

Lorentz-Minkowski 4-Uzayında Timelike Eğriler Tarafından Oluşturulan Tubular Hiperyüzeyler İçin Bazı Sınıflandırmalar

*Makale Bilgisi / Article Info

Alındı/Received: 29.04.2024

Kabul/Accepted: 09.12.2024

Yayımlandı/Published: 10.06.2025

Some Classifications for Tubular Hypersurfaces Generated by Timelike Curves in Lorentz-Minkowski 4-Space

Ahmet KAZAN^{*1} , Mustafa ALTIN² ¹ Malatya Turgut Özal Üniversitesi, Doğanşehir Vahap Küçük Meslek Yüksekokulu, Bilgisayar Teknolojileri Bölümü, Malatya² Bingöl Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Bingöl

© 2025 The Authors | Creative Commons Attribution-Noncommercial 4.0 (CC BY-NC) International License

Öz

Bu çalışmada, 4-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayı E_1^4 de timelike eğriler tarafından oluşturulan tubular hiperyüzeylerin Gauss dönüşümlerinin doğrusallaştırılmış operatörü L_0 ile ilgilendirildi. Bu bağlamda ilk olarak, E_1^4 de timelike eğriler tarafından oluşturulan tubular hiperyüzeylerin Gauss dönüşümlerinin L_0 operatörünü elde ettik. Ardından sırasıyla, genelleştirilmiş L_0 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip, birinci ve ikinci çeşit L_0 -noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip ve L_0 -harmonik Gauss dönüşümüne sahip olan bu hiperyüzeyler için bazı sınıflandırmalar verdik.

Anahtar Kelimeler Doğrusallaştırılmış L_0 -operatörü; Gauss dönüşümü; Genelleştirilmiş L_0 1-tipli Gauss dönüşümü; Tubular hiperyüzeyler.

Abstract

In this study, we are interested in the linearized operator L_0 of the Gaussian maps of tubular hypersurfaces formed by timelike curves in the 4-dimensional Lorentz-Minkowski space E_1^4 . In this context, firstly we obtained the L_0 operator of the Gauss maps of the tubular hypersurfaces formed by timelike curves in E_1^4 . After, we gave some classifications for these hypersurfaces, which have the generalized L_0 1-type Gauss map, the first kind and second kind L_0 -pointwise 1-type Gauss map and the L_0 -harmonic Gauss map, respectively.

Keywords Linearized L_0 -operator; Gauss map; Generalized L_0 1-type Gauss map; Tubular hypersurfaces.

1. Giriş

Laplace-Beltrami operatörü nesne tanıma ve sınıflandırma, yapay zekâ ve makine öğrenmesi, yüzey modelleme ve grafik ile medikal görüntüleme gibi birçok alanda önemli uygulamalara sahiptir. Koordinat fonksiyonları Laplace operatörünün öz fonksiyonları olan alt manifoldların incelenmesi ve bunun birçok genellemesi, diferansiyel geometri için önemli bir araştırma alanıdır. E^{n+1} e gömülü bir M hiperyüzeyi ile ilişkili Laplacian operatörü, bir (içsel) ikinci dereceden doğrusal diferansiyel operatördür. Hiperyüzeyin normal değişimleri için bu operatörler, doğal olarak ortalama eğriliğin ilk değişiminin doğrusallaştırılmış operatörü olarak görülür. Laplace operatörü, bu açıdan bakıldığında n -tane operatörden oluşan bir $L_0 = \Delta, L_1, L_2, \dots, L_{n-1}$ dizisindeki ilk operatördür. Hiperyüzeyin normal değişimlerinden kaynaklanan $(k+1)$ 'inci ortalama eğriliğin birinci değişiminin doğrusallaştırılmış operatörü, bu dizide L_k ile gösterilir. Bu operatörler, M üzerinde diferansiyellenebilir bir f fonksiyonu için, $L_k(f) = \text{iz}(P_k \circ \nabla^2 f)$ eşitliğini sağlarlar. Hiperyüzeyin ikinci temel

formuyla ilişkili k 'yüncü Newton dönüşümü, f 'nin Hessian'ına metrik olarak eşdeğer olan kendine eşlenik doğrusal operatör $\nabla^2 f$ ile temsil edilir ve bu dönüşüm P_k ile gösterilir. Özel olarak $k = 1$ ise, bu durumda L_1 , Cheng-Yau operatörüdür.

