Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)
Cilt 5, Sayı 1, Haziran 2011, sayfa 225-249.

Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science and Mathematics Education
Vol. 5, Issue 1, June 2011, pp. 225-249.

# Mathematics Student Teachers' Misconceptions on the Limit and Continuity Concepts

**Savaş BAŞTÜRK*** **and Gülden DÖNMEZ**

Marmara University, İstanbul, TURKEY

Received : 19.10.2010 Accepted : 11.04.2011

*Abstract* –Content knowledge is one of the important components of teacher training and has attracted particular interest of many mathematics educators. One of the most important variables which can be used to determinate teachers' content knowledge of any topic is their misconceptions related to this topic. The aim of this study is to investigate student teachers' misconceptions related to the limit and continuity concept. To gather data, we administered a questionnaire which composed of open and closed-ended questions to 37 teacher candidates studying in Secondary School Mathematics Education. Obtained data were analysed by using qualitative and quantitative analysis methods. The results show that the student teachers have some misconceptions concerning the limit and continuity concept e.g. if a function has limit at a point, it should be defined and continuous at that point, if the graph of a function is not in one piece, it is not continuous. At the same time, some student teachers have difficulties in distinguishing the notion of ambiguity from that of indefiniteness.

*Key words*: Content knowledge, student teachers, teacher training, limit and continuity concept

## Summary

### Introduction

Today when the education system is based upon conceptual understanding, the key factor that hinders an effective mathematics teaching is misconception. Hence, undoubtedly, the teachers are expected not only to recognize the misconceptions that the students have or may have, but also to turn them into advantages in teaching by analysing these misconceptions finely. When the literature related to mathematics teaching is examined, it

*Corresponding author: Savaş Baştürk, Lecturer in Mathematics Education, Ataturk Faculty of Education, Marmara University, Göztepe Kampusu, Kadıköy-Istanbul, TURKIYE.
*E-mail*: sbasturk@marmara.edu.tr

Note: This article is produced by the second author's master of science dissertation (Dönmez, 2009) and partially presented on the *34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME34)*.

draws attention that the studies about misconceptions (Jordaan, 2005; Huillet, 2005 Cetin, 2009) have gained momentum recently. In this study, the misconceptions that the mathematics student teachers have about the limit and continuity concepts are examined and interpreted by comparing with the related literature.

Misconceptions are important factors that affect learning during the learning process. In the most general meaning, the misconceptions are the scientifically totally or partially wrong understandings that people create in their minds towards the situations they are in (Yagbasan et al; 2005). These misconceptions are seen as factors that hinder meaningful learning. Kathleen (1994) in his study classifies misconceptions in two basic groups: misconceptions acquired through the daily-life experiences and misconceptions acquired throughout education. The misconceptions acquired through experiences are derived from the students' logical interpreting using their previous knowledge.

This paper includes the results related to student teachers' content knowledge in the context of their misconceptions of a research that investigated secondary school mathematics student teachers' pedagogical content knowledge of the limit and continuity concepts with regard to the sub-dimension of pedagogical content knowledge (content knowledge, pedagogical knowledge, curriculum knowledge, assessment knowledge, knowledge of student's difficulties etc.).

It is expressed in the studies that student teachers also show superficial understandings related to the limit and the continuity concepts and have some misconceptions like students. For an effective teaching, firstly, the teacher's knowledge about the subject to teach must be accurate. Many researchers (Ball, 1990; Fennema & Franke, 1992; Thompson, 1992) believe that success in teaching depends upon the subject knowledge of the teacher. Subject matter significantly impacts instructional practice, a teacher who possesses a narrow understanding of a key concept is unlikely to provide satisfactory instruction.

**Methodology**

In this study which is carried out to determine student teachers' misconceptions about the limit and the continuity concepts, qualitative and quantitative research methods are used together. The working team of the study is comprised of 37 senior students who study in the Department of Secondary School Mathematics Teaching. Among the courses that the student teachers attended during their education are Analysis I-II-III-IV. For the fact that the subject of limit and continuity takes place extensively in the content of the analysis courses, the student teachers' knowledge concerning the limit and the continuity subject is sufficient to answer the questions in the questionnaire.

In the study, the Content Knowledge Questionnaire conducted to the student teachers is prepared by paying attention to the misconceptions of the students of different levels which are stated in the attainments that are in the unit of functions, limit and continuity in the Ministry of National Education Secondary School Mathematics Teaching Curriculum and the related literature (Tall & Vinner, 1981; Huillet, 2005; Jordan, 2005).

During the process of analysing the research findings, the answers given to the each question by the student teachers were coded. Grounding on the data, categories were constituted taking the similarities and differences of the codes and their being interrelated into consideration. Then, the frequency of every category was found. Thus, the qualitative data were turned into quantitative data.

