

Ortalama kaydırma algoritması kullanarak küresel radyal tabanlı fonksiyonlar ile bölgesel gravite modellemeleri için veri uyarlamalı ağ tasarımı

Raşit Uluğ^{1*} 

¹Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Biyosistem Mühendisliği Bölümü, Merkez, Nevşehir.

Öz: Bu çalışma küresel radyal temel fonksiyonlar (KRTF) ile bölgesel gravite modellemelerinde veri uyarlamalı ağ tasarımı için yeni bir metodoloji sunmaktadır. Önerilen yöntem KRTF merkezlerinin sayısı ve yatay düzlemdeki konumunu belirlemek için ortalama kaydırma algoritması kullanır. Gözetimsiz bir sınıflandırma yöntemi olan ortalama kaydırma algoritmasının temel amacı verilerin benzerlikleri gözetilerek farklı sınıflara ayrılması olsa bile, kümeleme verilerin mekânsal uzaydaki mesafe ilişkileri gözetilerek tamamlandığında oluşan küme merkezlerinin veriye uyumlu dağılımında olduğu görülmektedir. Bu özellik ağ kurulumunda büyük bir avantaj sağlar. Ağ kurulumunun tamamlanmasından sonra, her bir KRTF için uygun derinlik genelleştirilmiş çapraz doğrulama ile belirlenmiştir. Derinlik belirlemede sadece seçili KRTF merkezinin etki alanı içinde kalan gözlemler kullanılarak işlem yükü hafifletilmiştir. Alt ve üst derinlik sınırları ampirik sinyal kovaryans fonksiyonu ve ortalama kaydırma algoritmasının parametresi olan pencere boyutu yardımıyla belirlenmiştir. Son olarak seçilen Legendre katsayısının mekânsal uzayda devamlı pozitif olmasından kaynaklanan uzun dalga boylu hataları azaltmak için dönme noktası algoritması kullanılmıştır. Önerilen yöntemin performansının belirlenmesi ve pencere boyutunun ağ üzerine etkisinin belirlenmesi için Colorado alanında simüle edilen gravite bozukluğu verileri kullanılmıştır. Sayısal testlerde uygun pencere boyutunun ağ kurulumu üzerine büyük etkisi olduğu görülmüştür. Uygun pencere boyutunun seçiminde teorik bir yaklaşım sağlanamamasına rağmen, önerilen yöntem ideal ağ kurulumu için sadece bir parametreye ihtiyaç duymaktadır. Sonuç olarak ortalama kaydırma algoritmasının ağ kurulumunda oldukça etkili bir yöntem olduğu belirlenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Bölgesel gravite modelleme, Veri uyarlamalı ağ tasarımı, Geoid, Ortalama kaydırma kümeleme

A data-adaptive network design using the mean shift algorithm for regional gravity field modeling with spherical radial basis functions

Abstract: This study presents a new methodology to construct a data-adaptive network design for regional gravity field modeling via spherical radial basis functions (SRBFs). The proposed methodology uses mean shift clustering algorithm to determine the number and the horizontal positions of the centers of SRBFs. Although the main purpose of the unsupervised classification mean shift algorithm is to classify the data into different classes by considering their similarities, it is realized that the cluster centers are distributed adaptively to the data when clustering is done by considering the distance relations in the spatial domain. This feature provides a big advantage in the construction of the network. After establishment of the network, the proper depth for each SRBF is determined by the generalized cross-validation technique. In depth determination, the processing load was reduced by using only the observations that fall within the influence area of the selected SRBF center. The upper and lower depth limit is determined with the help of empirical signal covariance function and window size which is the parameter of the mean shift algorithm. Lastly, the long wavelength errors, which occur due to the always positivity of the selected Legendre coefficient in the spatial domain, are reduced by using the turning point algorithm. To test the performance of the proposed methodology and to investigate the effect of window size on the final network, the simulation data set in the Colorado regions is employed. The numerical tests show that the effect of the window size on the final network design is crucial. Even though no theoretical approach can be provided for the selection of the proper value of the window size, the proposed methodology requires only one parameter to construct an optimal network. In conclusion, the mean shift algorithm is a very effective method in the network design.

Keywords: Regional gravity field modeling, Data-adaptive network design, Geoid, Mean shift clustering

1. Giriş

Yeryuvarının gravite alanının bölgesel ölçekte modellenmesi matematiksel ve fiziksel yükseklik sistemleri arasındaki ilişkinin kurulması ve yeryuvarının statik ve dinamik hareketlerinin belirlenmesi için büyük önem arz etmektedir. Küresel harmonik (KH) fonksiyonlar gravite alanını modellenmesinde en sık kullanılan yöntemdir. KH fonksiyonlar spektral alanda maksimum lokalizasyon sağlar (Freedon & Schreiner, 2009), fakat mekânsal lokalizasyon özellikleri bulunmamaktadır (Bentel vd., 2013). Yüksek frekanslı gravite sinyallerini içeren yersel, hava ve deniz gravite gözlemlerinin bölgesel olarak yapılabildiği göz önüne alındığında, yüksek doğrulukta bölgesel gravite modelleri için mekânsal lokalizasyon sağlayan matematiksel fonksiyonların kullanılması gereklidir. KH'nin aksine hem spektral hem mekânsal uzayda lokalizasyon sağlayabilen küresel radyal tabanlı fonksiyonlar (KRTF) (SRBF: spherical radial basis functions) bölgesel geoit modellemelerinde önemli bir alternatiftir. KRTF'nin etkisi gözlem noktası ve KRTF merkezinin uzaklığına bağlı olarak değişim göstermektedir. Bu özellik KRTF'nin küçük ölçekteki gravite değişimlerini belirleyebilmesini sağlar.

KRTF ile bölgesel gravite modellemelerinde oluşturulan nihai modelin doğruluğu üç parametreye bağlıdır. Bunlar: KRTF merkezlerinin sayısı ve yatay düzlemdeki dağılımını içeren KRTF ağı, merkezlerin referans küre altındaki derinliği ve seri açılımının minimum ve maksimum değerleridir. Bazı çalışmalarda KRTF'de kullanılan Legendre katsayısı türünün de bir parametre olarak ele alındığı görüldüğü de, Tenzer ve Klees (2008) tarafından yapılan çalışmada, uygun derinliklerin belirlendiği durumlarda oluşturulan modellerin doğruluk açısından aynı sonuçları verdiği kanıtlanmıştır. Yüksek doğrulukta bölgesel gravite modelleri için bahsedilen üç parametre en uygun olarak seçilmelidir. Fazla sayıda seçilen KRTF işlem yükünün arttırmasına ve modelin aşırı uyum göstermesine neden olacaktır. Düşük sayıda seçilen KRTF ise gravite sinyalinin yüksek frekanslı bileşenlerini modellemede yeterli olmayacaktır. KRTF merkezlerinin dağılımları ise büyük önem arz etmektedir. Gözlemlerin yatay düzlemdeki dağılımlarının dikkate alınmadığı ızgara ağlarında, KRTF merkezleri verinin olmadığı veya oldukça seyrek olduğu alana yerleştirebilmektedir.

