

Çok Noktalı Singüler Pertürbe Özellikli Sınır Değer Probleminin Çözümü İçin Sonlu Fark Metodu

Derya Arslan

Milli Eğitim Bakanlığı, Bitlis
ayredlanu@gmail.com

Özet: Bu makalenin amacı çok noktalı lineer ikinci mertebeden singüler pertürbe özellikli sınır değer probleminin nümerik çözümü için düzgün bir sonlu fark metodu verilmektedir. İlk olarak, nümerik çözüm için diferansiyel problemin çözümünün doğası tartışılmaktadır. Daha sonra, Bakhvalov şebeke üzerinde fark şeması kurulmaktadır. Fark şemasının ayrık maksimum normda ε -pertürbasyon parametresine göre birinci mertebeden düzgün yakınsaklığı ispatlanmaktadır. Son olarak, nümerik metodun etkinliğini göstermek için nümerik örnek verilmektedir. Nümerik sonuçların teorik sonuçları desteklediği görülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Singüler pertürbasyon, sonlu fark metodu, Bakhvalov şebeke, düzgün yakınsaklık, lokal olmayan sınır değerler.

Finite Difference Method for Solving Multipoint Singularly Perturbed Boundary Value Problem

Abstract: The purpose of this article is given a uniform finite difference method for the numerical solution of second order linear multipoint singularly perturbed boundary value problem. First, the nature of the solution of the differential problem is discussed. Then, the difference scheme is established on the Bakhvalov mesh. ε -uniform convergence of difference scheme in the discrete maximum norm is proved, which is the first-order ($O(h)$). Finally, numerical example is given to demonstrate the effectiveness of the numerical methods. Numerical results seem to support the theoretical results.

Keywords: Singular perturbation, finite difference method, Bakhvalov mesh, uniformly convergence, nonlocal condition

Giriş

Bu çalışmada aşağıda verilen lineer ikinci mertebeden singüler pertürbe özellikli sınır değer problemi ele alınmaktadır:

$$-\varepsilon u'' + b(x)u(x) = f(x), \quad x \in [0,1] \quad (1)$$

$$u(0) = 0 \quad (2)$$

$$u(1) = \sum_{i=1}^m c_i u(s_i) + d \quad (3)$$

$$0 < s_1 < s_2 < \dots < s_m < 1, \quad d, c_i \in R, \quad i = 1, \dots, m$$

$$b(x), f(x) \in C^1[0,1], \quad b(x) \geq b^2 > 0 \quad (4)$$

$$-\infty < \sum_{i=1}^m c_i w_0(s_i) < 1 \quad (5)$$

$0 < \varepsilon \ll 1$ için (1)-(3) probleminin $u(x)$ çözümünü $x = 0$ ve $x = 1$ noktaları civarlarında sınır katları bulundurmaktadır. (1)-(3) lokal olmayan singüler pertürbe problemi, en yüksek mertebeli türevlerin katsayılarının $0 < \varepsilon \ll 1$ gibi çok küçük pozitif bir parametre olduğu problemlerdir. Bu parametreden dolayı böyle problemlerin çözümleri, tanım bölgesinin sınır katmanları denilen ince geçiş katlarında çok hızlı ve oldukça düzensiz değişirken, diğer bölgelerde ise yavaş ve düzenli değişir. Bu düzensizlik singüler pertürbe problemlerin çözümünün sınırsız türevlere sahip olmasına neden olur. Böylece bu tür problemlerin işleyişinde ciddi zorluklar ortaya çıkar. Bu zorluklar nümerik çözümde de kendini gösterir. Çünkü şebeke adımlarının küçülmesiyle yaklaşık çözüm, kesin çözümden iraksar. Bu nedenle singüler pertürbe özellikli problemlerin çözümü için uygun nümerik metotların kurulması çok önemlidir. Bilinen klasik nümerik metotlar gerçek çözüme uygun nümerik sonuçlar veremediğinden özellikle bu çalışmada olduğu gibi böyle problemlerin çözümü için ε 'a göre düzgün yakınsaklık veren sonlu fark metodu gibi etkin nümerik metot tercih edilmiştir. Singüler pertürbe özellikli problemlerle ilgili çalışmalar 1900'lü yıllarda başlamıştır. Bu problemler fen bilimlerinde, mühendislikte, tıp bilminde, akışkanlar mekaniği, aerodinamik, manyetik dinamik, yayma teori, reaksiyon-difüzyon, ışık yayan dalgalar, plazmadaki elektron plazma dalgaları, iletişim hatları, plazma dinamik, arıtılmış gaz dinamik, kütle hareketi, plastik, kimyasal-reaktör teori, oşinografi, meteoroloji, elektrik akımı, iyon akustik dalgaları ve bazı fiziksel modellendirmelerde yer almaktadır (Roos ve ark. 2008; Doolan ve ark. 1980; O' Malley, 1990; Nayfeh, 1993; Miller ve ark. 1996; Farrel ve ark. 2000). Ayrıca Bakhvalov, sınır katı