**Conclusion and Discussion**

Determination of the misconceptions related to the limit and continuity concepts is important for the fact that it draws attention to the points that should be considered during the teaching of these concepts. The study shows that the student teachers attending the questionnaire have various misconceptions about the limit and continuity concepts. To shortly summarize these: (i) their finding limit while the x value is going to the infinity; (ii) if a function has limit at a point, it should be defined and continuous at that point; (iii) if there are jump and fraction in its diagram, the function does not have limit even if the function is defined at that point; (iv) inability to distinguish between ambiguity and lack of definition concepts. These misconceptions determined display many similarities to the ones determined by other researchers (Tall & Vinner, 1981; Szydlik, 2000; Huillet, 2005; Akbulut & Işık, 2005; Jordaan, 2005).

Another result of the study shows that the student teachers may have some difficulties in answering conceptual questions although they can answer the operational questions about limit and continuity correctly. This condition proves that student teachers' knowledge concerning the limit and continuity concepts is superficial and the conceptual ground of it is weak. In other words, as student teachers know certain kinds of question types and procedures related to these concepts, they can easily solve the questions connected more to operation or these procedures. However, they cannot show the same success in solving the conceptual questions as in the operational ones for the fact that there are gaps in their knowledge of limit and continuity concepts and they cannot form these concepts completely.

This case draws attention to the necessity that the content and quality of the subject matter courses in Faculty of Arts and Sciences where student teachers have subject matter education for three and a half year should be questioned. Do these courses have the quality to meet student teachers' needs? As the study revealed, why cannot this education enrich their conceptual learning? Why is it deficient in correcting their misconceptions they may have brought from high school? Student teachers attend the same courses as mathematics students without almost any distinction for 3.5 years and they are subject to the same evaluation by taking the same examinations. The studies, which reveal student teachers' complaints about this system, report that they say mainly the courses there do not appeal to them and they feel themselves deficient in conceptual teaching (Yigit & Akdeniz, 2004; Sarac, 2006).

# Matematik Öğretmen Adaylarının Limit ve Süreklilik Konusuyla İlgili Kavram Yanılgıları

**Savaş BAŞTÜRK[†] ve Gülden DÖNMEZ**

Marmara Üniversitesi, İstanbul, TÜRKİYE

Makale Gönderme Tarihi: 19.10.2010 Makale Kabul Tarihi: 11.04.2011

*Özet* – Konu alan bilgisi öğretmen yetiştirmenin en önemli bileşenlerinden biridir ve bu nedenle pek çok matematik eğitimcisinin dikkatini üzerine çekmiştir. Öğretmenin herhangi bir konudaki alan bilgisini belirlemede kullanılabilecek en önemli değişkenlerden biri de o konuyla ilgili sahip olduğu kavram yanılgılarıdır. Bu çalışmanın amacı öğretmen adaylarının limit ve süreklilik kavramlarıyla ilgili kavram yanılgılarını ortaya koymaktır. Veri toplamak için, açık ve kapalı uçlu sorulardan oluşan bir alan bilgisi anketi geliştirilerek 37 Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği son sınıf öğretmen adayına uygulanmıştır. Elde edilen veriler nicel ve nitel analiz yöntemleri kullanılarak analiz edilmiştir. Araştırma sonuçlarına göre, öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konularında literatürde de bahsi geçen, bir fonksiyon bir noktada limiti varsa o noktada tanımlı ve sürekli olması gerektiği, eğer bir fonksiyonun grafiği tek parçadan oluşmuyorsa, bu fonksiyon sürekli değildir gibi kavram yanılgılarına sahip oldukları görülmüştür. Aynı zamanda, bazı öğretmen adaylarının tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarını ayırt etmede problemleri bulunmaktadır.

*Anahtar* kelimeler: Konu alan bilgisi, öğretmen adayları, öğretmen yetiştirme, limit ve süreklilik kavramları

## Giriş

Konu alan bilgisi öğretmen yetiştirmenin en önemli bileşenlerinden biri olup, pek çok matematik eğitimcisinin dikkatini üzerine çekmiştir (Ball, 1990; Fennema & Franke, 1992; Thompson, 1992; Gökçe, 1999; Eroğlu, 1999; Dönmez, 2009). Bu ilginin altında yatan en önemli neden ise, konu alan bilgisi eksikliklerinin iyi bir matematik öğretiminin önünde bir engel oluşturmasıdır (Smith, 1999; Halim & Meerah, 2002). Öğretmen adaylarının konu alan

[†] İletişim: Savaş Baştürk, Öğr. Gör. Dr., Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi, OFMA, Göztepe Kampusu, Kadıköy-İstanbul, TÜRKİYE.
E-mail: sbasturk@marmara.edu.tr

Not: Bu makale, ikinci yazarın yüksek lisans tezinden (Dönmez, 2009) elde edilmiş olup, bir kısmı *'34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME34)'*da sözlü bildiri olarak sunulmuştur.

bilgileri incelenirken, kullanılabilecek en önemli ölçütlerden birisi şüphesiz konuyla ilgili adayların olası kavram yanılgılarının tespitidir.

Öğretim sisteminin kavramsal anlama üzerine kurulu olduğu günümüzde, etkili bir matematik öğretimini engelleyen faktörlerin başında kavram yanılgıları gelmektedir. Bu durumda öğretmenlerden beklenen öğrencilerde var olan veya var olabilecek kavram yanılgılarının farkında olmanın yanı sıra bu kavram yanılgılarını iyi bir şekilde analiz ederek yapacakları öğretimi planlama ve şekillendirmede kullanmaktır.

