A}$ olur ve dur. Aksi halde 3. adıma git.
3. **Adım:** Denklem (8) yardımıyla sol taraftaki üçgenlerin iç teğet çemberlerinin yatay koordinatları $x_{\tilde{A}_L}$ ve $x_{\tilde{B}_L}$ değerlerini hesapla. Eğer $\omega_L x_{\tilde{A}_L} < \omega'_L x_{\tilde{B}_L}$ ise $\tilde{A} < \tilde{B}$ veya $\omega'_L x_{\tilde{B}_L} < \omega_L x_{\tilde{A}_L}$ ise $\tilde{B} < \tilde{A}$ olur ve dur. Aksi halde 4. adıma git.
4. **Adım:** Denklem (11) yardımıyla sağ taraftaki üçgenlerin iç teğet çemberlerinin dikey koordinatları $y_{\tilde{A}_R}$ ve $y_{\tilde{B}_R}$ değerlerini hesapla. Eğer $1 - y_{\tilde{A}_R} < 1 - y_{\tilde{B}_R}$ ise $\tilde{A} < \tilde{B}$ veya $1 - y_{\tilde{B}_R} < 1 - y_{\tilde{A}_R}$ ise $\tilde{B} < \tilde{A}$ olur ve dur. Aksi halde $\tilde{A} \sim \tilde{B}$ olur yani \tilde{A} ve \tilde{B} bulanık sayıları aynıdır.

Eğer sıralanmak üzere verilen bulanık sayılar genelleştirilmiş üçgensel bulanık sayı ise, bu bulanık sayıya karşılık gelen üçgen ile yukarıdaki gibi tanımlanan sol ve sağ üçgenler aynı olacaktır. Bu durumda Algoritma 7 yine kullanılabilir. Yani verilen algoritma ile genelleştirilmiş üçgensel bulanık sayılar hatta gerçel sayılar da sıralanabilir.



Şekil 4. Örnek 8 ile verilen $\tilde{A} = (1,2,4,5;0,6,1)$, $\tilde{B} = (1,2,3,4;1,1)$, $\tilde{C} = (3,4,4,6;1,1)$ ve $\tilde{D} = (5,5,5,5;1,1)$ bulanık sayıları (Fuzzy numbers $\tilde{A} = (1,2,4,5;0,6,1)$, $\tilde{B} = (1,2,3,4;1,1)$, $\tilde{C} = (3,4,4,6;1,1)$ and $\tilde{D} = (5,5,5,5;1,1)$ presented in Example 8)

Sunulan yöntemin kolay uygulanabilir ve güvenilir olduğunu gösteren basit bir örnek verelim.

Örnek 8 $\tilde{A} = (1,2,4,5;0,6,1)$, $\tilde{B} = (1,2,3,4;1,1)$, $\tilde{C} = (3,4,4,6;1,1)$ ve $\tilde{D} = (5,5,5,5;1,1)$ bulanık sayıları verilsin (bkz. Şekil 3). Denklem (8), (11) ve Uyarı 6 kullanılarak iç teğet çemberlerin merkezleri

$$\begin{aligned} I_{\tilde{A}_L} &= (2.0534, 0.2918), & I_{\tilde{A}_R} &= (3.8741, 0.4664), \\ I_{\tilde{B}_L} &= (2.0891, 0.4511), & I_{\tilde{B}_R} &= (2.9110, 0.4511), \\ I_{\tilde{C}_L} &= (4.089, 0.4511), & I_{\tilde{C}_R} &= (4.089, 0.4511), \\ I_{\tilde{D}_L} &= (5, 0), & I_{\tilde{D}_R} &= (5, 0) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bunlar (12) ifadesinde yerine yazılırsa, $(\omega_R x_{\tilde{A}_R}, \omega_L x_{\tilde{A}_L}, 1 - y_{\tilde{A}_R}) = (3.8741, 1.2320, 0.5336)$, $(\omega'_R x_{\tilde{B}_R}, \omega'_L x_{\tilde{B}_L}, 1 - y_{\tilde{B}_R}) = (2.9110, 2.0891, 0.5489)$, $(\omega''_R x_{\tilde{C}_R}, \omega''_L x_{\tilde{C}_L}, 1 - y_{\tilde{C}_R}) = (4.0890, 4.0890, 0.5489)$, $(\omega'''_R x_{\tilde{D}_R}, \omega'''_L x_{\tilde{D}_L}, 1 - y_{\tilde{D}_R}) = (5, 5, 1)$

hesaplanır. Algoritma 7 yardımıyla ya da doğrudan sözlük sıralama ile

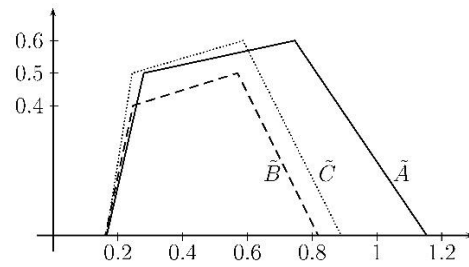
$$(2.9110, 2.0891, 0.5489) <_L (3.8741, 1.2320, 0.5336) <_L (4.0890, 4.0890, 0.5489) <_L (5, 5, 1)$$

olduğundan

$$\tilde{B} < \tilde{A} < \tilde{C} < \tilde{D}$$

bulunur. Elde edilen bu sıralama akla yatkın ve beklenen bir sonuçtur.

Örnek 9



Şekil 5. $\tilde{A} = (0.1659, 0.2803, 0.7463, 1.154; 0.5, 0.6)$, $\tilde{B} = (0.1611, 0.2475, 0.5696, 0.8187; 0.4, 0.5)$, $\tilde{C} = (0.1645, 0.2445, 0.5869, 0.8894; 0.5, 0.6)$

sol ve sağ yükseklikleri farklı genelleştirilmiş bulanık sayılar (generalized trapezoidal fuzzy numbers with different left and right heights)

Sunulan yöntemi Chutia vd. tarafından verilen yöntem ile karşılaştırmak üzere,

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= (0.1659, 0.2803, 0.7463, 1.154; 0.5, 0.6), \\ \tilde{B} &= (0.1611, 0.2475, 0.5696, 0.8187; 0.4, 0.5), \\ \tilde{C} &= (0.1645, 0.2445, 0.5869, 0.8894; 0.5, 0.6) \end{aligned}$$

sol ve sağ yükseklikleri farklı genelleştirilmiş yamuk bulanık sayılarını ele alalım (bkz. Şekil 5, [25]).

