

# Yutucu Yarım Düzlemin Kenarından Kırınan Üniform Alanların Fiziksel Optik Yöntemiyle Hesabı

Mücahit Sarnık<sup>1,2,\*</sup> ve Uğur Yalçın<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Uludağ Üniversitesi, Elektronik Mühendisliği Bölümü, 16059 Görükle, Bursa, Türkiye

<sup>2</sup>Oyak-Renault Otomobil Fabrikaları, Mühendislik Direktörlüğü, Organize Sanayi Bölgesi,  
16372 Bursa, Türkiye

\*Corresponding author: msarnik@yahoo.com

---

**Özet.** Bu çalışmada, fiziksel optik yöntemi kullanılarak yutucu yarım düzlem yüzeye ait üniform kırınan alanlar hesaplanmıştır. Fiziksel optik yöntemi kullanılarak ulaşılan kırınan alan ifadesi, detour parametresi kullanılarak Fresnel fonksiyonu cinsinden yazılmış ve üniform çözüm ifadesine ulaşılmıştır. Böylece, gözlem açısının her değeri için sonlu bir değere sahip çözüm elde edilebilmiştir. Ayrıca, elde edilen sonuçlar, kesin çözüm ile sayısal olarak karşılaştırılıp değerlendirilmiştir.

**Anahtar Kelimeler.** Fiziksel optik, Green teoremi, kırınan alan, detour parametre.

**Abstract.** In this study, the uniform scattered fields from a black half plane are calculated with the physical optics method. The expression, which is found by physical optics method, is written in terms of Fresnel function by using detour parameter and the uniform solution is found. Hence a finite solution is obtained for all the values of observation angle. Moreover, the found results are compared numerically with the exact solution.

**Keywords.** Physical optics, Green's theorem, diffracted field, detour parameter.

---

## 1. Giriş

Yutucu yüzey gelen elektromanyetik enerjinin soğurulduğu ve yansımının görülmediği bir konsepttir. Bu konuda ilk olarak Kirchoff tarafından getirilen yaklaşım Kottler tarafından geliştirilmiştir. Buna göre yüzeyin her iki kısmını ayıran yüzey boyunca tanımlamalar yapılmıştır [1]. Sommerfeld ise konuya farklı bir yaklaşım

---

Received July 21, 2010; accepted September 23, 2010.

Bu makale, 29-30 Nisan 2010 tarihlerinde Çankaya Üniversitesi'nin Ankara yerleşkesinde yapılmış olan 3. Çankaya Üniversitesi Mühendislik ve Teknoloji Sempozyumu'nda sunulan ve sadece geniş bildiri özeti bölümü hakem sürecinden geçerek bu sempozyum kitapçığında yayımlanan bir makalenin revize edilmiş şekli olup Sempozyum Değerlendirme Komitesi tarafından yayımlanmak üzere Çankaya University Journal of Science and Engineering dergisine gönderilmesi önerilmiş ve derginin bağımsız hakem değerlendirmeleri sonucunda yayıma kabul edilmiştir.

getirerek yutulan dalgaların ilk Riemann yüzeyi (gerçek yüzey) dışındaki diğer yüzeylere dağıldığı fikrini belirtmiştir [2]. Fiziksel optik (FO) yöntemi uygulanma kolaylığı nedeniyle iletken veya iletken olmayan yüzeylerden saçılan ve kırılan alanların hesaplanmasında sıklıkla kullanılan bir yöntemdir [3-7]. FO'nun tercih edilmesindeki en önemli sebep yüksek frekanslarda geometrik optik (GO) eşitliklerine kolayca indirgenebilir olması ve çözüm ifadesinin GO'ya göre daha genel olmasıdır [7-8].

