Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ DERGİSİ
Kırşehir Ahi Evran University
JOURNAL OF THE INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

Değişmeli Cebirler için Çaprazlanmış Köşe ve Moore Bikompleks

Hatice BİNBİR[1], Özgün GÜRMEN ALANSAL[2*]
[2] Kütahya Dumlupınar. Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 43100, Kütahya

[*]Tüm yazarların orcid bilgileri
https://orcid.org/0000-0003-2851-986X
https://orcid.org/0009-0003-6684-5049

*Sorumlu yazar e-mail: ozgun.gurmen@dpu.edu.tr

Araştırma Makalesi/Derleme
Makale Tarihçesi:
Geliş tarihi:
22 Mayıs 2024
Kabul tarihi:
27 Haziran 2024
Online Yayınlanma:
30 Haziran 2024
Anahtar Kelimeler:
Çaprazlanmış modül
Çaprazlanmış köşe
Bisimplisel cebir
Moore kompleks

ÖZET

Bir simplisel cebir, homotopi tiplerine karşılık gelen cebirsel yapıları modeller. Bu bağlamda, Moore kompleksinin boyutu ≤ 1 olan simplisel cebirler, çaprazlanmış modül yapısını vermektedir. Moore kompleksinin boyutu ≤ 2 olduğunda 2-çaprazlanmış modüller, çaprazlanmış kareler veya cat^2-cebirlere denk yapılar elde edilmektedir. Simplisel cebirin ilk bileşeni birim alındığında indirgenmiş simplisel cebir yapısı oluşur ve bu yapı 1-bağlantılı homotopi tiplerine modelleme yapar. Bu çalışmada bisimplisel cebirlerin, çaprazlanmış köşe kavramını nasıl modellediği göstererildi. Değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış kare kategorisi ile Moore kompleksinin boyutu 2 olan simplisel değişmeli cebirler kategorisinin denkliğinden yararlanarak bu yapıda $NE_{00} = \{0\}$ alırsak elde ettiğimiz yeni yapının bir çaprazlanmış köşe yapısı oluşturduğunu ispatladık.

Crossed Corner of Commutative Algebra and Moore BiComplex

.

Research Article/Reviews
Article History:
Received:
22 May 2024
Accepted:
27 June 2024
Published online:
30 June 2024
Keywords:
Crossed module
Crossed corner
Bisimplicial algebra
Moore complex

ABSTRACT

A simplicial algebra models algebraic structures that correspond to homotopy types. In this regard, simplicial algebras with a dimension of Moore complex ≤ 1 give the crossed modules structures. When the length of the Moore complex of a simplicial commutative algebra is ≤ 2, the structures of 2-crossed modules, crossed squares or equivalently cat^2 algebras are obtained. When the first component of a simplicial algebra is taken as a unit, a reduced simplicial algebra structure is formed, and this structure models all 1-connected homotopy types. In this study, we will show how bisimplicial algebras model the concept of crossed corners. In this structure, we will use the advantage of the equivalence between the category of crossed squares on commutative algebras and the category of simplicial commutative algebras of the Moore complex of length 2. If we take $NE_{00} = \{0\}$, we have proved that the new structure forms a crossed corner structure.

E-ISSN: 2979-9198
To Cite: BİNBİR, H., GÜRMEN ALANSAL, Ö. (2024). Değişmeli Cebirler için Çaprazlanmış Köşe ve Moore Bikompleks Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 2(1), 12-18.

1. GİRİŞ

Çaprazlanmış modüller gruplar üzerinde ilk olarak Whitehead (1949) tarafından tanım-lanmıştır. Değişmeli cebirler için de Porter (1986) tanımlamıştır. Bu tanımlama homotopi teorisinde önemli bir yer almıştır. Çaprazlanmış modülleri, grup yapısının 2-boyutlu bir genelleştirmesi olarak açıklamak mümkündür. Sonrasında bu tanımlama, değişmeli cebirler, Lie cebirleri, Leibniz cebirleri, Lie Reinhart cebirleri, Hopf cebirleri için de tanımlanmıştır ve yine bu yapılar kuadratik modüller, örgülü çaprazlanmış modüller için de incelenmiştir (Arvasi ve Ulualan, 2007; Aytekin, 2019; Conduchè, 2003; Odabaş ve Ulualan 2016). Gruplar için çaprazlanmış kare tanımını Guin-Walery ile Loday (1981), değişmeli cebirler için ise Ellis (1988) vermiştir. Bu çalışmada, sadece değişmeli cebirler için çaprazlanmış modüllerden bahsedilecektir. Gruplar üzerinde çaprazlanmış köşe tanımı Alp (1999) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra gruplar üzerinde çaprazlanmış karelerle ilişkisini Alp, Bekir ve Ulualan (2001) incelemiştir. Değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış köşe Gürmen Alansal (2023) tarafından tanımlamıştır ve indirgenmiş simplisel değişmeli cebirlerle ilişkisi verilmiştir.