Denklem (8) ve (11) kullanılarak verilen bulanık sayılar için sol ve sağ taraftaki üçgenlerin iç teğet çemberlerinin merkezleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} I_{\tilde{A}_L} &= (0.4131, 0.1970), & I_{\tilde{A}_R} &= (0.7146, 0.2326), \\ I_{\tilde{B}_L} &= (0.3458, 0.1491), & I_{\tilde{B}_R} &= (0.5334, 0.1766), \\ I_{\tilde{C}_L} &= (0.3721, 0.1770), & I_{\tilde{C}_R} &= (0.5579, 0.2041). \end{aligned}$$

Hesaplanan bu değerler (12) ifadesinde yerine yazıldığında

$$(\omega_R x_{\tilde{A}_R}, \omega_L x_{\tilde{A}_L}, 1 - y_{\tilde{A}_R}) = (0.4288, 0.2065, 0.7674),$$

$$(\omega'_R x_{\tilde{B}_R}, \omega'_L x_{\tilde{B}_L}, 1 - y_{\tilde{B}_R}) = (0.2667, 0.1383, 0.8234),$$

$$(\omega''_R x_{\tilde{C}_R}, \omega''_L x_{\tilde{C}_L}, 1 - y_{\tilde{C}_R}) = (0.3347, 0.1861, 0.7959)$$

olur. Buradan Algoritma 7 kullanılırsa ya da doğrudan sözlük sıralama kullanılacak olursa

$$(0.2667, 0.1383, 0.8234) <_L (0.3347, 0.1861, 0.7959) <_L$$

elde edilir. O halde

$$\tilde{B} < \tilde{C} < \tilde{A}$$

olur. Bu sıralama sonucu ise [25] ile elde edilen sonuç ile uyumludur.

4. BULANIK SAYILARI SIRALAMA YÖNTEMLERİ (THE EXISTING METHODS FOR RANKING FUZZY NUMBERS)

Bu bölümde, önerilen sıralama yönteminin karşılaştırıldığı, son yıllarda diğer araştırmacılar tarafından verilen sıralama yöntemlerinin hesaplama formülleri kısaca sunularak her bir yöntemin hesaplama karmaşıklığı önerilen yöntemle karşılaştırılmıştır.

Lee & Chen (2008): Bu çalışmada verilen bir dizi \tilde{A}_i bulanık sayısının sıralanması için bu sayılara karşılık gelen çokgenlere ve standart sapmaya bağlı aşağıdaki gibi bir skor verilmiştir (bkz. [14]):

$$\text{Rank}(\tilde{A}_i) = \alpha [\beta R_{iH}(\tilde{A}_i) + (1 - \beta) L_{iH}(\tilde{A}_i)] + (1 - \alpha) [\beta R_{iM}(\tilde{A}_i) + (1 - \beta) L_{iM}(\tilde{A}_i) - \frac{1}{3} (\beta R_{iS}(\tilde{A}_i) + (1 - \beta) L_{iS}(\tilde{A}_i) + T_{iS}(\tilde{A}_i))]$$

Burada $\alpha, \beta \in [0, 1]$, R_{iH} ve L_{iH} ise \tilde{A}_i bulanık sayılarının sırasıyla sağ ve sol yüksekliklerini göstermektedir. Ayrıca R_{iM} ve L_{iM} sayıları da sırasıyla \tilde{A}_i bulanık sayılarının sağ ve sol elemanlarının aritmetik ortalamalarıdır. R_{iS} , \tilde{A}_i bulanık sayılarının sağ elemanlarının standart sapmasını ve T_{iS} ise \tilde{A}_i bulanık sayılarının tüm bileşenlerinin standart sapmasını göstermektedir. Bu yöntemde kullanılan formül, önerilen yönteme göre oldukça karmaşık ve uygulaması kolay değildir.

Chen & Chen (2009): Bu çalışmada da verilen bir dizi \tilde{A}_i bulanık sayısının sıralanması için standart sapma ve aritmetik ortalamadan yararlanılarak aşağıdaki gibi bir skor belirlenmiştir (bkz. [15]):

$$\text{Skor}(\tilde{A}_i) = \frac{x_{\tilde{A}_i} \omega_{\tilde{A}_i}}{1 + \text{STD}_{\tilde{A}_i}}$$

Burada \tilde{A}_i , \tilde{A}_i bulanık sayılarının standardize edilmiş halini, $x_{\tilde{A}_i}$ standardize edilmiş bulanık sayıların bileşenlerinin aritmetik ortalamasını, $\omega_{\tilde{A}_i}$, \tilde{A}_i bulanık sayılarının yüksekliklerini ve $\text{STD}_{\tilde{A}_i}$ ise \tilde{A}_i bulanık sayılarının standart sapmasını göstermektedir. Her bir \tilde{A}_i bulanık sayısına bir gerçel sayı karşılık getirilip bu gerçel sayılar yardımıyla sıralama yapmak kolay olsa da bir bulanık sayıya gerçel sayı karşılık getirmek bu sayıya ait

birçok verinin kaybolmasına yol açacağından uygulamalarda bu tür yöntemlerin kullanılması uygun olmayacaktır.

Chen vd. (2012): Bu çalışmada verilen standardize edilmiş bir dizi bulanık sayının belirlediği bölge yardımıyla oluşturulan çeşitli alanların hesaplanması ve ağırlık merkezi yardımıyla bir skor belirlenmiştir (bkz. [18]):

$$\text{Skor}(\tilde{A}_i) = \frac{M_i - N_i}{M_i + N_i + (1 - |c(\tilde{A}_i)|)}$$

Burada M_i ve N_i sayıları \tilde{A}_i genelleştirilmiş bulanık sayılarının belirlediği bölgenin sırasıyla negatif ve pozitif tarafında kalan alanların toplamı, $c(\tilde{A}_i)$ ise \tilde{A}_i genelleştirilmiş bulanık sayılarının ağırlık merkezini göstermektedir. Bu yöntemde genelleştirilmiş bulanık sayılara karşılık gelen çokgen dikdörtgene tamamlanarak, alt bölgelere ayrılmış ve integral yardımıyla alanlar hesaplanmış, her bir bölge için ağırlık merkezleri bulunmuş ve bunların aritmetik ortalaması alınmıştır. Bu ise çok uzun işlemler gerektirmekte ve uygulamalar için uygun olmayan bir sonuç ortaya çıkartmaktadır.

