

# Bayesgil VAR Modelinin Gerçek Zaman Dizileri için Kestirim Amaçlı Kullanılması

Reşat Kasap<sup>1,\*</sup> ve Sibel Kavak<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Gazi Üniversitesi, İstatistik Bölümü 06500 Teknikokullar, Ankara, Türkiye  
<sup>2</sup>Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 06532 Beytepe, Ankara, Türkiye

\*Corresponding author: rkasap@gazi.edu.tr

---

**Özet.** Bu makalede, Litterman'ın [1,2] ortaya attığı Bayesgil VAR modelinin, gerçek zaman dizileri için kestirim amaçlı bir uygulaması yapılmıştır. Buna göre, veri için BVAR'ın, VAR ve tek değişkenli (Box-Jenkins) [3] modellere göre kestirimleri, bilinen ölçütlerinden, RMSE (ortalama hata karenin kare kökü) kullanılarak karşılaştırılmıştır. Analiz için kullanılan zaman dizileri, Türkiye'nin yıllar itibariyle (1925-1999) nüfus, kişi başına ihracat, kişi başına ithalat ve ihracatın GSMH (gayri safi milli hasıla)'ye oranıdır. Çalışmanın sonucu olarak, BVAR modeli, inceleme konusu olan zaman dizileri çerçevesinde, uygun kestirimler üretmek için kullanılabilir bir yöntem olduğu söylenebilir.

**Anahtar Kelimeler.** Zaman dizileri analizi, kestirim, VAR (vektör otoregressif), Bayesgil VAR, RMSE ölçütü.

**Abstract.** In this paper, it has been done the application of the forecasting for real time series using the Bayesian vector autoregressive (BVAR) that is improvised by Litterman [1,2]. So, for the data, the performance of forecasting for BVAR according to VAR and the univariate (Box-Jenkins) [3] model has been compared by the known measurement that is RMSE (root mean square error). Time series that are used for the analysis are the annual (1925-1999) series of the population, the export for every person, the import for every person and the ratio of GNP (gross national product) for export of Turkey. As a result of this study, it may said that the BVAR models can be used as a method to produce appropriate forecasts on time series that have different fluctuations.

**Keywords.** Time series analysis, forecasting, VAR (vector autoregressive), Bayesian VAR, RMSE criterion.

---

## 1. Giriş

Araştırmacılar, gerçeğe daha çok yaklaşmak için mevcut bilgileri yeniden gözden geçirmek suretiyle, var olan yöntemlere yenilerini de katarak bir olaya daha geniş

---

Received February 11, 2010; accepted November 30, 2010.

bir yelpazeden bakılmasını sağlamaktadırlar. Bu bakış açısına göre, gerçek hayattaki problemlere yönelik tavır ve davranışların planlanmasında ve bir düzene konulmasında geleceğe dönük tahminlerin önemi yadsınamaz. Geleceğe dönük tahmin yapmak kolay bir iş olmamakla beraber aynı zamanda oldukça büyük bir risk taşır. Çünkü geleceği kesin olarak bilmek mümkün değildir, ancak kestirim yöntemi gelecekle ilgili karar vermede olabilecek riski azaltarak daha doğru kararlar alınmasına yardımcı olur. Doğru gelecek tahminleri güvenilir modeller sayesinde olur. Güvenilir modellerin ise güvenilir tahmin yöntemlerini bünyesinde bulunduran zaman dizileri analizi aracılığıyla elde edilmesi mümkündür. Yani minimum hatalı kestirimlerin uygun modeller üzerinden elde edilebileceği söylenebilir.

Uygun modellerin keşfedilmesi ise ayrı bir bakış açısını gerektirmektedir. Bu bakış açılarından biri de Bayesgil yaklaşımdır. Buna göre, yeni arayışların sonucu olarak ortaya atılan bu yaklaşımın esasını oluşturan Bayes teoremi, ilk kez yayınlandığında araştırmacılar, olasılıklara ilişkin bu basit eşitliğin ilerde bir istatistik ekolünün temeli olacağını düşünememiş olabilirler. Ancak yaklaşık iki yüzyıl sonra bu teorem, çok sayıda istatistikçiye etkileyerek, Bayesgil istatistiksel yaklaşımın temellerinin atılmasına imkan sağladı [4-7].

İster klasik ister Bayesgil yaklaşımla olsun, zaman dizileri analizi ve kestirim yöntemleri tek değişkenli ve vektörel olarak son yıllarda oldukça gelişme kaydetti. Bu gelişmeler çeşitli araştırmacılar tarafından uygulamalı problemler üzerinde gösterilmeye çalışıldı. Bu çalışmada da bunlara benzer bir uygulama, Türkiye verileri kullanılarak yapılmıştır. Buna göre, bu çalışmada, yıllar itibarıyla nüfus, kişi başına ihracat, kişi başına ithalat ve ihracatın GSMH'ye oranı dizileri, Bayesgil vektör otoregressif (BVAR) kestirim modeli ile incelenerek, vektör otoregressif (VAR) ve tek değişkenli zaman dizileri modelleri ile kestirim performansları karşılaştırıldı. Bu değerlendirmede, RMSE (ortalama hata karenin kare kökü) ölçütü kullanıldı.

Kullanılan metodoloji gereği, bazı yardımcı bilgiler ön plana çıkmaktadır. Bunlar, tek değişkenli standart zaman dizileri ve kestirimidir. Bayesgil kestirimde ise en önemli gelişmeler 1970'lerin sonları gibi gözükmeye rağmen aslında gerçek anlamda 1980'lerde önem kazanmaktadır. Özellikle, zaman eksenli metodolojiye yeni bakış açıları eklenmiştir. Bunlardan biri olan BVAR modeli, aşırı parametreleşme (overparametrization) eğilimi gösteren kısıtsız VAR modellerine alternatif olarak sunulmuştur. Bu konu üzerinde çalışan araştırmacılardan olan Litterman, VAR kestirim yönteminin genişlemesinde, bu problemin üstesinden gelebilmek için oldukça başarı kazandığı bir yöntem önermiştir [2]. Bu yöntem, ekonomik teoriden daha

çok istatistiksel kurallara dayanan kısıtları birleştiren, Bayesgil vektör otoregressif (BVAR) modellerinin kullanımını geliştirdi. Litterman'a göre, Bayesgil önselleri kullanmayı içeren bu kısıtlar, katsayıların sayısını azaltmaya tercihen daha çok kestirim modelinin katsayılarında verinin etkisini azaltarak aşırı parametreleşme problemini çözümlüyor. Spencer ise, BVAR'ın hangi durumda bir ihtiyaca dönüştüğünü açıkladı [8].