Bu çalışmada tubular hiperyüzeyleri karakterize etmek için bu hiperyüzeylerimize uygulayacağımız Laplace-Beltrami operatörü, görüntü işleme ve bilgisayar grafikleri alanlarında özellikle yüzeylerin geometrik özelliklerinin analizini yaparak bu yüzeylerin temsillerini elde etmek için kullanılır. Bu bağlamda, 3-boyutlu bir nesnenin veya şeklin matematiksel bir temsili oluşturmak için yazılım kullanma süreci olan 3B modelin pürüzsüzlüğünü veya kavisli bölgelerini belirlemek için kullanılabilen Laplace-Beltrami operatörü; bilgisayar grafikleri ve görüntü işleme alanlarında model oluşturmak, yüzeyleri segmente etmek, şekil benzerliğini karşılaştırmak ve sınıflandırmak için oldukça önemlidir. Ayrıca Laplace-Beltrami operatörü, biyomedikal mühendislikte, medikal görüntüleme verilerinin analizini yapmak için fazlasıyla kullanışlı bir araçtır. Örneğin, organ

veya doku yüzeylerinin analizi ve segmentasyonu için, CT veya MRI taramalarından elde edilen 3B görüntülerinin işlenmesi için ve anatomik yapıların belirlenmesi için kullanılabilir.

Diferensiyel geometri için de önemli bir araştırma alanı olan manifoldlar üzerinde Laplacian operatörü ile ilgili olarak Takahashi, koordinat fonksiyonları Laplace operatörünün öz fonksiyonları olan ve aynı λ özdeğeri ile ilişkili olan Öklid uzayındaki izometrik daldırmaları incelemiştir. Takahashi, eğer $(n+k)$ -boyutlu Öklid uzayında bir Riemannian n -manifoldunun bir $x: M \rightarrow R^{n+k}$ izometrik daldırması bazı sıfırdan farklı sabitler için $\Delta x = \lambda x$ şartını sağlıyorsa, bu durumda λ 'nın pozitif olması ve x 'in de R^{n+k} deki $\sqrt{n/k}$ yarıçaplı bir S^{n+k+1} küresine minimal bir daldırma gerçekleştirmesi gerektiğini göstermiştir. Tersine eğer x , R^{n+k} da yarıçapı r olan bir küreye minimal bir daldırma gerçekleştirirse, o zaman x 'in, R^{n+k} de paralel bir yer değiştirmeye kadar $\Delta x = \lambda x$ 'i sağladığını ve $\lambda = n/r^2$ olduğunu ispatlamıştır (Takahashi 1966). 1990 yılında ise Garay, Takahashi'nin teoreminin daha genel bir halini oluşturmuştur (Garay 1990). Bu çalışmaların ardından, Laplacian operatörü yardımıyla çeşitli yüzeylere ait farklı sınıflamalar geometriciler tarafından elde edilmiştir (bkz. Chen ve Petrovic 1991, Dillen vd. 1990, Hasanis ve Vlachos 1992).

E^{n+1} e gömülü bir M hiperyüzeyi ile ilişkili Laplacian operatörü bir (içsel) ikinci dereceden doğrusal diferensiyel operatördür ve bu operatör $L_k(f) = \text{iz}(P_k \circ \nabla^2 f)$ ifadesinde $k=0$ için sağlanır. Yine literatürde L_k doğrusallaştırılmış operatörleriyle ilgili ve özellikle de $k=1$ için elde edilen Cheng-Yau operatörüyle ilgili pek çok çalışmaya rastlanmaktadır (bkz. Cheng ve Yau 1977, Güler ve Turgay 2019, Kazan vd. 2024a-2024b, Kelleci 2021, Kim vd. 2016, Lucas ve Ramirez-Ospina 2011, Tetsing 2021, Yang ve Liu 2009).

Biz de bu çalışmamızda, dört boyutlu Lorentz-Minkowski uzayı E_1^4 de timelike eğriler tarafından oluşturulan tubular hiperyüzeylerin Gauss dönüşümlerinin doğrusallaştırılmış operatörü L_0 (Laplacian operatör)'ü hesaplayarak bu tubular hiperyüzeyler için diferensiyel geometride önem teşkil eden bazı sınıflandırmalar elde ettik.

Bu bağlamda ilk olarak, ileriki bölümde kullanacağımız bazı temel bilgileri hatırlatalım.

E_1^{n+1} ; indeksi 1, işareti $(-, +, +, \dots, +)$ olan ve E_1^{n+1} de dik koordinat sistemi $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ olmak üzere $\langle, \rangle = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \dots + dx_{n+1}^2$ ile verilen pseudo-Öklidyen metriğiyle donatılmış $(n+1)$ -boyutlu Lorentz-Minkowski uzayı olsun. Eğer $\theta: M \rightarrow E_1^{n+1}$, n -boyutlu bir

M yönlendirilebilir manifoldundan E_1^{n+1} e bir izometrik daldırma ise, bu takdirde θ daldırması tarafından M üzerinde indirgenmiş metrik, Riemannian veya Lorentzian olabilir. Eğer G birim normal vektör alanı ve $\langle G, G \rangle = \varepsilon = \pm 1$ ise, bu takdirde $\varepsilon = 1$ iken M Lorentzian metrikle, $\varepsilon = -1$ iken de M Riemannian metrikle donatılmıştır.