Literatürde bu üç parametrenin ideal değerlerinin belirlenebilmesi için çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Barthelmes (1986) tarafından geliştirilen free-positioned algoritması lineer olmayan optimizasyon kullanılarak uygun ağ ve derinliği belirlemeye çalışır. Lineer olmayan optimizasyon algoritmasının kullanılması nedeniyle ağ tasarımı için gereken süre ve modelin karmaşıklığı artmasına rağmen, gereken KRTF merkez sayısının düşürüldüğü belirtilmiştir. Marchenko (1998) gözlem noktalarının altına yerleştirdiği KRTF merkezlerinin sayısını sequential multiple algoritması kullanarak azaltmıştır. Klees ve Wittwer (2007) tarafından önerilen bir diğer veri uyarlamalı ağ tasarımında başlangıç olarak seçilen ızgara ağına belirli ölçütler değerlendirilerek yeni KRTF merkezleri eklenmiştir. Önerilen yöntemin gereken KRTF sayısını düşürdüğü ve bazı durumlarda en küçük kareler yönteminin çözümünde düzenleştirmeye gerek kalmadığı vurgulanmıştır. Klees vd. (2008) uygun ağ seçimi için veriye dayalı ağ tasarımı yaklaşımı sunmuştur. Bu yöntemde seyrek olarak oluşturulan bir ızgara ağ yardımıyla ilk modelleme yapılır. İlk model sonrası elde edilen gözlem ve kestirilen model arasındaki farkları (artık) küçültmek amacıyla artık değeri en büyük olan gözlem noktalarının altına yeni KRTF merkezleri yerleştirilir. Foroughi ve Tenzer (2014) uygun ağ, derinlik ve düzenleştirme katsayısını eş zamanlı bulabilmek için Levenberg-Marquart optimizasyon algoritmasını kullanmışlardır. Gauss-Newton optimizasyon algoritması kullanarak ağ tasarımı Mahbuby vd. (2021) tarafından önerilmiştir. Bu çalışmada başlangıç olarak seçilen ızgara ağı, optimizasyon algoritmasıyla veriye uyumlu şekilde yeniden tasarlanmıştır. Uluğ ve Karşlıoğlu (2022a) tarafından k-SRBF yöntemi geliştirilmiştir. Bu yöntemde gözetimsiz bir sınıflandırma algoritması olan k-ortalama kümeleme sonucu oluşan küme merkezleri, KRTF merkezleri ile değiştirilerek veri dağılımına uygun ağ tasarımı yapılmıştır. k-SRBF yöntemi ile ağ tasarımında gereken parametre sayısının fazla olması nedeniyle, sadece tek bir parametreye ihtiyaç duyan geliştirilmiş bir versiyonu (geliştirilmiş k-SRBF) Uluğ ve Karşlıoğlu (2022b) tarafından sunulmuştur. Geliştirilmiş yöntemde başlangıç olarak tek bir KRTF merkezi alınır. Oluşturulan bu ilk ağ

değiştirilmiş ISODATA (Iterative Self-Organizing Data Analysis Technique) yöntemi kullanılarak bir sonradan işleme sürecine tabi tutulur. Geliştirilmiş k-SRBF yönteminin daha az sayıda KRTF merkezi kullanarak yüksek doğruluğa ulaştığı belirtilmiştir. Fakat sonradan işleme süreci nedeniyle ağ kurulumunda gereken süre nispeten fazladır. Zhang vd. (2024), geliştirilmiş k-SRBF yöntemindeki işlem süresini azaltabilmek için k-ortalama yerine HDBSCAN (Hierarchical Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise) kümeleme algoritmasını önermişlerdir. Yazarlar işlem süresinin %12.5 kısaldığını belirtmişlerdir. Ancak bu çalışmada da HDBSCAN algoritması ile elde edilen küme merkezlerinin doğrudan kullanılamaması nedeniyle bir sonradan işleme süreci bulunmaktadır.

k-ortalama ve HDBSCAN kümeleme algoritmalarının ağ tasarımındaki başarısı, mevcut gözetimsiz sınıflandırma algoritmalarının uygun KRTF ağı kurulumunda kullanılabilirliğini ortaya koymuştur. İlk kez, bu çalışmada ortalama kaydırma (mean shift) kümeleme algoritması kullanılarak KRTF için veri uyarlamalı ağ tasarımı incelenmiştir. Ortalama kaydırma algoritması k-ortalama küme algoritmasından farklı olarak küme sayısının başlangıçta tanımlanmasına gerek duymaz. Bu özellik oluşturulan ağların sonradan işleme sürecine tabii tutulmadan kullanılabilmesini sağlayabilmektedir. Bu sayede ağ kurulumunda gereken süre ve modelin karmaşıklığı eş zamanlı olarak azaltılabilir. Önerilen yöntem bölgesel gravite modellerinde ilk kez kullanıldığı için ortalama kaydırma algoritmasının parametreleri detaylı olarak incelenmiştir. Sayısal testlerde Colorado alanında elde edilen simülasyon gravite verileri kullanılmıştır. Bu bağlamda metnin kalan kısmı şu şekilde düzenlenmiştir: 2. bölümde KRTF ile bölgesel gravite modellemesi matematiksel formüller ile verilmiştir. Parametre kestirimi 3. bölümde ele alınmıştır. Önerilen ağ tasarım yöntemi ve uygun derinlik seçimi sırasıyla bölüm 4 ve 5'te açıklanmıştır. Önerilen yöntemin performansı ve ortalama kaydırma algoritmasının parametreleri 6. bölümde irdelenmiştir. Son olarak sonuçlar bölüm 7'de özetlenmiştir.

2. Küresel Radyal Temel Fonksiyonlar ile Bölgesel Gravite Alanı Modelleme

Yersel, hava ve deniz gravimetre gözlemleri yüksek frekanslı gravite sinyallerini sağlar. Fakat gözlemlerin coğrafi olarak sınırlı olması gözlem alanının daha uzun dalga boylu gravite sinyallerinin modellenmesini engeller. Ayrıca gözlemler genellikle ayrı olarak ölçülür, bu nedenle matematiksel modeller ile gravite sinyalinin kısa dalga boylu sinyalleri ölçümlerden elde edemez. Bu sorunların çözümünde en sık kullanılan yöntem ise Kaldır-Hesapla-Yerine Koy tekniğidir. Bu yöntemde gravite sinyalinin uzun dalga boyları bir küresel jeopotansiyel model (KJM) yardımıyla hesaplanır. Gravite sinyalinin kısa dalga boylu bileşenleri ise topoğrafyanın yükseklik bilgisini içeren sayısal yükseklik modelleri (SYM) kullanılarak elde edilir. Hesaplanan uzun ve kısa dalga boyları gravite gözlemlerinden çıkarılarak modellemede kullanılan artık gravite sinyali elde edilir. Kaldır-Hesapla-Yerine Koy tekniği dikkate alınarak artık bozucu potansiyel (T_{art})

$$T_{art} = T - T_{uzun} - T_{kısa} \quad (1)$$

ile gösterilir. Bu eşitlikte T_{uzun} ve $T_{kısa}$ sırasıyla gravite sinyalinin uzun ve kısa dalga boylu bileşenlerini temsil eder. Yeryuvarının üzerindeki herhangi bir \mathbf{r}_i noktası için T_{art} değeri K sayıda KRTF fonksiyonunun lineer birleşimi olarak

$$T_{art}(\mathbf{r}_i) = \sum_{k=1}^K x_k \Phi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k) \quad (2)$$

ile ifade edilir. Eşitlik 2'de x_k bilinmeyen KRTF katsayılarını, $\Phi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)$ ise KRTF çekirdeğini ifade eder. \mathbf{r}_i ve \mathbf{r}_k sırasıyla i noktasındaki gözlem ve k noktasındaki KRTF merkezinin küresel koordinat sistemindeki konumunu temsil eder. Bu noktaların koordinat sisteminin merkezine olan radyal uzaklıkları $r_i = |\mathbf{r}_i|$ ve $r_k = |\mathbf{r}_k|$ eşitlikleri ile ifade edilir. Tenzer ve Klees (2008)'den referans alarak, $\Phi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)$ çekirdeğinin matematiksel açılımı