En genel anlamıyla kavram yanılgıları; kişilerin bulundukları mevcut durumlar karşısında zihinlerinde oluşturdukları bilimsel olarak kısmen ya da tamamen yanlış olan anlayışlardır (Yağbasan ve diğer. 2005). Bu yanılgılar, anlamlı öğrenmeyi engelleyen bir faktör olarak görülmektedir. Kathleen (1994) yaptığı çalışmada kavram yanılgılarını, günlük hayattaki deneyimler ile kazanılan kavram yanılgıları ve öğretim boyunca kazanılan kavram yanılgıları olarak iki temel sınıfa ayırmaktadır. Deneyimlerle kazanılan kavram yanılgıları öğrencilerin önceki bilgilerini kullanarak mantıksal yorumlar yapmalarından kaynaklanmaktadır. Öğretim boyunca kazanılan kavram yanılgılarının ise oluşmasında pek çok faktör etkili olabilmektedir. Bunlardan bazıları Gürdal, Şahin ve Çağlar (2001) tarafından aşağıdaki gibi ifade edilmiştir: (i) Öğretmen ve kitabın seviyesi, öğrencinin seviyesinde olmadığı durumlarda, öğrencilerin kavramları farklı şekilde algılaması, (ii) Öğretmenlerin konular arasında bağlantı kur(a)maması, (iii) Öğretmenlerin kavramları yanlış öğrenmeleri ve buna bağlı olarak yanlış öğretmeleri, (iv) Öğretmenlerin kavramlara uygun öğretim teknik ve yöntemlerini kullan(a)maması, (v) Öğrencilerin derse aktif katılımının sağlan(a)maması, (vi) Kavramlarla günlük hayat arasında bağlantı kurul(a)mamasıdır ya da yanlış kurulması.

Bu faktörler öğretmenlerin kavram yanılgılarının oluşum sürecinde oldukça önemli bir role sahip olduklarını göstermektedir. Öğrencilerde kavram yanılgıları, lisansüstü eğitim de dâhil olmak üzere eğitim ve öğretimin her basamağında oluşabilmektedir. Oluşan bu kavram yanılgılarını ortadan kaldırmak hiç de kolay değildir. Yapılan çalışmalar kavram yanılgılarının direnç gösteren, yıllar geçse bile kendiliğinden ortadan kalkmayan bir özelliğe sahip olduklarını göstermektedir (Anderson & Smith, 1987; Hammer, 1996; Baştürk & Dönmez, 2008).

*Limit ve süreklilik konusuyla ilgili kavram yanılgıları*

Limit ve süreklilik konusuyla ilgili literatürde bahsedilen kavram yanılgılarının ortaya konmasının mevcut çalışmayla hedeflenen öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konusuyla ilgili kavram yanılgılarının tespitinde ve analizinde önemli katkılar sağlayacağından, aşağıda bu konuda kısa bir literatür analizine yer verilmiştir.

Cornu'nun (1991) da ifade ettiği gibi limit kavramı, türev, integral, süreklilik ve yaklaşıklık kuramı (approximation theory) gibi pek çok önemli kavramla ilişkisi nedeniyle analizin en temel kavramları arasında yer almaktadır. Limit kavramı özellikle içerisinde sonsuzu da içeren işlemler barındırması nedeniyle kolay anlaşılabilir bir kavram değildir. Gerek limitin türev ve integral gibi matematiksel kavramların oluşumuna temel olması, gerekse limit ve süreklilik kavramlarının öğrenimi süresince karşılaşılan yanılgıların nedenlerini belirleme isteği bu kavramlar üzerine yapılan çalışmaların sayısının artmasına neden olmuştur.

Yapılan araştırmalar, öğrencilerin limit ve süreklilik kavramlarına ilişkin çeşitli kavram yanılgılarına sahip olduklarını ve bu kavramları öğrenirken zorluklar yaşadıklarını ortaya koymuştur (Davis & Vinner, 1986; Tall & Vinner, 1981; Cornu, 1991; Williams, 1991; Szydlik, 2000). İlgili literatür analizinden elde edilen bilgiler ışığında limit ve süreklilik kavramlarıyla ilgili en sık rastlanan bazı kavram yanılgılarını şu şekilde özetlemek mümkündür:

Genellikle limit kavramı günlük hayattaki kullanımında, kredi kartı limiti örneğinde olduğu gibi, ulaşılabilecek en üst değer şeklinde algılanmakta ve aşılmaması gereken bir sınır anlamını taşımaktadır. Williams (1991) ve Jordaan (2005) tarafından yapılan araştırmalar limit kavramının günlük hayattaki bu kullanımının öğrenciler tarafından aynen fonksiyonlardaki limit kavramına uyarlandığını göstermektedir. Yapılan araştırmalar, öğrencilerin bir fonksiyonun limiti ile bu fonksiyonun tanım kümesi arasında ilişki kurarken pek çok kavram yanılgısına sahip olduklarını rapor etmektedir (Bergthold, 1999; Jordaan, 2005; Akbulut & Işık, 2005). Bir fonksiyonun bir noktada limitinin olması için o noktada tanımlı olması, limit alınan noktanın fonksiyonunun tanım kümesinde yer alması, fonksiyonun limitinin olması için sürekli olması ve fonksiyonun her noktada limiti olması gerektiği gibi birbirleriyle yakından ilişkili öğrenci yanılgıları bunlara örnek olarak verilebilir.

