Araştırma Makalesi MART 2023 | Cilt: 2 | Sayı: 1 | Sayfa Aralığı: 44-55

Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin İteratif Çözümleri Üzerine

On The Iterative Solutions of Delay Differential Equations

Yunus ATALAN[1]

1) Aksaray Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Aksaray/TÜRKİYE

ORCID: 0000-0002-5912-7087, yunusatalan@aksaray.edu.tr

Geliş Tarihi: 17/01/2024 – **Kabul Tarihi:** 29/03/2024

DOI:10.55205/joctensa.21202379

ATIF: Atalan, Yunus. (2024). Gecikmeli diferansiyel denklemlerin iteratif çözümleri üzerine. Cihannüma Teknoloji Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, 2 (1), 44-55.

Öz

Diferansiyel veya integral denklem şeklinde modellenen bazı problemler için önem arz eden nicel ve nitel ayrıntılar sabit nokta iterasyon yöntemleri aracılığıyla daha belirgin hale getirilebilir. Çözümü incelenen bir denklemi belirli şartlar altında bir operatör sınıfına dahil etmek ve bu operatör yardımıyla söz konusu denklemin çözümüne ulaşmak için iterasyon yöntemleri etkin bir araç olarak kullanılmaktadır. Bu çalışmada yeni dört adımlı bir iterasyon yönteminin yakınsaklığı ispatlanmış ve gecikmeli diferansiyel denklemler belirli şartları sağlamak kaydıyla daraltan dönüşüm sınıfına dahil edilebildiğinden bu denklemler yardımıyla yeniden inşa edilen dört adımlı iterasyon yönteminden elde edilen dizinin bu denklemlerin çözümüne yakınsadığı gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İterasyon yöntemi, Daraltan dönüşüm, Yakınsaklık

Abstract

Quantitative and qualitative details that are important for some problems modeled as differential or integral equations can be made more explicit through fixed point iteration methods. Iteration methods are used as an effective tool to include an equation whose solution is under investigation into a class of operators under certain conditions and to obtain the solution of the equation with the help of this operator. In this study, the convergence of a new four-step iteration method is proved and it is shown that since delay differential equations can be included in the class of contraction mappings under certain conditions, the sequence obtained from the reconstructed four-step iteration method with the help of these equations converges to the solution of these equations.

Keywords: Iteration method, Contraction mapping, Convergence.

GİRİŞ

Sabit nokta teorisi, günlük yaşamda çeşitli şekillerde ortaya çıkan problemlerin incelenmesi için bir yöntem sunmakla birlikte, uygun değişiklikler yoluyla bu problemlere çözüm bulmayı amaçlamaktadır.

Sabit nokta teorisinin kökenleri, diferansiyel denklemler üzerine çalışmalarıyla tanınan matematikçiler Picard ve Poincaré'ye kadar uzanmaktadır. Ancak Polonyalı matematikçi Banach, sabit nokta kavramının uygun çerçevede geniş bir uygulamaya sahip olmasını sağlamaya önemli bir katkıda bulunmuştur. Banach Daralma ilkesi olarak bilinen teorem, tam metrik uzayda bir daraltan dönüşüm kullanılarak oluşturulan Picard yineleme dizisinin, bu dönüşümün bir tek olan sabit noktasına yakınsadığını belirtmektedir (Banach, 1922). Banach Daralma İlkesi hem uygulamalı matematik hem de diğer çalışma alanları üzerinde etkili olmuş ve birçok araştırmacının bu teoremi diğer yapılara genişletmesine olanak tanıyan hızlı gelişmelerin önünü açmıştır. (Hardy ve Rogers, 1973; Kannan, 1968; Nadler, 1969; Zamfirescu, 1972).