Genel olarak problemin tanımı verildikten sonra, çalışmada alt yapıyı oluşturan temel metodoloji verilmektedir. Bunlar tek değişkenli standart zaman dizileri ve kestirimi hakkında genel bilgiler ile vektör otoregressif (VAR) ve Bayesgil VAR modelleri Bölüm 2'de tanımlandı. Bölüm 2'de verilen metodolojiler kullanılarak, yıllar itibariyle nüfus, kişi başına ihracat, kişi başına ithalat ve ihracatın GSMH'ye oranı dizileri, Bayesgil vektör otoregressif (BVAR) kestirim modeli ile incelenerek, vektör otoregressif (VAR) ve tek değişkenli zaman dizileri modelleri ile kestirim performanslarının karşılaştırılması Bölüm 3'de analiz sonuçlarıyla sunuldu. Son olarak, Bölüm 4'de çalışmayla ilgili sonuç ve yorum verildi.

## 2. Metodoloji

**2.1. Tek değişkenli genel durağan ve durağan olmayan modelleme ve kestirim.** Herhangi bir zaman dizisinin durağan olabilmesi için, ortalaması, varyansı, kovaryansı ve daha yüksek dereceden momentlerinin zamana göre sabit olması gerekir. Tek değişkenli durağan zaman dizilerinde otoregressif (AR), hareketli ortalama (MA) ve otoregressif-hareketli ortalama (ARMA) modelleri, doğrusal durağan modeller olarak adlandırılır. Başta ekonomik diziler olmak üzere, gerçek hayatta karşılaşılan zaman dizileri çoğunlukla durağan değildir. Bu dizilerin durağanlığı trend, mevsimsel ve konjonktürel dalgalanmalar ve rastgele yapıya sahip olaylar tarafından bozulmaktadır. Durağanlığın sağlanabilmesi için adı geçen etkenlerin önceden belirlenmesi ve yok edilmesi, kısaca durağan olmayan bir zaman dizisinin durağan hale dönüştürülmesi gerekmektedir. Bu ise söz konusu dizinin uygun dereceden farkları alınarak yapılabilir [3,9].

Verilen herhangi bir zaman dizisinde modelleme süreci, genellikle aşağıdaki gibi yapılır. Modelleme sürecinde yapılacak ilk iş, dizilere ait grafikler çizmektir. Eğer grafik sürekli artma ya da azalma eğilimi gösteriyorsa dizinin durağan olmadığı söylenebilir. Fakat bu yol bazı yanılgılara ve sağlıklı kararlar alınmasına neden olabilir. Çünkü ilk bakışta durağan gibi algılanan diziler zaman içinde az da olsa bazı

değişiklikler gösterebilirler. Zaman dizilerinde durağanlığı tespit etmenin güvenilir yollarından biri dizinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon grafikleridir. Bu grafiklerden aynı zamanda verinin hangi ARIMA modeline uygun olacağı ve derecelerinin  $(p, d, q)$ , hangi değerleri alacağı saptanabilir. Otokorelasyon katsayıları eğer üstel olarak sıfıra yaklaşma eğiliminde değilse durağan olmayan bir dizi söz konusu demektir. Yani katsayılar yavaş bir şekilde üstel olarak azalıyorsa durağan olmama durumu var denilebilir. Bu dizinin analiz edilmesi için durağan hale getirilmesi gerekir. Tek değişkenli zaman dizilerinde modelleme aşamasında modelin derecesinin belirlenmesinden sonra parametreleri tahmin edilir. İstatistiksel paket programlarında genellikle koşullu en çok olabilirlik yöntemi ile parametre tahmini yapılmaktadır. Geçici modelin parametre tahminleri tamamlandıktan sonra, hata terimlerinden yararlanarak bu modelin veriye uygunluğunun testi yapılır. Bu işlem için hatalar dizisinin otokorelasyon katsayıları bulunur ve incelenir. Eğer bu katsayılar belirli bir anlam düzeyinde sıfıra yakınsa veya sıfırdan anlamlı bir şekilde farklı değilse, geçici modelin uygun bir model olduğuna karar verilir. Hatalar dizisini incelemek için Box-Pierce (veya Ljung-Box-Pierce) tarafından geliştirilen ve yaygın olarak kullanılan  $Q$  istatistiği, modelin uygunluğunun test edilmesinde kullanılmaktadır [10]. Test istatistiği yaklaşık olarak  $\chi^2(k^* - p - q)$  dağılımını gösterir. Hesaplanan  $Q$  değeri ki-kare tablo değerinden küçükse, geçici olarak bulunan modelin uygun model olduğuna karar verilir.

Bilindiği gibi zaman dizileri analizinde, bir dizinin modeli olarak birden fazla uygun model elde edilebilir. Böyle durumlar için, zaman dizileri analizi literatüründe birden çok model seçme ölçütü vardır. Bunlardan biri kestirim sonuçlarına göre en iyi modeli seçmektir. Diğerleri ise kısaca bilgi ölçütleridir [11].

Modelleme sürecinden sonra en önemli amaçlardan birisi gelecekle ilgili değerlerin tahmin edilmesi veya kestirimidir. Kestirim, modeli incelenen zaman dizisinin  $t + l$  döneminde gerçekleşeceği  $Z_{t+l}$  değerinin tahmini olan  $\hat{Z}_{t+l}$ 'yi  $t+l$  döneminden önceki belirli sayıda dönemin tahmin değerlerine, gözlem değerlerine ve hata terimlerine bağlı olarak tahmin eden bir modeldir. Bunun anlamı, bir zaman dizisi için uygun olduğuna karar verilen model AR içeriyorsa, bu dizinin  $t + l$  döneminde alacağı değerin tahmini ( $\hat{Z}_{t+l}$ ),  $t + l$  döneminden önceki belirli sayıda dönemin tahmin ve gözlem değerlerine ve  $a_t$  hata terimine bağlı olarak yapılır. Eğer uygun model MA içeriyorsa,  $\hat{Z}_{t+l}$  tahmini,  $t+l$  döneminden önceki belirli sayıda dönemin tahmin hatalarına dayanarak yapılır. Elde edilen uygun model, AR ve MA'yı birlikte içeriyorsa,

bu modele dayanarak  $\hat{Z}_{t+l}$ 'nin tahmini,  $t+l$  döneminden önceki belirli sayıda dönemin tahmin değerine, gözlem değerine ve bu değerlerle ilgili hesaplanan hata terimlerine dayanarak elde edilebilir [12].

