

## KARMA DENEMELERDE MODEL SEÇİMİ

Nurkut Nuray URGAN \*

Pakize TAYLAN \*

### ÖZET

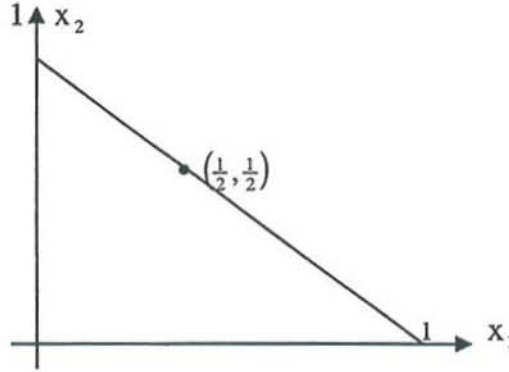
*Karma denemeler, bir karışımın miktarına değil de, o karışımı oluşturan bileşenlerin oranlarına bağlı olan denemelerdir. Karma denemede amaç, bileşenlerin farklı oranlardaki karışımları, fiziksel, kimyasal ve ekonomik şartları göz önüne alınarak, ürünün kalitesini azaltmayan ve maliyeti artırıcı etkisi olmayan en iyi karmayı elde edebilmektir. Bu da bileşenler üzerinde bazı kısıtlamalara neden olur. Kısıtlama genellikle  $q$  karma denemedeki bileşen sayısı ve  $x_i$  i-inci bileşenin oranı olmak üzere, denemede karışımın toplam miktarı sabit tutulur ve bileşenlerin toplamı olacak şekilde bileşenlerin oranları değiştirilir. Karma denemelerde en çok kullanılan modeller Scheffé ve Cox karma deneme modelidir. Bu çalışmada, Scheffé ve Cox karma model karşılaştırılıp bir kimyasal deney üzerinde uygulanmıştır.*

*Anahtar Kelimeler : Cox Karma Deneme Modeli, Karma Denemeler, Scheffe Karma Deneme Modeli.*

### 1. KARMA DENEMELER

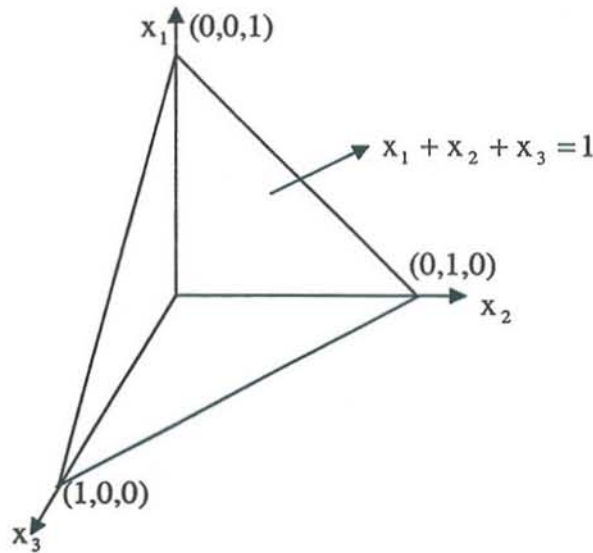
Karma deneme, bir karışımın miktarına değil de, o karışımı oluşturan bileşenlerin oranlarına bağlı olan denemelerdir. Örneğin, bir kekin yumuşaklığı veya iyi kabarması gibi özellikler kek karışımını oluşturan yağ, un, şeker, süt, kabartma tozu... gibi maddelerin oranlarına; ananas, portakal ve greyfurt suyu ile yapılacak olan bir meyve suyunun tadı bu maddelerin oranlarına bağlıdır. Karma denemede amaç, bileşenlerin farklı oranlardaki karışımları, fiziksel, kimyasal ve ekonomik şartları göz önüne alınarak, ürünün kalitesini azaltmayan ve maliyeti artırıcı etkisi olmayan en iyi karmayı elde edebilmektir. Bu da bileşenler üzerinde bazı kısıtlamalara neden olur. Kısıtlama genellikle  $q$ , karma denemedeki bileşen sayısı ve  $x_i$  i-inci bileşenin oranı olmak üzere, denemelerde bileşenlerin oranları toplamı  $\sum_{i=1}^q x_i = 1$  olacak şekilde değiştirilir. Örnek olarak iki maddenin karışımı ele alınırsa,  $x_1$  birinci madde,  $x_2$  ikinci maddenin oranı olmak üzere karışımları,  $x_1 + x_2 = 1$  ( $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$ ) olmalı. Bu iki maddenin tüm olası karışımları düzlemde  $x_1 + x_2 = 1$  doğrusu üzerindedir (Şekil 1).

\* Dicle Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Diyarbakır, Türkiye, nsazli@dicle.edu.tr



Şekil 1.  $x_1 + x_2 = 1$  bir boyutlu karma deneme uzayı, iki boyutlu uzay içine gömülmüştür.

Eğer karma, üç maddenin birleşimiyle oluşursa, olabilecek bütün karışımların kümesi Şekil 2' deki gibi bir eşkenar üçgenle belirlenen düzlem üzerindeki noktalar olacaktır.



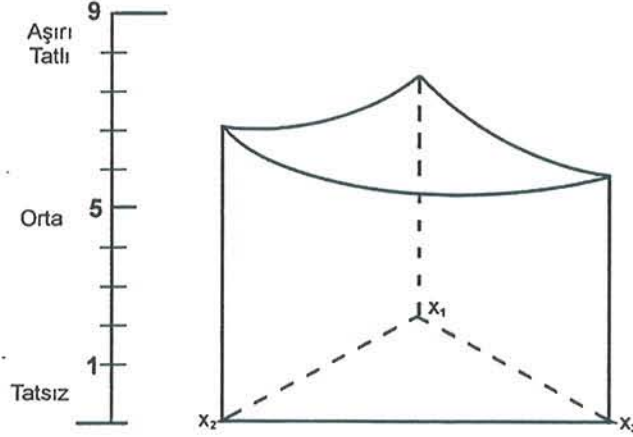
Şekil 2.  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$  iki boyutlu karma deneme uzayı, üç boyutlu uzay içine gömülmüştür.