Bu yöntemde saçılan alanlar için Helmholtz denkleminin ikinci skaler Green teoremi yardımıyla elde edilen bir çözümü 3 boyutlu uzayda genlik ve faz fonksiyonlarından oluşan tek katlı bir integral haline getirilir. Daha sonra durağan faz yöntemi uygulanır ve faz fonksiyonundan bulunan semer noktasının yardımıyla da yansıyan ve kırılan alan ifadeleri elde edilir. FO yaklaşımı ile bulunan alan ifadeleri üniform değilse bu durumda detour parametresi kullanılarak alan ifadeleri üniform hale getirilir.

Bu çalışmada ise yutucu yarım düzlem yüzeye ait köşe kırınım alanlarının hesabı FO yöntemiyle yapılacaktır. Üniform olmayan alan ifadelerini üniform hale getirmek için detour parametresi kullanılacaktır. Hesap edilen üniform alanlar kesin çözümle karşılaştırılarak elde edilen alan ifadelerinin doğruluğu kanıtlanacaktır.

Zaman faktörü çalışmanın tamamında  $e^{j\omega t}$  olarak göz önüne alınacaktır.

## 2. Fiziksel Optik Yöntemi

Saçılan ve kırılan alanlar için elektrik Hertz vektörüne ait Helmholtz denkleminin ikinci skaler Green teoremi yardımıyla elde edilen bir çözümü

$$\vec{\pi}_e = \frac{1}{4\pi j\omega\epsilon_0} \iiint_{v'} \vec{J}_{ev}(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dv' \quad (1)$$

şeklinde verilebilir. Hacimsel akım yoğunluğu vektörü

$$\vec{J}_{ev}(\vec{r}') = \vec{J}_{es}(\vec{r}') \delta(y - y') \quad (2)$$

ve serbest uzay Green fonksiyonu

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-jkR}}{R} \quad (3)$$

olarak verilebilir. Burada  $R$ 'nin genel ifadesi

$$R = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$$



şeklindedir. Düzlemsel dalganın manyetik alan bileşeni ise,

$$\vec{H}_i = -\frac{1}{j\omega\mu_0}\nabla \times \vec{E}_i$$

Maxwell-Faraday denklemi ve (5) eşitliği kullanılıp ve gelme açısı  $\phi' = \phi_0$  da alınarak,

$$\vec{H}_i = -\vec{e}_x E_0 \frac{k \sin \phi_0}{\omega\mu_0} e^{jk(x' \cos \phi_0 + y' \sin \phi_0)}$$

olarak elde edilebilir. Saçılan alana ait elektrik alan bileşeni ise

$$\vec{E} \approx k^2 \vec{\pi}_e$$

olup, (4) eşitliğinde (6) eşitliğin kullanılmasıyla, ( $y' = 0$  eşitliği de göz önüne alınarak)

$$\vec{E} = -\vec{e}_z \frac{kE_0 \sin \phi_0}{2\pi} \int_{x'=0}^{\infty} \int_{z'=-\infty}^{\infty} e^{jkx' \cos \phi_0} \frac{e^{-jkR}}{R} dx' dz' \quad (7)$$

olarak bulunabilir. Bu noktadan sonra ifade, gerekli dönüşümler gerçekleştirilerek tek katlı integrale dönüştürülür. Bu integralin içinde  $x'$  değerine bağlı faz ve genlik fonksiyonlarının çarpımı yer alır. Daha sonra durağan faz metodu ile semer noktası hesaplanarak ilgili alan ifadeleri elde edilebilir. Bunun için (3) eşitliğindeki Green fonksiyonu ilgili eşitlikten

$$\frac{e^{-jkR}}{R} = \frac{1}{2j} \int_{\zeta=-\infty}^{\infty} H_0^{(2)} \left( \sqrt{k^2 - \zeta^2} \rho_1 \right) e^{-j\zeta(z-z')} d\zeta$$