problemlerinin nümerik çözümünde özel bir dönüşüm kullandı (Bakhvalov, 1969). Bitsadze ve Samarskii, lineer eliptik sınır değer problemlerinin bazı genelleştirmelerini elde ettiler (Bitsadze ve Samarskii 1969). Doolan ve ark., başlangıç ve sınır tabaka problemleri için düzgün nümerik metotlar geliştirmişlerdir (Doolan ve ark. 1980). Cziegis (Cziegis, 1988), lokal olmayan sınır şartlı singüler pertürbe problemin nümerik çözümü üzerine çalışma yapmıştır. Herceg (1990), lokal olmayan sınır şartlı singüler pertürbe problemin nümerik çözümü üzerine çalışmıştır. Herceg ve Surla, lokal olmayan sınır durumlu singüler pertürbe probleminin spline tension ile nümerik çözümünü bulmuşlardır (Herceg ve Surla 1991). Gupta ve Trofimchuk, ikinci mertebe üç noktalı sınır değer probleminin çözümü için bir sharper durumunu çalışmışlardır (Gupta ve Trofimchuk 1997). Amiraliyev, singüler pertürbe başlangıç değer problemini sonlu fark metodu ile değerlendirmiştir (Amiraliyev, 1998). Amiraliyev ve Çakır, sıfırıncı mertebeden indirgenmiş denklem ve konvektif singüler pertürbe problem için düzgün yakınsak bir yaklaşım bulmuşlardır (Amiraliyev ve Çakır 2000). Adzic ve Ovcin, lokal olmayan sınır duruma sahip lineer olmayan problemi spektral yaklaşımıyla nümerik olarak çözmüşlerdir (Adzic ve Ovcin 2001). Çakır, üç noktalı singüler pertürbe sınır değerler sahip problem için fark metodu ile ikinci mertebe düzgün yakınsaklık elde etmiştir (Çakır, 2010). Çakır ve Amiraliyev, üç noktalı singüler pertürbe sınır değer problemini Shishkin şebeke kullanarak değerlendirmişlerdir (Çakır ve Amiraliyev (2010). Çakır ve Arslan, lineer olmayan çok noktalı singüler pertürbe problemi için sonlu fark metodunu kullanarak Shishkin şebekede nümerik çözüm elde etmişlerdir (Çakır ve Arslan 2016). Çakır ve Arslan, lineer olmayan çok noktalı singüler pertürbe

problemini sonlu fark metodu ile Bakhvalov şebeke üzerinde değerlendirmişlerdir (Çakır ve Arslan 2016). Çakır ve Arslan, singüler pertürbe nonlinear integral sınır durumlu problemin Bakhvalov şebekede nümerik çözümünü elde etmişlerdir. (Çakır ve Arslan 2016). Bu çalışma çok noktali singüler pertürbe özellikli sınır değer problemi için ε – pertürbasyon parametresine göre düzgün nümerik metod ile ilişkilidir. Böyle bir problem ilk olarak verdiğimiz nümerik yöntemle çözülmüştür. Diğer çalışmalardan farklı ve daha iyi sonuçlar elde edilmiştir.

Bu makale aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir. İkinci kısımda (1)-(3) ile verilen problemin kesin çözümüne ilişkin bazı asimptotik değerlendirmeler verilmektedir. Üçüncü kısımda fark şemaları eksponansiyel baz fonksiyonlarından, kalan terimleri integral şeklinde olan ve ağırlık fonksiyonu içeren interpolasyon kuadratur formüllerinden yararlanılarak kurulmaktadır. Daha sonra Bakhvalov şebekenin yapısı tanıtılmaktadır. Dördüncü kısımda fark şemasının ε 'a göre düzgün yakınsaklığı

$$|u'(x)| \leq C_1 \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[e^{\frac{-bx}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{\frac{-b(1-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right] \right\}, 0 < x < 1 \quad (10)$$

burada C_0 ve C_1 , ε ve h 'tan bağımsız sabitlerdir.

İspat

$u(1) = \lambda$ olmak üzere, (1)-(3) probleminin çözümünü de $u(x) = v(x) + \lambda w(x)$ (11) şeklinde aranır,

$$|v(x)| \leq |v(0)| + |v(1)| + b^{-2} \|f\|_{C[0,1]} \leq 0 + b^{-2} \|f\|_{C[0,1]} \leq C_1 \quad (14)$$

ve

$$|w(x)| \leq |w(0)| + |w(1)| + b^{-2} \|0\|_{\infty} \leq 1 \leq C_2. \quad (15)$$

ispatlanmaktadır. Beşinci bölümde problemin çözümü için etkili bir algoritma ve nümerik örnek verilmektedir. Bu çalışma sonuç bölümüyle son bulmaktadır.

Kesin çözümün özellikleri

Bu bölümde, araştırmanın sonraki kısımlarında gerekli olacak (1)-(3) probleminin $u(x)$ çözümünün bazı özellikleri verilecektir.

Lemma 1. $b(x)$ ve $f(x)$ düzgün fonksiyonlar ve

$$\sum_{i=1}^m c_i w(s_i) < 1 \quad (6)$$

biçimindedir. Ayrıca (6) eşitsizliğinde $w_0(x) \geq |w(x)|$,

$$-\varepsilon w'' + b(x)w(x) = 0 \quad (7)$$

$$w(0) = 0, \quad w(1) = 1 \quad (8)$$

(7)-(8) problemin çözümüdür. Böylece (1)-(3) probleminin $u(x)$ çözümü aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar:

$$\|u(x)\|_{C[0,1]} \leq C_0 \quad (9)$$

burada $C_0 = |v(x)| + |\lambda| |w(x)|$,

$$-\varepsilon v'' + b(x)v(x) = f(x) \quad (12)$$

$$v(0) = 0, \quad v(1) = 0 \quad (13)$$

problemi elde edilir. Sırasıyla $v(x)$ ve $w(x)$ çözümleri değerlendirilmesinden

Böylece (14) ve (15) eşitsizliklerinden,
 $|u(x)| \leq C_0$ (16)
 elde edilir ve böylece (9) eşitsizliğinin doğruluğunu ispatlar.