Bir simplisel cebirin Moore kompleksi üzerinde tanımlı $C_{\alpha,\beta}$ lar Arvasi (1997) ve Arvasi ile Porter (1997) tarafından görüntüleriyle verilmiştir. Gruplar için Moore bikompleksler üzerinde $F_{\alpha,\beta}$ fonksiyonları Gürmen Alansal ile Ulualan (2021) değişmeli cebirler için Moore bikompleksler üzerinde $C_{\alpha,\beta}$ fonksiyonları Gürmen Alansal ile Ulualan (2023) ve Gürmen Alansal (2024) vermiştir. Bu fonksiyonlar aracılığıyla homotopi 3-tip uzaya karşılık gelen çaprazlanmış kare yapısı oluşturulmuştur. Burada Alp, Bekir ve Ulualan (2001) de verilen gruplar üzerinde çaprazlanmış karelerle çaprazlanmış köşelerin denkliğinden yararlanarak

$$\begin{array}{ccc} NE_{1,1} & \longrightarrow & NE_{0,1} \\ \downarrow & & \\ NE_{1,0} & & \end{array}$$

bir çaprazlanmış köşe olduğunu göstereceğiz.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde değişmeli cebirler için çaprazlanmış modüllerin tanımı verilmiştir. $\boldsymbol{k}$ burada değişmeli, birimli sabit halka ve R de değişmeli $\boldsymbol{k}$-cebirdir. Ayrıca $\boldsymbol{k}$-cebirler birimli alınmamıştır (Porter, 1986; Shammu, 1992).

Tanım 1.2.1*:* T_2 değişmeli $\boldsymbol{k}$ *cebir*

$$T_2 \times T_1 \to T_1$$
$$(\tau_2, \tau_1) \mapsto \tau_2 \cdot \tau_1$$

değişmeli cebir etkisi, $\partial: T_1 \to T_2$ morfizmi, her $\tau_1, \tau_1^* \in T_1, \tau_2^* \in T_2$ için aşağıdaki koşulları sağlıyor ise çaprazlanmış modül olarak adlandırılır.

CM1. $\partial(\tau_2^* \cdot \tau_1) = \tau_2^* \partial(\tau_1)$

CM2. $\partial(\tau_1) \cdot \tau_1^* = \tau_1 \cdot \tau_1^*$

Bu biçimde tanımlanan çaprazlanmış modül (T_1, T_2, ∂) ile gösterilir.

$\boldsymbol{E}_{*,*}$ ile göstereceğimiz bisimplisel cebir $\Delta^{op} \times \Delta^{op}$ kategorisinden cebirler kategorisine tanımlı bir funktordur. Cebirler ailesi $\{E_{k,l}\}$ olmak üzere $0 \leq i \leq k$ ve $0 \leq j \leq l$ için

$$d_i^h : E_{k,l} \to E_{k-1,l}$$

$$s_i^h : E_{k,l} \to E_{k+1,l}$$

$$d_j^v : E_{k,l} \to E_{k,l-1}$$

$$s_j^v : E_{k,l} \to E_{k,l+1}$$

Simplisel özelliklerini ve değişme özelliğini sağlayan horizontal ve vertical cebir homo-morfizmleriyle oluştururuz. Daha detaylı bilgi Gürmen Alansal ve Ulualan tarafından (2023) verilmiştir. Yine bisimplisel cebirin Moore bikompleksi

$$NE_{k,l} = \bigcap_{(i,j)=(0,0)}^{(k-1,l-1)} Çek\, d_i^h \cap Çek\, d_j^v$$

olup

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots \arrow[d] & \vdots & \arrow[d] \\
\ldots \arrow[r] & NE_{1,2} \arrow[rr, "\partial_1^{h(12)}"'] \arrow[d, "\partial_2^{v(12)}"'] & & NE_{0,2} \arrow[d, "\partial_2^{v(02)}"] \\
\ldots \arrow[r] & NE_{1,1} \arrow[rr, "\partial_1^{h(11)}"'] \arrow[d] & & NE_{0,1} \arrow[d, "\partial_1^{v(01)}"] \\
\ldots \arrow[r] & NE_{1,0} \arrow[rr, "\partial_1^{h(10)}"'] & & NE_{0,0}
\end{tikzcd}$$

biçimindedir.