**2.2. Vektör otoregressif (VAR) ve Bayesgil VAR modeller.** Bu çalışmada temel olarak amaç, Bayesgil VAR modelinin uygulamada kestirim sonuçları bakımından performansını görmek olduğundan, vektör otoregressif (VAR) modeli ile karşılaştırmaların yapılması gerekmektedir. Bu nedenle öncelikle VAR modelini kısaca tanıtmak gerekir.

**2.2.1. VAR modeli.** Literatürde çok değişkenli otoregressif veya vektör otoregressif olarak ifade edilen modelin kısa gösterimi VAR şeklinde olmaktadır. Buna göre,  $\tilde{Z}_t$ , değişkenlere ait zaman dizileri vektörü olmak üzere,

$$\tilde{Z}_t = [\tilde{Z}_{1t}, \tilde{Z}_{2t}, \dots, \tilde{Z}_{Kt}]$$

ve  $K$  boyutlu zaman dizisi vektörü,  $Z_t = \tilde{Z}_t - \underline{\mu}$  için VAR( $p$ ) modeli aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\Phi(B)Z_t = A_t \quad (2.1)$$

Burada  $\Phi$  parametre matrisi ve  $A_t$ , bağımsız aynı dağılımlı beyaz gürültü dizilerinin vektörüdür. Buna göre  $A_t \sim WN(\underline{0}, \Sigma)$  yazılabilir. Model, toplamsal yapıya göre daha açık yazılırsa;

$$Z_t = \Phi_1 Z_{t-1} + \Phi_2 Z_{t-2} + \dots + \Phi_p Z_{t-p} + A_t$$

olur. Modelin durağanlık özelliğini göstermesi,  $|\Phi(B)|$  polinomunun köklerinin birim çemberin dışında kalması ile sağlanır.

Birinci dereceden vektör otoregressif [VAR(1)] modeli

$$(I - \Phi_1 B)Z_t = A_t$$

şeklinde yazılır. Model bir başka şekilde aşağıdaki gibi de ifade edilebilir:

$$Z_t = \Phi_1 Z_{t-1} + A_t.$$

Bu model için  $K = 2$  olduğu durumda parametre matrisi,  $2 \times 2$ 'lik bir matris olmak üzere matris formunda yazılıp, açılım sağlandığında model,

$$\begin{aligned} Z_{1,t} &= \phi_{11}Z_{1,t-1} + \phi_{12}Z_{2,t-1} + A_{1,t} \\ Z_{2,t} &= \phi_{21}Z_{1,t-1} + \phi_{22}Z_{2,t-1} + A_{2,t} \end{aligned}$$

olur. Bu modele göre, her bir denklem artıklarla beraber kendi gecikmeleri dışında diğer değişkenlerin gecikmelerini de içermektedir. Dikkat edildiğinde tek değişkenli modele göre çok değişkenli model, ek bilgi içermektedir. Bu durum genellikle modelleme açısından avantajlar sağlayabilmektedir [9,13,14].

**2.2.2. Bayesgil VAR.** Giderek artan belirsizlik ortamı ile birlikte, bugün istatistiksel zaman dizisi analizinde kestirimin uygulamaları her zamankinden daha fazla önem kazanmıştır. Box ve Jenkins [3] tarafından tanıtılmış tek değişkenli otoregresif tamamlanmış hareketli ortalama modelleri (ARIMA), çok başarılı olarak finans ve yönetim tarafından kullanılan kestirim araçlarından biridir. Bu kısıtlı kestirim modellerinde yalnızca kestirilen değişken ve onun kendi geçmişi arasındaki ilişki başarılıdır. Yapıları itibari ile bu modeller, o değişken ve herhangi diğer ekonomik değişken arasındaki herhangi bir ilişkiyi dikkate almazlar [8].

Alternatif zaman dizisi kestirim yaklaşımı Sims [15] tarafından geliştirilmiş ve Litterman [1,16] tarafından genişletilmiştir. Bu yaklaşım ekonomik değişkenlerin bir kümesi arasındaki intertemporal korelasyonlar (değişkenler arasında iç ilişki) ele geçirmek için çok değişkenli vektör otoregresif (VAR) modellerini kullanır. (2.1)'de ifade edildiği gibi, modeller çeşitli değişkenleri içerdikleri için tek değişkenli ARIMA modellerine göre daha zengin ilişkili modelleri sağlayabilirler. Modelin içeriğindeki değişkenlerin seçimi ile modele yüklenen diğer koşullar verinin özelliklerinden belirlenir [8].

Tek değişkenli modellere göre, parametrik yönden genellikle daha kapsamlı olan VAR modelleri aşırı uygunluk (gereksiz modelleme) eğilimi göstererek, sıkça örneklem dışı zayıf kestirimler üretebilirler. Litterman, VAR kestirim yönteminin genişlemesinde bu problemin üstesinden gelebilmek için bir yöntem önermiştir. Bu yöntem, ekonomik teoriden daha çok istatistiksel kurallara dayanan kısıtları birleştiren, Bayesgil vektör otoregresif (BVAR) modellerinin kullanımını içerir. Bayesgil önselleri kullanmayı içeren bu kısıtlar, katsayıların sayısını azaltmaya tercihen daha çok kestirim modelinin katsayılarında verinin etkisini azaltarak, aşırı uygunluk problemine çözüm getirmektedir [8].

Bayesgil VAR yapmak için öncelikle kısıtsız VAR'dan bahsetmek gerekir. Buna göre,  $K$  değişkenli bir VAR'da her bir değişken için bir denklemin varlığı kabul edilsin. Kısıtsız durum için her bir denklemdaki her bir değişken için  $p$  gecikme vardır.  $y$  vektöründe bulunan  $K$  değişken için kısıtsız VAR modeli aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$y(t) = A(B)y(t) + x(t)\beta + u(t),$$

$$E[u(t)u(t)'] = \Sigma, \quad t = 1, \dots, T.$$

Denklemden,  $y(t)$ ,  $t$  zamanda gözlenen değişkenlerin  $(K \times 1)$  boyutlu vektörü;  $A(B)$ , gecikme operatörü  $B$ 'de polinomların  $(K \times K)$  boyutlu matrisi;  $x(t)$ ,  $K^*$  'deterministik' değişkenlerde gözlemlerin blok köşegen  $(K \times KK^*)$  boyutlu matrisi,  $\beta$  deterministik değişkenlerde katsayıların  $(KK^* \times 1)$  boyutlu vektörü,  $u(t)$  stokastik artıkların  $(K \times 1)$  boyutlu vektörü ve  $\Sigma$ ,  $(K \times K)$  boyutlu kovaryans matrisidir [8].