$(n+1)$ -boyutlu Lorentz-Minkowski uzayı E_1^{n+1} de M hiperyüzeyinin G Gauss dönüşümünün koordinat fonksiyonları üzerinde aksiyon alan L_k operatörü

$$L_k G = -\varepsilon C_k (\nabla H_{k+1} + (nH_1 H_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2})G) \quad (1.1)$$

eşitliği ile verilir. Burada

$$\binom{n}{k} H_k = (-\varepsilon)^k a_k, \quad \left(\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \right) \quad (1.2)$$

dir, öyle ki

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -\sum_{i=1}^n \kappa_i, \\ a_k &= (-1)^k \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \kappa_{i_1} \cdot \kappa_{i_2} \dots \kappa_{i_k}, \quad k = 2, 3, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

dir ve H_k 'ya M 'nin k -yıncı ortalama eğriliği denir. Ayrıca, C_k sabiti de

$$C_k = \binom{n}{k+1} (-\varepsilon)^k \quad (1.4)$$

formülü ile bulunur. Doğrusallaştırılmış L_k -operatörüyle ilgili detaylı bilgi için (Lucas ve Ramirez-Ospina 2011) kodlu kaynağa bakılabilir.

Diğer taraftan, eğer E_1^4 de yönlendirilmiş bir M altmanifoldunun G Gauss dönüşümü $L_k G = fG + gC$ şartını sağlıyorsa, M genelleştirilmiş L_k 1-tipli Gauss dönüşümüne sahiptir; eğer $L_k G = fG$ şartını sağlıyorsa, M birinci çeşit L_k -noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahiptir; eğer $L_k G = f(G + C)$ şartını sağlıyorsa, M ikinci çeşit L_k -noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahiptir ve eğer $L_k G = 0$ şartını sağlıyorsa M 'ye L_k -harmonik Gauss dönüşümüne sahiptir denir. Burada f ve g 'ler M üzerinde sıfırdan farklı diferensiyellenebilir fonksiyonlar, $C \in E_1^4$ sıfırdan farklı bir sabit vektör ve $k \in \{1, 2, 3\}$ 'tür.

Biz bu çalışmada, 4-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayı E_1^4 de tubular hiperyüzeyler ile ilgileneceğimizden dolayı, şimdi E_1^4 uzayı için bazı temel kavramları hatırlatalım.

E_1^4 de $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ ve $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ üç vektör olsunlar. Bu durumda, iç çarpım ve vektörel çarpım, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ standart baz vektörleri olmak üzere, sırasıyla

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4 \quad (1.5)$$

ve

$$\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{w} = \det \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

şeklinde tanımlanır. E_1^4 de bir $\vec{u}$ vektörüne, eğer $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$ (veya $\vec{u} = 0$), $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle < 0$ veya $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$ ise, sırasıyla, spacelike, timelike veya lightlike (null) denir. E_1^4 de bir $\gamma(x)$ eğrisine ise spacelike, timelike veya lightlike (null) denir, eğer bu eğrinin tüm hız vektörleri $\gamma'(x)$, sırasıyla spacelike, timelike veya lightlike (null) iseler. Bir null olmayan (yani spacelike veya timelike) eğriye birim hızlıdır denir, eğer $\langle \gamma', \gamma' \rangle = \pm 1$ ise. Ayrıca bir $\vec{u}$ vektörünün normu ise $\|\vec{u}\| = \sqrt{|\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle|}$ şeklindedir.

T, N, B_1, B_2 bir timelike $\gamma(x)$ eğrisinin sırasıyla, birim tanjant vektör alanı, asli normal vektör alanı, binormal vektör alanı, trinormal vektör alanı ve $\{T, N, B_1, B_2\}$ de E_1^4 de $\gamma(x)$ eğrisi boyunca hareketli Frenet çatısı olsun. Bu durumda, $\gamma(x)$ timelike eğrisi için $\langle T, T \rangle = -1$, $\langle N, N \rangle = \langle B_1, B_1 \rangle = \langle B_2, B_2 \rangle = 1$ olmak üzere Frenet denklemleri,

$$\left. \begin{aligned} T' &= \kappa N, \\ N' &= \kappa T + \tau B_1, \\ B_1' &= -\tau N + \sigma B_2, \\ B_2' &= -\sigma B_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

şeklindedir. Burada κ, τ ve σ , $\gamma(x)$ eğrisinin, sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü eğrilikleridir.