Bakar & Gegov (2014): Bu çalışmada ağırlık merkezi ve bulanık sayıların yayılımı kullanılarak bulanık sayıları sıralamak için bir indeks değeri verilmiştir (bkz. [21]):

$$\text{CPS}(\tilde{A}) = x_{\tilde{A}}^* y_{\tilde{A}}^* (1 - s_{\tilde{A}})$$

Burada $x_{\tilde{A}}^*$ ve $y_{\tilde{A}}^*$ sırasıyla \tilde{A} bulanık sayısına karşılık gelen çokgenin ağırlık merkezinin yatay ve düşey bileşenlerini, $s_{\tilde{A}}$ ise \tilde{A} bulanık sayısının yayılımını göstermektedir. Bu formül basit gözükse de bir bulanık sayıya bir gerçel sayı karşılık getirerek sıralama yapmak bu bulanık sayıya ait çoğu özelliğın yok olmasına ve kimi zaman hatalı sıralama sonuçlarının ortaya çıkmasına yol açabilmektedir.

Chutia vd. (2015): Bu çalışmada verilen \tilde{A} ve \tilde{B} bulanık sayıları için aşağıdaki şekilde verilen gerçel sayılar yardımıyla bir sıralama önerilmektedir (bkz. [25]):

$$I_{\tilde{A}}^{\tilde{B}}(\tilde{A}) = \frac{ac h_2 + (1 - \alpha) b h_1 + (h_2 - h_1) c}{\alpha h_2 (d - c) + (1 - \alpha) h_1 (a - b) + (h_2 - h_1) (b - c)} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{p} + 1) \Gamma(\frac{1}{p})}{p \Gamma(\frac{2}{p} + 1)}$$

Burada $\alpha \in [0, 1]$ karar vericinin iyimserlik/kötümserlik derecesi, p pozitif tamsayı, a, b, c, d \tilde{A} bulanık sayısının bileşenleri, h_1 ve h_2 sayıları ise sırasıyla \tilde{A} ve \tilde{B} bulanık sayılarının sol ve sağ yüksekliklerinin minimumları ve Γ ise Euler gama fonksiyonudur. \tilde{A} ve \tilde{B} bulanık sayıları özel tipte sayılar olduğunda bu formül daha basit bir hal olsa da bu formül yardımıyla bir sıralama yapmak kolay değildir.

Jiang vd. (2015): Bu çalışmada standardize edilerek verilmiş bir dizi \tilde{A}_i bulanık sayının belirledikleri bölgeler yardımıyla oluşturulan çeşitli alanların hesaplanması ve

standart sapma yardımıyla bir skor belirlenmiştir (bkz. [24]):

$$\text{Skor}(\tilde{A}_i) = \frac{M_i - N_i}{4 + STD_{\tilde{A}_i}}$$

Burada M_i ve N_i sayıları \tilde{A}_i standardize edilmiş bulanık sayıların belirlediği bölgelerin sırasıyla negatif ve pozitif tarafında kalan alanların toplamını, $STD_{\tilde{A}_i}$ ise \tilde{A}_i sayılarının standart sapmasını göstermektedir. Bu yöntemde de bulanık sayılara karşılık gelen çokgen bir dikdörtgene tamamlanarak, bu dikdörtgen çeşitli alt bölgelere ayrılmakta ve integral yardımıyla bu alanlar hesaplanıp, alanlar toplamı ve \tilde{A}_i sayılarının standart sapması yardımıyla bir skor elde edilmektedir. Bu ise karmaşık işlemler gerektirmekte ve uygulamayı güçleştirmektedir.

Düzce (2015): Bu çalışmada verilen geliştirilmiş bulanık sayıya karşılık gelen $ABCD$ çokgeni üçgenlere parçalanarak her bir üçgenin dokuz nokta çemberinin merkezlerinin koordinatları yardımıyla aşağıdaki gibi bir skor belirlenmiştir (bkz. [23]):

$$\text{Skor}(\tilde{A}) = \begin{cases} \omega x_1 + \frac{\text{Alan}(BCD)}{2}, & \omega = \omega_L \text{ ise} \\ \omega x_2 - \frac{\text{Alan}(ABC)}{2}, & \omega = \omega_R \text{ ise} \end{cases}$$

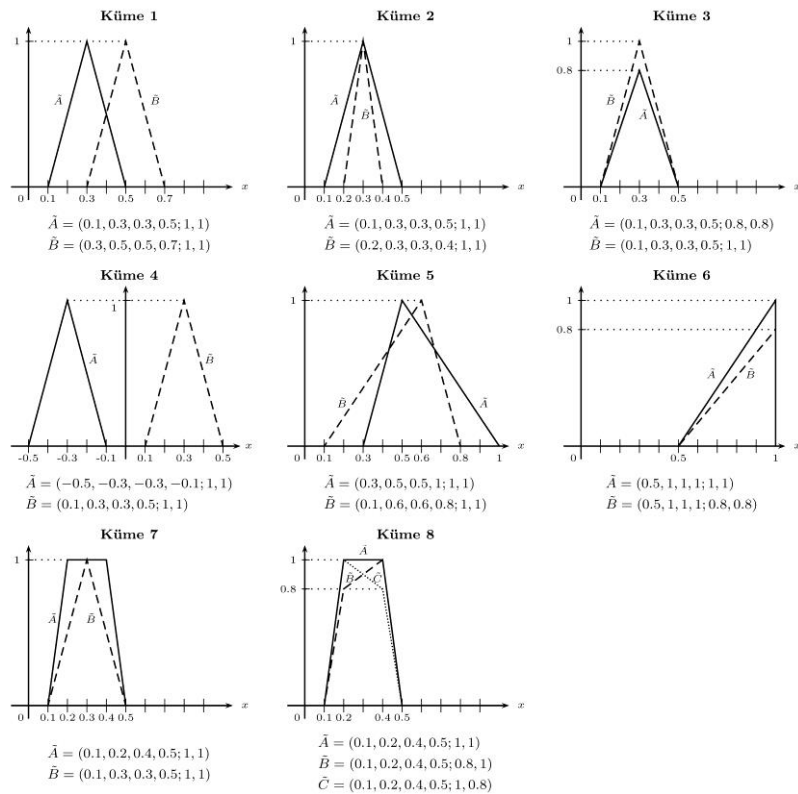
Burada x_1 , ABD üçgeninin dokuz nokta çemberinin merkezini birinci koordinatını, x_2 , ACD üçgeninin dokuz nokta çemberinin merkezini birinci koordinatını göstermektedir ve $\omega = \max\{\omega_L, \omega_R\}$ şeklinde

tanımlanmıştır. Bir üçgenin dokuz nokta çemberinin merkezini koordinatlarının hesaplanması oldukça karmaşık işlemler gerektirmektedir.