$$\Phi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k) = \sum_{l=L_{min}}^{L_{maks}} \frac{2l+1}{R} \left(\frac{R}{r_i}\right)^{l+1} \psi_l(\mathbf{r}_k) P_l(\hat{\mathbf{r}}_i^T \hat{\mathbf{r}}_k) \quad (3)$$

olarak yazılır. Eşitlikte yer alan R referans kürenin yarıçapını, P_l ise l derecesindeki Legendre polinomlarını küresel uzaklığın bir fonksiyonu olarak tanımlar. $\hat{\mathbf{r}}_i$ ve $\hat{\mathbf{r}}_k$ küresel koordinat sisteminde tanımlı birim vektörlerini temsil eder. $\psi_l(\mathbf{r}_k)$ KRTF'nin spektral ve mekânsal alandaki karakteristiğini belirleyen Legendre katsayısıdır. L_{min} ve L_{maks} seri açılımının minimum ve maksimum değerleridir. Eğer $L_{min} = 0$ ve $L_{maks} = \infty$ olarak alınırsa, KRTF bant sınırlı değildir. Diğer tüm durumlarda KRTF bant sınırlı olarak ele alınır. Bazı Legendre katsayıları bant sınırsız formunda analitik olarak ifade edilir. Analitik formulu KRTF'ler işlem hızını arttırmakla birlikte karmaşıklığı azalttığı için genellikle tercih edilirler (Tenzer & Klees, 2008). Bu çalışmada analitik ifadesi bulunan Poisson çekirdeği Legendre katsayısı olarak seçilmiştir. Poisson çekirdeği açılım derecesi l 'nin bir fonksiyonu olarak

$$\psi_l(\mathbf{r}_k) = R \left(\frac{r_k}{R} \right)^{l+1} \quad (4)$$

ile ifade edilir (Tenzer & Klees, 2008). Eğer, Poisson çekirdeğinin analitik formu kullanılırsa Eşitlik 3 yeniden düzenlenerek Eşitlik 5'e dönüşür (Tenzer & Klees, 2008):

$$\Phi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k) = r_k \frac{r_i^2 - r_k^2}{(r_i - r_k)^3} \quad (5)$$

Fakat Lin vd. (2019) tarafından yapılan testlerde L_{min} değerinin sifira eşitlendiği durumda seçilen Legendre katsayısının mekânsal olarak daima pozitif olması nedeniyle kaçınılmaz uzun dalga boylu hatalara neden olduğu görülmüştür. Lin vd. (2019) bu hatanın azaltılabilmesi için dönme noktası algoritmasını önermişlerdir. Bu algorithmada $L_{min} = 0$ iken uygun ağ ve derinlikler belirlenir. Sonrasında L_{min} değeri belirli aralıklarla artırılarak kontrol noktalarındaki gerçek ölçümler ile kestirilen ölçümler arasındaki farkların karesel ortalama hatası (KOH) hesaplanır. KOH değeri

$$\text{KOH} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^J (g_j - \hat{g}_j)^2}{J}} \quad (6)$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada g_j ve \hat{g}_j , sırasıyla j kontrol noktasındaki gözlenen ve kestirilen artık gravite değerini, J ise kontrol grubundaki toplam gözlem sayısını ifade eder. Başlangıçta KOH sabit iken belirli bir değerden sonra yükselmeye başlar. Uygun L_{min} KOH'un yükselmeye başladığı değer olarak seçilir. Bu tür KRTF'ye indirgenmiş KRTF denir ve Poisson çekirdeği için

$$\Phi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k) = r_k \frac{r_i^2 - r_k^2}{(r_i - r_k)^3} - \sum_{l=0}^{L_{min}-1} \frac{2l+1}{R} \left(\frac{R}{r_i} \right)^{l+1} \psi_l(\mathbf{r}_k) P_l(\hat{\mathbf{r}}_i^T \hat{\mathbf{r}}_k) \quad (7)$$

olarak tanımlanır. Eşitlik 2'de yer alan x_k bilinmeyen KRTF katsayılarını içerir ve mevcut verilerden kestirilmesi gerekmektedir. Ancak, artık bozucu potansiyel alanı doğrudan gözlemlenemez ve gravite potansiyelinin lineer fonksiyonları yardımıyla elde edilir. Çalışmada kullanılan artık gravite bozukluğu ($\delta g_{art}(\mathbf{r}_i)$) ve artık yükseklik anomalileri ($\zeta_{art}(\mathbf{r}_i)$) ile T_{art} arasındaki ilişki sırasıyla Eşitlik 8 ve 9 ile kurulur:

$$\delta g_{art}(\mathbf{r}_i) = - \frac{\partial T_{art}(\mathbf{r}_i)}{\partial r_i} \quad (8)$$

$$\zeta_{art}(\mathbf{r}_i) = \frac{T_{art}(\mathbf{r}_i)}{\gamma(r_i')} \quad (9)$$

burada γ normal gravite değerini, \mathbf{r}_i' ise telluroid üzerindeki konum vektörünü temsil eder.

3. Parametre Kestirimi

N sayıda gravite bozukluğu ölçüldüğü varsayılarak, gözlem denklemleri

$$O(\mathbf{r}_i) + e(\mathbf{r}_i) = \mathcal{L}_i T_{art}(\mathbf{r}_i) = \sum_{k=1}^K x_k \mathcal{L}_i \Phi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k) \text{ ve } i = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

ile yazılır. Eşitlikte yer alan $O(\mathbf{r}_i)$ ve $e(\mathbf{r}_i)$, i noktasındaki gözlem ve gözlem hatasıdır. \mathcal{L}_i artık bozucu potansiyel ile artık lineer fonksiyonlar arasındaki ilişkiyi temsil eder. Hataların normal dağılımda ve sıfır ortalaması olduğu varsayılarak, Gauss-Markov modele göre gözlem denklemleri matris formunda

$$\mathbf{l} + \mathbf{e} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad E(\mathbf{e}) = 0 \quad \text{ve} \quad D(\mathbf{e}) = D(\mathbf{l}) = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1} \quad (11)$$

ile gösterilir. Burada \mathbf{l} gözlem vektörünü, \mathbf{e} gözlem hatalarını içeren vektörü belirtir. \mathbf{A} katsayılar matrisini, $D(\mathbf{e})$ ise öncül varyans faktörü σ_0^2 ve ağırlık matrisi \mathbf{P} 'den oluşan varyans-kovaryans matrisini temsil eder. En küçük kareler yöntemi kullanılarak bilinmeyen katsayılar vektörü \mathbf{x} ,

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}) \quad (12)$$

yardımıyla kestirilebilir. Uygun olmayan KRTF ağı, derinlik seçimi veya gözlemlerdeki boşluklar nedeniyle normal denklem matrisinin çözümü mümkün olmayabilir ve bu durumda tekil (*singular*) matris oluşur. Böyle bir durumda sonuca ulaşmak için literatürde sıkça kullanılan Tikhonov düzenleme uygulanmıştır.

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \lambda \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}) \quad (13)$$

Eşitlik 13'te \mathbf{R} düzenleme matrisini ifade eder ve bu matris, çalışmada birim matris olarak alınmıştır. λ düzenleme katsayısıdır ve Koch ve Kusche (2002) ile Kusche (2003) tarafından önerilen varyans bileşeni tahmini (variance component estimation) yöntemiyle bulunmuştur.