3. DEĞİŞMELİ CEBİRLERDE ÇAPRAZLANMIŞ KÖŞE

Bu bölümde değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış köşe kavramı ile Moore kompleksinin boyutu ≤1 olan indirgenmiş bisimplisel cebirler ile olan ilişkisi teorem olarak verilmiştir.

Tanım 3.1. Değişmeli cebirler için çaprazlanmış köşe

$$\begin{tikzcd}
T_1 \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\partial'"'] & T_2 \\
T_3 &
\end{tikzcd}$$

T_2 ve T_3 değişmeli cebirlerin T_1 değişmeli cebiri üzerinde cebir etkisi olmak üzere ve kendi üzerlerindeki etkilerde $\tau_2, \tau_2^* \in T_2$ ve $\tau_3, \tau_3^* \in T_3$ için

$$\tau_2 \cdot \tau_2^* = \tau_2 \tau_2^* \quad \text{ve} \quad \tau_3 \cdot \tau_3^* = \tau_3 \tau_3^*$$

olup $\partial: T_1 \to T_2$, $\partial': T_1 \to T_3$ morfizmleri ile $h: T_2 \times T_3 \to T_1$ olmak üzere her $\tau_1 \in T_1$, $\tau_2, \tau_2^* \in T_2$, $\tau_3, \tau_3^* \in T_3$ için aşağıdaki şartları sağlar.

CC1. ∂ ve ∂' birer çaprazlanmış modüldür.

CC2. $h\big((\tau_2 + \tau_2^*), \tau_3\big) = h(\tau_2, \tau_3) + h(\tau_2^*, \tau_3)$

$h\big(\tau_2, (\tau_3 + \tau_3^*)\big) = h(\tau_2, \tau_3) + h(\tau_2, \tau_3^*)$

CC3. $h(\partial(\tau_1), \tau_3) = \tau_3 \cdot \tau_1$

$h\big(\tau_2, \partial'(\tau_1)\big) = \tau_2 \cdot \tau_1$

CC4. $(\tau_2 \cdot \tau_3) \cdot \tau_1 = (\tau_2 \tau_3) \cdot \tau_1$

$(\tau_3 \cdot \tau_2) \cdot \tau_1 = (\tau_3 \tau_2) \cdot \tau_1$

Burada

$$\tau_3 \cdot \tau_2 = \partial' h(\tau_2, \tau_3)$$

$$\tau_2 \cdot \tau_3 = \partial h(\tau_2, \tau_3)$$

dır (Gürmen Alansal, 2023).

Bu etkilerin iyi tanımlı olduğu Binbir (2024) tarafından gösterilmiştir.

Teorem 3.2. $\boldsymbol{E_{*,*}}$ Moore kompleksinin boyutu ≤1 olan bir indirgenmiş bisimplisel cebir olsun. Bu durumda

$$\begin{tikzcd} NE_{1,1} \arrow[r, "\partial^{h(11)}"] \arrow[d, "\partial^{v(11)}"'] & NE_{0,1} \\ NE_{1,0} & \end{tikzcd}$$

$h: NE_{0,1} \otimes NE_{1,0} \to NE_{1,1}$ ile bir çaprazlanmış köşedir. Burada $\alpha \in NE_{0,1}$, $\beta \in NE_{1,0}$ için

$$h: NE_{0,1} \otimes NE_{1,0} \to NE_{1,1}$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto s_0^{h(01)}(\alpha) s_0^{v(10)}(\beta)$$

ile tanımlıdır.

İspat: Çaprazlanmış köşe şartlarını sağladığını göstermemiz yeterlidir.

CC1) $\partial^{h(11)}$ve $\partial^{v(11)}$ çaprazlanmış modül olduklarını göstermeliyiz.