$q$  bileşenli bir karma deneme, beklenen yanıt  $x_1, x_2, \dots, x_q$  bileşen oranlarına bağlı olup, karışımın toplam miktarına bağlı değildir.  $q$  bileşenli karmadaki  $i$ . bileşenin oranı  $x_i$

$$\sum_{i=1}^q x_i = 1, \quad x_i \geq 0 \quad (1)$$

denklemini sağlar ve bu deneysel bölge bir simplekstir.  $(x_1, x_2, \dots, x_q) = x$  için beklenen yanıt  $\eta(x)$  ile gösterilir. (1) ile gösterilen denklem düzgün  $(n-1)$ -boyutlu  $S$  simpleksi için deneysel bölge sınırlamasıdır. Buna göre,  $n=2$  için  $S$  bir düzgün doğru;  $n=3$  için  $S$  bir düzgün üçgen;  $n=4$  için  $S$  bir düzgün tetrahedron olur.  $S$ ,  $n$ -bileşenli karma denemelerin muhtemel bölgesi olarak adlandırılır. Örneğin, portakal suyu( $x_1$ ), ananas suyu( $x_2$ ) ve greyfurt suyu( $x_3$ ) karışımıyla meyve suyu yapmak için, tatlar 1=tatsız,

5=orta ve 9=aşırı tatlı olarak puanlandırılınsın. Bu olayda meyve sularının herhangi bir karması için ölçülen tat ölçeği, ki artık buna yanıt denir, koordinatları üçgenin içinde ve sınırları üzerinde bulunan karmanın yukarısındaki bir dikey yükseklik ile gösterilebiliyorsa birli, ikili, üçlü meyve suyu karışımlarının tat değerlerinin bölgesi üçgen üzerindeki bir yüzey olarak göz önüne alınır. Bütün meyve sularının karışımı için sürekli olduğu düşünülen bir yüzey Şekil 3 ile gösterilir.



Şekil 3. Meyve suyunun tat yüzeyi.

Tat ölçeği dağılıma bağımlı, karışım oranlarının bağımsız değişkenler olduğu rasgele deneyin modeli bir polinom ise (1) deki kısıtlama bir artış gösterir, bu yüzden 1. dereceden polinom:

$$(\beta_0 - \lambda) + \sum_{i=1}^q (\beta_i + \lambda)x_i \quad (2)$$

denklemini tüm  $\lambda$ ' lar için  $S'$  de özdeşdir.  $x = (x_1, x_2, \dots, x_q)$  olsun,  $Y_i = \sum_{i=1}^q \beta_i x_i + \varepsilon_i$ ,

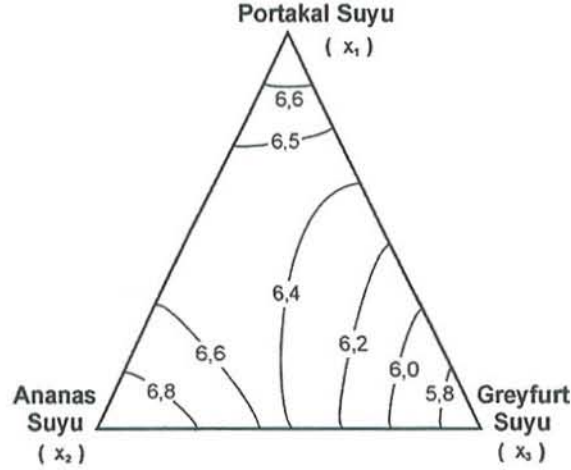
$E(Y_i) = \eta_i(x)$  ve  $E(\varepsilon) = 0$  olmak üzere önerilen birinci ve ikinci dereceden polinomlar kanonik formda sırasıyla

$$\eta_1(x) = \sum_{i=1}^q \beta_i x_i \quad (3)$$

$$\eta_2(x) = \sum_{i=1}^q \beta_i x_i + \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^q \beta_{ij} x_i x_j \quad (4)$$

şeklindedir. Burada  $\beta_i$ ' ler modeldeki tek bileşenli karmaların parametreleri,  $\beta_{ij}$ ' ler  $x_i = x_j = 1/2$  ( $i \neq j$ ) ikili bileşenlerin parametreleridir. Yüksek dereceli polinom eşitliklerini kullanmaktansa daha az terim içeren ve ( $\beta$ ) parametrelerini tahmin etmede az sayıda gözlenen yanıt değerleri gereken düşük dereceli polinom eşitlikleri kullanmak daha uygundur.

Tat yüzeyinin kontur haritası Şekil (4) deki gibidir. Burada her kontur eğrisi yüzeyi özel bir yükselti boyunca kesen, üçgene paralel olan bir düzlemle oluşturulan tat yüzeyinin bir dik kesitinin üç bileşenli üçgen üzerine iz düşümüdür.



Şekil 4. Meyve suyu yüzeyinin sabit meyveli tat konturları.

$n$  denemeden oluşan bir deneysel çalışmada  $\eta$  yanıtı gözlenirken,  $u$ . deneme için gözlenen değer  $Y_u$  ( $u=1,2,\dots,n$ ), bir  $\sigma^2$  varyanslı  $\eta_u$ ' nun ortalaması civarında değişir. Gözlenen değer

$$Y_u = \eta_u + \varepsilon_u, \quad 1 \leq u \leq n \quad (5)$$

dir. Burada  $\varepsilon_u$  deneysel hatadır. Deneysel hata ( $\varepsilon_u$ ), 0 ortalamalı ve  $\sigma^2$  varyanslı aynı dağılıma sahiptir. Hata için,

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_u) &= 0 \\ E(\varepsilon_u^2) &= \sigma^2, \quad E(\varepsilon_u \varepsilon_{u'}) = 0, \quad u \neq u', \quad u, u' = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

dir. Bu nedenle  $Y_u$  için beklenen değer

$$E(Y_u) = \eta_u, \quad \forall u = 1, 2, \dots, n$$

olur (Cornell 1990).

## 2. SCHEFFÉ KARMA DENEME MODELİ

Scheffé karmalarının birinci dereceden

$$\eta = \sum_{i=1}^q \beta_i x_i \quad (6)$$

İkinci dereceden modeli

$$\eta = \sum_{i=1}^q \beta_i x_i + \sum_{i<j} \beta_{ij} x_i x_j \quad (7)$$

olarak tanımlanır (Scheffé 1963).

Scheffé karma deneme modeline göre Cornell (1990), 3-bileşenli ve 4-bileşenli karmalarının bazı özel tasarım noktaları Tablo 1'deki gibi belirlemiştir.

**Tablo 1.** Scheffé modeline göre 3- ve 4-bileşenli karmaların bazı tasarım noktaları.

yanıt	$x_1$	$x_2$	$x_3$		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$\eta_1$	1	0	0		1	0	0	0
$\eta_2$	0	1	0		0	1	0	0
$\eta_3$	0	0	1		0	0	1	0
$\eta_{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\eta_{13}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
$\eta_{23}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\eta_{112}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0		$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0
$\eta_{223}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$		0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
$\eta_{133}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0
$\eta_{233}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
$\eta_{1112}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0		$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0
$\eta_{1223}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
$\eta_{1144}$					$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
$\eta_{1234}$					$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\eta_{2344}$					0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