Öte yandan, limit kavramının öğrenciler tarafından nasıl anlaşıldığını inceleyen çalışmaların ortak olarak dile getirdikleri diğer bir kavram yanılgısı ise limit değerinin asla ulaşılamaz olduğudur (Williams, 1989, 1991; Szydlik, 2000; Akbulut & Işık, 2005). Cornu (1991) bir fonksiyonun limitinin ulaşılabilir olup olmaması durumunu limit kavramının tarihsel gelişiminde de karşılaşılan epistemolojik bir engel olarak nitelemektedir. Yine limit konusunda sıklıkla karşılaşılan bir başka yanılgı da, öğrencinin verilen fonksiyonun belli bir değere yaklaşmasını irdelemeksizin yaklaşılan değeri fonksiyonda basitçe yerine koyarak limit değerine ulaşılacağını düşünmesidir. Bu tür öğrenciler için limit ile fonksiyon kavramları neredeyse tamamen aynı işleve sahiptir.

Süreklilik kavramıyla ilgili kavram yanılgılarına gelince, Tall ve Vinner'in (1981) da ifade ettiği gibi, süreklilik kavramı formal tanımından ziyade informal tanımlamalarının üzerine bina edilmektedir. Bilindiği gibi günlük hayattaki kullanımında süreklilik kelimesi aralıksız ya da boşluksuz olma şeklinde anlaşılmaktadır. Süreklilikle ilgili kavram imajını bu anlayışa göre oluşturmuş olan bir öğrenci, söz konusu kavramı matematiksel kavram olarak yapılandırmakta güçlüklerle karşılaşabilmekte ve çoğu kez yanılgılara düşebilmektedir. Başka bir ifadeyle öğrenci kavramın günlük hayattaki kullanımından hareketle sürekli bir fonksiyonun grafiğinde kırıklık ya da kopukluk olmaması gerektiği şeklinde bir düşünce geliştirebilmektedir.

*Araştırmanın amacı ve önemi*

Bu makale matematik öğretmen adaylarının fonksiyonlarda limit ve süreklilik ünitesine ilişkin Pedagojik Alan Bilgi'lerini (Shulman, 1986), bu bilginin alt boyutları (alan bilgisi, pedagojik bilgi, öğretim programı bilgisi, ölçme-değerlendirme bilgisi, öğretim teknik, yöntem ve strateji bilgisi, öğrenciyi anlama bilgisi) bağlamında inceleyen bir araştırmanın Alan Bilgisi'ne ait sonuçlarını içermektedir (Dönmez, 2009).

Pedagojik Alan Bilgisi (PAB), Alan Bilgisi ile Pedagoji Bilgisi'nin kesiştiği ve bu ikisi arasında tamamlayıcı bir köprü işlevi gören bilgidir. Matematik dersi için söylenecek olursa bu bilgi, öğretmenin matematiği öğretmesi için gerekli matematik bilgisinin yanında özel bir bilgiyi de içermektedir. Shulman PAB'ı konunun uzmanını bir eğitimciden ayıran bilgi olarak tanımlamaktadır. PAB, bir konuyu başkalarına anlaşılır kılan gösterim ve ifade biçimlerini içermektedir. Daha detaylı olarak bu kategori altındaki maddeler şu şekilde sıralanabilir (Shulman, 1986): (i) Konu ve kavramların en işlevsel gösterimlerini bilme; (ii) Konunun öğrenilmesini nelerin kolaylaştırdığı ya da zorlaştırdığını bilme; (iii) Öğrencilerin kavram yanılgılarını bilme; (iv) Kavramların anlaşılması ve kavram yanılgıların giderilmesine yönelik benzetimler, temsiller, örnekler ve açıklamaları bilme; (v) Farklı yaş ve seviyedeki öğrencilerin öğretilecek kavramlarla ilgili düşünce, algı ve ön bilgilerini bilme.

Görüldüğü gibi, PAB'ın en önemli bileşenlerinden biri Alan Bilgisidir. Bu nedenle, öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konusundaki Pedagojik Alan Bilgileri'nin belirlenmesinde onların sahip oldukları Alan Bilgilerinin ortaya konması gerekmektedir.

Böylece Alan Bilgisinin adayların dersi planlamalarına ve anlatımlarına nasıl yansıdığı gözlenmiş olacaktır. Alan Bilgisinin en önemli göstergelerinden biri, bireyin söz konusu konuyla ilgili sahip olduğu olası kavram yanılgıları olduğundan, bu çalışmada bunlar üzerine yoğunlaşılmıştır.