4. Ortalama Kaydırma Algoritması Kullanarak Veri Uyarlamalı Ağ Tasarımı

KRTF ile bölgesel gravite modellerinde oluşturulan ağ kritik öneme sahiptir. Yetersiz sayıda KRTF gravite sinyalinin kısa dalga boylu bileşenleri belirlemede başarısız olurken, aşırı sayıda KRTF yerleştirilmesi aşırı uyuma neden olacaktır. Bu nedenle KRTF ağı veri dağılımına uygun olarak dağıtılmış yeterli sayıda merkezden oluşmalıdır. Giriş kısmında bahsedildiği gibi kümeleme algoritmaları ağ kurulumunda kullanılmak için faydalı modeller olabilir. Kümeleme gözlemlerin birbiri ile olan mekânsal uzaklık ilişkisi gözetilerek tamamlanırsa, küme merkezlerinin dağılımı veriye uyarlı olacaktır. Bu kümeleme algoritmalarına en iyi örnek, Ulug ve Karshoğlu (2022b) tarafından kullanılan k-ortalama küme algoritmasıdır. Fakat k-ortalama kümeleme algoritmasında nihai küme sayısının başlangıçta bilinmesi gerekmektedir. KRTF ile oluşturulan ağlarda merkez sayısının tam olarak bilinmemesi nedeniyle, k-SRBF bir sonradan işleme sürecine gerek duyulmaktadır. Diğer yandan, k-ortalama küme algoritmasından farklı olarak ortalama kaydırma kümeleme algoritması nihai küme sayısının bilinmesine ihtiyaç duymaz. Bu sonradan işleme sürecini ortadan kaldırmak için büyük bir avantaj olarak kullanılabilir.

Fukunaga ve Hostetler (1975) tarafından geliştirilen ortalama kaydırma, parametrik olmayan ve yoğunluğa bağlı bir gözetimsiz sınıflandırma algoritmasıdır. Bu algoritma dağılımın en yüksek olduğu yeri bulmayı amaçlar. Algoritmanın çalışma prensibi aşağıdaki maddeler de özetlenmiştir:

1. Öncelikle her gözlem noktası bir küme merkezi olarak değerlendirilir.
2. Her bir gözlem noktası için bir önceden tanımlı bir pencere boyutu (b) içinde kalan tüm gözlemlerin merkezi seçilen çekirdek kullanılarak ağırlıklı olarak hesaplanır.
3. Eski küme merkezleri hesaplanan yeni küme merkezlerine kaydırılır.

4. 2 ve 3 numaralı adımlar küme merkezlerinde bir değişim olmayana kadar tekrar edilir.
5. Çakışan küme merkezleri olursa gözlem sayısı en yüksek olan kabul edilir ve diğer küme silinir.

Yukarıdaki işlem adımlarından da anlaşılacağı gibi b , kümeleme sonucunu etkileyen en önemli parametredir. Pencere boyutu aynı zamanda komşu KRTF merkezleri arasındaki en kısa uzaklığın bir diğer tanımı olarak düşünülebilir, çünkü bir küme merkezi için b içinde kalan bütün veriler bu kümenin bir elemanı olacaktır. Bu nedenle bu kümeye komşu olan en yakın küme merkezi en az b mesafesinde olacaktır. Ancak bu parametrenin uygun değerinin belirlenmesi için herhangi bir teorik yaklaşım bulunmamaktadır. Bilinen en iyi yaklaşım belli aday değerler için çapraz doğrulama değeri en düşük olanı seçmektir. Bir diğer dikkat edilmesi gereken parametre ise küme merkezinin hesaplanmasında verilerin merkeze olan uzaklığının ağırlıklandırılmasıdır. Literatürde genellikle Gaussian çekirdeği tercih edilir. Başlangıç olarak z merkezli bir küme için, Gaussian çekirdeği b 'nin bir fonksiyonu olarak $\mathcal{H}(z_i - z) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z_i - z}{b}\right)^2}$ tanımlanır. Bu durumda Gaussian çekirdeği için bir kümenin ağırlıklı merkezi ($m(z)$)

$$m(z) = \frac{\sum_{z_i \in F(z)} \mathcal{H}(z_i - z) z_i}{\sum_{z_i \in F(z)} \mathcal{H}(z_i - z)} \quad (14)$$

Eşitliği kullanılarak hesaplanır (Fukunaga & Hostetler, 1975). Burada $F(z)$, z 'nin $\mathcal{H}(z_i - z) \neq 0$ olduğu komşularını temsil eder. $m(z) - z$ ortalama kaydırma olarak tanımlanır ve $m(z)$ yakınsayana kadar tekrarlama devam eder.

5. Derinlik Seçimi

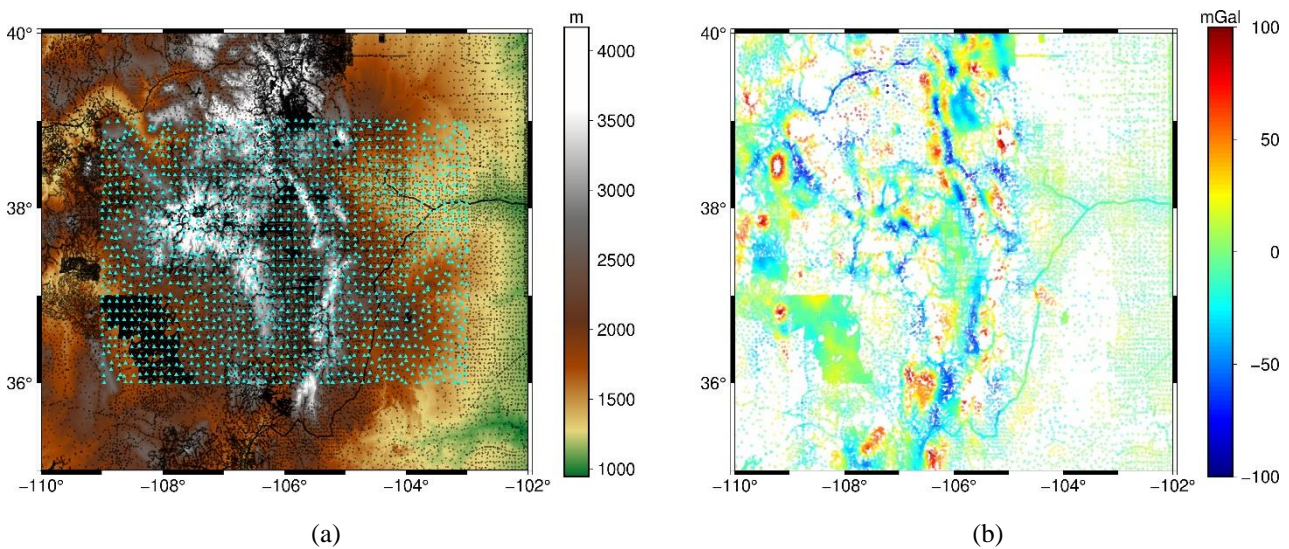
Ortalama kaydırma sonrası elde edilen küme merkezleri KRTF merkezleri ile değiştirildikten sonra uygun derinlik seçimi başlayabilir. Derinlik nihai modelin doğruluğa büyük etkisi olan bir diğer parametredir. Düşük seçilen derinlik uzun dalga boylarını tespit edemezken, yüksek seçilen derinlik değeri de komşu KRTF merkezlerinin birbiri üstüne binmesine neden olacaktır. Uygun derinlik seçimi için genelleştirilmiş çapraz doğrulama (GÇD) (Golub vd., 1979) kullanılması Klees ve Wittwer (2007) tarafından önerilmiştir. GÇD yöntemi