Deterministik değişkenler, birim eleman ile bazı deterministik eğilim veya mevsimsel değişkenler vb. değişkenleri içerir. Amaç,  $y$  vektörünün bir veya daha fazla elemanı için kestirimler elde etmektir. Modelin  $i$ . denklemi;

$$y(i, t) = \sum_{j=1}^K \sum_{t=1}^m a(i, j, k)y(j, t - k) + \chi'(t)\beta(i) + u(i, t), \quad i = 1, \dots, K, \quad t = 1, \dots, T$$

ile verilir. Burada  $y(i, t)$  ve  $u(i, t)$ , sırasıyla  $y(t)$  ve  $u(t)$ 'nin  $i$ . elemanıdır.  $\beta(i)$   $i$ . denkleme uygun  $(K^* \times 1)$  boyutlu  $\beta$ 'nin alt vektörü ve  $a(i, j, k)$ ,  $i$ . denklemin  $j$ . değişkeninin  $k$ . gecikmesindeki katsayıdır. Açıkçası  $i$  indisi, denklem sayısını;  $j$  indisi, değişken sayısını ve  $k$  indisi ise gecikme uzunluğunu göstermektedir. Böylece kısıtsız VAR modelinin kurulmasında; VAR'da içerilen spesifik değişkenler, her bir denklemden gecikme uzunlukları, değişkenlerin dönüşümü, herhangi bir eğilimin çözümüne yaklaşım ve herhangi diğer deterministik değişkenler (örneğin; mevsimsel dummy vb. değişkenler) belirlenmelidir [8].

Modelin tam belirlenmesi, model değişkenlerinin ve stokastik olmayan dönemlerin seçimi, değişkenlerin fonksiyonel formu ve gecikme derecesine gereksinim duyar. Prensip olarak, model değişkenleri yapısal modellerdeki gibi ekonomik akla yatkinlığın temelinde seçilirler. Bu kritere ek olarak, istatistiksel özelliklere dayalı seçim, örneğin kestirim kalitesi veya performansı gibi özellikler de dikkate alınmaktadır [17].

VAR modelinin boyutunun değişkenlerin sayısı tarafından belirlendiği bilinmektedir. Bu boyutun seçimi için, iki dengeleyici prensip vardır. Buna göre, bir yandan, değişkenlerin mümkün olan en büyük sayısı, ekonomik ilişkilerin en büyük mümkün

sayısının tanımlanması için istenir. Diğer yandan, değişkenlerin sayısı, parametrelerin sayısı ve uygun gözlemlerin sayısı arasındaki optimal ilişkiyi bozacak kadar büyük olmamalıdır [17].

VAR modelinde gecikme uzunluğuna karar vermede çeşitli yaklaşımlar vardır. Bunların neler olduğuna yönelik bilgilerin detayı burada verilmeyecektir. Bu çalışmada kestirim performansı bakımından karşılaştırma yapılarak en iyi kestirim değerini veren gecikme uzunluğu en uygun gecikme olarak değerlendirilecektir.

Değişkenlerin seçimi ve gecikme uzunluğunun belirlenmesi kadar, eğer gerekiyorsa diziye uygulanacak başlangıç dönüşümünün seçimi de önemlidir. Veri hangi dönüşümler kullanılarak dönüştürülmelidir? Bunun için her bir dizi ayrı ayrı denemelidir. Genelde her bir dizi için diziler modellenilebilir diye kullanılan dönüşümler seçilmelidir. Eğer dizi üstel olarak veya parabolik olarak eğilim gösteriyorsa böyle bir trendin başka türlü hesaplanabiliyor olabilmesine karşın logaritma veya karekök dönüşümü muhtemelen yerinde olacaktır [8]. Bir başka yöntem de fark alma olabilir. Fakat veri dönüştürme koşulu olarak, Tiao ve Box [18] ve Tiao ve Tsay [19] durağanlığı sağlamada fark almayı tavsiye etmemektedirler. Onlar, deneysel çalışmalarda çoğunlukla verinin logaritmasını alırlar [20]. Bunun yanı sıra, Box-Jenkins zaman dizisi yönteminin durağan olan veriye gereksinme duyduğu bilinmektedir. Bu nedenle, bu yöntemi kullanmadan önce ekonomik verinin birinci farklarını almak genellikle tercih edilebilir. VAR modelleri için ise benzer problem yoktur ve Litterman özellikle bilgi kaybına neden olduğu için Tiao ve Box [18] ve Tiao ve Tsay [19] gibi birinci fark almamayı önerir. Bu, özellikle Bayesgil VAR kestirim modeli yapıldığında iyi bir öneri olarak kabul edilir [8].

Model kurma süreci esnasında, modelin amacının iyi kestirimler elde etmek olduğu bilinmektedir. Bu çalışmada modelleri ve gecikmeleri belirlemek için kestirimin esas alındığı daha önce ifade edilmişti. Bu bakış açısıyla, modellenen zaman dizisi için herhangi bir kestirim performansını belirleyebilmede bazı değerler hesaplama dışı bırakılır. Daha sonra kestirimler bu değerler ile karşılaştırılır. Bu şekilde bir BVAR modelinin kestirimlerinin performansı alternatif modellerin performansı ile karşılaştırılabilir. Bu karşılaştırmalar için kullanılabilen çeşitli objektif kriterler vardır. Bu çalışmada RMSE ölçütü kullanılacaktır. Buna göre RMSE ölçütü aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:



$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^l (Z_{t+j+l} - F_{t+j+1})^2}{s}}$$