Yukarıda sözü edilen tüm yöntemler incelendiğinde tümünde de bulanık sayıya skor olarak adlandırılan bir gerçel sayı karşılık getirilmekte ve sıralama bu gerçel sayılar sıralanarak yapılmaktadır. Oysa bu durum bulanık sayının doğasına aykırıdır. Önerilen yöntemde ise bulanık sayının birçok özelliğini koruyan bir üçlü yardımıyla sıralama yapılmaktadır. Önerilen yöntemde kullanılan ve (12) ile verilen sıralama karmaşık gözükse de bu sıralamada sadece bulanık sayıya karşılık gelen çokgen içerisinde yer alan üçgenlerin iç teğet çemberlerinin merkezlerinin koordinatları kullanılmıştır. Bu koordinatlar (5) ifadesiyle kolayca hesaplanabileceği gibi Matlab, Maple, Mathematica, vb. yazılımlarda iç teğet çemberin merkezini veren hazır komutlar da bulunmaktadır. Bu nedenlerle önerilen yöntemin uygulamalarda kullanılması yukarıda sözü edilen yöntemlere göre daha uygun ve daha kolaydır.

5. SAYISAL ÖRNEKLER (NUMERICAL EXAMPLES)

Bu bölümde, üçüncü bölümdeki geliştirilmiş bulanık sayıları sıralamak için önerilen sıralama yönteminin özellikle son yıllarda diğer araştırmacılar tarafından sunulan sıralama yöntemleriyle bir karşılaştırması verilecektir. Bu amaçla Jiang vd. tarafından kullanılan sekiz farklı bulanık sayı kümesi ele alınmıştır (bkz. Şekil



Şekil 6. Geliştirilmiş bulanık sayı kümeleri (Sets of generalized fuzzy numbers)

6, [24]). Her bir yöntem ile elde edilen karşılaştırmalı sıralama sonucu da Çizelge 1 ile sunulmuştur.

Çizelge 1 incelendiğinde, listelenen her bir yöntemin bazı eksiklikleri olduğu, ancak sunulan yöntemin ise bu eksikleri giderdiği görülmektedir. Her bir küme için elde edilen sonuçlar aşağıda sırayla listelenmiştir.

1. Şekil 6 ile verilen Küme 1, Küme 4 ve Küme 5 te yer alan genelleştirilmiş bulanık sayılar için, listelenen tüm yöntemlerin sunulan yeni yöntemle birlikte aynı sıralama sonucunu verdiği görülmektedir.

2. Küme 2 ile verilen iç içe geçmiş yükseklikleri aynı üçgenel bulanık sayıların belirlediği üçgenlerin ağırlık merkezlerinin koordinatlarının birinci bileşenleri aynı olduğundan Chutia vd. ($\alpha = 0.5$ için), Chen vd. ve Düzce tarafından verilen yöntemler bu bulanık sayıları sıralayamamaktadır. Diğer taraftan, Chutia vd. ($\alpha = 0$ için), Lee ve Chen, Chen ve Chen, Bakar ve Gegov, Jiang vd. tarafından sunulan yöntemler ve önerilen yeni sıralama yöntemi aynı sıralama sonucunu vermektedir. $\alpha = 1$ için Chutia vd. tarafından verilen sıralama yöntemi ise mantığa aykırı sonuç vermektedir.

3. Küme 3 ile verilen genelleştirilmiş üçgenel bulanık sayılar için $\alpha = 0, \alpha = 0.5, \alpha = 1$ iken Chutia vd. tarafından verilen yöntem bu bulanık sayıları sıralayamamakta, bu yöntemin dışında kalan tüm yöntemler ve önerilen yeni yöntem aynı sıralama sonucunu vermektedir.

4. Küme 6 ile verilen iç içe geçmiş boyları farklı dik üçgenlere karşılık gelen genelleştirilmiş üçgenel bulanık sayılar için Chen vd. ve $\alpha = 0, \alpha = 0.5, \alpha = 1$ olduğunda Chutia vd. tarafından sunulan yöntemler bu bulanık sayıları sıralayamamaktadır. Ancak, önerilen yeni yöntemle birlikte diğer tüm yöntemler aynı sıralama sonucunu vermektedir.

5. Küme 7 ile verilen bulanık sayılar Chen vd., Düzce ve $\alpha = 0.5$ için Chutia vd. tarafından önerilen yöntemlerle sıralanamamaktadır. Chen ve Chen, Jiang vd. ve $\alpha = 0$ için Chutia vd. tarafından önerilen yöntem aynı sıralama sonucunu vermektedir. $\alpha = 1$ için Chutia vd., Lee ve Chen, Bakar ve Gegov tarafından verilen yöntemler ile önerilen yeni yöntem beklenen sıralama sonucunu vermektedir.

6. Küme 8 ile verilen sol ve sağ yükseklikleri farklı genelleştirilmiş yamuk bulanık sayılar için Chen ve Chen tarafından önerilen yöntem uygulanamaz. Ayrıca, Lee ve Chen ve $\alpha = 0, \alpha = 0.5$ ve $\alpha = 1$ iken Chutia vd. tarafından sunulan yöntemler de bu bulanık sayıları sıralayamamaktadır. Chen vd., Jiang vd. ve Düzce tarafından verilen yöntemler ise aynı sıralama sonucunu vermektedir. Küme 2, Küme 3 ve Küme 6 ile verilen bulanık sayıların diğer yöntemlerle birlikte sıralama sonuçları incelendiğinde yeni sunulan sıralama yönteminin Küme 8 için daha akla yatkın bir sıralama sonucu verdiği görülmektedir.

Çizelge 1. Sunulan yöntemin diğer yöntemlerle karşılaştırması (A comparison of methods)

Yöntem	Küme 1	Küme 2	Küme 3	Küme 4	Küme 5
Lee & Chen (2008)	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{B} < \tilde{A}$
Chen & Chen (2009)	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{B} < \tilde{A}$
Chen vd. (2012)	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} \sim \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{B} < \tilde{A}$
Bakar & Gegov (2014)	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{B} < \tilde{A}$
Chutia vd. ($\alpha = 0.5$) (2015)	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} \sim \tilde{B}$	$\tilde{A} \sim \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{B} < \tilde{A}$
Jiang vd. (2015)	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{B} < \tilde{A}$
Düzce (2015)	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} \sim \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{B} < \tilde{A}$
Sunulan Yöntem	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{B} < \tilde{A}$