CM1) $\alpha \in NE_{0,1}$, $\gamma \in NE_{1,1}$ için $\alpha \cdot \gamma = s_0^{h(01)}(\alpha)\gamma$ dır. O halde

$$\partial^{h(11)}(\alpha \cdot \gamma) = \partial^{h(11)}\left(s_0^{h(01)}(\alpha)\gamma\right)$$

$$= d_1^{h(11)} s_0^{h(01)}(\alpha) d_1^{h''}(\gamma)$$

$$= \alpha d_1^{h^{(11)}}(\gamma)$$
$$= \alpha \partial^{h^{(11)}}(\gamma)$$

CM2) $\gamma, \gamma' \in NE_{1,1}$ için $\partial^h(\gamma) \cdot \gamma' = \gamma \cdot \gamma'$ dır. Çünkü,

$$\partial^{h^{(11)}}(\gamma) \cdot \gamma' = s_0^{h^{(01)}}\left(d_1^{h^{(11)}}(\gamma)\right)\gamma'$$

dır. Ayrıca $\left(s_0^h(\gamma) - s_1^h(\gamma)\right)s_1^h(\gamma') \in NE_{2,1}$ olduğundan ∂_2^h görüntüsü $NE_{1,1}$ dedir.

Yani, $\partial_2^h\left(\left(s_0^h(\gamma) - s_1^h(\gamma)\right)s_1^h(\gamma')\right) \in NE_{1,1}$ dir. $NE_{2,1} = \{0\}$ olduğundan bu eleman 0 olup görüntüsü de sıfırdır. O halde

$$\partial_2^h\left(\left(s_0^h(\gamma) - s_1^h(\gamma)\right)s_1^h(\gamma')\right) = 0$$
$$\Rightarrow \left(\partial_2^h \delta_0^h(\gamma) - \partial_2^h s_1^h(\gamma)\right) d_2^h s_1^h(\gamma') = 0$$
$$\Rightarrow \left(s_0^h d_1^h(\gamma) - \gamma\right)\gamma' = 0$$
$$\Rightarrow s_0^h d_1^h(\gamma)\gamma' - \gamma\gamma' = 0$$
$$\Rightarrow s_0^h d_1^h(\gamma)\gamma' = \gamma\gamma'$$

olup $\partial^{h^{(11)}}(\gamma)\gamma' = s_0^h d_1^h(\gamma)\gamma' = \gamma\gamma'$ olur.

Benzer şekilde $\partial^{v^{(11)}}$in çaprazlanmış modül olduğu gösterilir.

CC2) $\alpha, \alpha' \in NE_{0,1}$, $\beta, \beta' \in NE_{1,0}$ için

$$h(\alpha + x', \beta) = s_0^{h^{(01)}}(\alpha + \alpha')s_0^{v^{(10)}}(\beta)$$
$$= \left(s_0^{h^{(01)}}(\alpha) + s_0^{h^{(01)}}(\alpha')\right)s_0^{v^{(10)}}(\beta)$$
$$= s_0^{h^{(01)}}(\alpha)s_0^{v^{(10)}}(\beta) + s_0^{h^{(01)}}(\alpha')s_0^{v^{(10)}}(\beta)$$
$$= h(\alpha, \beta) + h(\alpha', \beta)$$

ve

$$h(\alpha, \beta + \beta') = h(\alpha, \beta) + h(\alpha, \beta')$$
$$= s_0^{h^{(01)}}(\alpha)\left(s_0^{v^{(10)}}(\beta) + s_0^{v^{(10)}}(\beta')\right)$$
$$= s_0^{h^{(01)}}(\alpha)s_0^{v^{(10)}}(\beta) + s_0^{h^{(01)}}(\alpha)s_0^{v^{(10)}}(\beta')$$
$$= h(\alpha, \beta) + h(\alpha, \beta')$$

CC3) $\alpha \in NE_{0,1}$, $\beta \in NE_{1,0}$, $\gamma \in NE_{1,1}$

$$h\left(\partial^{h^{(11)}}(\gamma), \beta\right) = s_0^{h^{(01)}}\left(d_1^{h^{(11)}}(\gamma)\right)s_0^{v^{(10)}}(\beta)$$
$$= id(\gamma)s_0^{v^{(10)}}(\beta)$$
$$= \gamma s_0^{v^{(10)}}(\beta)$$
$$= \beta \cdot \gamma$$

ve

$$\begin{aligned} h\left(\alpha, \partial^{v^{(11)}}(\gamma)\right) &= s(\alpha) s_0^{v^{(10)}}\left(d_1^{v^{(11)}}(\gamma)\right) \\ &= s_0^{h^{(01)}}(\alpha) \cdot i\, d(\gamma) \\ &= s_0^{h^{(01)}}(\alpha)\, \gamma \\ &= \alpha \cdot \gamma \end{aligned}$$

CC4) $\alpha \in NE_{0,1}, \beta \in NE_{1,0}, \gamma \in NE_{1,1}$ için

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma &= \left(\alpha d_1^{h^{(11)}} s_0^{v^{(10)}}(\beta)\right) \cdot \gamma \\ &= s_0^{h^{(01)}}\left(\alpha d_1^{h^{(11)}} s_0^{v^{(10)}}(\beta)\right) \gamma \\ &= s_0^{h^{(01)}}(\alpha) s_0^{h^{(01)}} d_1^{h^{(11)}} s_0^{v^{(10)}}(\beta) \gamma \\ &= s_0^{h^{(01)}}(\alpha) s_0^{v^{(10)}}(\beta) \gamma \\ &= (\alpha\beta) \cdot \gamma \end{aligned}$$

olur.