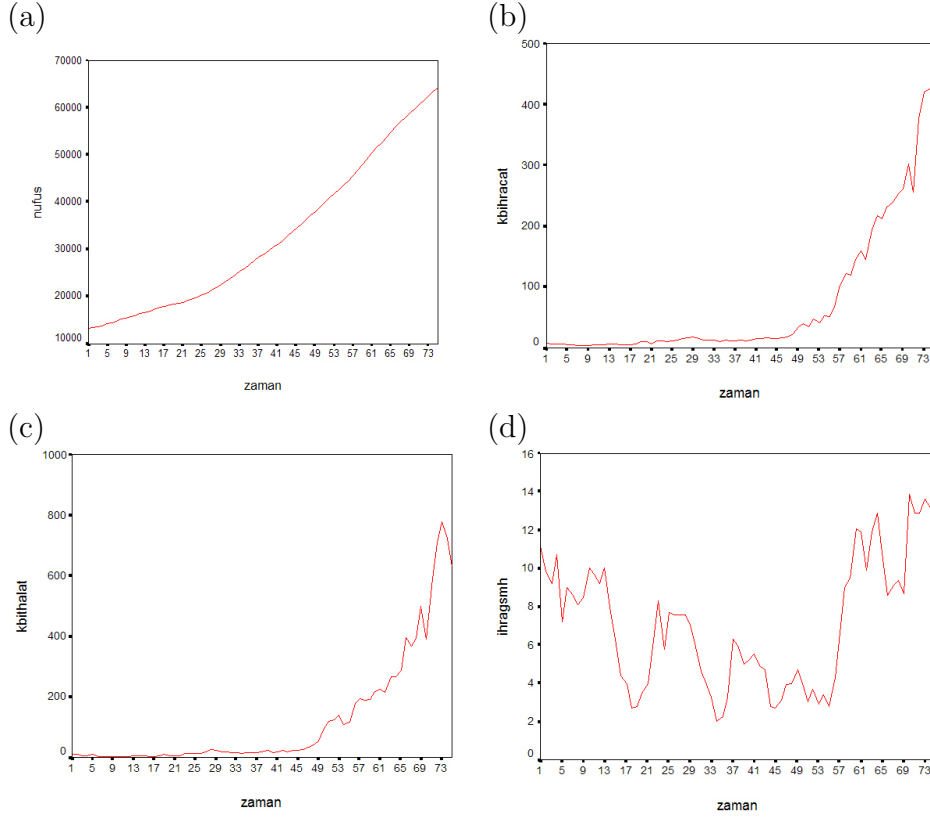
Burada,  $l = 1, 2, \dots, L$  kestirim adımını,  $s$ , ileriye yönelik yapılacak projeksiyonda kestirimlerin toplam sayısını (Bölüm 3’de analiz çizelgelerinde “gözlem” olarak adlandırıldı) göstermektedir.  $Z_t$ , değişkenin asıl değeri ve  $F_t$ ,  $t$  periyodunda yapılan kestirim değeridir.

### 3. Uygulama

Bu çalışmada, kullanılacak zaman dizileri mümkün olduğunca benzer konular içerisinde seçilmeye çalışılmıştır. Bu yapılırken, dizilerin farklı yapılar içermesine de dikkat edilmiştir. Buna göre, analiz için kullanılan veri; Türkiye ekonomisinde 1925-1999 periyodunda üç değişkenin 75 birimden oluşan yıllık zaman dizisi ile bu değişkenlerle beraber yıllara göre nüfus dizisidir. Söz konusu değişkenler sırasıyla Türkiye nüfusu, kişi başına ihracat (\$), kişi başına ithalat (\$) ve ihracatın GSMH (gayri safi milli hasıla)’ye oranı (%)’dir. Çalışmada, kullanılan zaman dizisi değişkenleri makale içerisinde aşağıdaki kısaltmalar halinde verilmiştir; nüfus: Türkiye nüfusu, kbihracat: Kişi başına ihracat, kbithalat: Kişi başına ithalat, ihragsmh: İhracatın GSMH’ye oranı. Adı geçen değişkenlere ilişkin grafikler aşağıda verilmiştir. Bu çalışmada yapılan analizler için RATS paket programı kullanılmıştır [21,22].

Buna göre, Şekil 1(a), 1925-1999 yılları için Türkiye nüfusu (1000)’nin grafiğini göstermektedir. Dikkat edilirse, diziye ilişkin gözlem değerlerinin üstel olarak düzgün bir şekilde artmakta olduğu görülebilir. 1925-1999 yılları için kişi başına ihracat değerleri (\$) ile kişi başına ithalat değerleri (\$)’ni sırasıyla Şekil 1(b), ve Şekil 1(c) vermektedir. Her iki grafik de belli bir değerden sonra ani olarak hızlı bir şekilde zaman zaman değişimler göstererek artmaktadır. Son veri grafiği, Şekil 1(d)’de 1925-1999 yılları için ihracatın GSMH’ye oranı (%) olarak verilmiştir. Bu grafik, diğer grafiklere göre daha farklı bir görünüm ile üstel olmayan bir yapı ortaya koymaktadır.

Bu başlık altında, yukarıda tanıtılan değişkenlerin, metin içinde teorik anlatımları yapılan konular bakımından analizleri yapılarak sonuçları verilecektir. Buna göre diziler için logaritması alınmış veri düşünülerek analizler yapılmıştır.

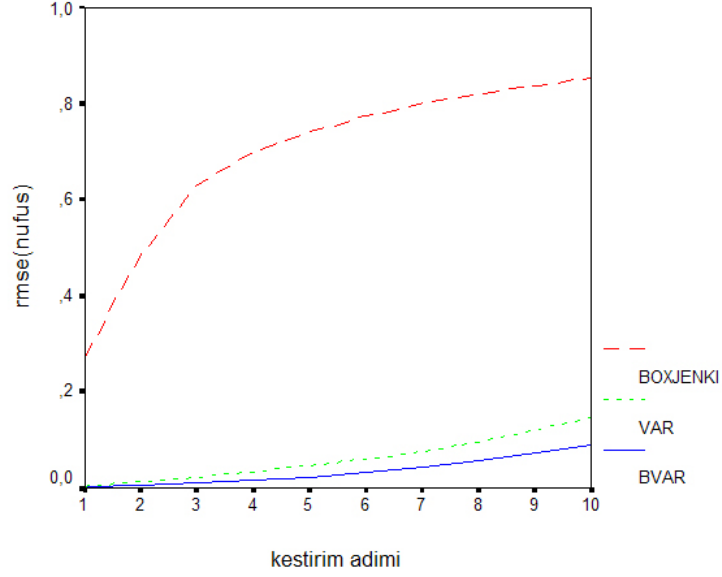


ŞEKİL 1. 1925-1999 yıllarına ait (a) Türkiye nüfusu (1000), (b) kişi başına ihracat değerleri (\$), (c) kişi başına ithalat değerleri (\$), (d) ihracatın GSMH'ye oranı (%).