İkinci dereceden 3-bileşenli karma modeli,

$$\eta = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3 \quad (8)$$

şeklindedir.  $x_i = 1$  ,  $x_j = 0$  ,  $i, j = 1, 2, 3$  ,  $i \neq j$  noktasında beklenen yanıt  $\eta_i$  ,  
 $x_i = \frac{1}{2}$  ,  $x_j = \frac{1}{2}$  ,  $x_k = 0$  ,  $i < j$  ,  $k \neq i, j$  noktasında beklenen yanıt  $\eta_{ij}$  ise

$$\binom{q+m-1}{m} = \binom{3+2-1}{2} = 6$$

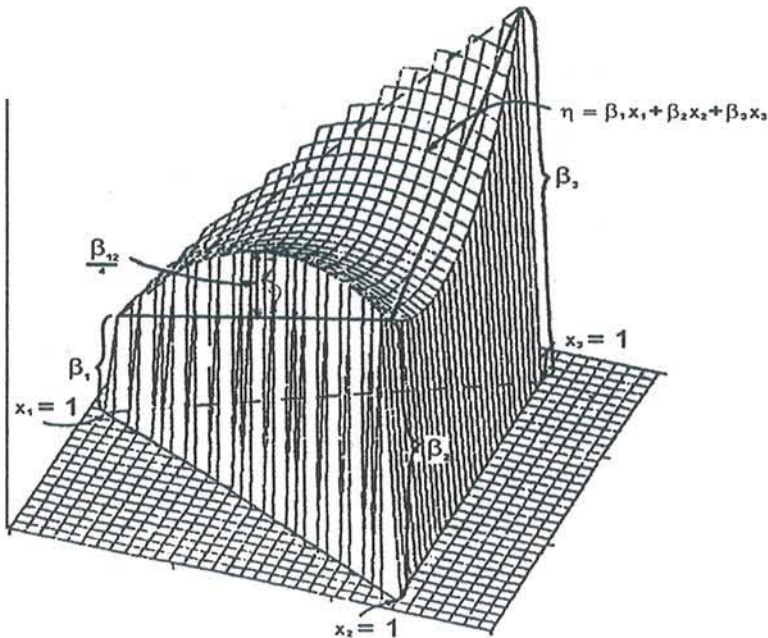
olduğundan 6 tasarım noktası bulunur. Bunlar

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \beta_1, & \eta_2 &= \beta_2, & \eta_3 &= \beta_3 \\ \eta_{12} &= \beta_1\left(\frac{1}{2}\right) + \beta_2\left(\frac{1}{2}\right) + \beta_{12}\left(\frac{1}{4}\right), & \eta_{13} &= \beta_1\left(\frac{1}{2}\right) + \beta_3\left(\frac{1}{2}\right) + \beta_{13}\left(\frac{1}{4}\right) \\ \eta_{23} &= \beta_2\left(\frac{1}{2}\right) + \beta_3\left(\frac{1}{2}\right) + \beta_{23}\left(\frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

olur. Buradan da:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \eta_1, & \beta_2 &= \eta_2, & \beta_3 &= \eta_3 \\ \beta_{12} &= 4\eta_{12} - 2\eta_1 - 2\eta_2, & \beta_{13} &= 4\eta_{13} - 2\eta_1 - 2\eta_3, & \beta_{23} &= 4\eta_{23} - 2\eta_2 - 2\eta_3 \end{aligned} \quad (9)$$

$\beta_i$  parametresi,  $i$  saf bileşenin yanıtı,  $\beta_{ij}$ ,  $i$  ve  $j$  bileşenlerinin köşe noktalarındaki yanıtlar ile  $i$  ve  $j$  bileşenlerinin köşelerini birleştiren kenarların orta noktalarındaki yanıtları karşılaştıran bir zıtlıktır. (8) denklemindeki  $\beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3$  toplamı karmanın lineer kısmıdır. Şekil (5) de  $\beta_{ij}x_ix_j$ ,  $i < j$  terimi bulunmayan karmanın lineer bölümünü oluşturan  $\beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3$ 'nın oluşturduğu yanıt yüzeyi gösterilmiştir (Khuri ve Cornell (1987)).



Şekil 5.  $\eta = \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3$  denkleminin yanıt yüzeyi.

Genel olarak  $i, j = 1, 2, \dots, q, i < j$  için

$$\begin{aligned}\beta_i &= \eta_i \\ \beta_{ij} &= 4\eta_{ij} - 2(\eta_i + \eta_j)\end{aligned}\quad (10)$$

olur. Scheffé (1963) karma modelinin matris gösterimi

$$y = X\beta + \varepsilon$$

(11)

şeklindedir. Burada  $X$ ,  $n \times p$  tipinde  $i$ . satırı  $x_i$  değerlerini içeren matris,  $y$ ,  $n \times 1$  tipinde yanıt vektörü,  $\beta$ ,  $p \times 1$  tipinde bilinmeyen parametrelerin vektörü,  $\varepsilon$ ,  $n \times 1$  tipinde  $E(\varepsilon) = 0$  ve  $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 I$  özelliklerini sağlayan rasgele hata vektörüdür.

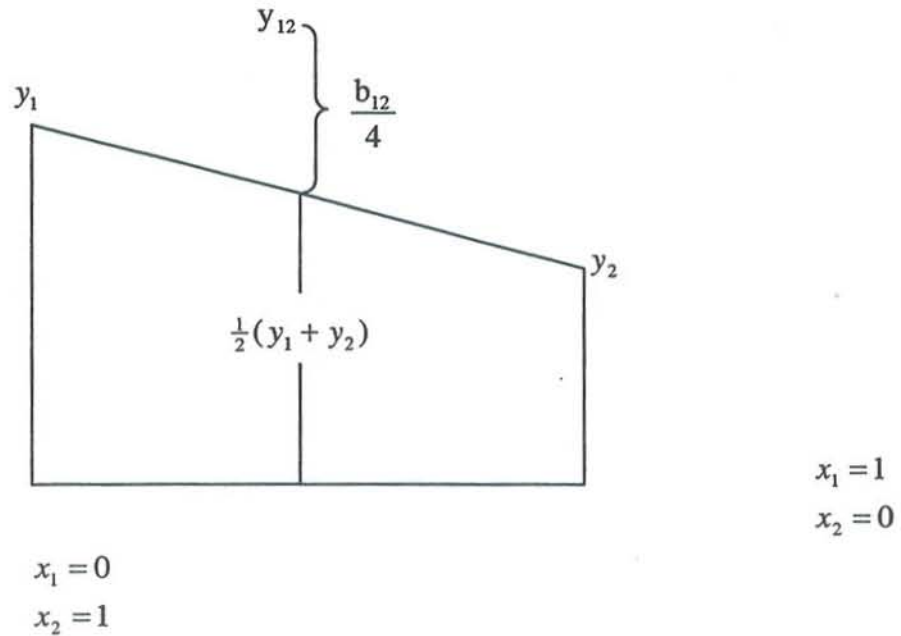
$u$ -uncu denemede yanıtın gözlem değeri  $y_u$ , ( $1 \leq u \leq N$ ) olmak üzere  $y_u = \eta_u + \varepsilon_u$  formunda yazılsın. Bu form geçici olarak gözlenen yanıtla, aynı bilimsel adlandırma olan,  $i$ . saf bileşen için yanıtın gözlenen değeri  $y_i$  ve  $i$ . ve  $j$ . bileşenlerin %50:%50 ikili karma yanıtının gözlenen değeri  $y_{ij}$  ile değiştirilsin. (10) denkleminde,  $b_i$  ve  $b_{ij}$  ler  $\beta_i$  ve  $\beta_{ij}$  lerin tahmini olmak üzere,  $\eta_i$ ,  $i$ . saf bileşen için yanıt ve  $\eta_{ij}$ ,  $i$ . ve  $j$ . eşit oranlı ikili karmalar için yanıt olmak üzere,  $\eta_i$  ve  $\eta_{ij}$  yerine sırayla  $y_i$  ve  $y_{ij}$  yazıldığında,