Şimdi de (10) eşitsizliğinin ispatını elde edelim: Denklem (1)'in türevi alındıktan sonra $f(x) - b'(x)u(x) = \phi(x)$ ve $u'(x) = v_0(x)$ olarak kabul edilirse (1) denklemi ve şartları (17)-(18) biçimde olur:

$$-\varepsilon v_0'' + b(x)v_0'(x) = \phi(x) \quad (17)$$

$$v_0(0) = u'(0), v_0(1) = u'(1) \quad (18)$$

$$g'(x) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} - \int_{\alpha}^{\beta} K_0(t, x) g''(t) dt, \alpha \leq x \leq \beta, \quad \alpha < \beta \quad (20)$$

$$|u'(0)| \leq \left| \frac{u(\sqrt{\varepsilon})}{\sqrt{\varepsilon}} \right| + \frac{C}{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon} \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (21)$$

ve

$$\begin{aligned} |u'(1)| &\leq \left| \frac{u(1 - \sqrt{\varepsilon}) - u(1)}{\sqrt{\varepsilon}} \right| + \int_{1 - \sqrt{\varepsilon}}^1 |k_0(t, 1)| |u''(t)| dt \\ &\leq \left| \frac{u(1 - \sqrt{\varepsilon}) - u(1)}{\sqrt{\varepsilon}} \right| + \frac{C}{\varepsilon} \int_{1 - \sqrt{\varepsilon}}^1 dt \leq \frac{|d + 1 - C_0|}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{C}{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon} \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Böylece (17)-(18) lineer problemi

$$-\varepsilon v_0'' + b(x)v_0'(x) = \phi(x) \quad (23)$$

$$|v_0(0)| \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}, |v_0(1)| \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (24)$$

(17)-(18) probleminde sırasıyla $\phi(x), u'(0)$ ve $u'(1)$ 'i değerlendirmeleri sonucunda,

$$\phi(x) = f'(x) - b'(x)u(x) \leq C_3 \quad (19)$$

elde edilir.

$u'(0)$ ve $u'(1)$ değerlendirmesinde de keyfi bir $g \in C^2[0,1]$ fonksiyonuna göre aşağıdaki bağıntı kullanılmasıyla (Amiraliyev ve ark. 2002),

biçiminde yazılır. (23)-(24) probleminin çözümünü aşağıdaki formda arayalım:

$$v_0(x) = v_1(x) + v_2(x)$$

ve bazı hesaplamalardan sonra

$$\begin{aligned} |u'(x)| = |v_0(x)| &\leq |v_1(x)| + |v_2(x)| \leq C + \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \left[e^{-\frac{bx}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{b(1-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right] \\ &\leq C_1 \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[e^{-\frac{bx}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{b(1-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right] \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (10) eşitsizliğinin ispatı tamamlanır.

Fark Şemasının Kurulması

$[0,1]$ aralığı üzerinde yer alan düzgün olmayan şebeke,

$$\omega_N = \{x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N\}$$

$$\bar{\omega}_N = \omega_N \cup \{x = 0, x = 1\}$$

olsun. Şimdi fark şeması oluşturmaya (1) denkleminin, aşağıda verilen (x_{i-1}, x_{i+1}) aralığında integralini alarak başlayalım:

$$\lambda_i \bar{h}_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} Lu(x) \varphi_i(x) dx = \lambda_i \bar{h}_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x) dx, \quad i = \overline{1, N-1} \quad (25)$$

Burada

$$\hbar_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}, \quad h_i = x_i - x_{i-1}$$

$$\lambda_i = \left(\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) dx \right)^{-1} = \frac{\hbar \gamma_i}{2th\gamma_i \frac{\hbar}{2}}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i^{(1)}(x) = \frac{sh\gamma_i(x-x_i)}{sh\gamma_i h}, & x_{i-1} < x < x_i \\ \varphi_i^{(2)}(x) = \frac{sh\gamma_i(x_{i+1}-x)}{sh\gamma_i h}, & x_i < x < x_{i+1} \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases}$$

$\varphi_i^{(1)}(x)$ ve $\varphi_i^{(2)}(x)$, lineer baz fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümleridir:

$$-\varepsilon \varphi''(x) + b_i \varphi(x) = 0 \quad (26)$$

$$\varphi(x_{i-1}) = 0, \varphi(x_i) = 1 \quad (27)$$

ve

$$-\varepsilon \varphi''(x) + b_i \varphi(x) = 0 \quad (28)$$

$$\varphi(x_i) = 1, \varphi(x_{i+1}) = 0 \quad (29)$$

(25) denkleminde bazı düzenlemeler yaparsak $i = \overline{1, N-1}$ için,

$$R_i = \lambda_i \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [-b(x) + b_i(x)] u(x) \varphi_i(x) dx + \lambda_i \hbar_i^{-1} \quad (31)$$

(30)'da R_i kalan terimi ihmal edilirse, (1)-(3) problemi için aşağıdaki fark şeması bulunur:

$$-\varepsilon \theta_i y_{\bar{x}\bar{x},i} + b_i y_i = f_i \quad (32)$$

$$y_0 = 0 \quad (33)$$

$$y_N = \sum_{i=1}^m c_i y_{N_i}(x_{N_i}) + d \quad (34)$$

(34) şartında bulunan x_{N_i} , s_i 'lere çok yakın şebeke noktalarıdır.

biçimindedir ve $\{\varphi_i(x)\}, i = \overline{1, N-1}$ lineer baz fonksiyonları aşağıda verilen haliyle tanımlanmaktadır:

$$-\varepsilon \theta_i u_{\bar{x}\bar{x},i} + b_i u_i = f_i + R_i \quad (30)$$

elde edilir. Burada

$$\theta_i = \frac{b_i \hbar_i^2}{4\varepsilon sh^2\left(\frac{\gamma_i \hbar_i}{2}\right)}$$