Yöntem	Küme 6	Küme 7	Küme 8
Lee & Chen (2008)	$\tilde{B} < \tilde{A}$	$\tilde{B} < \tilde{A}$	$\tilde{B}, \tilde{C} < \tilde{A}, \tilde{B} \sim \tilde{C}$
Chen & Chen (2009)	$\tilde{B} < \tilde{A}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	–
Chen vd. (2012)	$\tilde{A} \sim \tilde{B}$	$\tilde{A} \sim \tilde{B}$	$\tilde{C} < \tilde{A} < \tilde{B}$
Bakar & Gegov (2014)	$\tilde{B} < \tilde{A}$	$\tilde{B} < \tilde{A}$	$\tilde{A} < \tilde{C} < \tilde{B}$
Chutia vd. ($\alpha = 0.5$) (2015)	$\tilde{A} \sim \tilde{B}$	$\tilde{A} \sim \tilde{B}$	$\tilde{A} \sim \tilde{B} \sim \tilde{C}$
Jiang vd. (2105)	$\tilde{B} < \tilde{A}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{C} < \tilde{A} < \tilde{B}$
Düzce (2015)	$\tilde{B} < \tilde{A}$	$\tilde{A} \sim \tilde{B}$	$\tilde{C} < \tilde{A} < \tilde{B}$
Sunulan Yöntem	$\tilde{B} < \tilde{A}$	$\tilde{B} < \tilde{A}$	$\tilde{C} < \tilde{B} < \tilde{A}$

Aşağıdaki çizelgede incelenen yöntemler ile sunulan yöntemin kısıtları karşılaştırılmaktadır.

$$= (a + a', b + b', c + c', d + d'; \min(\omega_L, \omega'_L), \min(\omega_R, \omega'_R)).$$

Çizelge 2. Sunulan yöntem ile diğer yöntemlerin kısıtlarının karşılaştırması (The limitations of each method)

Yöntem	Aynı ağırlık merkezine sahip üçgensel bulanık sayıları		
	Ayırt Edici	doğru sıralar	Gerçel (crisp) sayıları sıralar
Lee & Chen (2008)	x	✓	✓
Chen & Chen (2009)	✓	✓	✓
Chen vd. (2012)	x	x	✓
Bakar & Gegov (2014)	✓	✓	✓
Chutia vd. ($\alpha = 0.5$) (2015)	x	x	✓
Jiang vd. (2105)	✓	✓	✓
Düzce (2015)	x	x	✓
Sunulan Yöntem	✓	✓	✓

Çizelge 2’de listelenen yöntemlerin aynı ağırlık merkezine sahip üçgensel bulanık sayıları için kullanılamaması, mantığa aykırı sıralama yapması gibi çeşitli eksiklikleri olmasına karşın, sunulan yöntemin bu eksikliklerin üstesinden geldiği görülmektedir.

6. ÖNERİLEN YÖNTEME DAYALI BİR BULANIK RİSK ANALİZİ UYGULAMASI (AN APPLICATION OF FUZZY RISK ANALYSIS BASED ON THE PROPOSED METHOD)

Bu bölümde sol ve sağ yükseklikleri farklı, genelleştirilmiş yamuk bulanık sayılar için önerilen sıralama yönteminin bir bulanık risk analizi problemine uygulaması yapılacaktır.

$0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 1$ ve $0 < a' \leq b' \leq c' \leq d' \leq 1$ olmak üzere herhangi $\tilde{A} = (a, b, c, d; \omega_L, \omega_R)$ ve $\tilde{B} = (a', b', c', d'; \omega'_L, \omega'_R)$ sol ve sağ yükseklikleri farklı genelleştirilmiş yamuk bulanık sayıları için aritmetik işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır:

\oplus : Toplama

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (a, b, c, d; \omega_L, \omega_R) \oplus (a', b', c', d'; \omega'_L, \omega'_R)$$

\otimes : Çarpma

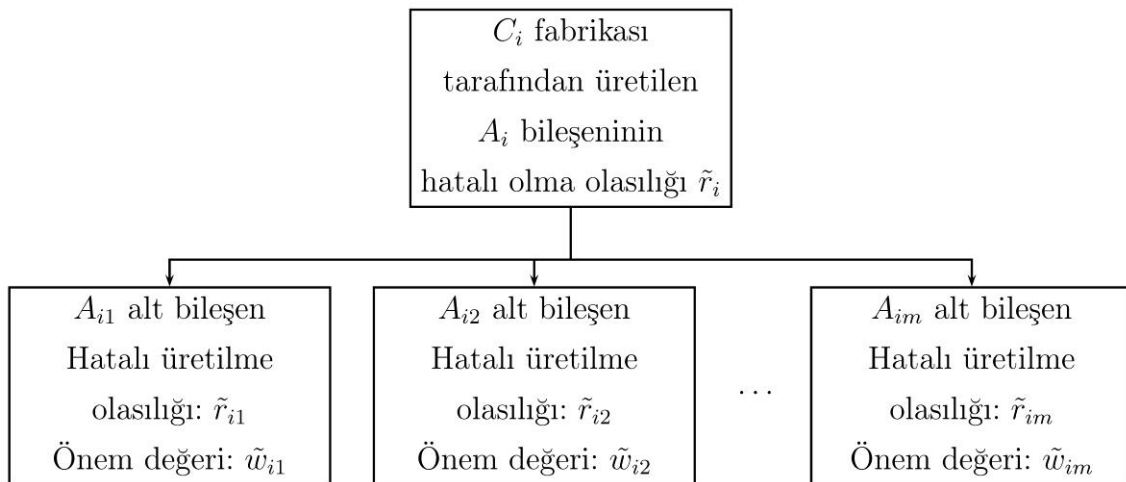
$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (a, b, c, d; \omega_L, \omega_R) \otimes (a', b', c', d'; \omega'_L, \omega'_R) = (a \times a', b \times b', c \times c', d \times d'; \min(\omega_L, \omega'_L), \min(\omega_R, \omega'_R)).$$

\odot : Bölme

$$\tilde{A} \odot \tilde{B} = (a, b, c, d; \omega_L, \omega_R) \odot (a', b', c', d'; \omega'_L, \omega'_R) = (a/d', b/c', c/b', d/a'; \min(\omega_L, \omega'_L), \min(\omega_R, \omega'_R)).$$

Şimdi üretim sistemi için bulanık risk analiz probleminden bahsedelim. C_1, C_2, \dots, C_n şeklinde n tane fabrika verilsin ve C_i fabrikası $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{im}$ şeklinde m farklı bileşenden oluşan A_i ürünü üretsin. Ayrıca A_{ik} , ($1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq k \leq m$) bileşenin hatalı üretilme olasılığı \tilde{r}_{ik} ile A_{ik} , bileşenin A_i ürünü içerisindeki önemi de \tilde{w}_{ik} ile gösterilsin. Buna göre C_i fabrikası tarafından üretilen A_i bileşenin hatalı olma olasılığı \tilde{r}_i Algoritma 10 ile kolayca hesaplanabilir.

C_i fabrikası tarafından üretilen A_i bileşenin hatalı olma olasılığı \tilde{r}_i değerini analiz etmek için Şekil 7 ile verilen diyagram kullanılabilir [31].