Sabit nokta iterasyon süreçleri dinamik bir literatüre sahip olmakla birlikte modellenen problemlerin çözümüne aşamalı bir şekilde ulaşmaya olanak sağlar. Bu bağlamda birçok sabit nokta iterasyonu tanımlanmış ve bu yöntemlerin yakınsaklık, kararlılık, veri bağlılığı ve yakınsama hızları incelenmiştir (Atalan ve Karakaya, 2019; Karakaya vd., 2016; Maldar vd; 2020).

Bir problem modellenirken adi diferansiyel denklemlerin kullanılması durumunda sistemdeki gecikmeler göz ardı edilir. Ancak küçük gecikmeler sistem davranışında büyük değişikliklere yol açabileceğinden, karşılaşılan problemleri modellerken gecikmeli diferansiyel denklemleri kullanmak daha pratik bir yaklaşım olacaktır. Bu nedenle bu denklemler temel ve uygulamalı bilimlerde karşılaşılan problemlerin modellenmesinde sıklıkla kullanılır. Dolayısıyla modellenen problemin çözümü, sözü edilen gecikmeli diferansiyel denklemin çözümüne karşılık gelecektir. Sabit nokta iterasyon yöntemleri bu tür denklemleri çözmek için etkin bir araç olarak kullanılır. Bu yaklaşımın temel hedefi, belirli koşullar altında bir operatör sınıfına dahil edilen gecikmeli diferansiyel denklemi kullanarak bir iterasyon yöntem inşa etmek ve bu yöntemden elde edilen dizinin, operatörün sabit noktasına -gecikmeli diferansiyel denklemin çözümüne-yakınsamasını sağlamaktır.

Bu çalışmada dört adımlı sabit nokta iterasyon yöntemi kullanılarak bu yöntemden elde edilen dizinin Banach uzaylarında yakınsaklığı incelenmiş ve gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümüne sözü edilen iterasyon yöntemi kullanılarak ulaşılabileceği gösterilmiştir.

MATERYAL VE YÖNTEM

$C[a,b]$ ile $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı, reel veya kompleks değerli tüm sürekli fonksiyonların kümesi gösterilsin. Bu küme üzerinde $\|x\|_\infty = \max_{t\in[a,b]}|x(t)|$ normu tanımlanırsa $(C[a,b], \|.\|_\infty)$ bir normlu uzay olur.

$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), t \in [t_0, b]$ ve başlangıç koşulu $x(t) = \phi(t), t \in [t_0 - \tau, t_0]$ olan gecikmeli diferansiyel denklem için aşağıda verilen koşullar sağlansın:

(1) $t_0, b \in \mathbb{R}, \tau > 0,$

(2) $f \in (C[t_0, b] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}),$

(3) $\phi \in C([t_0 - \tau, b], \mathbb{R})$

(4) Her $u_i, v_i \in \mathbb{R}, i = 1,2$ ve $t \in [t_0, b]$ için $|f(t, u_1, u_2) - f(t, v_1, v_2)| \leq L_d \sum_{i=1}^{2}|u_i - v_i|$ olacak şekilde L_d >0 mevcuttur,

(5) $0 < 2L_d(b - t_0) < 1.$

Bu problem integral formda aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t), t \in [t_0 - \tau, t_0] \\ \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s), x(s-\tau))ds, t \in [t_0, b] \end{cases} \qquad (1)$$

Teorem 1. (1)- (5) koşulları altında verilen problem $x_* \in C([t_0 - \tau, b], \mathbb{R}) \cap C^1([t_0, b], \mathbb{R})$ gibi bir tek çözüme sahiptir ve herhangi bir $x \in C([t_0 - \tau, b], \mathbb{R})$ için $x_* = \lim_{n\to\infty} T^n(x)$ (Coman vd; 1976)

Bu teorem ile yukarıda verilen gecikmeli diferansiyel denklemin (1) – (5) şartları altında bir tek çözüme sahip olduğu ve Picard iterasyon yönteminden elde edilen dizinin bu çözüme yakınsak olduğu sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla aşağıdaki soru doğal olarak ortaya çıkmaktadır:

Bu denklemin çözümüne daha hızlı yakınsayacak başka bir iterasyon algoritması seçmek mümkün müdür?