$$b_i = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad b_{ij} = 4y_{ij} - 2(y_i + y_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, q, \quad i < j$$

$$\frac{b_{ij}}{4} = y_{ij} - \frac{(y_i + y_j)}{2}$$

(12)

olur (Cornell (1990)), son denklemdeki  $\frac{b_{ij}}{4}$  miktarı  $x_i = x_j = \frac{1}{2}$  karmasındaki gözlenen yanıtın yüksekliği ile  $i$  ve  $j$  bileşenlerinin tepe noktalarında gözlenen yanıtın yüksekliğinin ortalaması arasındaki farkı gösterir. Bu Şekil (6) da gösterilmiştir.



Şekil 6. 1 ve 2 bileşenlerinin karması.

$r_i$  ,  $x_i = 1, x_j = 0$  noktasındaki,  $r_j$  ,  $x_i = 0, x_j = 1$  noktasındaki,  $r_{ij}$  ,  $x_i = \frac{1}{2}, x_j = \frac{1}{2}$  noktasındaki tekrarlı gözlemler ve  $\bar{y}_i, \bar{y}_j$  ve  $\bar{y}_{ij}$  tekrarların ortalamaları olmak üzere ve ortalamaların (12) denkleminde yerine yazılmasıyla parametreler için en küçük kareler tahmin edicileri,

$$b_i = \bar{y}_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad b_{ij} = 4\bar{y}_{ij} - 2(\bar{y}_i + \bar{y}_j) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, q \quad , \quad i < j \quad (13)$$

$b_i$  ve  $b_{ij}$  tahminlerinin varyansı,

$$\begin{aligned} E(b_i) &= E(\bar{y}_i) = \beta_i, \quad \text{var}(b_i) = \text{var}(\bar{y}_i) = \frac{\sigma^2}{r_i} \\ E(b_{ij}) &= E[4\bar{y}_{ij} - 2(\bar{y}_i + \bar{y}_j)] = \beta_{ij} \\ \text{var}(b_{ij}) &= \text{var}[4\bar{y}_{ij} - 2(\bar{y}_i + \bar{y}_j)] = \frac{16\sigma^2}{r_{ij}} + \frac{4\sigma^2}{r_i} + \frac{4\sigma^2}{r_j} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(b_i, b_j) &= E[\bar{y}_i \bar{y}_j] - E(\bar{y}_i)E(\bar{y}_j) = 0, \quad i \neq j \\ \text{cov}(b_i, b_{ij}) &= E[\bar{y}_i (4\bar{y}_{ij} - 2\bar{y}_i - 2\bar{y}_j)] - E(\bar{y}_i)E(4\bar{y}_{ij} - 2\bar{y}_i - 2\bar{y}_j) \\ &= -2E(\bar{y}_i^2) + 2(E(\bar{y}_i))^2 = -\frac{2\sigma^2}{r_i} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{cov}(b_{ij}, b_{ik}) = \frac{4\sigma^2}{r_i}, \quad j \neq k$$

olarak bulunur.  $b_i$  ve  $b_{ij}$  tahminleri,  $(y_i$  ve  $y_{ij})$  rasgele değişkenlerin lineer fonksiyonları ve kendileri de rasgele değişkenler olduğundan  $x'$  deki yanıtın  $\hat{y}(x)$  tahmini bir rasgele değişkendir.  $b_i$  ve  $b_{ij}$  tahminleri yansız ise  $\hat{y}(x)$  nin beklenen değeri  $E[\hat{y}(x)] = \eta$  olur.  $\hat{y}(x)$  tahmininin varyansı (14) ve (15) denklemleriyle gösterilebilir ancak daha kolay bir yolla da gösterilebilir, bu da:

$$\begin{aligned} \hat{y}(x) &= \sum_{i=1}^q b_i x_i + \sum_{i<j}^q b_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^q \bar{y}_i x_i + \sum_{i<j}^q (4\bar{y}_{ij} - 2\bar{y}_i - 2\bar{y}_j) x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^q \bar{y}_i \left[ x_i - 2x_i \left( \sum_{i \neq j}^q x_j \right) \right] + \sum_{i<j}^q 4\bar{y}_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^q a_i \bar{y}_i + \sum_{i<j}^q a_{ij} \bar{y}_{ij} \end{aligned} \quad (16)$$

şeklindedir, burada  $a_i = x_i(2x_i - 1)$  ve  $a_{ij} = 4x_i x_j$  ,  $i, j = 1, 2, \dots, q$  ,  $i < j$  dir.  $\bar{y}_i$  ve  $\bar{y}_{ij}$  , sırayla  $r_i$  ve  $r_{ij}$  ' nin ortalamaları olmak üzere,  $x$  noktasındaki yanıt tahmini  $\hat{y}(x)$  'in varyansı,

$$\text{var}[\hat{y}(x)] = \sigma^2 \left\{ \sum_{i=1}^q \frac{a_i^2}{r_i} + \sum_{i<j}^q \frac{a_{ij}^2}{r_{ij}} \right\} \quad (17)$$

şeklindedir (Scheffé (1958)). Eğer  $\sigma^2$  bilinmiyorsa  $r_i$  ve  $r_{ij}$  tekrarlı gözlemlerle  $\sigma^2$  ' nin yansız tahmin edicisi  $s^2$  bulunur.  $\sigma^2$  yerine  $s^2$  ' nin yazılmasıyla,  $\text{var}[\hat{y}(x)]$  ' in bir



tahmini yazılır ve bu  $\overline{\text{var}}[\hat{y}(x)]$  şeklinde yazılır. (10) eşitliğindeki  $\eta$  için  $(1 - \alpha)$  güven aralığı

$$\hat{y}(x) - \Delta < \eta < \hat{y}(x) + \Delta \quad (18)$$

şeklindedir. Burada  $\Delta = [t_{p-1, \alpha/2}] [\overline{\text{var}}[\hat{y}(x)]]^{1/2}$  ve  $p-1$ , t-dağılımının serbestlik derecesidir. Gözlemlerin varyansı, farklı karmalardaki değerlerin ortalamaları arasındaki varyans ve her karışımındaki tekrarlı örnekler arasındaki varyans olarak iki farklı şekilde ele alınır. Gözlemlerdeki karmalar arasındaki varyans,