Şekil 7. Bulanık risk analizi yapısı (The structure for fuzzy risk analysis)

Algoritma 10. ([18])

1. Adım: C_i fabrikası tarafından üretilen her bir A_i bileşeni için hatalı olma olasılığı \tilde{r}_i , A_{ik} alt bileşeni için \tilde{r}_{ik} ve \tilde{w}_{ik} değerleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \tilde{r}_i &= (\sum_{k=1}^m \tilde{r}_{ik} \otimes \tilde{w}_{ik}) \odot \sum_{k=1}^m \tilde{w}_{ik} \\ &= (\tilde{r}_{i1}, \tilde{r}_{i2}, \tilde{r}_{i3}, \tilde{r}_{i4}; \omega_{L\tilde{r}_i}, \omega_{R\tilde{r}_i}) \end{aligned} \quad (13)$$

($i = 1, 2, \dots, n$) şeklinde hesaplanır.

2. Adım: Her $\tilde{r}_i = (\tilde{r}_{i1}, \tilde{r}_{i2}, \tilde{r}_{i3}, \tilde{r}_{i4}; \omega_{L\tilde{r}_i}, \omega_{R\tilde{r}_i})$ sol ve sağ yükseklikleri farklı genelleştirilmiş yamuk bulanık bulanık sayısı, $k := \max\{\|\tilde{r}_{ij}\|, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ ve $j = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \tilde{r}_i^* &= \left(\frac{\tilde{r}_{i1}}{k}, \frac{\tilde{r}_{i2}}{k}, \frac{\tilde{r}_{i3}}{k}, \frac{\tilde{r}_{i4}}{k}; \omega_{L\tilde{r}_i}, \omega_{R\tilde{r}_i} \right) \\ &= (\tilde{r}_{i1}^*, \tilde{r}_{i2}^*, \tilde{r}_{i3}^*, \tilde{r}_{i4}^*; \omega_{L\tilde{r}_i}, \omega_{R\tilde{r}_i}) \end{aligned}$$

şeklinde standardize edilmiş sol ve sağ yükseklikleri farklı genelleştirilmiş yamuk bulanık bulanık sayısına dönüştürülür. Burada $\|\tilde{r}_{ij}\|$ simgesi \tilde{r}_{ij} gerçel sayısının mutlak değerinden daha büyük olan en küçük tamsayıyı göstermektedir.

3. Adım: Bölüm 3 te sunulan sıralama yöntemi ile her $i = 1, 2, \dots, n$ için \tilde{r}_i^* sol ve sağ yükseklikleri farklı genelleştirilmiş yamuk bulanık bulanık sayıları sıralanır. \tilde{r}_i^* genelleştirilmiş yamuk bulanık bulanık sayısı ne kadar büyükse, C_i fabrikası tarafından üretilen A_i bileşenin hatalı olma olasılığı da o kadar yüksek olur.

Şimdi bulanık risk analizi algoritmasının nasıl uygulandığına dair bir örnek verelim.

Örnek 11. A_1, A_2, A_3, A_4 ve A_5 sırasıyla farklı C_1, C_2, C_3, C_4 ve C_5 fabrikaları tarafından üretilen aynı ürünü

gösterebilir. Ayrıca, her $i = 1, 2, 3, 4, 5$ için A_i bileşeni A_{i1}, A_{i2} ve A_{i3} şeklinde üç alt bileşenden oluşsun.

C_i fabrikası tarafından üretilen A_{ik} alt bileşeni için \tilde{r}_{ik} ve \tilde{w}_{ik} değerlerinin karşılıkları Çizelge 3 ile verilmiştir. Buradan A_{ik} alt bileşenleri için \tilde{w}_{ik} alt bileşenin önem değeri ve \tilde{r}_{ik} alt bileşenin hatalı üretilme olasılığı kullanılarak C_i fabrikası tarafından üretilen A_i ürününün \tilde{r}_i hatalı olma olasılığı kolayca hesaplanabilir.

Denklem (13) ve Çizelge 3’deki veriler kullanılarak

$$\begin{aligned} \tilde{r}_1 &= (\tilde{r}_{11} \otimes \tilde{w}_{11} \oplus \tilde{r}_{12} \otimes \tilde{w}_{12} \oplus \tilde{r}_{13} \otimes \tilde{w}_{13}) \odot (\tilde{w}_{11} \oplus \tilde{w}_{12} \oplus \tilde{w}_{13}) \\ &= (0.1765, 0.2860, 0.7244, 1.0574; 0.5, 0.6), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{r}_2 &= (\tilde{r}_{21} \otimes \tilde{w}_{21} \oplus \tilde{r}_{22} \otimes \tilde{w}_{22} \oplus \tilde{r}_{23} \otimes \tilde{w}_{23}) \odot (\tilde{w}_{21} \oplus \tilde{w}_{22} \oplus \tilde{w}_{23}) \\ &= (0.3221, 0.4949, 1.1392, 1.6373; 0.4, 0.5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{r}_3 &= (\tilde{r}_{31}^* \otimes \tilde{w}_{31}^* \oplus \tilde{r}_{32}^* \otimes \tilde{w}_{32}^* \oplus \tilde{r}_{33}^* \otimes \tilde{w}_{33}^*) \odot (\tilde{w}_{31}^* \oplus \tilde{w}_{32}^* \oplus \tilde{w}_{33}^*) \\ &= (0.3659, 0.5134, 1.1189, 1.5984; 0.5, 0.6), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{r}_4 &= (\tilde{r}_{41} \otimes \tilde{w}_{41} \oplus \tilde{r}_{42} \otimes \tilde{w}_{42} \oplus \tilde{r}_{43} \otimes \tilde{w}_{43}) \odot (\tilde{w}_{41} \oplus \tilde{w}_{42} \oplus \tilde{w}_{43}) \\ &= (0.4706, 0.5968, 0.9998, 1.2053; 0.8, 0.7) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{r}_5 &= (\tilde{r}_{51} \otimes \tilde{w}_{51} \oplus \tilde{r}_{52} \otimes \tilde{w}_{52} \oplus \tilde{r}_{53} \otimes \tilde{w}_{53}) \odot (\tilde{w}_{51} \oplus \tilde{w}_{52} \oplus \tilde{w}_{53}) \\ &= (0.0172, 0.0545, 0.1933, 0.3616; 0.4, 0.6) \end{aligned}$$

hesaplanır.