$$G\check{C}D(d) = \frac{l \|A\hat{x}^d - l\|_p^2}{[l - \text{tr}(Q^d)]^2} \quad (15)$$

eşitliği ile tanımlanabilir. Burada \hat{x}^d seçilen bir derinlik d için kestirilen katsayıları temsil eder. l gözlem sayısını, Q^d ise $A\hat{x}^d = Q^d l$ olarak tanımlanan etki matrisi olarak adlandırılır. Uygun derinlik değeri üst ($d_{üst}$) ve alt (d_{alt}) sınırlar içerisindeki aday değerler arasındaki GÇD'nin en düşük olduğu değer olarak seçilebilir. Bu nedenle $d_{üst}$ ve d_{alt} sınır değerlerinin elverişli olarak seçilmesi önemlidir. Çalışmada derinlik sınırları Uluğ ve Karshoglu (2022b) tarafından önerilen teorik yaklaşımla belirlenmiştir; d_{alt} derinliğin KRTF'nin mekânsal bant genişliğinin ampirik sinyal kovaryans fonksiyonun korelasyon uzunluğuna eşit olduğu, $d_{üst}$ ise derinliğin ampirik sinyal kovaryans fonksiyonu ve b toplamının korelasyon uzunluğuna eşit olduğu değer olarak belirlenmiştir. Uygun derinlik sınırları seçildikten sonra ilk KRTF ile işleme başlanmıştır. d_{alt} ve $d_{üst}$ arasında 1 km'lik artışlarla GÇD değerleri hesaplanır. Hesaplama sadece seçili KRTF'nin etki alanı içinde kalan gözlemler kullanılır. Elverişli derinlik belirlendikten sonra seçili KRTF'nin katkısı etki alanı içindeki gözlemlerden çıkarılır. Etki alanı seçili KRTF'nin tesir edebileceği bütün gözlemleri içerecek büyüklükte olmalıdır. Etki alanının ampirik sinyal kovaryans fonksiyonun iki veya daha fazla katı olarak belirlenmesi Klees vd. (2008) tarafından önerilmiştir.

6. Sayısal Testler

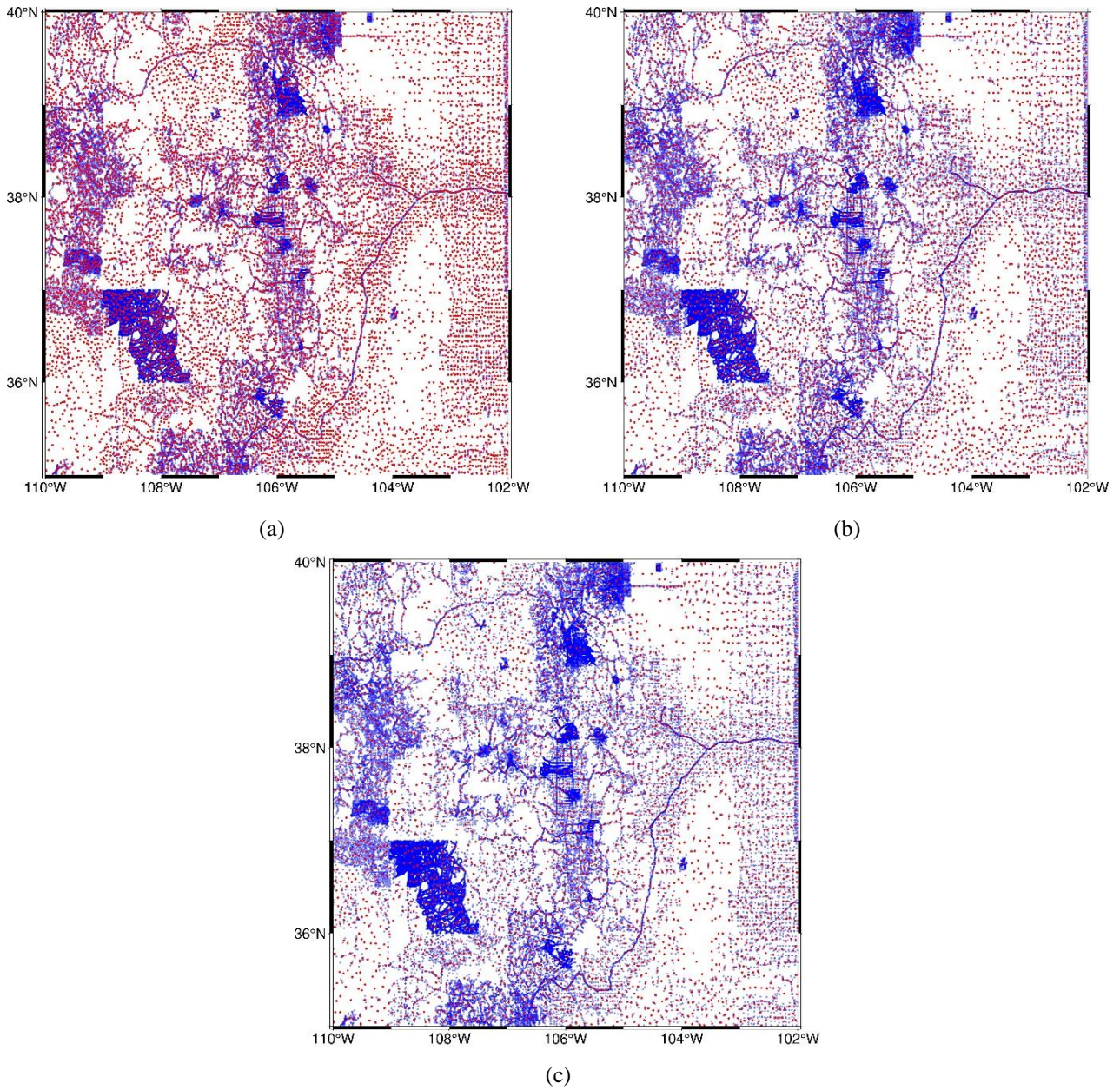
Pencere genişliğinin model üzerine etkisinin belirlenmesi için Colorado alanında gerçek yersel gravite gözlemlerinin konumları kullanılarak artık gravite bozukluğu simüle edilmiştir. Her ne kadar sayısal testlerde gerçek veri seti kullanılmak istense de Colorado veri setindeki yersel gözlemlerin doğruluklarının tam olarak bilinmemesi sağlıklı bir karşılaştırmayı engeller. Ayrıca bu veri setinde kontrol verisi sağlayan yükseklik anomali noktaları gözlem alanının sadece en iç kısmındadır. İlgili alanın karakteristik yapısını temsil edemeyen bu heterojen dağılım, oluşturulan modellerin doğrulukları hakkında yanlış bilgilere neden olabilir. Bu nedenle kontrol noktalarının ilgi alanı üzerinde olabildiğince homojen olarak dağıldığı ve gözlemlerin doğruluğunun bilindiği simülasyon veri kullanımı daha makul olacaktır. Diğer yandan simüle veriler genellikle KJM kullanılarak üretilir. Yüksek seri açılımına sahip KJM'ler mevcut olsa bile, yersel gravite verilerinin sağlayabildiği çok yüksek frekanslı gravite sinyallerini içermezler. Bu simüle veri kullanımının dezavantajı olarak düşünülebilir. Ancak yeni algoritmaların test edilmesinde oldukça sık kullanılan ve kabul gören bir yöntemdir. Colorado veri seti -110° D ile -102° D ve 35° K ile 40° K arasında 59303 ham gravite gözlemlerinden oluşur (Wang vd., 2021). Fakat veri seti aynı istasyonda farklı ölçümler barındırmaktadır. Aynı noktada farklı ölçüm değerleri içeren gözlemler silindikten sonra 58138 nokta kullanılmıştır. Uygun L_{min} belirlenmesi ve dış kontrol için 1489 gözlem kontrol noktası olarak veriden çıkarılmıştır. Gözlem alanı sınırlarında oluşması muhtemel kenar etkilerini azaltmak için, ilgi alanı gözlem alanından 1° küçük seçilmiştir. İlgi alanı içinde seçilen kontrol noktalarının dağılımının olabildiğince homojen olmasına dikkat edilmiştir. Modelde kullanılan gözlem noktalarında XGM2019e KJM (Zingerle vd., 2020) yardımıyla 361. dereceden 2159° u dereceye kadar gravite bozukluğu değerleri hesaplanmıştır. Hesaplanan gravite bozukluğu gözlemlerine sıfır ortalamalı 2.0 mGal standart sapmaya (SS) sahip beyaz gürültü eklendikten sonra istatistikî değerleri; en az -97.14 mGal, en çok 139.60 mGal, ortalama -7.45 mGal ve SS 24.43 mGal olarak elde edilmiştir. Kontrol noktalarında ise aynı model kullanılarak aynı dereceler arasında hatasız artık gravite bozukluğu ve artık yükseklik anomalisi değerleri hesaplanmıştır. Şekil 1a'da modellemede kullanılacak gözlem noktalarının ve kontrol noktalarının yatay düzlemdeki dağılımı görülebilir. Şekilden de görülebildiği gibi gözlem noktaları bazı alanlarda yoğunlaşırken bazı bölgelerde oldukça seyrekler. Bu tür yüksek derecede heterojen dağılıma sahip veri setinde dağılıma uygun ağ tasarımının önemi anlaşılmaktadır. Şekil 1b simüle edilen artık gravite bozukluklarını göstermektedir. Şekilde görüldüğü gibi özellikle dağlık bölgelerde gözlemlerin varyasyonu artmaktadır. Bu, yüksek doğrulukta bölgesel gravite modellemeyi daha zorlu hale getirir.