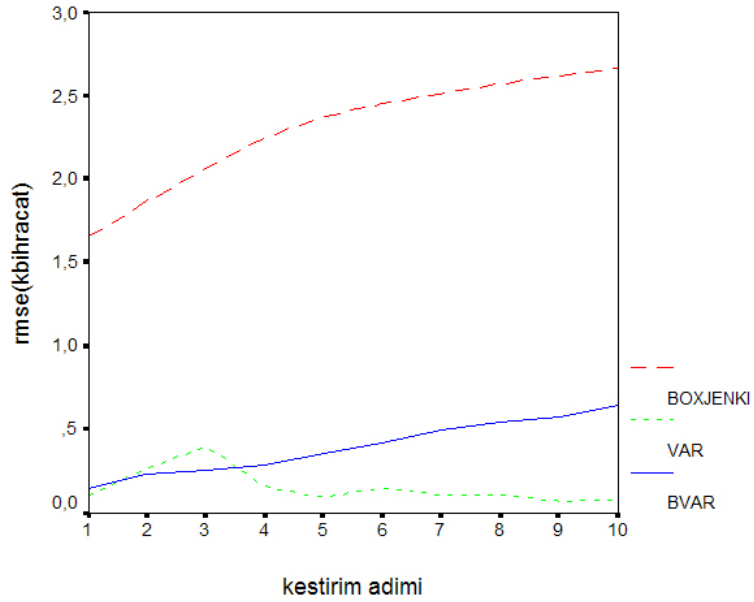
Yapılan analizler sonucunda, tüm değişkenler için Box-Jenkins (BOXJENKI), VAR ve BVAR modellerinin, gecikme uzunluğu 3 olduğunda, 10 adım kestirime göre RMSE değerleri karşılaştırmalı grafik olarak verilmiştir.

Şekil 2 değerlendirildiğinde, nüfus değişkeni için gecikme 3 olduğunda en iyi kestirim değerlerini BVAR modelinin verdiği söylenebilir. Sırasıyla daha sonra VAR ve Box-Jenkins modelleri gelmektedir. Buna göre, Şekil 3'e bakıldığında, kbihracat değişkeni için gecikme 3 olduğunda en iyi kestirim değerlerini VAR modelinin verdiği söylenebilir. Daha sonra sırayla BVAR ve Box-Jenkins modelleri gelmektedir.

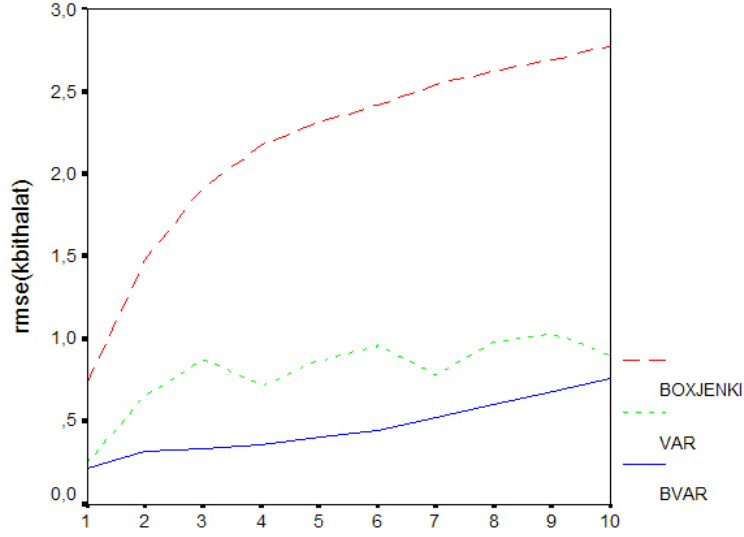
Şekil 4 göz önüne alındığında, kbithalat değişkeni için gecikme 3 olduğunda en iyi kestirim değerlerini BVAR modelinin verdiği anlaşılmaktadır. Sırasıyla daha sonra VAR ve Box-Jenkins modellerinin geldiği söylenebilir. Şekil 5 değerlendirildiğinde, ihragsmh değişkeni için gecikme 3 olduğunda en iyi kestirim değerlerini Box-Jenkins



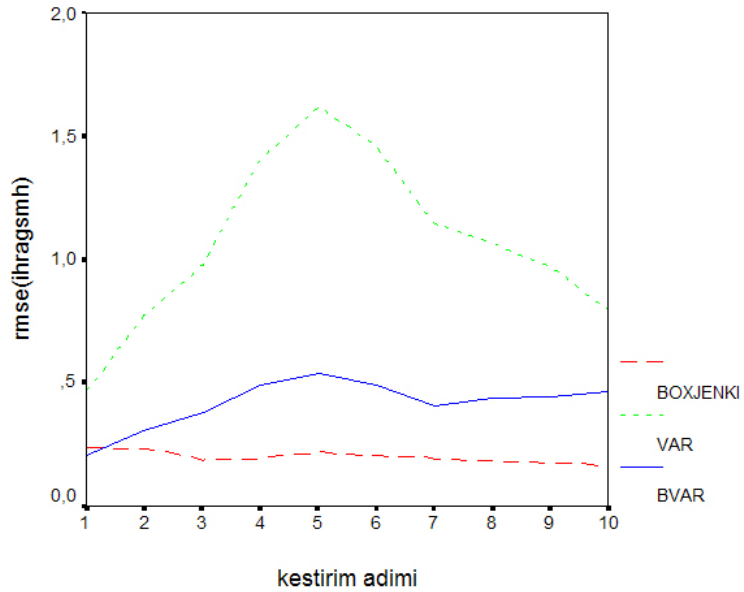
ŞEKİL 2. Gecikme 3 olduğunda, logaritmali nüfus (Türkiye nüfusu) değişkeninin üç modele ait RMSE değerlerinin karşılaştırmalı grafiği.



ŞEKİL 3. Gecikme 3 olduğunda, logaritmali kbhıracat (kişi başına ihracat) değişkeninin üç modele ait RMSE değerlerinin karşılaştırmalı grafiği.



ŞEKİL 4. Gecikme 3 olduğunda, logaritmali kbithalat (kişi başına ithalat) değişkeninin üç modele ait RMSE değerlerinin karşılaştırmalı grafiği.