Ayrıca, M' de tanımlı bir $\psi(x, y, z)$ diferensiyellenebilir fonksiyonunun gradienti,

$$\nabla \psi = \frac{-1}{\det g} \begin{pmatrix} \left(\begin{aligned} &(g_{23}^2 - g_{22}g_{33})\psi_x \\ &+ (-g_{13}g_{23} + g_{12}g_{33})\psi_y \\ &+ (g_{13}g_{22} - g_{12}g_{23})\psi_z \end{aligned} \right) \partial x \\ \left(\begin{aligned} &(-g_{13}g_{23} + g_{12}g_{33})\psi_x \\ &+ (g_{13}^2 - g_{11}g_{33})\psi_y \\ &+ (-g_{12}g_{13} + g_{11}g_{23})\psi_z \end{aligned} \right) \partial y \\ \left(\begin{aligned} &(g_{13}g_{22} - g_{12}g_{23})\psi_x \\ &+ (-g_{12}g_{13} + g_{11}g_{23})\psi_y \\ &+ (g_{12}^2 - g_{11}g_{22})\psi_z \end{aligned} \right) \partial z \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

elde edilir. Burada

$$\det g = -g_{13}^2 g_{22} + 2g_{12}g_{13}g_{23} - g_{11}g_{23}^2 - g_{12}^2 g_{33} + g_{11}g_{22}g_{33};$$

$\{x, y, z\}$, M' nin lokal koordinat sistemi; ψ_x, ψ_y, ψ_z ler ψ' nin kısmi türevleri ve $g_{11} = \langle \partial x, \partial x \rangle$, $g_{12} = \langle \partial x, \partial y \rangle$, $g_{13} = \langle \partial x, \partial z \rangle$, $g_{22} = \langle \partial y, \partial y \rangle$, $g_{23} = \langle \partial y, \partial z \rangle$ ve $g_{33} = \langle \partial z, \partial z \rangle$ dir.

2. E_1^4 de Timelike Eğriler Tarafından Oluşturulan Tubular Hiperyüzeyler İçin Bazı Sınıflandırmalar

Bu bölümde, öncelikle E_1^4 de timelike eğriler tarafından oluşturulan tubular hiperyüzeylerle ilgili bazı hatırlatmalar yapılarak (bkz. Altın vd., 2023) bu hiperyüzeylerin Gauss dönüşümlerinin L_0 operatörü elde edilecektir. Ardından da bu hiperyüzeyler için genelleştirilmiş L_0 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olma, birinci çeşit L_0 -noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olma, ikinci çeşit L_0 -noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olma ve L_0 -harmonik Gauss dönüşümüne sahip olma durumları için sonuçlar verilecektir.

E_1^4 de merkezleri bir timelike eğri üzerinde bulunan pseudo-hiperkürelerin bir ailesinin zarfı olarak oluşturulan $\mathcal{T}(x, y, z)$ tubular hiperyüzeyleri

$$\mathcal{T}(x, y, z) = \gamma(x) + \rho \begin{pmatrix} \cos y \cos z N(x) \\ + \sin y \cos z B_1(x) \\ + \sin z B_2(x) \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

şeklinde parametrelendirilebilir. (2.1) numaralı tubular hiperyüzeyin birim normal vektör alanı

$$\mathcal{G} = - \begin{pmatrix} \cos y \cos z N(x) \\ + \sin y \cos z B_1(x) \\ + \sin z B_2(x) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

dir ve dolayısıyla

$$\langle \mathcal{G}, \mathcal{G} \rangle = 1 \quad (2.3)$$

dir. (2.1) numaralı tubular hiperyüzeyin birinci temel formunun katsayıları

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= (\rho\tau \cos y \cos z - \rho\sigma \sin z)^2 \\ &\quad - (1 + \rho\kappa \cos y \cos z)^2 \\ &\quad + \rho^2(\tau^2 + \sigma^2) \sin^2 y \cos^2 z, \\ g_{12} &= g_{21} = \rho^2(\tau \cos z - \sigma \cos y \sin z) \cos z, \\ g_{22} &= \rho^2 \cos^2 z, \\ g_{13} &= g_{31} = \rho^2 \sigma \sin y, \\ g_{23} &= g_{32} = 0, \\ g_{33} &= \rho^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

ve asli eğrilikleri ise

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= \kappa_2 = \frac{1}{\rho}, \\ \kappa_3 &= \frac{\kappa \cos y \cos z}{1 + \rho\kappa \cos y \cos z} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

dir. (1.3) ve (2.5) numaralı denklemler kullanılırsa, (2.1) numaralı tubular hiperyüzey için a_k fonksiyonları

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{-2-3\rho\kappa \cos y \cos z}{\rho(1+\rho\kappa \cos y \cos z)}, \\ a_2 &= \frac{1+3\rho\kappa \cos y \cos z}{\rho^2(1+\rho\kappa \cos y \cos z)}, \\ a_3 &= \frac{-\kappa}{\rho^2(\rho\kappa + \sec y \sec z)} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