Araştırmada limit ve süreklilik konusunun seçilmesinin iki önemli nedeni vardır: Bunlardan ilki, yukarıda da değinildiği gibi hem lise düzeyindeki matematik derslerinde hem de lisans düzeyindeki analiz derslerinde limit ve süreklilik kavramlarının oldukça önemli bir yer tutmasıdır. İkincisi ise, limit ve süreklilik kavramlarının oldukça soyut olması nedeniyle bu kavramların öğretimi ve öğrenimi sırasında çok fazla güçlük yaşanması, matematikteki limit ve süreklilik kavramları ile öğrencilerin zihinlerinde oluşturdukları limit ve süreklilik kavramları arasında tutarsızlıklar olması ve bunun öğretmen adayları için de geçerliği olabileceği düşüncesidir.

Etkili bir öğretim için öncelikle öğretmenin öğreteceği konuyla ilgili bilgisinin tam olması gerekmektedir. Ball (1990), Fennema ve Franke (1992) ve Thompson (1992) gibi pek çok araştırmacı öğretimde başarının öğretmenlerin sahip oldukları alan bilgilerine bağlı olduğunu dile getirmektedir. Alan bilgisi öğretmenin öğretimini önemli ölçüde etkilemektedir, dolayısıyla yeterli alan bilgisine sahip olmayan bir öğretmenin tatmin edici bir öğretim ortaya koyması beklenemez.

Öğretmen yetiştirme programlarının en önemli misyonlarından biri şüphesiz nitelikli bir öğretmenin nasıl yetişmesi gerektiğini ortaya koymak ve bu hedefe ulaşmak için öğretmen adaylarının hangi becerilere sahip olması gerektiğini belirlemektir. Limit ve süreklilik konusuyla ilgili kavram yanılgılarının ortaya konması araştırmaya dâhil edilen öğretmen adaylarının Fen-Edebiyat Fakülteleri'nden aldıkları 3,5 yıllık alan dersleri eğitimlerinin niteliğinin görülmesini sağlayacaktır. Bu nedenle, mevcut çalışmanın sonuçlarının öğretmen yetiştirme programındaki alan dersleri eğitiminin iyileştirilip geliştirilmesi sürecinde önemli katkılar sağlayacağı düşünülebilir. Öte yandan, elde edilecek sonuçlar öğretmen adaylarının limit ve süreklilik kavramlarına ilişkin muhtemel kavram yanılgılarını ortaya koymanın yanında gelecekte yapılacak bu kavram yanılgılarını ortadan kaldırmak için neler yapılabilir?" sorusunu araştıran çalışmalara da önemli katkılar sağlayacağı düşünülmektedir. Ayrıca ülkemizde limit ve süreklilik konusuyla ilgili öğretmen adaylarının sahip oldukları kavram yanılgılarını ortaya koyan çalışma sayısının yok denecek kadar az olması (sadece limit konusunda, Akbulut & Işık, 2005), araştırmanın bu konuda önemli bir boşluğu dolduracağını şeklinde yorumlanmıştır.

## Yöntem

*Araştırma Grubu*

Araştırmanın çalışma grubunu, bir devlet üniversitesinin Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı'nda öğrenim gören 4 son sınıf öğretmen adayı oluşturmaktadır. Araştırma kapsamında son sınıfta öğrenim gören 37 öğretmen adayına, fonksiyonlarda limit ve süreklilik konusuyla ilgili alan bilgilerini değerlendirmek amacıyla ''Alan Bilgisi Anketi'' uygulanmıştır. Bunun sonucunda maksimum çeşitlilik örneklemesi yoluyla, sorulara verilen cevaplara göre 4 öğretmen adayı seçilerek farklı bilgi düzeylerindeki adayların araştırmaya katılması ve böylece problemin farklı boyutlarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Alan Bilgisi Anketi'nin sonuçlarına göre farklı alan bilgisine sahip adayların araştırmaya dâhil edilmesinde, literatürde öğretmen adaylarının sahip oldukları alan bilgisi ile yaptıkları öğretim ve öğretim programını kullanmaları arasında ilişkiyi vurgulayan çalışmaların varlığı etkili olmuştur (Hashweh, 1987; Reynolds, Haymore, Ringstaff & Grossman, 1988; McDiarmid, Ball & Anderson, 1989; Grossman, Wilson & Shulman, 1989; Ball & McDiarmid, 1990; Fennema & Franke, 1992; Sanders, Borko & Lockard, 1993).

Bu makale çerçevesinde sadece 37 öğretmen adayına uygulanan Alan Bilgisi Anketi'nin sonuçlarına yer verilecektir. Araştırmada, öğretmen adaylarının alan bilgileri içinde bulundukları duruma dışarıdan müdahale edilmeksizin olduğu gibi incelendiğinden, tarama modelinde desenlenmiştir (Karasar, 2000). Adayların yazılı olarak ifade ettikleri cevaplar içerik analizine tabi tutularak veriler elde edildiğinden nitel bir araştırmadır. Elde edilen bu veriler yardımıyla, kavram yanılgıları bağlamında limit ve süreklilik konusuyla ilgili öğretmen adaylarının alan bilgileri ortaya konmaya çalışılmıştır.