Şekil 1: (a) Modellemede kullanılan gözlemler (siyah noktalar), kontrol noktaları (açık mavi üçgenler), (b) artık gravite bozuklukları

Seçilen b 'nin nihai ağ üzerine etkisinin belirlenebilmesi için 3 farklı değer test edilmiştir. Bu değerler 0.02° , 0.03° ve 0.04° 'tür. Kümelemede gözlemler arasındaki Öklid uzaklıkları kullanılır, bu nedenle gözlemlerin konumları küresel sistemden

Kartezyen sisteme dönüştürülmelidir. Kümelemenin tamamlanmasından sonra elde edilen küme merkezlerinin koordinatları tekrar küresel koordinatlara dönüştürülür. Şekil 2’de farklı b seçimlerinin oluşturduğu küme merkezlerinin dağılımı gösterilmektedir. Alt şekillerden de anlaşılacağı gibi, seçilen her b için ortalama kaydırma algoritması ile elde edilen küme merkezleri veri dağılımına uygun olarak yerleştirilmiştir. Gözlemlerin yoğun olduğu bölgelerde KRTF merkez sayısı fazla iken, verinin seyrek olduğu yerlerde KRTF sayısı da azdır. Gözlemlerin bulunmadığı bölgelerde ise herhangi bir KRTF merkezi yerleştirilmemiştir. Şekil 2 ortalama kaydırma algoritması kullanılarak kurulan KRTF ağının ızgara ağı üzerindeki üstünlüğünü açıkça göstermektedir. Oluşturulan ağlardaki toplam KRTF sayısı Tablo 1’de özetlenmiştir. Tablodan açıkça görüldüğü b ’nin KRTF sayısı üzerine etkisi çok yüksektir. b ’nin 0.03° ’ten 0.02° ’ye düşürülmesi, KRTF sayısının yaklaşık %83 artışına sebep olmuştur. Benzer şekilde b ’nin 0.03° ’ten 0.02° ’ye indirgenmesiyle KRTF sayısı ~%66 oranında artış göstermiştir. Bu değerler uygun b seçilmesinin önemini açıkça vurgulamaktadır.



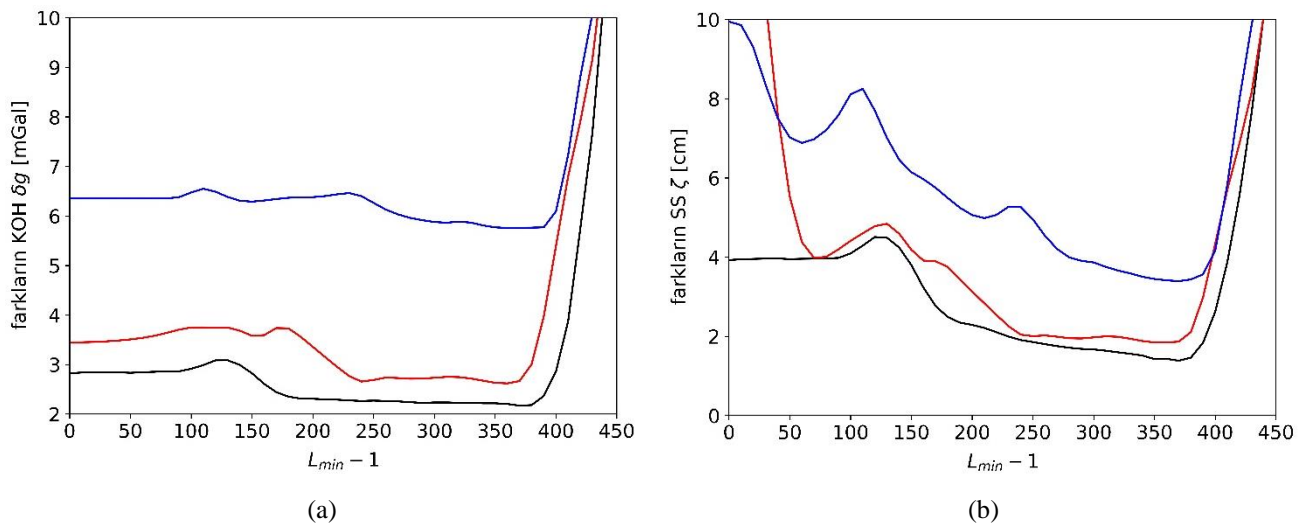
Şekil 2: Gözlemlerin (mavi noktalar) ve KRTF merkezlerinin (kırmızı noktalar) yatay düzlemdeki dağılımları (a) $b = 0.02^\circ$ (b) $b = 0.03^\circ$ ve (c) $b = 0.04^\circ$

Tablo 1: b 'ye bağlı olarak oluşan KRTF sayısı, uygun L_{min} değerleri ve bu değerlerdeki normal denklem matrisinin kondisyon numarası

	$b = 0.02^\circ$	$b = 0.03^\circ$	$b = 0.04^\circ$
KRTF sayısı	10213	5583	3371
L_{min}	381	371	391
Kondisyon numarası	3.1×10^{19}	2.9×10^{13}	5.7×10^{10}