şeklinde verilebilir [9]. (7) eşitliğindeki integralin  $z'$  katının  $\zeta = 0$  değeri için hesaplanması ile

$$\int_{z'=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jkR}}{R} dz' = \frac{\pi}{j} H_0^{(2)}(k\rho_1)$$

olarak elde edilir. Hankel fonksiyonunun  $k \rightarrow \infty$  için Debye asimptotik açılımı

$$H_0^{(2)}(k\rho_1) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-jk\rho_1 + j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{k\rho_1}}$$

şeklinde verilebilir [10]. Böylece (7) eşitliğindeki elektrik alan ifadesi,

$$\vec{E} = -\vec{e}_z \frac{kE_0 \sin \phi_0}{2j} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{j\frac{\pi}{4}} \int_{x'=0}^{\infty} e^{jkx' \cos \phi_0} \frac{e^{-jk\rho_1}}{\sqrt{k\rho_1}} dx' \quad (8)$$

olarak elde edilebilir. Burada (8) eşitliğindeki integral terimi ise,

$$I_s = \int_{x'=0}^{\infty} f(x') e^{-jk\psi(x')} dx' \quad (9)$$

şeklinde genel bir ifade olarak verilebilir.

Bu aşamadan sonra yansıyan ve kırılan alan ifadeleri hesaplanacaktır. Yansıyan alan ifadesinin elde edilmesi için durağan faz yöntemi doğrultusunda genlik ve faz fonksiyonları sırasıyla

$$f(x') = \frac{1}{\sqrt{\rho_1}} \quad (10)$$

ve

$$\psi(x') = \rho_1 - x' \cos \phi_0 \quad (11)$$

olarak bulunabilir. Yansıyan alan ifadesini bulmak için (9) eşitliğinde bulunan faz fonksiyonunun Taylor seri açılımı yapılır ve ilk 3 terimden sonraki terimler ihmal edilirse,

$$\psi(x') \cong \frac{1}{0!} \psi(x'_s) + \frac{1}{1!} \psi'(x'_s)(x' - x'_s) + \frac{1}{2!} \psi''(x'_s)(x' - x'_s)^2 \quad (12)$$

eşitliği bulunabilir.  $x_s$ , semer noktası faz fonksiyonunun birinci türevinin 0'a eşitlenmesiyle bulunur. Bu çalışmada ise, (11) eşitliğinin birinci türevi alınıp 0'a eşitlendiğinde semer noktası

$$x_s = \frac{\rho \sin(\phi + \phi_0)}{\sin \phi_0} \quad (13)$$

şeklinde elde edilebilir. Neticede, (10), (11) ve (12) eşitlikleri göz önüne alınarak (9) eşitliği semer noktasında,

$$I_s = f(x'_s) e^{-jk\psi(x'_s)} \int_{x'=0}^{\infty} e^{\frac{-jk}{2!} \psi''(x'_s)(x' - x'_s)^2} dx'$$

olarak bulunabilir. Poisson integrali yaklaşımı

$$\int_{z'=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(z-z')^2}{2\sigma^2}} dz' = \sqrt{2\pi}\sigma \quad (14)$$

kullanılarak integral ifadesi

$$\int_{x'=0}^{\infty} e^{\frac{-jk}{2!} \psi''(x'_s)(x' - x'_s)^2} dx' = \sqrt{\frac{2\pi}{jk\psi''(x'_s)}}$$

şeklinde elde edilebilir. (10), (11), (13) ve (14) eşitlikleri kullanılarak da yansıyan alan ifadesi

$$\vec{E}_y = -\vec{e}_z E_0 e^{-jk\rho \cos(\phi+\phi_0)} \quad (15)$$

olarak bulunabilir.