$$\text{Karmalar arasındaki Kareler Toplamı} = \sum_{i=1}^6 r_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2 \quad (19)$$

olur. Burada  $r_i$ , i. karmanın tekrarlı gözlem sayısı,  $\bar{y}_i$ , i. karmanın  $r_i$  tekrarlı gözlem sayısının ortalaması,  $\bar{y}$ , N gözlem sayısının tüm ortalamasıdır, ve bu toplam  $p-1$  serbestlik derecesine sahiptir.  $\{q, m\}$  polinomu,  $\{q, m\}$  simpleks latis tasarım (simplex üzerinde q bileşenli m.dereceden modelde bileşen oranları  $x_i = 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, 1$  noktalarıyla meydana gelen tasarım) noktalarında toplanan verilere uydurulduğunda, modeldeki terimlerin sayısı tasarımla gösterilen farklı karmaların sayısına eşit olacaktır, bu sayı  $\binom{q+m-1}{m}$  dir. Böylece önerilen modelle açıklanan gözlemlerdeki değişim "regresyon kareler toplamı",

$$\text{Regresyon kareler toplamı (R.K.K)} = \sum_{u=1}^N (\hat{y}_u - \bar{y})^2 \quad (20)$$

olarak yazılır. Burada  $\hat{y}_u$ , uygun model kullanılarak elde edilen karma bileşenlerin u. koşuldaki tahmini,  $\bar{y}$ , bütün gözlemlerin ortalamasıdır ve  $\bar{y} = (y_1 + y_2 + \dots + y_N)/N$  dir.

Karmalar içindeki tekrarlı gözlemler arasındaki değişim, karmalar arasındaki farkla bulunamaz ve kalanların değişimi olarak bulunur. Kalan kareler toplamı

$$\text{Kalan Kareler Toplamı (K.K.K)} = \sum_{u=1}^N (y_u - \hat{y}_u)^2 \quad (21)$$

olup,  $N-p$  serbestlik derecesine sahiptir. N verisinin tamamının varyansı ise

$$\text{Tüm Kareler Toplamı (T.K.K)} = \sum_{u=1}^N (y_u - y)^2 \quad (22)$$

dir.

**Tablo 2.** Varyans analiz tablosu.

	Serbestlik derecesi	Kareler toplamı	Ortalama kare	F-oranı
Regresyon	$p-1$	$R.K.K = \sum_{u=1}^N (\hat{y}_u - \bar{y})^2$	$\frac{R.K.K}{(p-1)}$	$\frac{R.K.K/(p-1)}{K.K.K/(N-p)}$
Kalan	$N-p$	$K.K.K = \sum_{u=1}^N (y_u - \hat{y}_u)^2$	$\frac{K.K.K}{(N-p)}$	
Tüm	$N-1$	$T.K.K = \sum_{u=1}^N (y_u - y)^2$		

Alınan model doğru ise regresyon için ve kalan için ortalama karelerin beklenen değeri

$$E(\text{kalanların ortalama karesi}) = \sigma^2$$

$$E(\text{regresyonun ortalama karesi}) = \sigma^2 + f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{23})$$

olarak elde edilir. Burada eğer  $\eta = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_{23} x_2 x_3 = \beta$  yüzeyi simpleksin yukarısında bir düzlem ise  $f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{23})$  niceliği 0 olur ( $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta$ ,  $\beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{24} = 0$  gibi). Eğer  $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta$ ,  $\beta_{13} = \beta_{12} = \beta_{23} = 0$  hipotezi doğru ise, simpleks veya üçgen üzerindeki yüzey, tüm noktalardan eşit uzaklıkta olan yatay bir düzlemdir. Oranlar

$$\frac{(p-1) \times (\text{regresyon ortalama karesi})}{\{\sigma^2 + f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{23})\} = \sigma^2} \sim \chi^2_{(p-1)}$$

ve

$$\frac{(N-p) \times (\text{kalanlar ortalama karesi})}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(N-p)}$$

dir. Bu  $\chi^2_{(p-1)}$  ve  $\chi^2_{(N-p)}$  dağılımlı rasgele değişkenler bağımsızdır ve buradan F test istatistiği

$$F = \frac{(p-1) \times (\text{regresyon ortalama karesi}) / (p-1) \sigma^2}{(N-p) \times (\text{kalanlar ortalama karesi}) / (N-p) \sigma^2} \quad (23)$$

olarak bulunur. (23) oranının sonucu ile tablodan  $F_{(p-1, N-p, \alpha)}$  değeri karşılaştırılır, eğer bu değer tablo değerinden büyük çıkarsa  $H_0$  hipotezi reddedilir, küçükse kabul edilir ve bu da yüzeyin, simpleksin noktalarından eşit uzaklıkta olan bir düzlem olduğunu gösterir.

### 3. COX KARMA MODELİ

Cox karma modeli Scheffé karma polinomuna bir alternatif olarak verilir.

Polinomlar kullanıldığında,  $\sum_{i=1}^q x_i = 1$  kısıtlaması parametrisasyonda fazlalık gösterir.

Tüm özdeş  $\lambda$ ' lar için birinci dereceden polinom özdeşdir ve bu polinom

$$(\beta_0 + \lambda) + \sum_{i=1}^q (\beta_i - \lambda) x_i \quad (24)$$

şeklinde yazılır. (6) ve (7) Scheffé (1958) karma polinomlarında, ilgilenilen yalnızca verilen noktalardaki yanıt yüzeyinin yüksekliğinin tahmini ise hesaplamalar hariç parametrisasyonların seçimi önemsizdir. Bununla beraber, uygun özel yorumlu parametreler genellikle faydalıdır, bu açıdan Scheffé' nin polinomları bazen uygun olmasına rağmen aşağıdaki dezavantajlara sahiptir. Bunlar:

(i) Aynı sistem üzerinde iki kez tekrarlanan bir denemede, sabit terimler arasındaki fark hariç beklenen yanıt aynı ise (6) ve (7) modellerinde iki tekrarda farklı  $\beta_i$  parametreler görülür. Bu da yorumu güçleştirir.

(ii) (7)'den karesel terimlerin kaldırılması, özel bir bileşen için yanıtın eğrilik ölçümünün büyüklüğünü ve yönünü göz önüne almayı anlamsız yapar.

(iii) (6) ve (7)'deki  $\beta_i$  ve  $\beta_{ij}$ 'nin yorumu, çok basit karmalar için yanıtın terimlerindedir. İlgilenilen oldukça karmaşık karmaların davranışları olduğunda, deneme bölgesinin sadece birkaç bileşenli karmaları ihmal etmesi daha iyi sonuç verebilir.

Bu dezavantajları ortadan kaldırmak için bir alternatif polinom formu Cox karma modelidir.