Ağ kurulumunun tamamlanmasından sonra, uygun derinlik seçimi başlatılır. Derinlik seçiminde küresel yaklaşıma (Moritz, 1980) dayanarak, bir D derinliğinde olan KRTF merkezinin radyal uzaklığı $R - D$ olarak hesaplanmıştır. Benzer şekilde H yüksekliğinde bulunan bir gözlem noktasının radyal uzaklığı ise $R + H$, eşitliği ile bulunmuştur. Referans kürenin yarıçapı 6371 km olarak seçilmiştir. Test alanındaki verilerin ampirik sinyal kovaryans fonksiyonunun korelasyon uzunluğu 0.134° olarak hesaplanmıştır. Bu korelasyon değerine karşılık gelen $d_{üst}$ her b için 27 km iken, d_{alt} 0.02° , 0.03° ve 0.04° için sırasıyla 32 km, 34 km ve 36 km'dir. Etki alanı ampirik sinyal kovaryans fonksiyonunun iki katından yüksek olarak 0.3° seçilmiştir. Tüm KRTF noktaları için ideal derinlik belirlenmesinden sonra son işlem adımı olarak uygun L_{min} değerlerinin belirlenmesi için dönme noktası algoritması kullanılır. Bunun için L_{min} başlangıç değeri 1 olarak seçilir ve $10'$ ar artışlarla 451'e kadar artırılır. Her bir L_{min} değeri için oluşturulan normal denklem matrisinin kondisyon numarası hesaplanır. Eğer normal denklem matrisinin kondisyon numarası yuvarlama hatasından (ϵ^{-1}) (IEEE 754 çift duyarlıklı format için 4.5×10^{15}) büyükse, matrisin tersi alınırken bütün anlamlı sayılar kaybedilir (Klees vd., 2018) ve bu nedenle bir düzenlemeye ihtiyaç duyulur. Bu nedenle normal denklem matrisinin kondisyon numarası ϵ^{-1} büyükse bilinmeyen KRTF katsayıları Eşitlik 13 yardımıyla hesaplanır. Diğer tüm durumlarda Eşitlik 12 kullanılır. Parametre kestirimi tamamlandıktan sonra, artık gravite bozukluğu kontrol noktalarında KHO hesaplanmıştır.

Artık gravite bozukluğu kontrol noktalarında hesaplanan gözlem ve kestirilen model farklarının SS'i ve artık yükseklik anomali noktalarında hesaplanan gözlem ve kestirilen model farklarının KOH'ları $L_{min} - 1$ 'in fonksiyonu olarak Şekil 3'te gösterilmiştir. Şekilde görüldüğü gibi dönme noktası algoritması yükseklik anomali kontrol noktalarında santimetre düzeyinde iyileştirme sağlamaktadır ve bu uygun L_{min} değerinin seçiminin önemini vurgulamaktadır. Aynı zamanda ideal L_{min} değeri için artık gravite bozukluğu kontrol noktalarında hesaplanan farkların KOH'larında da düşüş görülmektedir. Her bir b için seçilen L_{min} değeri ve bu değerdeki normal denklem matrisinin kondisyon numarası Tablo 1'de verilmiştir. Tablodan da görüldüğü gibi sadece $b = 0.02^\circ$ olduğu durumda normal denklem matrisinin kondisyon numarası ϵ^{-1} 'den büyüktür.



Şekil 3: (a) Gravite bozukluğu kontrol noktalarında $L_{min} - 1$ 'e göre hesaplanan farkların KOH değerleri, (b) yükseklik anomali kontrol noktalarında $L_{min} - 1$ 'e göre hesaplanan farkların SS değerleri (siyah çizgiler: $b = 0.02^\circ$, kırmızı çizgiler: $b = 0.03^\circ$, mavi çizgiler: $b = 0.04^\circ$)

Tablo 2’de kontrol noktalarında kestirilen modeller ile gözlem modelleri arasındaki farkların istatistiksel değerleri özetlenmiştir. Beklendiği gibi KRTF sayısının artmasıyla modelin doğruluğu artmaktadır. $b = 0.02^\circ$ için artık gravite bozukluğu kontrol noktalarında farkların KOH’u 2.182 mGal’dır. Bu değer gözlemlere eklenen 2.0 mGal hataya oldukça yakındır. Yükseklik anomali kontrol noktalarında ise en yüksek doğruluk olan 1.5 cm SS’e ulaşmıştır. En kötü sonuçlar $b = 0.04^\circ$ değerinde elde edilmiştir. Yükseklik anomali noktalarında 3.6 cm SS doğrulukta iken, gravite bozukluğu kontrol noktalarında 5.8 mGal KOH’a ulaşılmıştır. Şekil 2c’den de görüldüğü gibi KRTF merkezlerinin yetersiz oluşu bu sonucun temel nedenidir. Kontrol noktalarındaki hesaplanan KOH ve SS, $b = 0.02^\circ$ için elde edilen değerlerin iki katından fazladır. Kontrol noktalarındaki en iyi sonuç $b = 0.02^\circ$ değeri için elde edilse bile, $b = 0.03^\circ$ değeri ile gravite bozukluğu kontrol noktalarındaki fark sadece 0.5 mGal ve yükseklik anomali kontrol noktalarında fark sadece 0.4 cm’dir. Bu ihmal edilebilir farklarla birlikte, Tablo 1’den de görüldüğü gibi $b = 0.03^\circ$ değeri için normal denklem matrisi herhangi bir düzensizliğe ihtiyaç duymaz. Bu nedenlerden dolayı $b = 0.03^\circ$ değeri test alanı için en ideal değer olarak seçilebilir.

Tablo 2: 1489 kontrol noktasındaki model ve gözlemler arasındaki farkların istatistikleri

b	Δg (mGal)				
	Min.	Maks.	Ort.	SS	KOH
0.02°	-16.97	17.96	-0.07	2.18	2.18
0.03°	-16.59	29.61	0.01	2.67	2.67
0.04°	-30.21	48.25	-0.22	5.77	5.77
b	ζ (cm)				
	Min.	Maks.	Ort.	SS	KOH
0.02°	-12.00	9.98	-0.02	1.46	1.46
0.03°	-11.39	21.63	0.00	1.87	1.87
0.04°	-19.61	27.67	-0.01	3.57	3.57

7. Sonuçlar

Gözetimsiz sınıflandırma algoritmalarının temel amacının verilerin benzerlikleri gözetilerek farklı sınıflara ayırmak olsa bile, kümeleme sonrası oluşan küme merkezlerinin veri dağılımına uygun olması nedeniyle KRTF için bir ağ tasarımı kullanılabileceği görülmüştür. Uluğ ve Karşlıoğlu (2022a, b) k-ortalama kümeleme algoritmasını kullanarak veri dağılımını dikkate alan bir ağ tasarım metodolojisi geliştirmişlerdir. Fakat kümeleme sonrası oluşan merkezlerin doğrudan kullanılamaması nedeniyle, bu metodolojide bir sonradan işleme süreci gerekmektedir. Bu çalışmada k-ortalama kümeleme algoritmasından farklı olarak, ilk kez ortalama kaydırma algoritması kullanılmıştır. Ortalama kaydırma algoritmasında nihai küme sayısının başlangıçta bilinmesine ihtiyaç duymaması en önemli avantajlarından biri olarak görülür. Bu özellik küme merkezlerin doğrudan kullanılmasını sağlar ve sonradan işleme sürecini ortadan kaldırır. Ortalama kaydırma algoritmasında pencere boyutu (b) kümeleme sonucu doğrudan etkileyen en önemli parametredir. Bu nedenle sayısal testlerde b ’nin nihai ağ üzerine etkisi detaylı olarak incelenmiştir. Sayısal testler Colorado alanında gerçek gözlemlerin konumları kullanılarak simüle edilen artık gravite bozukluğu gözlemleri ile tamamlanmıştır. Uygun derinlik seçimi GÇD yöntemi kullanılarak, her bir KRTF için sadece etki alanındaki gözlemler yardımıyla bulunmuştur. Alt ve üst derinlik sınırlarının ($d_{üst}$ ve d_{alt}) belirlenmesinde gözlemlerin ampirik sinyal kovaryans fonksiyonu ve b değerlendirilmiştir. Seçilen Legendre katsayısının (Poisson çekirdeği) $L_{min} = 0$ iken mekânsal uzayda daima pozitif olması nedeniyle ortaya çıkan uzun dalga boyu hataları, dönme noktası algoritması kullanılarak azaltılmıştır.