Mükemmel iletken yarım düzlemin kenarından kırılan alan ise,

$$I_k \cong -\frac{1}{jk} \frac{f(x_e)}{\psi'(x_e)} e^{-jk\psi(x_e)}$$

ifadesinden bulunabilir [11]. Burada  $x_e = 0$  kenar noktası göz önüne alınarak,

$$I_k \cong -\frac{1}{jk} \frac{f(0)}{\psi'(0)} e^{-jk\psi(0)}$$

ifadesi elde edilebilir. (10) ve (11) eşitlikleri kullanılarak da

$$\vec{E}_d = \vec{e}_z \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} e^{j\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \phi_0}{(\cos \phi + \cos \phi_0)\sqrt{k\rho}} e^{-jk\rho}$$

kırılan alan ifadesine ulaşılabilir. Burada

$$\frac{\sin \phi_0}{(\cos \phi + \cos \phi_0)} = \tan\left(\frac{\phi - \phi_0}{2}\right) + \tan\left(\frac{\phi + \phi_0}{2}\right)$$

eşitliği kolayca görülebilir. Bu durumda kırılan alan ifadesi

$$\vec{E}_d = \vec{e}_z \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} e^{j\frac{\pi}{4}} \left[ \tan\left(\frac{\phi - \phi_0}{2}\right) + \tan\left(\frac{\phi + \phi_0}{2}\right) \right] \frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{k\rho}}$$

olarak verilebilir. Bu denklem, sonsuza ıraksatan çarpan barındırdığı için detour parametre yöntemiyle bu ıraksama kaldırılabilir. Bunun için gerekli trigonometrik dönüşümlerin yapılmasıyla

$$\vec{E}_d = \vec{e}_z \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} e^{j\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\phi-\phi_0}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\phi-\phi_0}{2}\right)} \frac{e^{-jk\rho(2\cos^2\left(\frac{\phi-\phi_0}{2}\right)-\cos(\phi-\phi_0))}}{\sqrt{k\rho}}$$

haline dönüştürülür. Bu noktada gelen ve yansıyan alan ifadelerine ait faz fonksiyonları

$$\xi_{i(r)} = \sqrt{\psi_{i(r)} - \psi_d}$$

eşitliğinde yerine yazıldığında gelen ve yansıyan alanlar için detour parametreleri

$$\xi_{i(r)} = -\sqrt{2k\rho} \cos\left(\frac{\phi \mp \phi_0}{2}\right) \quad (16)$$

şeklinde bulunabilir. (16) eşitliği ve ilgili Fresnel eşitlikleri göz önüne alınarak kırılan alana ait üniform alan ifadeleri bulunabilir. Fresnel ifadesi  $\xi_i$  ve  $\xi_r$ 'nin birer

fonksiyonu olarak

$$\hat{F}(\xi_{i(r)}) = \frac{e^{-j(\xi_{i(r)}^2 + \frac{\pi}{4})}}{2\sqrt{\pi}\xi_{i(r)}}$$

olarak verilebilir [12,13]. Fresnel fonksiyonu ise, büyük değerler için asimptotik ilişkisi kullanılarak

$$\hat{F}(\xi_{i(r)}) \approx F(|\xi_{i(r)}|) \operatorname{sgn}(\xi_{i(r)})$$

şeklinde verilebilir. Burada, Fresnel integrali,

$$\hat{F} = \frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi_i}^{\infty} e^{-jt^2} dt$$

olarak verilebilir. Bu durumda kırınan alan toplamı

$$E_d = E_0 \left[ F(|\xi_i|) \operatorname{sgn}(\xi_i) \sin\left(\frac{\phi - \phi_0}{2}\right) e^{jk\rho \cos(\phi - \phi_0)} - F(|\xi_r|) \operatorname{sgn}(\xi_r) \sin\left(\frac{\phi + \phi_0}{2}\right) e^{jk\rho \cos(\phi + \phi_0)} \right] \quad (17)$$