olarak elde edilir. Ayrıca, (1.8) numaralı denklemde (2.4) ve (2.6) kullanılırsa

$$\nabla a_1 = \left(\begin{aligned} &\left(\frac{\cos z(\kappa \sin y + \kappa' \cos y)}{(1+\rho\kappa \cos y \cos z)^3} \right) T \\ &+ \left(\frac{\left(\frac{-3+\cos(2y)}{4r(1+\rho\kappa \cos y \cos z)^2} \right)^\kappa}{4r(1+\rho\kappa \cos y \cos z)^2} \right) N \\ &+ \left(\frac{\kappa \sin y \cos y \cos^2 z}{\rho(1+\rho\kappa \cos y \cos z)^2} \right) B_1 \\ &+ \left(\frac{\kappa \cos y \sin z \cos z}{\rho(1+\rho\kappa \cos y \cos z)^2} \right) B_2 \end{aligned} \right) \quad (2.7)$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla, (1.1), (1.2), (1.4), (2.2), (2.3), (2.6) ve (2.7) numaralı eşitliklerden

$$L_0 G = \left(\begin{aligned} &\left(\frac{(\kappa \sin y + \kappa' \cos y) \cos z}{(1+\rho\kappa \cos y \cos z)^3} \right) T \\ &+ \left(\frac{8 \cos y \cos z + \rho\kappa \left(\frac{1+5 \cos(2y)}{+10 \cos^2 y \cos(2z)} \right)}{4\rho^2(1+\rho\kappa \cos y \cos z)^2} \right) N \\ &+ \left(\frac{(2+3\rho\kappa \cos y \cos z) \sin y \cos z}{\rho^2(1+\rho\kappa \cos y \cos z)} \right) B_1 \\ &+ \left(\frac{(2+3\rho\kappa \cos y \cos z) \sin z}{\rho^2(1+\rho\kappa \cos y \cos z)} \right) B_2 \end{aligned} \right) \quad (2.8)$$

olarak elde edilir. Şimdi, (2.1) numaralı tubular hiperyüzey için genelleştirilmiş L_0 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olma, birinci çeşit L_0 -noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olma, ikinci çeşit L_0 -noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olma ve L_0 -harmonik Gauss dönüşümüne sahip olma durumları için sonuçlar verilecektir.

İlk olarak, (2.1) numaralı tubular hiperyüzey için genelleştirilmiş L_0 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olma durumunu, yani $L_0 G = fG + gC$ durumunu $C = C_1 F_1 + C_2 F_2 + C_3 F_3 + C_4 F_4$ için ele alalım. Burada C 'nin x 'e göre türevini alırsak, (1.7)'den

$$\left. \begin{aligned} C_1' + C_2 \kappa &= 0, \\ C_2' + C_1 \kappa - C_3 \tau &= 0, \\ C_3' + C_2 \tau - C_4 \sigma &= 0, \\ C_4' + C_3 \sigma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

olur. Ayrıca, C 'nin y 'ye ve z 'ye göre de türevlerini alırsak, C 'nin sadece x 'ye bağlı olduğu görülebilir.

(2.2) ve (2.8) eşitlikleri $L_0 G = fG + gC$ ifadesinde kullanılırsa,

$$\left. \begin{aligned} &\frac{(\kappa \sin y + \kappa' \cos y) \cos z}{(1+\rho\kappa \cos y \cos z)^3} = g(x, y, z) C_1, \\ &\left(\frac{8 \cos y \cos z + \rho\kappa \left(\frac{1+5 \cos(2y)}{+10 \cos^2 y \cos(2z)} \right)}{4\rho^2(1+\rho\kappa \cos y \cos z)^2} \right) = \\ &\quad f(x, y, z)(-\cos y \cos z) + g(x, y, z) C_2, \\ &\frac{(2+3\rho\kappa \cos y \cos z) \sin y \cos z}{\rho^2(1+\rho\kappa \cos y \cos z)} = f(x, y, z)(-\sin y \cos z) \\ &\quad + g(x, y, z) C_3, \\ &\frac{(2+3\rho\kappa \cos y \cos z) \sin z}{\rho^2(1+\rho\kappa \cos y \cos z)} = f(x, y, z)(-\sin z) + g(x, y, z) C_4 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

denklemleri elde edilir. Şimdi bu denklemleri çözelim.

İlk olarak $C_1 \neq 0$ olsun. (2.10) numaralı denklemlerin ilkinden

$$g(x, y, z) = \frac{(\kappa \sin y + \kappa' \cos y) \cos z}{(1+\rho\kappa \cos y \cos z)^3 C_1} \quad (2.11)$$

olur. Bu $g(x, y, z)$ 'yi (2.10)'un ikinci, üçüncü ve dördüncü denklemlerinde yerlerine yazarak $f(x, y, z)$ 'leri elde edip, bu denklemleri birbirine eşitlesek

$$(C_4 \sin y \cos z - C_3 \sin z)(\kappa \sin y + \kappa' \cos y) = 0 \quad (2.12)$$

$$\kappa \left(\frac{C_1 \rho \kappa + C_1 \sec y \sec z}{+ \rho \tau \left(\frac{-C_4 \sin y \cot z}{+ C_2 \tan y} \right)} \right) + \rho(C_2 - C_4 \cos y \cot z) \kappa' = 0 \quad (2.13)$$