Cox (1971) karmaların birinci dereceden modeli

$$\eta_1(x) = \beta_0 + \sum_{i=1}^q \beta_i x_i \quad (25)$$

ikinci dereceden modeli

$$\eta_2(x) = \beta_0 + \sum_{i=1}^q \beta_i x_i + \sum_{i,j=1}^q \beta_{ij} x_i x_j, \quad \beta_{ij} = \beta_{ji} \quad (26)$$

şeklindedir. (25) denklemindeki  $\beta_i$  parametresi i. bileşenin yanıt üzerindeki etkisini gösterir. Eğer i. bileşenin oranı değiştirilecek olursa, (1) deki kısıtlamanın bozulmaması için kalan q-1 bileşenden en az birinin oranında değişiklik olacaktır. Bunun için simpleks içinde merkeze yakın herhangi bir noktada  $s = (s_1, s_2, \dots, s_q)$  standart karma seçilsin. Ve s ile  $x_i = 1$  noktalarını birleştiren doğru üzerinde bir x noktası seçilsin, x üzerindeki i. bileşenin oranı  $\Delta_i$ , s üzerindeki i. bileşenin oranı  $s_i$  olsun. i. bileşen parametresinin tanımlanmasında bu bileşenin oranının  $x_i$ 'den  $x_i + \Delta_i$ 'ye arttığı göz önüne alınsın. Kalan bileşenlerde standart karma içinde kendi oluşumlarına göre oranlar dahilinde ayarlansın. Böylece  $j \neq i$  için  $x_j$ ,

$$\frac{x_j - \Delta_i s_j}{(1 - s_i)} \quad (27)$$

şeklinde değişir. (25) deki birinci dereceden model için beklenen yanıtta değişim,

$$\Delta \eta_1(x) = \frac{\beta_i \Delta_i}{1 - s_i} - \frac{\Delta_i}{1 - s_i} \sum_{j=1}^q \beta_j s_j$$

(28)

şeklindedir. Bu da,

$$\sum_{j=1}^q \beta_j s_j = 0 \quad (29)$$

kısıtlamasını güçlendirir ve bu

$$\eta_1(s) = \beta_0 \quad (30)$$

olmasını gerektirir.

(28) deki parametrelerin  $1/1 - s_i$  katsayısı dikkate alınırsa model

$$\alpha_i = \frac{\beta_i}{1 - s_j} \quad (31)$$

olarak yeniden tanımlanır.  $x_i$ 'deki artışı  $1 - s_i$  oranının bir kesri olarak ifade edebilmek için,

$$z_j = \frac{x_i}{1-s_j} \quad (32)$$

şeklindeki bağımsız değişken tanımı kullanılır. Aynı yol ikinci dereceden polinomlar içinde kullanılır. (29) kısıtlamasının yanı sıra  $\sum_{k=1}^q \beta_{jk} s_j s_k = 0$  kısıtlamasıyla birinci dereceden denklemdeki oranlarla aynı değişim yapıldığında,

$$\Delta\eta_2(s) = \beta_i \frac{\Delta_i}{1-s_i} + \beta_{ii} \left( \frac{\Delta_i}{1-s_i} \right)^2 \quad (33)$$

standart karmaşı elde edilir. Ayrıca  $\sum_{k=1}^q \beta_{jk} s_j s_k = 0$  olduğundan (26) denkleminde

$$\eta_2(s) = \beta_0 \quad (34)$$

olur. Daha sonra  $x=s'$  den başlanarak yeni oranlar elde edilir. Bu oranlar (32) denklemini de kullanılarak

$$\Delta\eta_2(s) = \sum \beta_i \Delta z_i + \sum \beta_{ij} \Delta z_i \Delta z_j \quad (35)$$

şeklinde yazılabilir. Değişim  $s'$  den değil de  $x'$  de ölçülmüş ise düzeltmeler yapılır. (35) denklemindeki ikili çarpımlar değişmez ancak lineer terimler merkezin değişiminden etkilenecektir. Eğer  $s$ ,  $(s_1 = s_2 = \dots = s_q = 1/q)$  şeklinde standart karma ise,

$$\sum \beta_j s_j = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{k=1}^q \beta_{jk} s_j s_k = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{j=1}^q \beta_j = 0, \quad \sum_{k=1}^q \beta_{jk} = 0 \quad (j=1,2,\dots,q) \quad (36)$$

şeklinde basit formda olacaktır (Cox (1971)).

#### 4. KİMYASAL BİR DENEY İÇİN MODEL SEÇİMİ

Kumaşa mavi boya ( $x_1$ ), sarı boya ( $x_2$ ) ve kırmızı boya ( $x_3$ ) karmaları dökülerek kumaşın boyayı tutma deneyi yapılıyor ve buna ilişkin gözlem değerleri aşağıdaki tablo ile veriliyor (Şahin (1998)).

**Tablo 3.** Pamuklu bir kumaşa dökülen boya renklerinin kumaşı tutma gözlem sonuçları

	mavi $x_1$	sarı $x_2$	kırmızı $x_3$	Kumaşın renk tutması ( $y_u$ )	Kumaşın renk tutmasının Ortalama değeri ( $\hat{y}_u$ )
1	1	0	0	2.84, 3.19	3.015
2	0	1	0	2.43	2.43
3	0	0	1	3.50	3.50
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1.635, 1.234	1.4345
5	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1.690, 1.494	1.592
6	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1.145, 1.430	1.2875

Verilen gözlem sonuçlarını Scheffé ikinci dereceden modele uygulanırsa:

$$\eta = \sum_{i=1}^q \beta_i x_i + \sum_{i < j} \beta_{ij} x_i x_j$$

$$\eta = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3$$

$$\eta_i = \beta_i, \quad i=1,2,3, \quad \eta_{ij} = \frac{1}{2}(\beta_i + \beta_j) + \frac{1}{4}\beta_{ij}, \quad i \neq j, \quad i < j$$

$$b_i = y_i, \quad i=1,2,3$$

$$b_1 = 3.015, \quad b_2 = 2.43, \quad b_3 = 3.50$$

$$b_{12} = 4y_{12} - 2(y_1 + y_2) = -5.152, \quad b_{13} = -6.662, \quad b_{23} = -6.71$$

$$b_i = \bar{y}_i, \quad b_{ij} = 4\bar{y}_{ij} - 2(\bar{y}_i + \bar{y}_j)$$

$$E(b_i) = E(\bar{y}_i) = \beta_i, \quad E(b_{ij}) = E[4\bar{y}_{ij} - 2(\bar{y}_i + \bar{y}_j)] = \beta_{ij}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^6 \sum_{u=1}^{2 \text{ veya } 3} (y_{iu} - \bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^6 (r_i - 1)} = \frac{(2.84 - 3.015)^2 + \dots + (1.145 - 1.2875)^2}{(2-1) + (1-1) + (1-1) + (2-1) + (2-1) + (2-1)} = 0.05$$