ŞEKİL 5. Gecikme 3 olduğunda, logaritmali ihragsmh (ihracatın GSMH'ye oranı) değişkeninin üç modele ait RMSE değerlerinin karşılaştırmalı grafiği.

modelinin verdiği söylenebilir. Daha sonra VAR ve BVAR modelleri ard arda gelmektedir.

Şekil 1-5'te verilen grafiklerin yanında, gecikme uzunluğu 3 olduğunda tüm değişkenler için Box-Jenkins, VAR ve BVAR modellerinin, 1, 5 ve 10 adım kestirime göre, RMSE değerleri karşılaştırmalı olarak Tablo 1-5'te verilmiştir.

TABLO 1. Gecikme 3 olduğunda, logaritmali nüfus (Türkiye nüfusu) değişkeninin üç modele ait 1, 5 ve 10 adımdaki RMSE değerleri.

Adım	RMSE (Box-Jenkins)	RMSE (VAR)	RMSE (BVAR)
1	0.2750	0.0048	0.0026
5	0.7430	0.0471	0.0237
10	0.8545	0.1457	0.0890

Buna göre, sonuçlara bakıldığında, kısa, orta ve uzun vadeli kestirimlerde en iyi sonuçları BVAR modelinin verdiği, buna karşılık her üç vadede de Box-Jenkins modelinin en kötü kestirim sonuçlarını verdiği söylenebilir.

Tablo 2'deki sonuçlara bakıldığında, kısa, orta ve uzun vadeli kestirimlerde en iyi sonuçları VAR modelinin verdiği, buna karşılık her üç vadede de Box-Jenkins modelinin en kötü kestirimleri verdiği söylenebilir.

TABLO 2. Gecikme 3 olduğunda, logaritmali kbihracat (kişi başına ihracat) değişkeninin üç modele ait 1, 5 ve 10 adımdaki RMSE değerleri.

Adım	RMSE (Box-Jenkins)	RMSE (VAR)	RMSE (BVAR)
1	1.6544	0.1032	0.1491
5	2.3750	0.0937	0.3563
10	2.6618	0.0790	0.6506

Tablo 3'e bakıldığında, kısa, orta ve uzun vadeli kestirimlerde en iyi sonuçları BVAR modelinin verdiği, buna karşılık her üç vadede de Box-Jenkins modelinin en kötü kestirim değerlerini verdiği söylenebilir.

Tablo 4'de sonuçlara bakıldığında, kısa vadeli kestirimlerde en iyi sonuçları BVAR modelinin, orta ve uzun vadeli kestirimlerde en iyi değerleri Box-Jenkins modelinin verdiği, buna karşılık her üç vadede de VAR modelinin en kötü kestirim sonuçlarını verdiği söylenebilir.

Bütün değişkenler birlikte düşünüldüğünde, hangi gecikmenin daha iyi sonucu hangi yöntemde verdiğini görmek bakımından aşağıdaki çizelgeler hazırlanmıştır. Tablo

TABLO 3. Gecikme 3 olduğunda, logaritmalı kbithalat (kişi başına ithalat) değişkeninin üç modele ait 1, 5 ve 10 adımdaki RMSE değerleri.

Adım	RMSE (Box-Jenkins)	RMSE (VAR)	RMSE (BVAR)
1	0.7400	0.2509	0.2147
5	2.3156	0.8706	0.4061
10	2.7741	0.9029	0.7674

TABLO 4. Gecikme 3 olduğunda, logaritmalı ihragsmh (ihracatın GSMH'ye oranı) değişkeninin üç modele ait 1, 5 ve 10 adımdaki RMSE değerleri.

Adım	RMSE (Box-Jenkins)	RMSE (VAR)	RMSE (BVAR)
1	0.2392	0.4672	0.2041
5	0.2178	1.6185	0.5385
10	0.1679	0.7951	0.4629

5'de kısa vadede (bir adım ileri) kestirim değerleri RMSE sonuçlarına göre karşılaştırılmaktadır. Buna göre, gecikme 3 ve 9 için en iyi kestirim değerlerini BVAR modeli vermektedir. Gecikme 6'da ise en iyi sonucu VAR modeli vermiştir. Fakat burada esas amacın kestirim değerleri bakımından en uygun gecikmeyi belirlemek olduğu düşünüldüğünde, bütün modeller için gecikme 3'ün en küçük RMSE değerlerini verdiği söylenebilir. Burada da BVAR modelinin en iyi kestirim değerlerini verdiği görülmektedir.

TABLO 5. Gecikme 3, 6 ve 9 olduğunda, tüm değişkenlerin üç modele ait 1 adımdaki toplam RMSE değerleri.

Gecikme	Yöntem	Nufus	kbihracat	kbithalat	ihragsmh	Toplam
3	BOXJENKI	0.2750	1.6544	0.7400	0.2392	2.9082
	VAR	0.0048	0.1032	0.2509	0.4672	0.8261
	BVAR	0.0026	0.1491	0.2147	0.2041	0.5705
6	BOXJENKI	0.2750	1.6544	0.7400	0.2392	2.9082
	VAR	0.0056	0.6335	0.0852	0.4040	1.1283
	BVAR	0.0027	1.1230	0.2483	0.2288	1.6028
9	BOXJENKI	0.2750	1.6544	0.7400	0.2392	2.9082
	VAR	0.0016	0.2211	0.2381	0.7663	1.2271
	BVAR	0.0052	0.3314	0.4303	0.3937	1.1606

#### 4. Sonuç ve Yorum

Bu çalışmada, yıllar itibariyle nüfus, kişi başına ihracat, kişi başına ithalat ve ihracatın GSMH'ye oranı dizileri, Bayesgil vektör otoregressif (BVAR) kestirim modeli ile incelenerek, vektör otoregressif (VAR) ve tek değişkenli (Box-Jenkins) zaman dizileri modelleri ile kestirim performansları karşılaştırıldı.

Bunun için öncelikle, tek değişkenli zaman dizileri modelleme süreci özetle verildi. Bu genel girişten sonra, esas itibariyle BVAR modeli kullanılarak kestirim (forecasting) yapılması amaçlandığından, bu çerçevede bazı kavramlara değinildi. Bunun için VAR ve BVAR modelleme ve kestirim süreci verildi. Litterman [2] ve Spencer'ın [8] ifadeleriyle, BVAR'ın hangi durumda bir ihtiyaca dönüştüğü açıklandı. Buna göre, BVAR modeli, kısıtsız VAR modelinin bazı durumlardaki eksikliğinden ortaya çıkmış bir model olup, bu modelin aşırı parametreleşme (overparametrization) eğilimi gösteren kısıtsız VAR modellerine alternatif olarak sunuldu.