Atalan ve Gündoğdu tarafından 2023 yılında tanımlanan aşağıdaki yöntemle bu soruyu cevaplamak mümkün olmaktadır (Gündoğdu, 2023):

X bir Banach uzayı, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\mu_n\} \in [0,1]$ ($n \in \mathbb{N}$) olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)Ty_n + \alpha_n Tz_n \\ y_n = (1-\beta_n)Tx_n + \beta_n Tz_n \\ z_n = (1-\gamma_n)w_n + \gamma_n Tw_n \\ w_n = (1-\mu_n)x_n + \mu_n Tx_n \end{cases} \tag{2}$$

Tanım 1. X bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \delta \cdot d(x, y)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı mevcut ise T'ye bir Lipschitzian dönüşüm denir (Berinde, 2007).

Tanım 2.. X bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir Lipschitzian dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq \delta \cdot d(x, y)$$

eşitsizliği en az bir $\delta \in [0,1)$ sayısı için sağlanıyorsa T'ye daraltan dönüşüm denir (Berinde, 2007).

BULGULAR VE TARTIŞMA

Çalışmanın bu bölümünde (2) ile verilen iterasyon yönteminin daraltan dönüşümler için kuvvetli yakınsaklığı ispatlanmış ve bu yöntem ile bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsama davranışları nümerik bir örnek üzerinden karşılaştırılmıştır. Ayrıca (2) ile verilen yöntem kullanılarak (1) denkleminin çözümüne uygun koşullar altında ulaşılabileceği gösterilmiştir.

Teorem 2. X bir Banach uzayı ve C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olmak üzere $T : C \to C$ x_* gibi bir sabit noktaya sahip daraltan dönüşüm olsun. Bu takdirde (2) ile verilen iterasyon yönteminden elde edilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi x_* sabit noktasına yakınsar.

İspat.

$$\begin{aligned}\|w_n - x_*\| &= \|(1-\mu_n)x_n + \mu_n T x_n - T x_*\| \\ &\leq (1-\mu_n)\|x_n - x_*\| + \mu_n \|T x_n - T x_*\| \\ &\leq (1-\mu_n)\|x_n - x_*\| + \mu_n \delta \|x_n - x_*\| \\ &= [1-\mu_n(1-\delta)]\|x_n - x_*\|\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\|z_n - x_*\| &= \|(1-\gamma_n)w_n + \gamma_n T w_n - T x_*\| \\ &\leq (1-\gamma_n)\|w_n - x_*\| + \gamma_n \|T w_n - T x_*\| \\ &\leq (1-\gamma_n)\|w_n - x_*\| + \gamma_n \delta \|w_n - x_*\| \\ &= [1-\gamma_n(1-\delta)]\|w_n - x_*\|\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda elde edilen iki eşitsizlik iç içe yazılır ve $[1-\mu_n(1-\delta)] \leq 1,\ [1-\gamma_n(1-\delta)] \leq 1$ olduğu göz önüne alınarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$\|z_n - x_*\| \leq \|x_n - x_*\|$ elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\|y_n - x_*\| &= \|(1-\beta_n)T x_n + \beta_n T z_n - T x_*\| \\ &\leq (1-\beta_n)\|T x_n - T x_*\| + \beta_n \|T z_n - T x_*\| \\ &\leq (1-\beta_n)\delta\|x_n - x_*\| + \beta_n \delta \|z_n - x_*\|\end{aligned}$$

olup $\delta \in [0,1)$ ve $\|z_n - x_*\| \leq \|x_n - x_*\|$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\|y_n - x_*\| \leq \|x_n - x_*\|$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x_*\| &= \|(1-\alpha_n)T y_n + \alpha_n T z_n - T x_*\| \\ &\leq (1-\alpha_n)\|T y_n - T x_*\| + \alpha_n \|T z_n - T x_*\| \\ &\leq (1-\alpha_n)\delta\|y_n - x_*\| + \alpha_n \delta \|z_n - x_*\| \\ &\leq \delta\|x_n - x_*\|\end{aligned}$$

olur. $\delta \in [0,1)$ olduğundan $n \to \infty$ için limit alınırsa $x_n \to x_*$ olduğu görülür.