(32)-(34) fark şemasının ε 'a göre düzgün yakınsak olması için $\bar{\omega}_N$ üzerinde Bakhvalov şebekeyi kullanırız. Bakhvalov şebekeyi, N çift sayısı için $[0, \sigma]$ ve $[\sigma, 1 - \sigma]$ aralıklarını $N/4$, $[1 - \sigma, 1]$ aralığı ise $N/2$ tane parçaya böleriz. Burada $\sigma_1 = \sigma$ ve $\sigma_2 = 1 - \sigma$ geçiş noktalarıdır ve şu biçimde tanımlanmaktadır:

$$\sigma = \min \left\{ \frac{1}{4}, -b^{-1} \varepsilon \ln \varepsilon \right\}$$

Bakhvalov şebeke (Graded Mesh)

$$\sigma < \frac{1}{4} \text{ ise, } x_i \in [0, \sigma] \text{ için } x_i = -\beta^{-1} \varepsilon \ln \left[1 - (1 - \varepsilon) \frac{4i}{N} \right], i = 0, 1, \dots, \frac{N}{4}.$$

$$\sigma = \frac{1}{4} \text{ ise, } x_i \in [0, \sigma] \text{ için } x_i = -\beta^{-1} \varepsilon \ln \left[1 - \left(1 - e^{\frac{-\beta}{4\varepsilon}} \right) \frac{4i}{N} \right], i = 0, 1, \dots, \frac{N}{4}.$$

$$x_i \in [\sigma, 1 - \sigma] \text{ için } x_i = \sigma + \left(i - \frac{N}{4}\right) h^{(1)}, \quad i = \frac{N}{4} + 1, \dots, \frac{3N}{4}, \quad h^{(1)} = \frac{2(1-2\sigma)}{N}.$$

$$x_i \in [1 - \sigma, 1] \text{ için } x_i = 1 - \sigma - \beta^{-1} \varepsilon \ln \left(1 - (1 - \varepsilon) \frac{4 \left(i - \frac{3N}{4}\right)}{N}\right), \quad i = \frac{3N}{4} + 1, \dots, N$$

$$1 - \sigma = \frac{3}{4} \text{ ise, } x_i \in [1 - \sigma, 1] \text{ için } x_i = -\beta^{-1} \varepsilon \ln \left[1 - \left(1 - e^{\frac{-\beta}{4\varepsilon}}\right) \frac{4 \left(i - \frac{3N}{4}\right)}{N}\right], \quad i = \frac{3N}{4} + 1, \dots, N.$$

Bakhvalov şebeke üzerinde hata değerlendirmesi

Bu kısımda (32)-(34) fark şemasının Bakhvalov şebekede hata değerlendirmesi yapılacaktır:

$z = y - u, \quad x \in \bar{\omega}_N$
 hata fark fonksiyonu aşağıda verilen ayrık problemin çözümü olsun.
 $-\varepsilon \theta_i z_{\bar{x}\bar{x},i} + b_i z_i = -R_i \quad (35)$

$z_0 = 0 \quad (36)$

$z_N = \sum_{i=1}^m c_i z_{N_i} \quad (37)$

Lemma 2. $z(x)$, (32)-(34) ayrık probleminin çözümü olsun.

$\sum_{i=1}^m c_i z_2(s_i) \neq 1 \quad (38)$

olmak üzere $z(x)$ için aşağıdaki değerlendirme vardır.

$\|z(x)\|_{C[0,1]} \leq C \|R\|_\infty \quad (39)$

İspat. (35)-(37) ile verilen ayrık probleminin çözümü,

$z(x) = z_1(x) + \lambda z_2(x) \quad (40)$

biçiminde aranmaktadır. Burada,

$$R_i = \lambda_i \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} C h_i \varphi_i(x) dx + \lambda_i \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} C h_i \varphi_i(x) dx \quad (42)$$

elde edilir. Şimdi ise (42) R_i kalan terimi Bakhvalov şebekeye ait x_i düğüm noktalarında değerlendirelim:

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^m c_i z_1(s_i) + d}{1 - \sum_{i=1}^m c_i z_2(s_i)}$$

ve
 $\sum_{i=1}^m c_i z_2(s_i) \neq 1$

biçimindedir. Maksimum prensibine göre $|z_1(x)| \leq C \|R\|_\infty$

ve
 $|z_2(x)| \leq 1$
 değerlendirmelerinden

$|z(x)| \leq C \|R\|_{\infty, \bar{\omega}_N}$
 değerlendirmesi elde edilir ve Lemma 2'nin ispatı tamamlanır.

Lemma 3. $b(x), f(x) \in C^1[0,1]$ olmak üzere R_i yaklaşım hatası için

$\|R\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq C N^{-1} \quad (41)$

değerlendirmesi vardır.

İspat. (31) ile verilen R_i kalan teriminde ortalama değer teoremi kullanırsak,

$$\begin{aligned} |b(x_i) - b(x)| &= |b'(\xi_i)| |x - x_i| \\ &\leq \max_{0 \leq x \leq 1} |b'(x)| |x - x_i| \\ &\leq C h_i \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_i)| &= |f'(\xi_i)| |x - x_i| \\ &\leq \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)| |x - x_i| \\ &\leq C h_i \end{aligned}$$

bulunur ve (9) şartından,

1) $\sigma < \frac{1}{4}$, $x_i \in [0, \sigma]$, $x_i = -\beta^{-1}\varepsilon \ln \left[1 - (1 - \varepsilon) \frac{4i}{N} \right]$, $i = 0, 1, \dots, \frac{N}{4}$ için R_i hata değerlendirmesi:

$$h_i = x_i - x_{i-1} = -\beta^{-1}\varepsilon \ln \left[1 - (1 - \varepsilon) \frac{4i}{N} \right] + \beta^{-1}\varepsilon \ln \left[1 - (1 - \varepsilon) \frac{4(i-1)}{N} \right]$$

eşitliğinde i ' ye göre ortalama değer teoremi uygulanırsa, $h_i \leq CN^{-1}$ elde edilir. (43) eşitsizliği ile

$$\bar{h}_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \leq CN^{-1}, \quad \lambda_i \leq CN^{-1}$$

ve $R_i \leq CN^{-1}$ değerlendirmeleri bulunur.