$$C_1 \rho \kappa^2 + \kappa \left(\frac{\tau(C_2 \rho \tan y - C_3 \rho)}{+ C_1 \sec y \sec z} \right) + \rho(C_2 - C_3 \cot y) \kappa' = 0 \quad (2.14)$$

eşitliklerine ulaşılır. Burada $\kappa \sin y + \kappa' \cos y \neq 0$ ise, (2.12)'den $C_3 = C_4 = 0$ olur. $C_3 = 0$ olduğu (2.14)'te kullanılırsa $C_1 = 0$ olduğu görülür ve bu da baştaki $C_1 \neq 0$ varsayımımızla çelişir. $\kappa \sin y + \kappa' \cos y = 0$ olması durumunda ise, bu durumda da (2.10)'un ilk denkleminde $g(x, y, z) = 0$ olur ve bu da $g(x, y, z)$ 'nin tanımıyla çelişir.

İkinci olarak $C_1 = 0$ olsun. (2.9)'un ilk eşitliğinden ya $\kappa = 0$ ya da $C_2 = 0$ 'dır. İlk olarak $\kappa = 0$ alınırsa, (2.10)'un ilk eşitliği zaten sağlanır. (2.10)'un ikinci, üçüncü ve dördüncü denklemlerinden de, sırasıyla

$$\frac{(2 + \rho^2 f(x, y, z)) \cos y \cos z}{\rho^2} = g(x, y, z) C_2 \quad (2.15)$$

$$\frac{(2 + \rho^2 f(x, y, z)) \sin y \cos z}{\rho^2} = g(x, y, z) C_3 \quad (2.16)$$

$$\frac{(2 + \rho^2 f(x, y, z)) \sin z}{\rho^2} = g(x, y, z) C_4 \quad (2.17)$$

elde edilir. Burada C_i 'ler sadece x 'e bağlı olduğundan, (2.15), (2.16) ve (2.17) eşitlikleri aynı anda sağlanamaz. Yani, bu da bir çelişkidir. $C_2 = 0$ alınırsa da, (2.10)'un ilk denkleminde ya $\kappa = 0$ ya da $\kappa' = 0 = \tau$ olur. $\kappa = 0$

olmadığını az önce görmüştük. O halde $\kappa' = 0 = \tau$ durumunu ele alalım. (2.10)'un ikinci denkleminde

$$f(x, y, z) = \frac{\sec z \left(\begin{array}{c} 8 \cos y \cos z \\ + \rho \kappa \left(\begin{array}{c} 1 + 5 \cos(2y) \\ + 10 \cos^2 y \cos(2z) \\ + 12 \rho \kappa \cos^3 y \cos^3 z \end{array} \right) \end{array} \right)}{-4\rho^2(1 + \rho \kappa \cos y \cos z)^2 \cos y}$$

olur. Bu ifade (2.10)'un üçüncü ve dördüncü denklemlerinde kullanılırsa da, sırasıyla

$$\frac{\kappa \tan y}{\rho(1 + \rho \kappa \cos y \cos z)^2} = g(x, y, z)C_3,$$

$$\frac{\kappa \sec y \tan z}{\rho(1 + \rho \kappa \cos y \cos z)^2} = g(x, y, z)C_4$$

bulunur ve dolayısıyla

$$\frac{C_4}{C_3} = \csc y \tan z$$

elde edilir ve bu da bir çelişkidir.

Bu nedenle şu teoremi ifade edebiliriz:

Teorem: E_1^4 de merkezleri bir timelike eğri üzerinde bulunan pseudo-hiperkürelerin bir ailesinin zarfı olarak oluşturulan ve (2.1) ile parametrelendirilen tubular hiperyüzeyleri, genelleştirilmiş L_0 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olamaz.

Şimdi de (2.1) numaralı tubular hiperyüzey için ikinci çeşit L_0 -noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olma durumunu, yani $L_0 G = f(G + C)$, $C \neq 0$ durumunu inceleyelim.

(2.2) ve (2.8) eşitlikleri $L_0 G = f(G + C)$ ifadesinde kullanılırsa,

$$\left. \begin{aligned} \frac{(\kappa \tau \sin y + \kappa' \cos y) \cos z}{(1 + \rho \kappa \cos y \cos z)^3} &= g(x, y, z)C_1, \\ \frac{\left(\begin{array}{c} 8 \cos y \cos z + \rho \kappa \left(\begin{array}{c} 1 + 5 \cos(2y) \\ + 10 \cos^2 y \cos(2z) \\ + 12 \rho \kappa \cos^3 y \cos^3 z \end{array} \right) \end{array} \right)}{4\rho^2(1 + \rho \kappa \cos y \cos z)^2} &= f(x, y, z)(-\cos y \cos z + C_2), \\ \frac{(2 + 3\rho \kappa \cos y \cos z) \sin y \cos z}{\rho^2(1 + \rho \kappa \cos y \cos z)} &= f(x, y, z)(-\sin y \cos z + C_3), \\ \frac{(2 + 3\rho \kappa \cos y \cos z) \sin z}{\rho^2(1 + \rho \kappa \cos y \cos z)} &= f(x, y, z)(-\sin z + C_4) \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

denklemleri elde edilir. Şimdi de bu denklemlerle ilgilenelim.