Örnek 1. $X = \mathbb{R}$ ve $C = [0.5,2]$ olmak üzere $T: C \to C$ operatörü her $x \in C$ için $T(x) = \frac{3}{4}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ şeklinde tanımlansın. T'nin sabit noktasının $x_* = 1{,}732051$ olduğu açıktır. Başlangıç değeri $x_0 = 0{,}99$ olmak üzere kontrol dizilerini $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = \mu_n = \frac{1}{4}$ şeklinde seçelim. MATLABR-2015a programı kullanılarak elde edilen aşağıdaki tablo, (2) ile verilen iterasyon yönteminin CR (Chugh vd., 2012), S* (Karahan & Özdemir, 2013) ve Picard-Mann (Khan, 2013) iterasyon yöntemlerinden daha hızlı olduğunu göstermektedir:

x_n	CR	S*	Picard-Mann	(2) nolu iterasyon
x_0	0,99	0,99	0,99	0,99
x_1	1,533278	1,531554	1,509269	1,603175
x_2	1,653559	1,650753	1,641654	1,698759
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_{12}	1,731973	1,731950	1,731935	1,732050
x_{13}	1,732018	1,732007	1,732000	1,732051
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_{18}	1,732050	1,732050	1,732050	⋮
x_{19}	1,732051	1,732051	1,732050	⋮
⋮	⋮	⋮	1,732051	⋮

Teorem 3. (1)- (5) koşulları altında verilen problem $x_* \in C([t_0 - \tau, b], \mathbb{R}) \cap C^1([t_0, b], \mathbb{R})$ gibi bir tek çözüme sahiptir ve (2) ile verilen iterasyon yönteminden elde edilen dizi $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartı altında x_* noktasına yakınsar.

İspat.

$$Tx(t) = \begin{cases} \phi(t), t \in [t_0 - \tau, t_0] \\ \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s), x(s-\tau))ds, t \in [t_0, b] \end{cases}$$