Öğretmen adaylarının lisans öğrenimleri boyunca almış olduğu dersler arasında Analiz I-II-III-IV bulunmaktadır. Analiz dersleri içeriğinde limit ve süreklilik konusu bulunduğu için öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konusuna ilişkin bilgileri uygulanacak anketteki soruları cevaplayacak nitelikte olduğu düşünülmüştür.

*Veri Toplama Araçları*

Araştırma sürecinde çoklu veri toplama araçları (gözlem, görüşme ve doküman analizi) kullanılmıştır. İlk olarak seçilen öğretmen adayları ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmış, daha sonra yeterli süre verilerek 12. Sınıf Matematik Öğretim Programı'nda yer alan limit ve süreklilik konusu için ders planı hazırlamaları ve mikro öğretim yöntemiyle konuyu anlatmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının anlatacakları aşamanın, öğrencinin önceki bilgilerinden hareketle yeni bilgiyi oluşturmanın gerektiği, diğer kısımlara göre (alıştırma ve örnek çözümü) kavramsal yönü ağır basan ve öğretenin daha fazla gayret göstermesini gerektiren konun giriş aşaması olması istenmiştir.

Alan Bilgisi Anketi hazırlanırken, Orta Öğretim Matematik Dersi Öğretim Programında fonksiyonlarda limit ve süreklilik ünitesindeki kazanımlar ve konuyla ilgili literatürde (Tall & Vinner, 1981; Bezuidenhout, 2001; Huillet, 2005; Jordaan, 2005; Özmantar & Yeşildere, 2008) belirtilen farklı düzeylerdeki öğrencilerin kavram yanılgıları dikkate alınmıştır. Ankette çoğunluğu açık uçlu olmak üzere toplam 11 soru yer almaktadır. Bunlardan 6'sı bu makale kapsamında ele alınan problemle doğrudan ilgili olduğundan sadece bu sorulardan ve bu sorulara verilen cevapların analizinden elde edilen sonuçlara yer verilmiştir. Söz konusu sorular bulgular kısmında tanıtılmıştır.

*Verilerin Analizi*

Ankette yer alan açık uçlu sorulara verilen cevaplar, betimsel ve içerik çözümlemesine tabi tutulmuştur. İçerik çözümlemesi; verilerin kodlanması, kategorilerin (temaların) bulunması, kodların ve temaların organize edilmesi, bulguların tanımlanması ve yorumlanması olmak üzere dört aşamada gerçekleşmektedir (Yıldırım & Şimşek, 1999). Bu nedenle, araştırma verilerinin çözümlenmesi sürecinde, öğretmen adaylarının her bir soruya verdikleri yanıtlar kodlanmıştır. Verilerden hareketle, kodların benzerlik ve farklılıkları, birbiriyle ilişkili olmaları dikkate alınarak kategoriler oluşturulmuş ve her bir öğrencinin görüşü, orijinal formu ve anlamı bozulmadan bu kategorilere yerleştirilmiştir. Daha sonra, her bir kategorinin hangi sıklıkla tekrar ettiği (frekansı) bulunmuştur. Böylece, nitel veriler nicelleştirilmiştir. Nitel verilerin nicelleştirilmesindeki temel amaçlar; güvenirliği arttırmak, yanlılığı azaltmak ve kategoriler arasında karşılaştırmalar yapmaktır (Yıldırım & Şimşek, 1999). Doğru/Yanlış testi şeklinde hazırlanan soruda ise, her bir madde için frekans ve yüzdeler hesaplanmış ve bu değerlerden hareketle yorumlar yapılmıştır. Bu testin güvenirliği tespit etmek amacıyla Cronbach Alfa güvenirlik katsayısı hesaplanmış ve 0,91 olarak bulunmuştur.

Anket uygulanmadan önce Ortaöğretim Matematik Eğitimi'nde doktorası olan üç uzman tarafından incelenmiş ve anket sorularının limit ve süreklilik kavramları ile ilgili kavram yanılgılarını tespit edip edemeyeceği konusunda görüş alınmıştır. Ayrıca anketin güvenirliğini test etmek amacıyla, öğretmen adaylarının açık uçlu sorulara verdikleri yanıtlar araştırmacı ve alandan iki uzman ile incelenerek "Görüş Birliği" ve "Görüş Ayrılığı" olan maddeler belirlenmiştir. Güvenirliği belirlemek için Miles ve Haberman'ın (1994) belirttiği şu formül kullanılmıştır: P (Uzlaşma Yüzdesi)=[Na (Görüş Birliği)/Na (Görüş Birliği)+Nd (Görüş Ayrılığı)]x100. Bu hesaplama sonucu P = 85 değeri bulunmuş ve anket güvenilir kabul edilmiştir.

## Bulgular

Aşağıda öğretmen adaylarının anketteki sorulara verdikleri cevapların analizinden elde edilen bulgulara yer verilmiştir. Ayrıca okuyucunun zaman zaman nicel verileri daha iyi anlamasını sağlamak amacıyla, bazı öğretmen adaylarının cevaplarından alıntılara yer verilmiştir.