(2.18) numaralı denklemlerin ikincisi, üçüncüsü ve dördüncüsünden $f(x, y, z)$ 'leri bulursak, sırasıyla

$$f(x, y, z) = \frac{\left(\begin{array}{c} 8 \cos y \cos z + \rho \kappa \left(\begin{array}{c} 1 + 5 \cos(2y) \\ + 10 \cos^2 y \cos(2z) \\ + 12 \rho \kappa \cos^3 y \cos^3 z \end{array} \right) \end{array} \right)}{4\rho^2(1 + \rho \kappa \cos y \cos z)^2 (C_2 - \cos y \cos z)} \quad (2.19)$$

$$f(x, y, z) = \frac{(2 + 3\rho \kappa \cos y \cos z) \sin y \cos z}{\rho^2(1 + \rho \kappa \cos y \cos z)(C_3 - \sin y \cos z)} \quad (2.20)$$

ve

$$f(x, y, z) = \frac{(2 + 3\rho \kappa \cos y \cos z) \sin z}{\rho^2(1 + \rho \kappa \cos y \cos z)(C_4 - \sin z)} \quad (2.21)$$

olur. (2.20) ve (2.21) birbirine eşitlenirse $C_3 = C_4 = 0$ bulunur. (2.19) ve (2.21) birbirine eşitlenirse de $C_2 = 0$ ve $\kappa = 0$ olur. Bulduğumuz bu değerler (2.18) numaralı denklemlerin ikincisi, üçüncüsü ve dördüncüsünde kullanılırsa

$$f(x, y, z) = -\frac{2}{\rho^2} \quad (2.22)$$

elde edilir. (2.22) numaralı eşitlik (2.18) numaralı denklemlerin birincisinde kullanılırsa da $C_1 = 0$ olduğu görülür. O halde aşağıdaki teoremleri elde ederiz:

Teorem: E_1^4 de merkezleri bir timelike eğri üzerinde bulunan pseudo-hiperkürelerin bir ailesinin zarfı olarak oluşturulan ve (2.1) ile parametrelendirilen tubular hiperyüzeyleri, ikinci çeşit L_0 -noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olamaz.

Teorem: E_1^4 de merkezleri bir timelike eğri üzerinde bulunan pseudo-hiperkürelerin bir ailesinin zarfı olarak oluşturulan ve (2.1) ile parametrelendirilen tubular hiperyüzeyleri, $\kappa = 0$ iken birinci çeşit L_0 -noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahiptir, yani $L_0 G = fG$ dir ve burada $f = -\frac{2}{\rho^2}$ dir.

Son olarak da (2.1) numaralı tubular hiperyüzeyinin L_0 -harmonik Gauss dönüşümüne sahip olma durumunu, yani $L_0 G = 0$ durumunu inceleyelim.

$$\left. \begin{aligned} (2.8) \text{ eşitliği için } L_0 G = 0 \text{ ise, bu durumda} \\ \frac{(\kappa \tau \sin y + \kappa' \cos y) \cos z}{(1 + \rho \kappa \cos y \cos z)^3} &= 0, \\ \frac{\left(\begin{array}{c} 8 \cos y \cos z + \rho \kappa \left(\begin{array}{c} 1 + 5 \cos(2y) \\ + 10 \cos^2 y \cos(2z) \\ + 12 \rho \kappa \cos^3 y \cos^3 z \end{array} \right) \end{array} \right)}{4\rho^2(1 + \rho \kappa \cos y \cos z)^2} &= 0, \\ \frac{(2 + 3\rho \kappa \cos y \cos z) \sin y \cos z}{\rho^2(1 + \rho \kappa \cos y \cos z)} &= 0, \\ \frac{(2 + 3\rho \kappa \cos y \cos z) \sin z}{\rho^2(1 + \rho \kappa \cos y \cos z)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

olmalıdır. Bu durum mümkün olmadığından, aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem: E_1^4 de merkezleri bir timelike eğri üzerinde bulunan pseudo-hiperkürelerin bir ailesinin zarfı olarak oluşturulan ve (2.1) ile parametrelendirilen tubular hiperyüzeyleri, L_0 -harmonik Gauss dönüşümüne sahip olamaz.