dönüşümü altında (2) ile verilen iterasyon yöntemi inşa edilerek oluşturulan dizi $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ile gösterilsin.. x_*, bu dönüşümün sabit noktası olsun. $n \to \infty$ için $x_n \to x_*$ olduğu gösterilmelidir. Eğer $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ ise ispat açıktır. $t \in [t_0, b]$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
\|w_n - x_*\|_\infty &= \|(1-\mu_n)x_n + \mu_n T x_n - T x_*\|_\infty \\
&\leq (1-\mu_n)\|x_n - x_*\|_\infty + \mu_n \|T x_n - T x_*\|_\infty \\
&= (1-\mu_n)\|x_n - x_*\|_\infty + \mu_n \max_{t\in[t_0,b]} |T x_n(t) - T x_*(t)| \\
&= (1-\mu_n)\|x_n - x_*\|_\infty \\
&\quad + \mu_n \max_{t\in[t_0,b]} \left| \begin{matrix} \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s), x_n(s-\tau))ds \\ -\phi(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(s, x_*(s), x_*(s-\tau))ds \end{matrix} \right| \\
&= (1-\mu_n)\|x_n - x_*\|_\infty \\
&\quad + \mu_n \max_{t\in[t_0,b]} \left| \begin{matrix} \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s), x_n(s-\tau))ds \\ - \int_{t_0}^{t} f(s, x_*(s), x_*(s-\tau))ds \end{matrix} \right| \\
&\leq (1-\mu_n)\|x_n - x_*\|_\infty \\
&\quad + \mu_n \max_{t\in[t_0,b]} \int_{t_0}^{t} |f(s, x_n(s), x_n(s-\tau)) - f(s, x_*(s), x_*(s-\tau))| ds \\
&\leq (1-\mu_n)\|x_n - x_*\|_\infty \\
&\quad + \mu_n \max_{t\in[t_0,b]} \int_{t_0}^{t} L_d(|x_n(s) - x_*(s)| + |x_n(s-\tau) - x_*(s-\tau)|)\, ds \\
&\leq (1-\mu_n)\|x_n - x_*\|_\infty \\
&\quad + \mu_n \int_{t_0}^{t} L_d\left(\max_{t\in[t_0,b]} |x_n(s) - x_*(s)| + \max_{t\in[t_0,b]} |x_n(s-\tau) - x_*(s-\tau)| \right) ds \\
&\leq (1-\mu_n)\|x_n - x_*\|_\infty \\
&\quad + \mu_n \int_{t_0}^{t} L_d(\|x_n - x_*\|_\infty + \|x_n - x_*\|_\infty)\, ds \\
&\leq (1-\mu_n)\|x_n - x_*\|_\infty + 2\mu_n L_d (t - t_0)\|x_n - x_*\|_\infty \\
&\leq [1 - \mu_n(1 - 2L_d(b - t_0))]\|x_n - x_*\|_\infty
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\|z_n - x_*\|_\infty &= \|(1-\gamma_n)w_n + \gamma_n T w_n - T x_*\|_\infty \\
&\le (1-\gamma_n)\|w_n - x_*\|_\infty + \gamma_n \|T w_n - T x_*\|_\infty \\
&= (1-\gamma_n)\|w_n - x_*\|_\infty + \gamma_n \max_{t\in[t_0,b]} |T w_n(t) - T x_*(t)| \\
&= (1-\gamma_n)\|w_n - x_*\|_\infty \\
&+\gamma_n \max_{t\in[t_0,b]} \left| \begin{array}{l} \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, w_n(s), x_n(s-\tau))ds \\ -\phi(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(s, x_*(s), x_*(s-\tau))ds \end{array} \right| \\
&= (1-\gamma_n)\|w_n - x_*\|_\infty \\
&+\gamma_n \max_{t\in[t_0,b]} \left| \begin{array}{l} \int_{t_0}^{t} f(s, w_n(s), x_n(s-\tau))ds \\ - \int_{t_0}^{t} f(s, x_*(s), x_*(s-\tau))ds \end{array} \right| \\
&\le (1-\mu_n)\|w_n - x_*\|_\infty \\
&+\gamma_n \max_{t\in[t_0,b]} \int_{t_0}^{t} |f(s, w_n(s), w_n(s-\tau)) - f(s, x_*(s), x_*(s-\tau))| ds \\
&\le (1-\mu_n)\|w_n - x_*\|_\infty \\
&+\gamma_n \max_{t\in[t_0,b]} \int_{t_0}^{t} L_d(|w_n(s) - x_*(s)| + |w_n(s-\tau) - x_*(s-\tau)|)\, ds \\
&\le (1-\gamma_n)\|w_n - x_*\|_\infty \\
&+\gamma_n \int_{t_0}^{t} L_d\left(\max_{t\in[t_0,b]} |w_n(s) - x_*(s)| + \max_{t\in[t_0,b]} |w_n(s-\tau) - x_*(s-\tau)| \right) ds \\
&\le (1-\gamma_n)\|w_n - x_*\|_\infty \\
&+\gamma_n \int_{t_0}^{t} L_d(\|w_n - x_*\|_\infty + \|w_n - x_*\|_\infty)\, ds \\
&\le (1-\gamma_n)\|w_n - x_*\|_\infty + 2\gamma_n L_d (t - t_0)\|w_n - x_*\|_\infty \\
&\le [1 - \gamma_n(1 - 2L_d(b - t_0))]\|w_n - x_*\|_\infty
\end{aligned}
$$