2) $\sigma = \frac{1}{4}$, $x_i \in [0, \sigma]$, $x_i = -\beta^{-1}\varepsilon \ln \left[1 - \left(1 - e^{\frac{-\beta}{4\varepsilon}} \right) \frac{2i}{N_0} \right]$, $i = 0, 1, \dots, \frac{N}{4}$ için R_i hata değerlendirmesi:

$$h_i = x_i - x_{i-1} = -\beta^{-1}\varepsilon \ln \left[1 - \left(1 - e^{\frac{-\beta}{4\varepsilon}} \right) \frac{4i}{N} \right] + \beta^{-2}\varepsilon \ln \left[1 - \left(1 - e^{\frac{-\beta}{4\varepsilon}} \right) \frac{4i}{N} \right]$$

eşitliğinde i ' ye göre ortalama değer teoremi uygulanırsa, $h_i \leq 4\beta^{-1}N^{-1} \leq CN^{-1}$ bulunur ve bu eşitsizlik ile

$$\bar{h}_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \leq CN^{-1}, \quad \lambda_i \leq CN^{-1}$$

ve $R_i \leq CN^{-1}$ değerlendirmeleri elde edilir.

3) $x_i \in [\sigma, 1 - \sigma]$, $x_i = \sigma + \left(i - \frac{N}{4} \right) h^{(1)}$, $i = \frac{N}{4} + 1, \dots, \frac{3N}{4}$, $h^{(1)} = \frac{2(1-2\sigma)}{N}$ için R_i hata değerlendirmesi:

a) $x_i \in [\sigma, 1 - \sigma]$, için $\sigma = -\beta^{-1}\varepsilon \ln \varepsilon < \frac{1}{4}$ olmak üzere,

$h_i = x_i - x_{i-1} \leq CN^{-1}$ elde edilir ve bu eşitsizlik ile $\bar{h}_i = h^{(1)} \leq CN^{-1}$, $\lambda_i \leq CN^{-1}$ ve $R_i \leq CN^{-1}$ değerlendirmeleri elde edilir.

üzere $h_i = x_i - x_{i-1} \leq CN^{-1}$ elde edilir ve bu eşitsizlik ile $\bar{h}_i = h^{(1)} \leq CN^{-1}$, $\lambda_i \leq CN^{-1}$ ve $R_i \leq CN^{-1}$ değerlendirmeleri bulunur.

b) $x_i \in [\sigma, 1 - \sigma]$, için $\sigma = \frac{1}{4}$ olmak

4) $x_i \in [1 - \sigma, 1]$, $x_i = 1 - \sigma + \beta^{-1}\varepsilon \ln \left(1 - (1 - \varepsilon) \frac{4(i - \frac{3N}{4})}{N} \right)$, $i = \frac{3N}{4} + 1, \dots, N$ için

R_i hata değerlendirmesi:

$$h_i = x_i - x_{i-1} = \left(1 - \sigma + \beta^{-1}\varepsilon \ln \left(1 - (1 - \varepsilon) \frac{4(i - \frac{3N}{4})}{N} \right) \right) - \left(1 - \sigma + \beta^{-2}\varepsilon \ln \left(1 - (1 - \varepsilon) \frac{4(i - \frac{3N}{4})}{N} \right) \right)$$

eşitliğinde i ' ye göre ortalama değer teoremi ile $h_i \leq 4\beta^{-1}N^{-1} \leq CN^{-1}$ bulunur ve bu

eşitsizlik ile $\bar{h}_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \leq CN^{-1}$, $\lambda_i \leq CN^{-1}$ ve $R_i \leq CN^{-1}$ değerlendirmeleri elde edilir.

$$5) 1 - \sigma = \frac{3}{4}, \quad x_i \in [1 - \sigma, 1], x_i = -\beta^{-1}\varepsilon \ln \left[1 - \left(1 - e^{\frac{-\beta}{4\varepsilon}} \right)^4 \frac{\left(i - \frac{3N}{4} \right)}{N} \right], i = \frac{3N}{4} + 1, \dots, N$$

için R_i hata değerlendirme:

$$h_i = x_i - x_{i-1} = \left(-\beta^{-1}\varepsilon \ln \left[1 - \left(1 - e^{\frac{-\beta}{4\varepsilon}} \right)^4 \frac{\left(i - \frac{3N}{4} \right)}{N} \right] \right) - \left(-\beta^{-1}\varepsilon \ln \left[1 - \left(1 - e^{\frac{-\beta}{4\varepsilon}} \right)^4 \frac{\left(i - \frac{3N}{4} \right)}{N} \right] \right)$$

eşitliğinde i' ye göre ortalama değer teoremi uygulanırsa,

$h_i \leq 4\beta^{-1}N^{-1} \leq CN^{-1}$ bulunur ve bu eşitsizlikle,

$$\tilde{h}_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \leq CN^{-1}, \quad \lambda_i \leq CN^{-1}$$

ve $R_i \leq CN^{-1}$ değerlendirmeleri elde edilir. Böylece yapılan her bir R_i değerlendirmelerinden,

$$\|R\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq CN^{-1} \quad (44)$$

eşitsizliği bulunarak ispat tamamlanır.