3. Sonuçlar ve Tartışma

Bu çalışmada, 4-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayı E_1^4 de merkezleri bir timelike eğri üzerinde bulunan pseudo-hiperkürelerin bir ailesinin zarfı olarak oluşturulan ve (2.1) ile parametrelendirilen tubular hiperyüzeylerin Gauss dönüşümlerinin L_0 operatörü elde edilerek, bu operatör yardımıyla tubular hiperyüzeylerin genelleştirilmiş L_0 1-tipli Gauss dönüşümüne ve ikinci çeşit L_0 -noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olamadığı, fakat bu tubular hiperyüzeyler üzerinde $\kappa = 0$ iken $f = -2/\rho^2$ için $L_0\mathcal{G} = f\mathcal{G}$ olduğu, yani bu hiperyüzeylerin birinci çeşit L_0 -noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olduğu görülmüş oldu. Ayrıca, (2.1) numaralı tubular hiperyüzeylerin L_0 -harmonik Gauss dönüşümüne sahip olamadığı da görülmüştür.

Bu çalışmanın 4-boyutlu farklı uzaylarda değişik tiplerdeki (hiper)yüzeyleri çalışan araştırmacılara ışık tutacağı kanaatindeyiz.

Etik Standartlar Bildirgesi

Yazarlar olarak tüm etik standartlara uyduğumuzu beyan ediyoruz.

Yazarlık Katkı Beyanı

Yazar 1: Araştırma, Metodoloji/Çalışma, Yazma ve Yazım Kontrolü, Literatür Taraması ve Kaynaklar

Yazar 2: Araştırma, Metodoloji/Çalışma, Yazma ve Yazım Kontrolü, Literatür Taraması ve Kaynaklar

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarlar olarak bu makalenin içeriğiyle ilgili olarak beyan edeceğimiz hiçbir çıkar çatışması yoktur.

4. Kaynaklar

- Altın, M., Kazan, A. and Yoon, D.W., 2023. Canal Hypersurfaces generated by Non-Null Curves in Lorentz-Minkowski 4-Space. *Bull. Korean Math. Soc.*, **60** (5), 1299-1320.
<https://doi.org/10.4134/BKMS.b220680>
- Chen, B.Y. and Petrovic, M., 1991. On spectral decomposition of immersions of finite type. *Bull. Aust. Math. Soc.*, **44** (1), 117-129.
<https://doi.org/10.1017/S0004972700029518>
- Cheng, S.Y. and Yau, S.T., 1977. Hypersurfaces with constant scalar curvature. *Math. Ann.*, **225**, 195-204.
<https://doi.org/10.1007/BF01425237>
- Dillen, F., Pas, J. and Verstraelen, L., 1990. On surfaces of finite type in euclidean 3-space. *Kodai Math. J.*, **13** (1), 10-21.
<https://doi.org/10.2996/kmj/1138039155>
- Garay, O.J., 1990. An extension of Takahashi's theorem. *Geom. Dedicata*, **34**, 105-112.
<https://doi.org/10.1007/BF00147319>

- Güler, E. and Turgay, N.C., 2019. Cheng-Yau Operator and Gauss Map of Rotational Hypersurfaces in 4-Space. *Mediterr. J. Math.*, **16** (3), 66.
<https://doi.org/10.1007/s00009-019-1333-y>
- Hasanis, T. and Vlachos, T., 1992. Hypersurfaces of E^{n+1} satisfying $\Delta x = Ax + B$. *J. Aust. Math. Soc.*, **53** (3), 377-384.
- Kazan, A., Altın, M. and Turgay, N.C., 2024a. Rotational Hypersurfaces in E_1^4 with Generalized L_k 1-Type Gauss Map. *arXiv:2403.19671v1*.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2403.19671>
- Kazan, A., Altın, M. and Turgay, N.C., 2024b. Some Classifications for Gauss Map of Tubular Hypersurfaces in E_1^4 Concerning Linearized Operators L_k . *arXiv:2404.13075v1*.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2404.13075>
- Kelleci Akbay, A., 2021. Rotational surfaces with Cheng-Yau operator in Galilean 3-spaces. *Hacet. J. Math. Stat.*, **50** (2), 365-376.
<https://doi.org/10.15672/hujms.612730>
- Kim, D-S., Kim, J.R. and Kim, Y.H., 2016. Cheng-Yau Operator and Gauss Map of Surfaces of Revolution. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **39** (4), 1319-1327.
<https://doi.org/10.1007/s40840-015-0234-x>
- Lucas, P. and Ramirez-Ospina, H.F., 2011. Hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski space satisfying $L_k\psi = A\psi + b$. *Geom. Dedicata*, **153** (1), 151-175.
<https://doi.org/10.1007/s10711-010-9562-z>
- Takahashi, T., 1966. Minimal immersions of Riemannian manifolds. *J. Math. Soc. Japan*, **18** (4), 380-385.
- Tetsing, H.F., 2021. Normalized null hypersurfaces in nonflat Lorentzian space forms satisfying $L_r x = Ux + b$. *Turk. J Math.*, **45** (4), 1809-1834.
<https://doi.org/10.3906/mat-2102-37>
- Yang, B. G. and Liu, X.M., 2009. Spacelike hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski space satisfying $L_r x = Rx + b$. *Indian J. Pure Appl. Math.*, **40** (6), 389-403.