*Öğretmen adaylarının bazı kavram yanılgıları*

Tablo 1'den, öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğunun (%83,8) sahip olduğu kavram yanılgısının limiti *"bir x değeri belli bir noktaya yaklaşırken, bir fonksiyonun değerinin nasıl değiştiği"* şeklinde açıklamaktan kaynaklanan yanılgı olduğu görülmektedir.

**Tablo 1.** Öğretmen Adaylarının Doğru/Yanlış Testine Verdikleri Cevapların Dağılımı

| | Doğru | | Yanlış | | Boş | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | F | % | F | % | F | % |
| 1. Bir fonksiyonun limit değeri o fonksiyonun asla ulaşamadığı bir değerdir. | 14 | 37,8 | 22 | **59,5** | 1 | 2,7 |
| 2. Limit, bir x değeri belli bir noktaya yaklaşırken, bir fonksiyonun değerinin nasıl değiştiğini açıklar. | 31 | 83,8 | 4 | **10,8** | 2 | 5,4 |
| 3. Bir fonksiyonun limiti, bu fonksiyonun olabildiğince yaklaştığı; ancak hiçbir zaman ulaşamadığı bir değerdir. | 18 | 48,6 | 17 | **45,9** | 2 | 5,4 |
| 4. Bir fonksiyonun bazı noktalarda limiti olmayabilir. | 34 | **91,9** | 1 | 2,7 | 2 | 5,4 |
| 5. Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti o fonksiyonun aynı zamanda sınır değerleridir. | 15 | 40,5 | 18 | **48,6** | 4 | 10,8 |
| 6. Bir fonksiyonun bir noktada birden çok limit değeri olabilir. | 6 | 16,2 | 28 | **75,7** | 3 | 8,1 |
| 7. Bir fonksiyonun bir noktadaki limit değerine ne kadar çok yaklaşılırsa o fonksiyonun o kadar doğru limit değerleri elde edilir. | 19 | 51,4 | 10 | **27** | 8 | 21,6 |
| 8. Sürekli bir fonksiyonun grafiğinde hiçbir kopukluk, kesiklik ya da kırıklık yoktur. | 21 | 56,8 | 14 | **37,8** | 2 | 5,4 |
| 9. Bir fonksiyon limitinden daha büyük bir değer alamaz. | 9 | 24,3 | 26 | **70,3** | 2 | 5,4 |
| 10. Bir fonksiyonun sürekli olmadığı noktalarda limiti yoktur. | 9 | 24,3 | 27 | **73** | 1 | 2,7 |
| 11. Bir fonksiyon bir noktadaki limit değerinin üstünde değerler alamaz. | 10 | 27 | 23 | **62,2** | 4 | 10,8 |
| 12. Bir fonksiyonun bir noktada limitinin olması için artan ya da azalan olması gerekir. | 6 | 16,2 | 25 | **67,6** | 6 | 16,2 |
| 13. Bir fonksiyonun bir noktada limitinin olabilmesi için o noktada tanımlı olması gerekir. | 11 | 29,7 | 25 | **67,6** | 1 | 2,7 |
| 14. Bir fonksiyonun limit değeri, o fonksiyonun alabileceği en küçük değerdir. | 2 | 5,4 | 33 | **89,2** | 2 | 5,4 |
| 15. Bir fonksiyonun bir noktada sürekli olması için o noktada limitinin olması gerekir. | 31 | **83,8** | 5 | 13,5 | 1 | 2,7 |

*(Tabloda Koyu olarak belirtilen yüzdeler doğru cevap oranını göstermektedir. )*

Araştırmaya katılan öğretmen adaylarının yaklaşık %57'sinin sahip olduğu bir başka önemli kavram yanılgısı ise, *"sürekli bir fonksiyonun grafiğinde hiçbir kopukluk, kesiklik ya da kırıklık olmayacağı"*dır. Bu yanılgıyı %51,4'lük bir oranla bir fonksiyonun bir noktadaki limit değerine ne kadar çok yaklaşılırsa o fonksiyonun o kadar doğru limit değerlerine ulaşılacağı yanılgısı takip etmektedir. Bir fonksiyonun limitini fonksiyonun olabildiğince yaklaştığı; ancak hiçbir zaman ulaşamadığı bir değer olarak yorumlayan adayların oranı ise %48,6 dır. Öte yandan, %40,5 için bir fonksiyonun bir noktadaki limiti o fonksiyonun aynı zamanda sınır değerleridir. Fonksiyonun limit değerini fonksiyonun asla ulaşamayacağı bir değer olarak yorumlayan adayların oranı ise %37,8'dir.

Yukarıda ifade edilenler kadar olmamakla birlikte, limit için tanımlılık koşulunu arama (%29,7), fonksiyonun bir noktadaki limit değerinin üstünde değer alamayacağını (%24,3) ve fonksiyonun sürekli olmadığı noktalarda limitinin olmayacağını düşünme (%24,3) gibi konuyla ilgili önemli diğer kavram yanılgılarının araştırmaya katılan öğretmen adaylarında bulunduğu gözlenmektedir.