şeklinde elde edilebilir. Sonuç olarak, mükemmel iletken yarım düzleme ait toplam saçılan (gelen, yansıyan ve kırınan) alan ifadesi

$$\vec{E}_s = \vec{e}_z E_0 \left[ e^{jk\rho \cos(\phi + \phi_0)} u(-\xi_i) - e^{-jk\rho \cos(\phi + \phi_0)} u(-\xi_r) + F(|\xi_i|) \operatorname{sgn}(\xi_i) \sin\left(\frac{\phi - \phi_0}{2}\right) e^{jk\rho \cos(\phi - \phi_0)} - F(|\xi_r|) \operatorname{sgn}(\xi_r) \sin\left(\frac{\phi + \phi_0}{2}\right) e^{jk\rho \cos(\phi + \phi_0)} \right] \quad (18)$$

olarak (5), (15) ve (17) eşitlikleri göz önüne alınarak bulunabilir.

Yutucu yarım düzlemden toplam saçılan alanlar ise, (18) eşitliği yardımıyla kolayca bulunabilir. Yutucu yarım düzlem için:

- Gelen alan değeri aynıdır.
- Yansıyan alan yoktur.
- Kırınan alan ifadesinde ise gelen alanla ilgili terimler olup yansıyan alana bağlı terimler 0'a eşit olur. Netice olarak, bu üç durum göz önüne alınarak, yutucu yüzeyden saçılan toplam alan ifadesi

$$\vec{E}_s = \vec{e}_z E_0 \left[ e^{jk\rho \cos(\phi' - \phi_0)} u(-\xi_i) + F(|\xi_i|) \operatorname{sgn}(\xi_i) \sin\left(\frac{\phi - \phi_0}{2}\right) e^{jk\rho \cos(\phi - \phi_0)} \right] \quad (19)$$

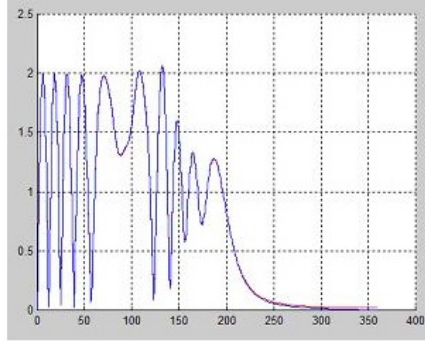
şeklinde elde edilebilir.

#### 4. Tartışma ve Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde, homojen düzlemsel dalgaların mükemmel iletken ve yutucu yarım düzlemlerden kırınımı ve saçılması olayı sayısal sonuçlarla tartışılacaktır. Sayısal olarak çizilen grafiklerde  $E_0$  birim genlik, düzlemsel dalgaların yüzeye geliş açısı  $\phi_0 = \pi/4$  seçilmiştir. Diğer ilgili parametreler ise fiziksel problemlere uygun olacak şekilde  $k = 20\pi$  ve  $\rho = 10/k$  olarak alınmıştır. Bu amaçla, mükemmel iletken yüzeyden saçılan üniform alanların kesin çözümü ifadesi

$$E = 2E_0 \sum_{n=1}^{\infty} e^{jn\frac{\pi}{4}} J_{n/2}(k\rho) \sin\left(\frac{n\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\phi_0}{2}\right) \quad (20)$$

şeklinde verilebilir [14]. Şekil 2’de (18) ve (20) ile verilen eşitlikler sayısal olarak karşılaştırılmış ve sonuçların birbirine çok yakın olduğu görülmüştür.



ŞEKİL 2. Fiziksel optik ile kesin çözümün karşılaştırılması.

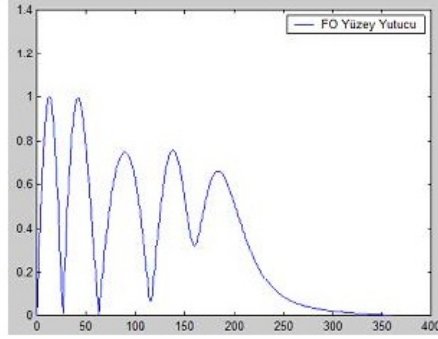
Şekil 3’te yutucu yarım düzlem yüzeyde (19) eşitliği ile verilen saçılan alanlar sayısal olarak elde edilmiştir.