olur. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
\|y_n - x_*\|_\infty &= \|(1-\beta_n)T x_n + \beta_n T z_n - T x_*\|_\infty \\
&\le (1-\beta_n)\|T x_n - T x_*\|_\infty + \beta_n \|T z_n - T x_*\|_\infty \\
&= (1-\beta_n) \max_{t\in[t_0,b]} |T x_n(t) - T x_*(t)| + \beta_n \max_{t\in[t_0,b]} |T z_n(t) - T x_*(t)|
\end{aligned}
$$

$$
= (1-\beta_n) \max_{t\in[t_0,b]} \left| \begin{array}{l} \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_n(s), x_n(s-\tau)\big)ds \\ - \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_*(s), x_*(s-\tau)\big)ds \end{array} \right|
$$

$$+\beta_n \max_{t\in[t_0,b]} \left| \begin{array}{l} \int_{t_0}^{t} f\big(s, z_n(s), z_n(s-\tau)\big)ds \\ -\int_{t_0}^{t} f\big(s, x_*(s), x_*(s-\tau)\big)ds \end{array} \right|$$

$$\leq (1-\beta_n) \max_{t\in[t_0,b]} \int_{t_0}^{t} \Big| f\big(s, x_n(s), x_n(s-\tau)\big) - f\big(s, x_*(s), x_*(s-\tau)\big) \Big| ds$$

$$+\beta_n \max_{t\in[t_0,b]} \int_{t_0}^{t} \Big| f\big(s, z_n(s), z_n(s-\tau)\big) - f\big(s, x_*(s), x_*(s-\tau)\big) \Big| ds$$

$$\leq (1-\beta_n) \max_{t\in[t_0,b]} \int_{t_0}^{t} L_d(|x_n(s) - x_*(s)| + |x_n(s-\tau) - x_*(s-\tau)|)\, ds$$

$$+\beta_n \max_{t\in[t_0,b]} \int_{t_0}^{t} L_d(|z_n(s) - x_*(s)| + |z_n(s-\tau) - x_*(s-\tau)|)\, ds$$

$$\leq (1-\beta_n) \int_{t_0}^{t} L_d \left(\max_{t\in[t_0,b]} |x_n(s) - x_*(s)| + \max_{t\in[t_0,b]} |x_n(s-\tau) - x_*(s-\tau)| \right) ds$$

$$+\beta_n \int_{t_0}^{t} L_d \left(\max_{t\in[t_0,b]} |z_n(s) - x_*(s)| + \max_{t\in[t_0,b]} |z_n(s-\tau) - x_*(s-\tau)| \right) ds$$

$$\leq (1-\beta_n) \int_{t_0}^{t} L_d(\|x_n - x_*\|_\infty + \|x_n - x_*\|_\infty)\, ds$$

$$+\beta_n \int_{t_0}^{t} L_d(\|z_n - x_*\|_\infty + \|z_n - x_*\|_\infty)\, ds$$

$$\leq 2(1-\beta_n)L_d(b-t_0)\|x_n - x_*\|_\infty + 2\beta_n L_d(b-t_0)\|z_n - x_*\|_\infty$$
$$= 2L_d(b-t_0)[(1-\beta_n)\|x_n - x_*\|_\infty + \beta_n\|z_n - x_*\|_\infty]$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_*\|_\infty &= \|(1-\alpha_n)Ty_n + \alpha_n T z_n - T x_*\|_\infty \\ &\leq (1-\alpha_n)\|Ty_n - Tx_*\|_\infty + \alpha_n\|Tz_n - Tx_*\|_\infty \\ &= (1-\alpha_n) \max_{t\in[t_0,b]} |Ty_n(t) - Tx_*(t)| + \alpha_n \max_{t\in[t_0,b]} |Tz_n(t) - Tx_*(t)| \\ &= (1-\alpha_n) \max_{t\in[t_0,b]} \left| \begin{array}{l} \int_{t_0}^{t} f\big(s, y_n(s), y_n(s-\tau)\big)ds \\ -\int_{t_0}^{t} f\big(s, x_*(s), x_*(s-\tau)\big)ds \end{array} \right| \end{aligned}$$