Lemma 2 ve Lemma 3 kullanılarak aşağıdaki yakınsaklık teoremi ortaya çıkar:

Teorem 1. $u(x)$, (1)-(3) probleminin çözümü ve y_i (32)-(34) fark şemasının çözümü olsun. O zaman Lemma 2 ve Lemma 3' e göre aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$$\|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq CN^{-1} \quad (45)$$

$$-\varepsilon u''(x) + u(x) = -\cos^2 \pi x - 2\varepsilon(\pi)^2 \cos 2\pi x, 0 \leq x \leq 1 \quad (46)$$

$$u(0) = 0 \quad (47)$$

$$u(1) = 0.03u(0.9) + 0.2u(0.1) + 0.5u(0.2) + 0.09u(0.5) + d \quad (48)$$

(46)-(48) problemi (32)-(34) fark şeması için Bakhvalov şebekeye göre her bir parçada ayrı ayrı yazılır. Yakınsaklık oranı,

$$P_\varepsilon^N = \log_2 \left(\frac{e^N}{e^{2N}} \right)$$

Algoritma ve nümerik örnek

(32)-(34) fark şeması için kurulan algoritma,

$$A_i = \frac{\varepsilon \theta_i}{h_i h_i}, \quad B_i = \frac{\varepsilon \theta_i}{h_i h_{i+1}}, \quad C_i = \frac{\varepsilon \theta_i}{h_i h_{i+1}},$$

$$F_i = -\cos^2 \pi x_i - 2\varepsilon(\pi)^2 \cos 2\pi x_i$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0$$

$$\alpha_{\frac{N}{10}+1} = 0, \quad \beta_{\frac{N}{10}+1} = \mu_1$$

$$\alpha_{\frac{2N}{10}+1} = 0, \quad \beta_{\frac{2N}{10}+1} = \mu_2$$

$$\alpha_{\frac{5N}{10}+1} = 0, \quad \beta_{\frac{5N}{10}+1} = \mu_3$$

$$\alpha_{\frac{9N}{10}+1} = 0, \quad \beta_{\frac{9N}{10}+1} = \mu_4$$

$i = 1, \dots, N - 1$ için,

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{F_i + A_i \beta_i}{C_i - A_i \alpha_i},$$

$$y_i^{(n)} = \alpha_{i+1} y_{i+1}^{(n)} + \beta_{i+1}, \quad y_i^{(0)} = 0.5$$

şeklinde olup elde edilen bu algoritma sonuçlarına göre

$A_i > 0, B_i > 0, C_i > A_i + B_i, |\alpha_i| \leq 1$, olur. Bu algoritmanın kararlı olduğunu gösterir.

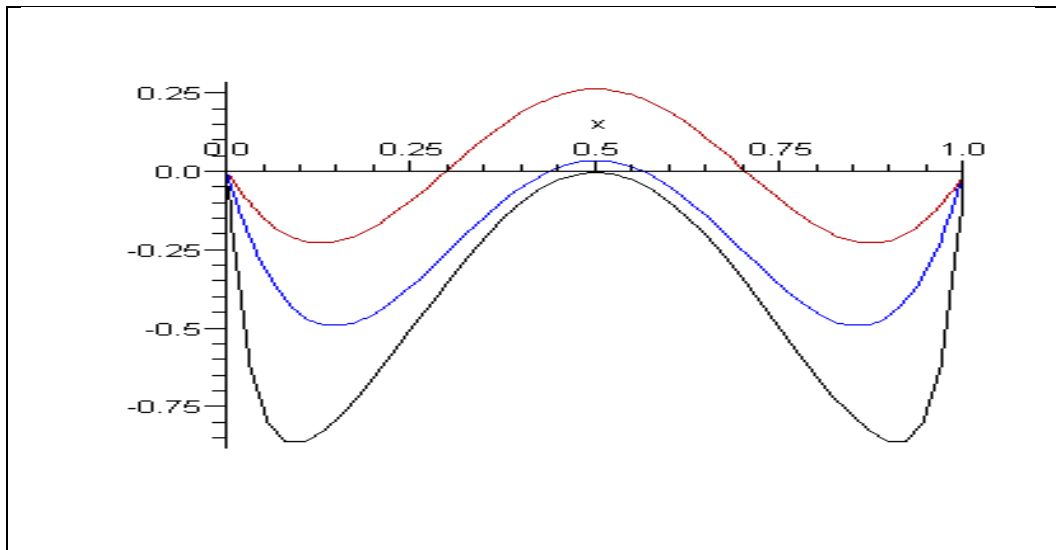
formülü ile hesaplanır. Burada maksimum hata ve hatalar, $e^N = \max_{\varepsilon} e_{\varepsilon}^N$, $e_{\varepsilon}^N = \|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_N}$ sınır değer problemine karşılık gelen fark denkleminin çözümü y , olmak üzere biçimindedir (Çakır ve Amiraliyev, 2007).

(46)-(48) probleminin çözümünden N ve ε 'un bazı değerleri için elde edilen e^N maksimum hataları ve p^N düzgün yakınsaklık oranları bulunmuş ve Çizelge 1.'de gösterilmiştir.