$$\hat{\text{Var}}(b_i) = \frac{\sigma^2}{r_i}; \quad \text{Var}(b_1) = \frac{0.05}{2} = 0.025, \quad \hat{\text{Var}}(b_2) = \hat{\text{Var}}(b_3) = \frac{0.05}{1} = 0.05$$

$$\hat{\text{Var}}(b_{12}) = S^2 \left( \frac{16}{2} + \frac{4}{2} + \frac{4}{1} \right) = 0.05 \cdot (14) = 0.7, \quad \hat{\text{Var}}(b_{13}) = 0.7, \quad \hat{\text{Var}}(b_{23}) = 0.8$$

tahminlerin standart hataları:

$$s.h(b_i) = \sqrt{\text{Var}(b_i)}, \quad s.h(b_1) = 0.16, \quad s.h(b_2) = s.h(b_3) = 0.22$$

$$s.h(b_{ij}) = \sqrt{\text{Var}(b_{ij})}, \quad s.h(b_{13}) = s.h(b_{12}) = 0.84, \quad s.h(b_{23}) = 0.89$$

$$\text{Cov}(b_i, b_j) = E[\bar{y}_i \bar{y}_j] - E(\bar{y}_i)E(\bar{y}_j) = 0$$

$$\text{Cov}(b_i, b_{ij}) = -2 \frac{\sigma^2}{r_i}, \quad \text{Cov}(b_{ij}, b_{ik}) = 4 \frac{\sigma^2}{r_i}$$

$$\hat{y}(x) = \sum_{i=1}^q b_i x_i + \sum_{i < j} b_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^q \bar{y}_i x_i + \sum_{i < j} (4\bar{y}_{ij} - 2(\bar{y}_i + \bar{y}_j)) x_i x_j$$

$$\hat{y}(x) = \sum_{i=1}^q a_i \bar{y}_i + \sum_{i < j} a_{ij} \bar{y}_{ij}, \quad a_i = x_i(2x_i - 1), \quad a_{ij} = 4x_i x_j$$

ve model:

$$\hat{y}(x) = 3.015x_1 + 2.43x_2 + 3.50x_3 - 5.152x_1x_2 - 6.662x_1x_3 - 6.71x_2x_3 \quad (37)$$

(0.15)    (0.22)    (0.22)    (0.84)    (0.84)    (0.89)

olur. Parametre tahminleri sonuçlarından

$$b_3 > b_1 > b_2 \quad \text{ve} \quad b_{12} < 0, \quad b_{13} < 0, \quad b_{23} < 0$$

1 ve 2, 1 ve 3, 2 ve 3 ikili karmalarının hepsi antoganistiktir. İkili karmaların hiçbiri sinercistik olmadığından herhangi bir rengin karmada kesin olarak bulunması gerektiği söylenemiyor, bu yüzden tekil karmalara bakılır ve 3 karmasının değeri çok yüksek olduğundan ekonomik olmayacağı söylenebilir, bu da oluşturulacak karmada 3. bileşenin tek başına bulunmaması gerektiğini gösterir.

3-bileşenli üçgenin  $x$  noktasındaki,  $\hat{y}(x)$ 'in varyansının tahminleri

$$\overline{\text{var}[\hat{y}(x)]} = s^2 \left\{ \sum_{i=1}^3 \frac{a_i^2}{r_i} + \sum_{i < j}^3 \frac{a_{ij}^2}{r_{ij}} \right\}$$

örneğin;  $(x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = 0)$  noktasında:

$$\begin{aligned} a_1 &= x_1(2x_1 - 1) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}, & a_2 &= \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{9} \\ a_3 &= 0, & a_{12} &= 4x_1x_2 = 4\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{9}, & a_{13} &= a_{23} = 0 \end{aligned}$$

$\hat{y}(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ 'nin tahmini varyansı:

$$\overline{\text{var}[\hat{y}(x)]} = 0.05 \left\{ \frac{\left(\frac{2}{9}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{9}\right)^2 + 0}{1} + \frac{\left(\frac{8}{9}\right)^2 + 0 + 0}{2} \right\} = 0.05 \left\{ \frac{35}{81} \right\} = 0.02$$

$$\hat{y}(x) = 3.015\left(\frac{2}{3}\right) + 2.43\left(\frac{1}{3}\right) + 3.50(0) - 5.152\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) - 6.662(0) - 6.71(0) = 1.68$$

$\eta$  için %95'lik güven aralığı:  $t_{4,0.025} = 2.776$

$$\Delta = t_{4,0.025} \sqrt{\sigma^2} = 2.776(\sqrt{0.022}) = 0.4$$

$$\hat{y} - \Delta \leq \eta \leq \hat{y} + \Delta$$

$$1.28 \leq \eta \leq 2.08$$

**Tablo 4.** Rasgele seçilen karmalar için limitler ve  $\hat{y}(x)$  değerleri.

karma	$(x_1$	$x_2$	$x_3)$	Alt limit	$\hat{y}(x)$	Üst limit	$(\overline{\text{var}[\hat{y}(x)])}^{\frac{1}{2}}$
1	0.68	0.16	0.16	1.28	1.68	2.08	0.15
2	0.16	0.68	0.16	1.1	1.5	1.9	0.15
3	0.16	0.16	0.68	1.45	1.85	2.25	0.15
4	0.33	0.33	0.33	0.56	0.92	1.28	0.13
5	0.80	0.10	0.10	1.72	2.08	2.44	0.13
6	0.10	0.80	0.10	1.3	1.7	2.1	0.15
7	0.10	0.10	0.80	1.81	2.21	2.61	0.15
8	0.90	0.05	0.05	2.14	2.5	2.86	0.13

$$\bar{y}(x) = \sum_{u=1}^{10} \frac{y_u}{10} = \frac{20.588}{10} = 2.06$$

**Tablo 5.** Kalanlar, sapmalar ve regresyon kareler toplamı tablosu.

değerleri	Ortalama değer ( $\hat{y}_u$ )	Kalanlar ( $y_u - \hat{y}_u$ )	Sapmalar ( $y_u - \bar{y}$ )	Regresyon ( $\hat{y}_u - \bar{y}$ )
2.84	3.015	-0.175	0.78	0.955
3.19	3.015	0.175	1.13	0.955
2.43	2.43	0	0.37	0.37
3.50	3.50	0	1.44	1.44
1.635	1.4345	0.2005	-0.425	-0.6255
1.234	1.4345	-0.2005	-0.826	-0.6255
1.690	1.592	0.098	-0.37	-0.468
1.494	1.592	-0.098	-0.566	-0.468
1.145	1.2875	-0.1425	-0.915	-0.7725
1.430	1.2875	0.1425	-0.63	-0.7725
		$\sum_{u=1}^{10} (y_u - \hat{y}_u)^2$ =0	$\sum_{u=1}^{10} (y_u - \bar{y})^2$ =144.10 <sup>-6</sup>	$\sum_{u=1}^{10} (\hat{y}_u - \bar{y})^2$ =144.10 <sup>-6</sup>