$$+\alpha_n \max_{t\in[t_0,b]} \left| \begin{array}{l} \int_{t_0}^{t} f\big(s, z_n(s), z_n(s-\tau)\big)ds \\ -\int_{t_0}^{t} f\big(s, x_*(s), x_*(s-\tau)\big)ds \end{array} \right|$$

$$\leq (1-\alpha_n) \max_{t\in[t_0,b]} \int_{t_0}^{t} \left| f\big(s, y_n(s), y_n(s-\tau)\big) - f\big(s, x_*(s), x_*(s-\tau)\big) \right| ds$$

$$+\alpha_n \max_{t\in[t_0,b]} \int_{t_0}^{t} \left| f\big(s, z_n(s), z_n(s-\tau)\big) - f\big(s, x_*(s), x_*(s-\tau)\big) \right| ds$$

$$\leq (1-\alpha_n) \max_{t\in[t_0,b]} \int_{t_0}^{t} L_d(|y_n(s) - x_*(s)| + |y_n(s-\tau) - x_*(s-\tau)|)\, ds$$

$$+\alpha_n \max_{t\in[t_0,b]} \int_{t_0}^{t} L_d(|z_n(s) - x_*(s)| + |z_n(s-\tau) - x_*(s-\tau)|)\, ds$$

$$\leq (1-\alpha_n) \int_{t_0}^{t} L_d \left(\max_{t\in[t_0,b]} |y_n(s) - x_*(s)| + \max_{t\in[t_0,b]} |y_n(s-\tau) - x_*(s-\tau)| \right) ds$$

$$+\alpha_n \int_{t_0}^{t} L_d \left(\max_{t\in[t_0,b]} |z_n(s) - x_*(s)| + \max_{t\in[t_0,b]} |z_n(s-\tau) - x_*(s-\tau)| \right) ds$$

$$\leq (1-\alpha_n) \int_{t_0}^{t} L_d(\|y_n - x_*\|_\infty + \|y_n - x_*\|_\infty)\, ds$$

$$+\alpha_n \int_{t_0}^{t} L_d(\|z_n - x_*\|_\infty + \|z_n - x_*\|_\infty)\, ds$$

$$\leq 2(1-\alpha_n)L_d(b-t_0)\|y_n - x_*\|_\infty + 2\alpha_n L_d(b-t_0)\|z_n - x_*\|_\infty$$
$$= 2L_d(b-t_0)[(1-\alpha_n)\|y_n - x_*\|_\infty + \alpha_n\|z_n - x_*\|_\infty]$$

olur. Sırasıyla elde edilen bu eşitsizlikler yerine yazılırsa;

$$\|x_{n+1} - x_*\|_\infty \leq 2L_d(b-t_0)\{1 - \alpha_n\beta_n\gamma_n[1 - 2L_d(b-t_0)]\}\|x_n - x_*\|_\infty$$

elde edilir. (5) şartı kullanılarak $0 < 1 - 2L_d(b-t_0) < 1$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$\|x_{n+1} - x_*\|_\infty \leq \|x_n - x_*\|_\infty - \alpha_n\|x_n - x_*\|_\infty + 2L_d(b-t_0)\alpha_n\|x_n - x_*\|_\infty$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik düzenlenirse,

$$\|x_{n+1} - x_*\|_\infty \leq [1 - \alpha_n(1 - 2L_d(b-t_0))]\|x_{n+1} - x_*\|_\infty$$

elde edilir. Son eşitsizlikte tümevarıma geçilirse,

$$\|x_{n+1} - x_*\|_\infty \leq \prod_{k=0}^{n} [1 - \alpha_k(1 - 2L_d(b - t_0))] \, \|x_0 - x_*\|_\infty$$