Çizelge 1. (44)-(46) Sınır Değer Probleminin Çözümünden Elde Edilen ω^N Bakhvalov Şebekesi Üzerinde e^N Maksimum Hatalar ve p^N Yakınsaklık Oranları

ε/N	20	40	80	160	320	640	1280
2^{-20}	0.3664700392 p=0.798	0.2107654246 p=0.989	0.1061484828 p=0.828	0.04633983795 p=1.261	0.01932879121 p=1.283	0.007940910801 p=1.148	0.007162388885
2^{-22}	0.3980491045 p=0.747	0.2371048944 p=0.918	0.1254062539 p=1.064	0.05996546931 p=1.237	0.02542643532 p=1.313	0.01023000835 p=1.088	0.004811779831
2^{-24}	0.4249442603 p=0.710	0.2597454365 p=0.875	0.1416093366 p=0.999	0.07080609299 p=1.108	0.03282682893 p=1.126	0.01368941631 p=1.104	0.006365373928
2^{-26}	0.4485390829 p=0.680	0.2799177484 p=0.844	0.1559285276 p=0.962	0.08001839888 p=1.048	0.03868430654 p=1.133	0.01762888567 p=1.275	0.007280432885
2^{-28}	0.4696970684 p=0.651	0.2989374813 p=0.819	0.1694114628 p=0.935	0.08860497090 p=1.020	0.04368457193 p=1.075	0.02072303844 p=1.146	0.00935985756
2^{-30}	0.4894206601 p=0.628	0.3164875571 p=0.830	0.1779769720 p=0.918	0.09414606031 p=0.975	0.04789550533 p=1.070	0.02280695680 p=1.056	0.01096851304

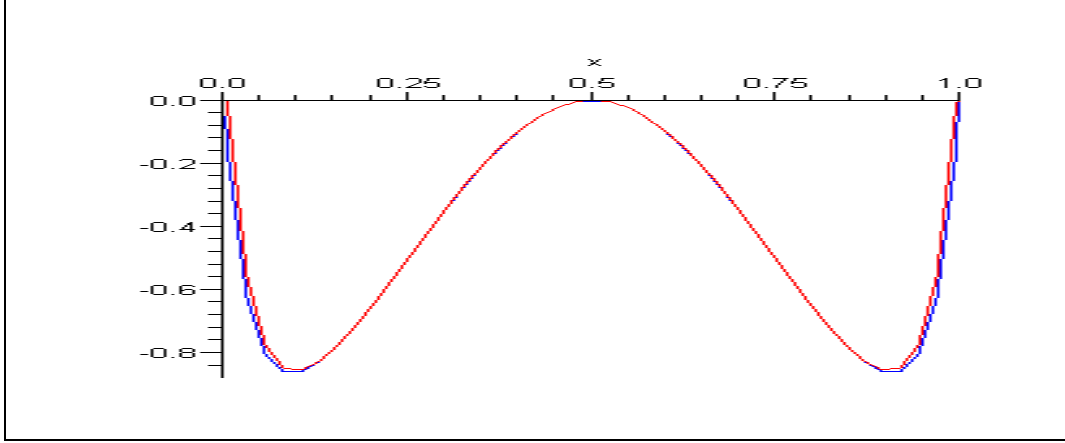
Çizelge 1.'de verildiği gibi N artan değerler aldığında düzgün yakınsama hızı p^N 'in yakınsama derecesi birinci derecedendir. Böylece teoride elde edilen birinci dereceden ε –düzgün yakınsaklık uygulamada da sağlanmıştır.



Şekil 1. $N = 80$, $\varepsilon = 2^{-4}, 2^{-6}, 2^{-10}$ için Kesin Çözüm Eğrileri (kırmızı, mavi, siyah)

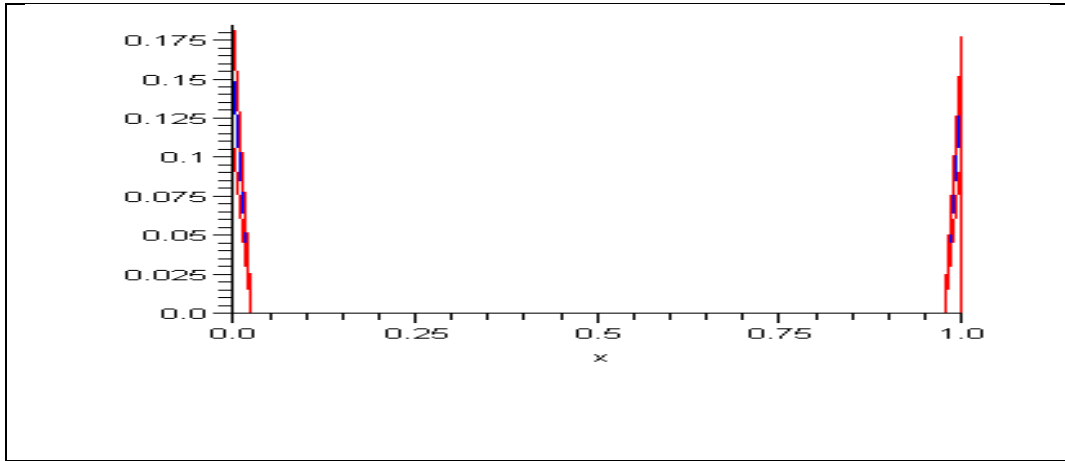
Şekil 1.'de görüldüğü üzere ε değerleri küçüldükçe $x = 0$ ve $x = 1$ civarında sınır katmanları kalınlığının giderek

incelmekte olduğunu çözüm eğrilerinin koordinat eksenine doğru daha fazla yaslandığını görmekteyiz.



Şekil 2. $N = 80$, $\varepsilon = 2^{-10}$ için Yaklaşık Çözüm (red) ve Kesin Çözüm (blue) Eğrileri

Şekil 2.'de görüldüğü üzere kesin çözüm ve yaklaşık çözüm eğrileri hemen hemen aynıdır. Böylece yakınsaklık sağlanmıştır.