Özetle, BVAR modeli ile kestirim yapmanın diğer modeller ile kestirim yapmaya göre en önemli farkı, BVAR modelinde işleme başlarken bir önsel ile başlanıyor. Ancak bu durumda eğer tahmin edici, konu hakkında yeterince bilgiye sahip değilse hata yapma oranı oldukça yüksektir. BVAR'ın hangi durumlarda avantaja, hangi durumlarda dezavantaja sahip olduğunu saptayabilmek için bu model benzer özellikte yaklaşık sonuçlar veren modellerle karşılaştırılmaktadır. Bu işlem için yıllar itibariyle (1925-1999) nüfus, kişi başına ihracat, kişi başına ithalat ve ihracatın GSMH'ye oranı dizileri alındı. Modellerin değerlendirilmesinde RMSE (ortalama hata karenin kare kökü) ölçütü kullanıldı.

Analiz sonuçları kısa, orta ve uzun vadede değerlendirildi. Bu değerlendirmeler her bir değişken için ayrı ayrı yapıldı. En iyi gecikmeyi bulmanın yanı sıra her bir değişken için farklı kestirim adımlarında en iyi modelin bulunması amaçlanıyordu. Uygulama sonucunda her bir değişkende ve her bir gecikmede farklı durumlarla karşılaşılabilirdi de görüldü. Herhangi bir model seçim ölçütü kullanmadan pek çok gecikme denenerek, karşılaştırmalar için gecikme sayısı olarak 3, 6 ve 9 gecikme kullanıldı. Tüm değişkenler için en iyi gecikmenin kısa, orta ve uzun vadede çeşitlilik göstermesine rağmen gecikme uzunluğunun 3 olduğu durumda hemen hemen tüm değişkenler için en iyi sonucu verdiği söylenebilir. Eğer ihtiyaç var ise, genellikle tavsiye edilen dönüşüm, verinin logaritmasının alınmasıdır. Buna göre, logaritması alınmış verinin farklı gecikmelerdeki sonuçları karşılaştırıldı. Örneğin; nüfus değişkeni, 3 ve 6 gecikmede; kısa, orta ve uzun vadelerde iyi sonuçlar vermesine

rağmen 9 gecikme için kısa ve uzun vadede VAR modeli iyi sonuçlar vermiş orta vadede BVAR modeli iyi sonuç vermiştir. Diğer değişkenler için de benzer sonuçlar detaylı olarak verilmiştir.

Bu çalışmada yukarıda ifade edilen sonuçların yanında genel olarak, BVAR kestirim modellerinin çeşitli düzeylerde değişkenlerin değerlerini kestirmek için başarıyla kullanılabilirliği söylenebilir. Bu genel sonuç, bu konu üzerinde çalışan araştırmacıların elde ettikleri sonuçların desteklenebileceğini göstermektedir.

## Kaynaklar

- [1] R. B. Litterman, *A Bayesian Procedure for Forecasting with Informative Prior Distribution*, Manuscript, Department of Economics, MIT, Cambridge, MA 1980.
- [2] R. B. Litterman, Forecasting with Bayesian vector autoregressions: five years of experience, *Journal of Business and Economic Statistics* **4** (1986), 25–38.
- [3] G. E. P. Box and G. M. Jenkins, *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day, Oakland, California 1976.
- [4] G. E. P. Box and G. C. Tiao, *Bayesian Inference in Statistical Analysis*, Addison-Wesley, Reading, MA 1973.
- [5] N. Gürsakal, *Bayesgil İstatistik*, Uludağ Üniversitesi Güçlendirme Vakfı, Bursa 1992.
- [6] G. Ergün, *Devingen Doğrusal Modeller ve Bayesci Öngörüler Üzerine Bir Çalışma*, Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Ankara 1995.
- [7] E. Çoker and F. Sezgin, Türkiye'deki enflasyonun Bayesci vektör otoregresyon modeller ile incelenmesi, *Marmara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi* **7** (2007), 287–300.
- [8] D. E. Spencer, Developing a Bayesian vector otoregression forecasting model, *International Journal of Forecasting* **9** (1993), 407–421.
- [9] R. Kasap, *Zaman Dizileri Analizi*, Basılmamış Ders Notu, Gazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Ankara 2002.
- [10] G. E. P. Box and D. A. Pierce, Distribution of residual autocorrelation in autoregressive integrated moving average time series models, *Journal of American Statistical Association* **65** (1970), 1509–1526.
- [11] R. Kasap, Using CFA for the identification of the order and the estimation of the parameters of the AR(p) models, *Hacettepe Bulletin of Natural Sciences and Engineering* **17** (1996), 195-205.
- [12] A. Özmen, *Zaman Serisi Analizinde Box-Jenkins Yöntemi ve Banka Mevduat Tahmininde Uygulama Denemesi*, Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi 1986.
- [13] W. W. S. Wei, *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate*, Addison-Wesley, UK 1990.
- [14] G. C. Reinsel, *Elements of Multivariate Time Series*, Springer-Verlag, London 1995.
- [15] C. A. Sims, Macroeconomics and reality, *Econometrica* **48** (1980), 1–48.
- [16] R. B. Literman, Forecasting and policy analysis with Bayesian vector autoregression models, *Quarterly Review* **8** (1984), 30–41.



- [17] J. A. Bikker, Inflation forecasting for aggregates of the EU-7 and EU-14 with Bayesian VAR models, *Journal of Forecasting* **17** (1998), 147–165.
- [18] G. Tiao and G. Box, Modeling multiple time series with applications, *Journal of American Statistical Association*, **76** (1981), 802–816.
- [19] G. Tiao and R. Tsay, Model specification in multivariate time series, *Journal of The Royal Statistical Society, Series B*, **51** (1989), 157–213.
- [20] F. F. R. Ramos. Forecasting market shares using VAR and BVAR models: A comparison of their forecasting performance. <http://129.3.20.41/eps/em/papers/9601/9601003.pdf>, 1996. Online; accessed 11-February-2010.
- [21] T. A. Doan, *RATS (Regression Analysis of Time Series) for Windows (V.4.31)*, USA 1997.
- [22] S. Kavak, *Bayesgil Vektör Otoregressif (BVAR) Kestirim Modeli ve Uygulaması*, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Ankara 2002.
- [23] *Türkiye İstatistik Yılığ 2000*, DİE, Ankara.