olur.$[1 - \alpha_k(1 - 2L_d(b - t_0))] < 1$ olduğundan,

$$\|x_{n+1} - x_*\|_\infty \leq \|x_0 - x_*\|_\infty \prod_{k=0}^{n} e^{-[1-2L_d(b-t_0)]\alpha_k}$$

$$= \|x_0 - x_*\|_\infty e^{-[1-2L_d(b-t_0)]\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}$$

elde edilir.$n \to \infty$ için son eşitsizlikte limit alınırsa $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_*\|_\infty = 0$ olur.

Sonuç

Bu çalışmada yeni dört adımlı bir iterasyon yönteminin daraltan dönüşümlerin teklikle belirlenen sabit noktasına yakınsadığı ispatlanmıştır. Ayrıca gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümüne bu iterasyon yöntemi kullanılarak uygun koşullar altında ulaşılabileceği gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlar göz önüne alındığında bu çalışmada kullanılan iterasyon yönteminin Volterra-Fredholm tipindeki integral denklemlerin çözümlerinin incelenmesinde de etkin olarak kullanılabileceği öngörülmektedir.

Kaynaklar

Atalan, Y. and Karakaya, V., (2019). Investigation of some fixed point theorems in hyperbolic spaces for a three-step iteration process, Korean J. Math. 27, 929-947.

Banach, S., (1922). "Sur Les Opérations Dans Les Ensembles Abstraits et Leur Application Aux Equations Intégrales», Fundamenta Mathematicae, 3 (1): 133-181.

Berinde, V. (2007), Iterative Approximation of Fixed Points, Springer-Verlag, Berlin.

Chugh, R. Kumar, V. ve Kumar, S., (2012). Strong convergence of a new three step iterative scheme in Banach spaces, American Journal of Computational Mathematics, 2: 345-357.

Coman, G., Pavel, G., Rus, I. ve Rus, I., (1976). Introduction on the Theory of Operatorial Equations, Ed, Dacia, Cluj-Napoca.

Gündoğdu, E. (2023). Hiperbolik uzaylarda sabit nokta teorisi üzerine baz sonuçlar, (Yüksek Lisans Tezi, Aksaray Üniversitesi), Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Hardy, G.E. & Rogers, T., (1973). A generalization of a fixed point theorem of Reich, Canadian Mathematical Bulletin, 16 (2), 201-206.

Kannan, R. (1968). «Some Results on Fixed Points», Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 60 (1-2): 71-76.

Karahan, I. & Ozdemir, M., (2013). A general iterative method for approximation of fixed points and their applications, Advances in Fixed Point Theory, 3 (3): 510-526.

Karakaya, V., Atalan, Y., Doğan, K., Bouzara, NEH., (2016). Convergence analysis for a new faster iteration method, İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi 15(30), 35-53.

Khan, S.H. (2013). «A Picard-Mann Hybrid Iterative Process», Fixed point Theory and Applications, 2013 (69):

Maldar, S., Atalan, Y., Doğan, K., (2020). Comparison rate of convergence and data dependence for a new iteration method, Tbilisi Mathematical Journal 13(4), 65-79.

Nadler, S.B. (1969). «Multi-valued Contraction Mappings», Pacific Journal of Mathematics, 30 (2): 475-488.

Zamfirescu, T. (1972). «Fix Point Theorems in Metric Spaces», Archiv der Mathematik, 23 (1): 292-298.

1-10.

Yazar Katkıları

Makale tek bir yazar tarafından ele alınmıştır. Doğrudan başka bir yazar tarafından katkı sağlanmamıştır.

Çıkar Çatışması

Yazarlar tarafından çıkar çatışmasının olmadığı rapor edilmiştir.

Fonlama

Herhangi bir fon desteği alınmamıştır.

Etik Bildirim

Bu çalışma için etik kurul izni gerekmemektedir.