Şekil 3. $N = 80$, $\varepsilon = 2^{-20}, 2^{-25}, 2^{-30}$ için Hata Eğrileri

Şekil 3'te görüldüğü üzere farklı ε değerleri için $x = 0$ ve $x = 1$ civarında sınır katmanları bölgesinde çözüm ani ve hızlı değiştiğinden oluşan düzensizlik nedeniyle bu bölgede hatalar maksimumdur.

Sonuç

Bu çalışmada $[0,1]$ aralığında x 'in farklı değerlerine göre iki sınır katlı lineer ikinci merteye çok noktalı singüler pertürbe özellikli sınır değer problemi

için Bakhvalov şebekede kurulan bu fark şemasının,

$N = 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280$ değerleri ve ε singüler pertürbe parametresinin, $\varepsilon = 2^{-2k}$, $k = 10, \dots, 15$ değerleri için e^N maksimum hata sonuçları ve p^N yakınsama oranları belirlenmiştir. N artan, ε azalan değerleri için düzgün yakınsama oranı olan p^N 'in yakınsama derecesi birinci dereceden bulunmuştur.

Uygulamada ise kurulan algoritma yoluyla Maple 10 bilgisayar programı kullanılarak bulunan nümerik sonuçların, teorik sonuçlarla uyumlu olduğu elde edilmiştir. Veriler çizelge ve grafiklerle gösterilmiştir.

Sonuç olarak her nümerik metotla çözümü kolay olmayan hem çok noktalı hem de singüler pertürbe özelliğe sahip bu tür problemler için ele alınan sonlu fark metodu düzgün olmayan şebekeler (Shishkin, Bakhvalov, vb.) üzerinde oldukça etkili ve elverişlidir. Bu yapılan çalışma yardımıyla lokal olmayan daha karmaşık şartları içeren gecikmeli ve kısmi türevli diferansiyel denklemler çalışılabilir. Ayrıca yakınsaklık oranı ikinci ya da daha üst mertebeye çıkarılabilir.

Kaynak

- Adzic, N., Ovcin, Z., 2001. Nonlinear spp with nonlocal boundary conditions and spectral approximation. *Novi Sad Journal of Mathematics*. 31: 85-91.
- Amiraliyev, G. M., 1998. Difference method for a singularly perturbed initial value problem. *Turkish Journal of Mathematics*. 22: 283-294.
- Amiraliyev, G. M., Çakır, M., 2000. A uniformly convergent difference scheme for singularly perturbed problem with convective term and zeroth order reduced equation. *International Journal of Applied Mathematics*. 2: 12, 1407-1419.
- Amiraliyev, G. M., Çakır, M., 2002. Numerical solution of the singularly perturbed problem with nonlocal boundary condition. *Applied Mathematics and Mechanics*. (English Ed.) 23: 755-764.
- Bakhvalov, N. S., 1969. On optimization of methods for solving boundary-value problems in the presence of a boundary layer. The use of special transformation the numerical solution of bounary-layer problems. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*. 9: (4) 841-859.
- Bitsadze, A. V. and Samarskii, A. A., 1969. On some simpler generalization of linear elliptic boundary value problems. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 185: 739-740.
- Çakır, M., Amiraliyev, G. M., 2007. Numerical solution of a singularly perturbed three-point boundary value problem. *International Journal of Applied Mathematics*. 84: 1465-1481.
- Çakır, M., 2010. Uniform second-order difference method for a singularly perturbed three-point boundary value problem. *Hindawi Publishing Corporation Advances in Difference Equations*. 13 pages.
- Çakır, M., Amiraliyev, G. M., 2010. A numerical method for a singularly perturbed three-point boundary value problem. *Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Math*. 17 pages.
- Çakır, M., Arslan, D., 2016. A numerical method for nonlinear singularly perturbed multi-point boundary value problem. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 4: 1143-1156.
- Çakır, M., Arslan, D., 2016. Numerical solution of the nonlocal singularly perturbed problem. *International Journal of Modern Research in Engineering and Technology*, 1 (5), 13-24.
- Çakır, M., Arslan, D., 2016. Finite difference method for nonlocal singularly perturbed problem. *International Journal of Modern Research in Engineering and Technology*, 1 (5), 25-39.

- Chegis, R., 1988. The Numerical solution of problems with small parameter at higher derivatives and nonlocal conditions. *Lietuvos Matematikos Rinkinys.* (in Russian). 28: 144-152.
- Doolan, E. P., Miller, J. J. H., Schilders, W. H. A., 1980. *Uniform Numerical Methods for Problem with Initial and Boundary Layers.* Boole Press, Dublin.
- Farrel, P. A., Miller, J. J. H., O’Riordan, E., Shishkin, G. I., 1996. A uniformly convergent finite difference scheme for a singularly perturbed semilinear equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis.* 33: 1135-1149.
- Gupta, C. P., Trofimchuk, S. I., 1997. A sharper condition for the solvability of a three-point second order boundary value problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 205: 586–597.
- Herceg, D., Surla, K., 1991. Solving a nonlocal singularly perturbed problem by splines in tension. *Univ. u Novom Sadu Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat.* 21: 119-132.
- Miller, J. J. H., O’Riordan, E., Shishkin, G. I., 1996. *Fitted numerical methods for singular perturbation problems.* World Scientific, Singapore.
- Nayfeh, A. H., 1993. *Introduction to Perturbation Techniques.* Wiley, New York.
- O’Malley, R. E. Jr., 1990. *Singular Perturbations Method for Ordinary Differential Equations.* Springer-Verlag, New York.
- Roos, H. G., Stynes, M., Tobiska, L., 2008. *Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equation: Convection-Diffusion and Flow Problems.* Springer-Verlag, Berlin, 604.