Sayısal testlerde de açıkça görüldüğü gibi ağ kurulumunda b ’nin uygun seçimi büyük önem taşımaktadır. Sadece 0.01° ’lik

değişimler KRTF sayısının %66 ve %83 oranında değişmesine neden olur. Fakat ortalama kaydırma algoritmasının temelinde olduğu gibi KRTF ağ kurulumu için de ideal b seçimi için teorik bir yaklaşım bulunmamaktadır. Uygun b , farklı değerlerin test edilmesiyle bulunabilir. Ancak, ideal ağ kurulumu için sadece bir parametrenin uygun değerinin belirlenmesi ortalama kaydırma algoritmasının avantajını ortaya koymaktadır. Yapılan testlerde sayısal olarak en iyi sonuçlar $b = 0.02^\circ$ için elde edilirken, $b = 0.04^\circ$ istatistiki olarak en kötü sonuçları vermiştir. $b = 0.03^\circ$ değeri en iyi ikinci sonucu vermiştir ve $b = 0.02^\circ$ ile arasındaki fark ihmal edilebilir düzeydedir. Bununla birlikte $b = 0.03^\circ$ değerinde normal denklem matrisinin kondisyon numarası ε^{-1} küçüktür ve en küçük kareler çözümü bir düzenleştirmeye ihtiyaç duymaz. Tüm sonuçlar ortalama kaydırma algoritmasının KRTF için ağ kurulumunda oldukça kullanışlı bir metodoloji sunduğunu kanıtlamaktadır.

Önerilen yöntemin uygulamalarda da büyük bir avantaj sağlayabileceği düşünülmektedir. Ülkemiz gibi genellikle dağlık bölgelerden oluşan coğrafyalarda ulaşım nedeniyle yersel gravite gözlemleri seyrek olarak bulunmaktadır. Bununla birlikte farklı zamanlarda aynı bölgelerde yapılan gözlemler nedeniyle bazı alanlar daha fazla gravite gözlemine sahip olabilmektedir. Heterojen veri dağılımının olduğu benzer durumlarda ortalama kaydırma algoritması kullanılarak bölgesel veya ülke bazında yüksek doğruluklu geoit modelleri daha az sayıda ve uygun olarak yerleştirilmiş KRTF merkezi kullanılarak oluşturulabilir.

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazar, bu çalışmada bilinen ilgili herhangi bir finansal veya finansal olmayan çıkar çatışması olmadığını beyan eder.

Kaynaklar

- Barthelmes, F. (1986). Untersuchungen zur Approximation des äußeren Gravitationsfeldes der Erde durch Punktmassen mit optimierten Positionen. [Dissertation, Veröffentlichungen des Zentralinstituts für Physik der Erde 92 Zentralinstitut für Physik der Erde. Potsdam: Akademie der Wissenschaften der DDR]. In *Zentralinstituts Physik der Erde*.
- Bentel, K., Schmidt, M., & Gerlach, C. (2013). Different radial basis functions and their applicability for regional gravity field representation on the sphere. *GEM - International Journal on Geomatics*, 4(1), 67–96.
- Foroughi, I., & Tenzer, R. (2014). Assessment of the direct inversion scheme for the quasigeoid modeling based on applying the Levenberg-Marquardt algorithm. *Applied Geomatics*, 6(3), 171–180.
- Freedon, W., & Schreiner, M. (2009). *Spherical Functions of Mathematical Geosciences*. Springer Berlin Heidelberg.
- Fukunaga, K., & Hostetler, L. (1975). The estimation of the gradient of a density function, with applications in pattern recognition. *IEEE Transactions on Information Theory*, 21(1), 32–40.
- Golub, G. H., Heath, M., & Wahba, G. (1979). Generalized Cross-Validation as a Method for Choosing a Good Ridge Parameter. *Technometrics*, 21(2), 215.
- Klees, R., Slobbe, D. C., & Farahani, H. H. (2018). How to deal with the high condition number of the noise covariance matrix of gravity field functionals synthesised from a satellite-only global gravity field model? *Journal of Geodesy*, 1–16.
- Klees, R., Tenzer, R., Prutkin, I., & Wittwer, T. (2008). A data-driven approach to local gravity field modelling using spherical radial basis functions. *Journal of Geodesy*, 82(8), 457–471.
- Klees, R., & Wittwer, T. (2007). A data-adaptive design of a spherical basis function network for gravity field modelling. *International Association of Geodesy Symposia*, 130, 322–328.
- Koch, K. R., & Kusche, J. (2002). Regularization of geopotential determination from satellite data by variance components. *Journal of Geodesy*, 76(5), 259–268.
- Kusche, J. (2003). A Monte-Carlo technique for weight estimation in satellite geodesy. *Journal of Geodesy*, 76(11–12), 641–652.
- Lin, M., Denker, H., & Müller, J. (2019). A comparison of fixed- and free-positioned point mass methods for regional gravity field modeling. *Journal of Geodynamics*, 125, 32–47.
- Mahbuby, H., Amerian, Y., Nikoofard, A., & Eshagh, M. (2021). Application of the nonlinear optimisation in regional gravity field

- modelling using spherical radial base functions. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 65.
- Marchenko, A. N. (1998). *Parameterization of the Earth's gravity field: point and line singularities*. Lviv Astronomical and Geodetical Society.
- Moritz, H. (1980). Advanced physical geodesy. *Advances in Planetary Geology*.
- Tenzer, R., & Klees, R. (2008). The choice of the spherical radial basis functions in local gravity field modeling. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 52(3), 287–304.
- Uluğ, R., & Karşlıoğlu, M. O. (2022a). A new data-adaptive network design methodology based on the k-means clustering and modified ISODATA algorithm for regional gravity field modeling via spherical radial basis functions. *Journal of Geodesy*, 96(11), 91.
- Uluğ, R., & Karşlıoğlu, M. O. (2022b). SRBF_Soft: a Python-based open-source software for regional gravity field modeling using spherical radial basis functions based on the data-adaptive network design methodology. *Earth Science Informatics*, 15(2), 1341–1353.
- Wang, Y. M., Sánchez, L., Ågren, J., Huang, J., Forsberg, R., Abd-Elmotaal, H. A., Ahlgren, K., Barzaghi, R., Bašić, T., Carrion, D., Claessens, S., Erol, B., Erol, S., Filmer, M., Grigoriadis, V. N., Isik, M. S., Jiang, T., Koç, Ö., Krčmaric, J., Li, X., Liu Q., Matsuo K., Natsiopoulou, D. A., Novák, P., Pail, R., Pitoňák, M., Schmidt, M., Varga, M., Vergos, G. S., Véronneau, M., Willberg, M., & Zingerle, P. (2021). Colorado geoid computation experiment: overview and summary. *Journal of Geodesy*, 95(12), 127.
- Zhang, F., Liu, H., & Wen, H. (2024). A data-adaptive network design for the regional gravity field modelling using spherical radial basis functions. *Geodesy and Geodynamics*, April, 1–8.
- Zingerle, P., Pail, R., Gruber, T., & Oikonomidou, X. (2020). The combined global gravity field model XGM2019e. *Journal of Geodesy*, 94(7), 66.