Bu sonuç sınır kırınım dalga metodu ile ulaşılan sonuç ile örtüşmektedir [15] ve  $\phi_0$ ’ın bütün değerlerinde büyük oranda uyushmaktadır. Ayrıca  $k\rho$ ’nun yine değişik değerleri için de birbiriyle tutarlı sonuçlar görülebilir [15].

#### 5. Sonuç

Bu çalışmada, yutucu bir yarım düzlem yüzeyden kırınan alanların hesabı fiziksel optik yöntemiyle elde edilmiştir. Bu yöntemle ilave olarak çözümün hesaplanabilmesi için detour parametre ve durağan faz yaklaşımları kullanılmıştır. Hertz vektörüne





ŞEKİL 3. Yutucu yarım düzlemden saçılan alanlar.

ait Helmholtz denkleminin integral çözümünün kullanıldığı fiziksel optik yöntemiyle ilk olarak mükemmel iletken yarım düzlemden saçılan alanlar hesaplanmış ve bu çözüm kullanılarak yutucu bir yarım düzlem yüzeyden saçılan alanlar bulunmuştur. Bu uygulama özellikle savaş uçaklarında ve hedef olması istenmeyen görünmez uçak teknolojisinde kullanılabilir.

## Kaynaklar

- [1] F. Kottler, Diffraction at a black screen, Part I: Kirchhoff's theory, *Prog. Optics* **4** (1965), 281–314.
- [2] A. Sommerfeld, *Optics*, Academic Pres, New York 1954.
- [3] T. J. Hestilow, Simple formulas for the calculation of the average physical optics RCS of a cylinder and a flat plate over a symmetric window around broadside, *IEEE Antennas Propag.* **42** (2000), 48–52.
- [4] S. Selleri, P. Bolli and C. Pelosi, A time-domain physical optics heuristic approach to passive intermodulation scattering, *IEEE T. Electromagn. C.* **43** (2001) 203–209.
- [5] J. H. Whitteker, Physical optics and field-strength predictions for wireless systems , *IEEE J. Sel. Area Comm.* **20** (2002), 515–522.
- [6] J. R. Kurz, A. M. Schober, D. S. Hum, A. J. Saltzman and M. M. Fejer, Nonlinear physical optics with transversely patterned quasi-phase-matching gratings, *IEEE J. Sel. Top. Quant.* **8** (2002), 660–664.
- [7] D. J. Blejer, Physical optics polarization scattering matrix for a top hat reflector, *IEEE T. Antenn. Propag.* **39** (1991), 857–859.
- [8] U. Yalçın, İçbükey iletken bir yüzeyin kenarından kırınan elektromagnetik dalgaların fiziksel optik yaklaşımıyla asimptotik hesabı, *URSI-TÜRKİYE'2002*, İTÜ, İstanbul, Türkiye 18-20 Eylül 2002.
- [9] R. F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, New York 1961.
- [10] H. E. Bayrakçı, *Lineer Sistemlerin Mühendislik Matematği*, Çağlayan Kitabevi, İstanbul 1991.

- [11] G. L. James, *Geometrical Theory of Diffraction for Electromagnetic Waves*, IEE Peter Peregrinus Ltd., London 1976.
- [12] S.-W. Lee, G. Deschamps, A uniform asymptotic theory of electromagnetic diffraction by a curved wedge, *IEEE T. Antenn. Propag.* **24** (1976), 25–34.
- [13] S.-W. Lee, Comparison of uniform asymptotic theory and Ufimtsev’s theory of electromagnetic edge diffraction, *IEEE T. Antenn. Propag.* **25** (1977), 162–170.
- [14] A. Ishimaru, *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1991.
- [15] U. Yalçın, Uniform scattered fields of the extended theory of boundary diffraction wave for PEC surfaces, *PIER M* **7** (2009), 29–39.