**Tablo 6.** Boya örneği için varyans tablosu.

	Serbestlik derecesi	Kareler toplamı	Ortalama kare	F-oran
regresyon	p-1=5	144.10 <sup>-6</sup>	144.10 <sup>-6</sup> /5 =288.10 <sup>-7</sup>	288.10 <sup>-7</sup> /0 = ∞
kalan	N-p=4	0	0	
toplam	N-1=9	144.10 <sup>-6</sup>		

F-oranı testi için;  $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta$  ,  $\beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{23} = 0$  hipotezi doğru ise yanıt yüzey, simpleks veya üçgen üzerindeki yüzey yüksekliği her noktada aynı olan bir yatay düzlemdir.

$$F_{(p-1, N-p, \alpha)} = F_{(5,4,0.05)} = 6.26 \quad , \quad F_{(5,4,0.05)} < \infty$$

olduğundan  $H_0$  hipotezi reddedilir. Buda yanıt yüzeyinin simpleksten aynı uzaklıkta olmadığını gösterir. Bu yüzey düzlem veya eğri olabilir. Eğer yüzey köşe noktalarından eşit uzaklıkta olmayan bir düzlem ise:

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta$  ,  $\beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{23} = 0$  hipotezi reddedilir,

$H_A : \beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{23} = 0$  ,  $\beta_1 \neq \beta_2 = \beta_3$  veya

$\beta_1 = \beta_2 \neq \beta_3$  veya

$\beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3$  hipotezi kabul edilir.

Eğer yüzey bir eğri ise:

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta$  ,  $\beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{23} = 0$  hipotezi reddedilir,

$H_A : \beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{23} \neq 0$  ,  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$  veya

$\beta_1 = \beta_2 \neq \beta_3$  veya

$\beta_1 \neq \beta_2 = \beta_3$  hipotezi kabul edilir.

Aynı örnek Scheffé modeline  $\beta_0$  katsayısı ekleyerek çözülecek olursa, yeni denklem:

$$\eta = \beta_0 + \beta_1^* x_1 + \beta_2^* x_2 + \dots + \beta_{q-1}^* x_{q-1} + \sum_{i < j} \beta_{ij} x_i x_j = \beta_0 + \sum_{i=1}^{q-1} \beta_i^* x_i + \sum_{i < j} \beta_{ij} x_i x_j$$

şeklinde olur. Kumaşı boyama örneğinde  $\beta_0$ ,  $\beta_3$  'ün yerine ve  $\beta_i^*$ ,  $\beta_i - \beta_3$  'ün yerine yazılsın.

$$\hat{y}(x) = b_0 + b_1^* x_1 + b_2^* x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3$$

$$b_0 = b_3 = 3.50, \quad b_1^* = b_1 - b_3 = 3.015 - 3.50, \quad b_2^* = b_2 - b_3 = -1.07$$

$$s.h(b_0) = s.h(b_3) = 0.22, \quad s.h(b_i^*) = \{ \text{var}(b_i) + \text{var}(b_3) - 2\text{cov}(b_i, b_3) \}^{1/2}$$

$$s.h(b_1^*) = \{ 0.025 + 0.050 - 2(0) \}^{1/2} = 0.27, \quad s.h(b_2^*) = 0.32$$

$$\hat{y}(x) = 3.50 - 0.485x_1 - 1.07x_2 - 5.152x_1x_2 - 6.662x_1x_3 - 6.71x_2x_3 \quad (38)$$

**Tablo 7.** Boya örneği için  $\beta_0$  katsayılı varyans tablosu.

	Serbestlik derecesi	Kareler toplamı	Ortalama kare	F-oran
regresyon	p-1=5	144.10 <sup>-6</sup>	144.10 <sup>-6</sup> /5 = 288.10 <sup>-7</sup>	288.10 <sup>-7</sup> /0 = ∞
kalan	N-p=4	0	0	
toplam	N-1=9	144.10 <sup>-6</sup>		

Scheffé' nin ikinci dereceden (37) denkleminde ait varyans analizi Tablo 6 ile, Scheffé' nin ikinci dereceden denkleminde bir  $\beta_0$  parametresi eklendiğinde oluşan yeni (38) denkleminde ait varyans analizi Tablo 7 ile gösterilmiştir. İki tablodan da anlaşılacağı gibi  $\beta_0$  parametresinin eklenmesiyle modelin varyansında hiç bir değişiklik meydana gelmez. Değişiklik sadece uydurulan model denkleminde oluşur.



## KAYNAKLAR

- CORNELL , J. A. (1990). *Experiments with Mixtures, 2d Edition*, Willey, New York
- COX , D. R. (1971). *A Note on Polynomial Response Functions for Mixtures*. *Biometrika* , Vol. 58, pp. 155-159.
- DRAPER , N. R. and LAWRENCE , W. E. (1965). *Mixture Designs for Three Factors*. *J. Roy. Statist. Soc. B*, Vol. 27, pp. 450-465.
- KHURI , A. I. and CORNELL , J. A. (1987). *Response Surface Designs and Analyses*. Dekker Inc. ASQC Quality Pres, New York.
- SCHEFFÉ , H. (1958). *Experiments with Mixtures*. *Journal of the Royal Statistical Society, B*, Vol. 20, pp. 344-360.
- SCHEFFÉ , H. (1963). *The Simplex-Centroid Design for Experiments with Mixtures*. *Journal of the Royal Statistical Society, B*, Vol. 25, pp. 235-263.
- THOMPSON , W. O. and MYRES , R.H. (1968). *Response Surface Designs for Experiments with Mixtures*. *Technometrics*, Vol. 10, pp. 739-756.
- ŞAHİN, E. *Pamuk Elyafı Üzerinde Çeşitli Direkt Boyaların (Direct Red 80, Direct Yellow 50 ve Direct Blue 79) ve Bunların İkili ve Üçlü Karışımlarının Sorpsiyonunun İncelenmesi*". Dicle Üniversitesi 17.07.1998(Yüksek Lisans Tezi)

## MODEL CHOICE IN MIXTURAL EXPERIMENTS

### ABSTRACT

*Experiments with mixtures are considered in which the response to a mixture depends on the proportions of the components present, but not on the total amount of the mixture. The purpose of it is to obtain the best mixture which does not increase the cost and does not reduce the quality of the product by considering the physical chemical and economical properties of the different proportions of the mixture. This causes some restrictions over the components. Generally the set of the constraint made by fixing the total amount of the mixture*

*and changing the total of the components to be  $\sum_{i=1}^q x_i = 1$ ,  $q$  is the*

*number of components and  $x_i$  is the proportion of  $i$ th component in the mixture. Scheffé's and Cox's mixture models are the most used ones for the experiments with mixtures. In this study, Scheffé's and Cox's mixture models were compared and this applied to a chemical experiment.*

**Key Words :** *Cox's Mixture Models, Experiments With Mixtures, Scheffé's Mixture Models.*