Her $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ve $j = 1, 2, 3, 4$ için

$k = \max\{\|\tilde{r}_{ij}\|, 1\} = 2$ bulunur. Buradan \tilde{r}_i genelleştirilmiş bulanık bulanık sayıları standardize edilirse

$$\tilde{r}_i^* = (0.0883, 0.1430, 0.3622, 0.5287; 0.5, 0.6),$$

Çizelge. C_i fabrikaları tarafından üretilen A_{ik} alt bileşeni için \tilde{w}_{ik} önem değeri ve \tilde{r}_{ik} hatalı üretilme olasılığı (The probability of failure \tilde{r}_{ik} and severity of loss \tilde{w}_{ik} of the sub-component A_{ik} made by manufactories C_i)

Fabrika	A_{ik}	Önem değeri	Hatalı üretilme olasılığı
C_1	A_{11}	$\tilde{w}_{11} = (0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 0.8, 0.9)$	$\tilde{r}_{11} = (0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 0.9, 0.9)$
	A_{12}	$\tilde{w}_{12} = (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.65, 0.7)$	$\tilde{r}_{12} = (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.9, 0.7)$
	A_{13}	$\tilde{w}_{13} = (0, 0, 0, 0; 0.5, 0.6)$	$\tilde{r}_{13} = (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8, 0.9)$
C_2	A_{21}	$\tilde{w}_{21} = (0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 0.8, 0.7)$	$\tilde{r}_{21} = (0.93, 0.98, 1, 1; 0.85, 0.8)$
	A_{22}	$\tilde{w}_{22} = (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1, 0.5)$	$\tilde{r}_{22} = (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.9, 0.9)$
	A_{23}	$\tilde{w}_{23} = (0, 0, 0.02, 0.07; 0.4, 0.8)$	$\tilde{r}_{23} = (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.7, 0.9)$
C_3	A_{31}	$\tilde{w}_{31} = (0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 1, 1)$	$\tilde{r}_{31} = (0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 0.95, 0.95)$
	A_{32}	$\tilde{w}_{32} = (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8, 0.8)$	$\tilde{r}_{32} = (0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 0.5, 0.6)$
	A_{33}	$\tilde{w}_{33} = (0, 0, 0.02, 0.07; 0.9, 0.7)$	$\tilde{r}_{33} = (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1, 1)$
C_4	A_{41}	$\tilde{w}_{41} = (0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 0.9, 1)$	$\tilde{r}_{41} = (0.93, 0.98, 1, 1; 0.8, 1)$
	A_{42}	$\tilde{w}_{42} = (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1, 1)$	$\tilde{r}_{42} = (0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 0.8, 0.7)$
	A_{43}	$\tilde{w}_{43} = (0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 0.9, 0.8)$	$\tilde{r}_{43} = (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 1, 0.9)$
C_5	A_{51}	$\tilde{w}_{51} = (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.9, 0.7)$	$\tilde{r}_{51} = (0, 0, 0.02, 0.07; 0.4, 0.8)$
	A_{52}	$\tilde{w}_{52} = (0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 1, 0.6)$	$\tilde{r}_{52} = (0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 0.7, 0.9)$
	A_{53}	$\tilde{w}_{53} = (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.7, 0.6)$	$\tilde{r}_{53} = (0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 1, 0.8)$

$$\begin{aligned}\tilde{r}_2^* &= (0.1610, 0.2475, 0.5696, 0.8186; 0.4, 0.5), \\ \tilde{r}_3^* &= (0.1829, 0.2567, 0.5595, 0.7992; 0.5, 0.6), \\ \tilde{r}_4^* &= (0.2353, 0.2984, 0.4999, 0.6027; 0.8, 0.7), \\ \tilde{r}_5^* &= (0.0086, 0.0272, 0.0967, 0.1808; 0.4, 0.6)\end{aligned}$$

olur.

Denklem (8) ve (11) kullanılarak verilen genelleştirilmiş bulanık sayılar için sol ve sağ taraftaki üçgenlerin iç teğet çemberlerinin merkezleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned}I_{\tilde{r}_1^*L} &= (0.2443, 0.1398), & I_{\tilde{r}_1^*R} &= (0.3270, 0.1534), \\ I_{\tilde{r}_2^*L} &= (0.3458, 0.1491), & I_{\tilde{r}_2^*R} &= (0.5334, 0.1766), \\ I_{\tilde{r}_3^*L} &= (0.3749, 0.1657), & I_{\tilde{r}_3^*R} &= (0.5222, 0.1876), \\ I_{\tilde{r}_4^*L} &= (0.3923, 0.1451), & I_{\tilde{r}_4^*R} &= (0.4394, 0.1410), \\ I_{\tilde{r}_5^*L} &= (0.0807, 0.0688), & I_{\tilde{r}_5^*R} &= (0.0950, 0.0746).\end{aligned}$$

Hesaplanan bu değerler (12) ifadesinde yerine yazıldığında

$$(\omega_{R\tilde{r}_1} x_{\tilde{r}_1R}, \omega_{L\tilde{r}_1} x_{\tilde{r}_1L}, 1 - y_{\tilde{r}_1R}) = (0.1962, 0.1221, 0.8466)$$

$$(\omega_{R\tilde{r}_2} x_{\tilde{r}_2R}, \omega_{L\tilde{r}_2} x_{\tilde{r}_2L}, 1 - y_{\tilde{r}_2R}) = (0.2667, 0.1383, 0.8234)$$

$$(\omega_{R\tilde{r}_3} x_{\tilde{r}_3R}, \omega_{L\tilde{r}_3} x_{\tilde{r}_3L}, 1 - y_{\tilde{r}_3R}) = (0.3133, 0.1875, 0.8124)$$

$$(\omega_{R\tilde{r}_4} x_{\tilde{r}_4R}, \omega_{L\tilde{r}_4} x_{\tilde{r}_4L}, 1 - y_{\tilde{r}_4R}) = (0.3076, 0.3138, 0.8590)$$

$$(\omega_{R\tilde{r}_5} x_{\tilde{r}_5R}, \omega_{L\tilde{r}_5} x_{\tilde{r}_5L}, 1 - y_{\tilde{r}_5R}) = (0.0570, 0.0323, 0.9254)$$

bulunur. Buradan Algoritma 7 ya da doğrudan sözlük sıralama kullanılacak olursa

$$(0.0570, 0.0323, 0.9254) <_L (0.1962, 0.1221, 0.8466) <_L (0.3076, 0.3138, 0.8590) <_L (0.3133, 0.1875, 0.8124)$$

olur. O halde

$$\tilde{r}_5^* < \tilde{r}_1^* < \tilde{r}_2^* < \tilde{r}_4^* < \tilde{r}_3^*$$

elde edilir.

Sonuç olarak, C_3 fabrikası tarafından üretilen A_3 bileşenin hatalı üretilme olasılığı en fazladır. Bunu sırasıyla C_4 , C_2 , C_1 ve C_5 fabrikaları takip etmektedir.

7. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Bu çalışmada, sol ve sağ yükseklikleri farklı genelleştirilmiş yamuk bulanık sayıları sıralamak için, üçgenin iç teğet çemberinin merkezinin koordinatları ile bulanık sayının sol ve sağ yükseklikleri yardımıyla yeni bir sıralama yöntemi verilmiştir. Verilen sıralama yöntemi, genelleştirilmiş yamuk ve genelleştirilmiş üçgensel bulanık sayıların yanı sıra aynı ağırlık merkezine sahip genelleştirilmiş üçgensel bulanık sayılarla birlikte, gerçel sayıları da sıralayabilmektedir. Sol ve sağ yükseklikleri farklı genelleştirilmiş yamuk

bulanık sayılar için verilen sıralama yönteminin bulanık risk analizi problemine bir uygulaması yapılmıştır.

TEŞEKKÜR (ACKNOWLEDGEMENT)

Bu çalışma Anadolu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonunca kabul edilen 1403F077 nolu proje kapsamında desteklenmiştir.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

- [1] Chen S. J. and Chen S. M., "Fuzzy risk analysis based on the ranking of generalized trapezoidal fuzzy numbers", *Appl. Intell.*, 26: 1–11, (2007).
- [2] Björk K.M., "An analytical solution to a fuzzy economic order quantity problem", *Internat. J. Approx. Reason.*, 50: 485–493, (2009).
- [3] Barajas M. and Agard B., "Improved fuzzy ranking procedure for decision making in product design", *Int. J. Prod. Res.*, 48: 5433–5453, (2010).
- [4] Akyar E., "A fictitious play algorithm for matrix games with fuzzy payoffs", *Abstr. Appl. Anal.*, Volume 2012: 12 pages Article ID 950482, (2012).
- [5] Akyar E., Akyar H. and Düzce S. A., "Fuzzy risk analysis based on a geometric ranking method for generalized trapezoidal fuzzy numbers", *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 25: 209–217, (2013).
- [6] Marszalek A. and Burczynski T., "Modeling and forecasting financial time series with ordered fuzzy candlesticks", *Inform. Sci.*, 273: 144–155, (2014).
- [7] Xie N. and Xin J., "Interval grey numbers based multi-attribute decision making method for supplier selection", *Kybernetes*, 43: 1064–1078, (2014).
- [8] Yue W., Cai Y., Rong Q., Li C. and Ren L., "A hybrid life-cycle and fuzzy-set-pair analyses approach for comprehensively evaluating impacts of industrial wastewater under uncertainty", *J. Clean. Prod.*, 80: 57–68, (2014).
- [9] Jain R., "Decision-making in the presence of fuzzy variables", *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, 10: 698–703, (1976).
- [10] Yager R. R., "On a general class of fuzzy connectives", *Fuzzy Sets and Systems*, 4: 235–242, (1980).
- [11] Murakami S., Maeda S. and Imamura S., "Fuzzy decision analysis on the development of centralized regional energy control system", pages 363–368, *Pergamon*, (1983).
- [12] Cheng C. H., "A new approach for ranking fuzzy numbers by distance method", *Fuzzy Sets and Systems*, 95: 307–317, (1998).
- [13] Chen S. J. and Chen S. M., "A new method for handling multicriteria fuzzy decision-making problems using FN-IOWA operators", *Cybernet Syst.*, 34: 109–137, (2003).
- [14] Lee L. W. and Chen S. M., "Fuzzy risk analysis based on fuzzy numbers with different shapes and different deviations", *Expert Syst. Appl.*, 34: 2763–2771, (2008).
- [15] Chen S. M. and Chen J. H., "Fuzzy risk analysis

- based on ranking generalized fuzzy numbers with different heights and different spreads”, *Expert Syst. Appl.*, 36(3): 6833–6842, (2009).
- [16] Chen S. M. and Wang C. H., “Fuzzy risk analysis based on ranking fuzzy numbers using α -cuts, belief features and signal/noise ratios”, *Expert Syst. Appl.*, 36: 5576–5581, (2009).
- [17] Chen S. M. and Sanguansat K., “Analyzing fuzzy risk based on a new fuzzy ranking method between generalized fuzzy numbers”, *Expert Syst. Appl.*, 38: 2163–2171, (2011).
- [18] Chen S.M., Munif A., Chen G. S., Liu H. C. and Kuo B. C., “Fuzzy risk analysis based on ranking generalized fuzzy numbers with different left heights and right heights”, *Expert Syst. Appl.*, 39: 6320–6334, (2012).
- [19] Akyar E., Akyar H. and Düzce S. A., “A new method for ranking triangular fuzzy numbers”, *Internat. J. Uncertain. Fuzziness Knowledge-Based Systems*, 20: 729–740, (2012).
- [20] Abbasbandy S., Nuraei R. and Ghanbari M., “Revision of sign distance method for ranking of fuzzy numbers”, *Iran. J. Fuzzy Syst.*, 10: 101–117, (2013).
- [21] Bakar A. S. A. and Gegov A., “Ranking of fuzzy numbers based on centroid point and spread”, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 27(3): 1179–1186, (2014).
- [22] Ezzati R., Khezerloo S. and Ziari S., “Application of parametric form for ranking of fuzzy numbers”, *Iran. J. Fuzzy Syst.*, 12: 59–74, (2015).
- [23] Düzce S. A., “A new ranking method for trapezoidal fuzzy numbers and its application to fuzzy risk analysis”, *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 28: 1411–1419, (2015).
- [24] Jiang W., Luo Y., Qin X.Y. and Zhan J., “An improved method to rank generalized fuzzy numbers with different left heights and right heights”, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 28(5): 2343–2355, (2015).
- [25] Chutia R., Gogoi R. and Datta D., “Ranking p -norm generalised fuzzy numbers with different left height and right height using integral values”, *Mathematical Sciences*, 9: 1–9, (2015).
- [26] Lee K. H., “First course on fuzzy theory and applications”, *Springer*, Heidelberg, (2005).
- [27] Bede B., “Mathematics of fuzzy sets and fuzzy logic”, *Springer*, Heidelberg, (2013).
- [28] Baragar A., “A Survey of Classical and Modern Geometries: with computer activities”, *Prentice-Hall*, New Jersey, (2001).
- [29] Nelsen R. B., “Heron’s formula via proofs without words”, *College Mathematics Journal*, 290–292, (2011).
- [30] Ungar A. A., “Barycentric Calculus in Euclidean and Hyperbolic Geometry: A Comparative Introduction”, *World Scientific Publishing Company*, Singapore, (2010).
- [31] Schmucker K. J., “Fuzzy sets, natural language computations, and risk analysis”, *Computer Science Press*, Maryland, (1984).