Benzer şekilde $(\beta \cdot \alpha) \cdot \gamma = (\beta\alpha) \cdot \gamma$ olduğu gösterilir.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada değişmeli cebirler için çaprazlanmış köşe tanımı verilmiş ve Moore kompleksinin boyutu ≤1 olan indirgenmiş bisimplisel cebirler ile olan cebirsel ilişkisi incelenmiştir. Değişmeli cebirler için yapılan bu tanımlama, diğer cebirsel yapılara uyarlanabilir.

Açıklama

Çalışmamız Haziran 2024 tarihinde sunulmuş olan Hatice Binbir'in yüksek lisans tezinde yer almaktadır.

Çıkar Çatışması Beyanı

Makale yazarları aralarında herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan ederler.

Araştırmacıların Katkı Oranı Beyan Özeti

Yazarlar makaleye eşit oranda katkı sağlamış olduklarını beyan ederler.

Kaynaklar

Alp, M. (1999). Characterization of crossed corner, algebras, *Groups and Geometries*, 16(2). 173–182.

Alp, M. (1999). Applications of crossed corner, Algebras, *Groups and Geometries*, 16(2), 337–344.

Alp, M., Bekir, A., Ulualan, E. (2001). Relation between crossed square and crossed corner, *Journal of Science and Technology of Dumlupınar University*. (002), 89–96.

Arvasi, Z. (1997). Crossed Squares and 2-Crossed Modules of Commutative Algebras, *Theory and Applications of Categories* 3(7). 160–181.

Arvasi, Z., Porter, T. (1997). Higher dimensional Peiffer elements in simplicial commutative algebras, *Theory and Applications of Categories* 3(1), 1–23.

Arvasi, Z., Ulualan, E. (2007). Quadratic and 2-crossed modules of algebras, *Algebra Colloquium*, 14.4, 669-686.

Aytekin, A. (2019). Categorical structures of Lie-Rinehart crossed module, *Turkish Journal of Mathematics*, 43(1), 511–522.

Conduchè D. (2003), Simplicial crossed modules and mapping cones, Georgian Math. Journal. 10 , 623–636.

Binbir H. (2024), *Crossed corners and related structures*, Yüksek lisans tezi Kütahya Dumlupınar University, Kütahya.

Ellis, G. J. (1988). Higher dimensional crossed modules of algebras, *Journal of Pure and Applied Algebra.* 52. 277–282.

Guin-Walery, D., Loday, J. L. (1981). Obsruction á l'excision en K-theories Algébrique, in: E. M. Friedlander, M. R. Stein (Eds.), Algebraic K-Theory Evanston 1980, Vol. 854 of Lecture Notes Mathematics, Springer, Berlin, 1981, pp. 179–216.

Gürmen Alansal, Ö. (2021). Peiffer Pairings in Multisimplicial Groups and Crossed n-Cubes and Applications for Bisimplicial Groups, *Turkish Journal of Mathematics* 45(1), 360-386.

Gürmen Alansal, Ö. (2023). Crossed Corner and Reduced Simplicial Commutative Algebras. *Journal of New Theory* (45), 95-104.

Gürmen Alansal, Ö., Ulualan, E. (2023). Bisimplicial commutative algebras and crossed squares, *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, 6, 177–187.

Gürmen Alansal, Ö. (2024). Cubical simplicial algebras and related crossed structures, *Filomat* 38(9), 3121–3135.

Odabas A., Ulualan, E. (2016)., On free quadratic modules of algebras, *Bull. Malaysian Math. Sci. Soc.*, 39:3, 1059-–1074.

Porter, T. (1986). Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles, *Journal of Algebra*, 99, 458–465.

Shammu, N. M. (1992). *Algebraic and Categorical Structure of categories of Crossed Modules of algebras*, Doctoral Dissertation North Carolina Wilmington University Bangor.

Whitehead, J. H. C. (1949). Combinatorial Homotopy II, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 55, 453–496