Sonuç olarak doğru/yanlış testinden elde edilen bulgular, araştırmaya katılan öğretmen adaylarının literatürde dikkat çekilen pek çok kavram yanılgısına az ya da çok oranlarda sahip oldukları göstermektedir.

*Limitin sonsuza eşit olması durumu*

Bu başlık altında, öğretmen adaylarının üstel bir fonksiyonun ( $f(x) = 3^{1/x}$ ) limitini x değeri sıfıra yaklaşırken hesaplamaları istenmiştir. Literatürde öğrencilerin limit hesaplarken buldukları değerin sonsuza eşit olması durumunda, limitin olmadığını düşünmek yerine sonsuzu bir reel değer gibi düşünerek limitin sonsuza eşit olduğunu söylediklerini ortaya koymaktadır. Dolayısıyla bu soruda öğretmen adaylarında da bu yanılgının olup olmadığı belirlenmek istenmiştir.

Öğretmen adaylarının verdikleri cevaplar analiz edildiğinde, adayların sadece %16,2'lik bir kesiminin soruyu doğru olarak cevapladığı görülmüştür. Doğru cevap oranının düşüklüğü boş cevap oranının yüksekliğiyle birlikte ele alındığında (%27) araştırmaya katılan adayların bu soruda oldukça zorlandıkları anlaşılmaktadır. Öte yandan, adayların yarıdan fazlası (%54,1) fonksiyonun limitinin sonsuz olduğunu ifade ederek beklenen yanılgıya düşmüştür[‡]. Bu adayların limit kavramının kavramsal anlamından ziyade fonksiyonlarda bir işlem gibi

[‡] Burada, en azından bazı adayların, limitin sonsuz olması ile olmamasını eş değer olarak düşünmüş olabilecekleri ihtimali de göz ardı edilmemelidir

algıladıkları ve basitçe sıfır değerini x yerine koyarak limitin nereye yaklaşıp yaklaşmadığına hiç bakmadan cevap verdikleri şeklinde yorumlanmıştır. Ayrıca limit değerini sonsuz olarak ifade eden adayların sonsuzun bir limit değeri olamayacağının da farkında olmadığı anlaşılmaktadır.

*Süreklilik tanımlılık ve limit ilişkisi*

Burada bir fonksiyonun verilen bir noktada limitinin olmasıyla fonksiyonun o noktada tanımlı ve sürekli olması arasındaki ilişkinin öğretmen adayları tarafından nasıl yorumlandığı ortaya konmaya çalışılmıştır. Bunu yapabilmek için, öğretmen adaylarına $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$ ifadesi verilerek (A) f(2)=3, (B) f'in x=2 noktasında sürekli olması ve (C) f'in x=2 için tanımlı olması bilgilerinden hangisi ya da hangilerinin daima doğru olacağı sorulmuştur (Bezuidenhout, 2001). Öğretmen adaylarının sorunun A şıkkına vermiş olduğu cevapların dağılımı Tablo 2'deki gibidir.

**Tablo 2.** Verilen Noktada Limit ile Fonksiyonun Değeri İlişkisi (A şıkkı)

| *Verilen cevaplar* | *Frekans* | *%* |
|---|---|---|
| Daima doğrudur | 5 | 13,5 |
| Daima doğru değildir | 32 | 86,5 |
| Belirsizlik yoksa doğrudur | 2 | 5,4 |
| Sürekliyse doğrudur | 7 | 18,9 |
| Tanımsız olabilir | 11 | 29,7 |
| Verilenlerle bilinemez | 9 | 24,3 |
| Diğer | 4 | 10,8 |

Bilindiği gibi, bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin varlığı, fonksiyonun söz konusu noktada tanımlı ve sürekli olmasına bağlı değildir. Dolayısıyla limit için süreklilik ve tanımlılık ön koşul olmamaktadır. Ancak süreklilik için bu iki koşulun yanında limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki değerinin eşit olması gerekmektedir. Tablo 2'den de görüldüğü gibi öğretmen adaylarının büyük bir kısmı (%86,5) soruya doğru cevap vermiştir. Doğru cevap verenlerin yapmış olduğu açıklamalara bakıldığında ise, f(2)=3'ün yazılabilmesi için fonksiyonun sürekli olması gerektiğini belirten sadece 7 aday bulunmaktadır. Bu da tüm adaylar arasında %19, doğru cevap verenler arasında ise %22'lik bir orana denk gelmektedir. Yapılan diğer açıklamalar yanlış olmamasına rağmen sorunun cevabını tam olarak karşılamamaktadır. Bu durum öğretmen adaylarının önemli bir kısmının cevaplarını gerekçelendirmekte problemleri olduğu şeklinde yorumlanmıştır.

Öğretmen adaylarının sorunun B şıkkına vermiş oldukları cevapların dağılımı ise Tablo 3'de görüldüğü gibidir.

**Tablo 3.** Limit ve Süreklilik İlişkisi (B şıkkı)

| *Verilen cevaplar* | *Frekans* | *%* |
|---|---|---|
| Daima doğrudur | 9 | 24,3 |
| Daima doğru değildir | 28 | 75,7 |
| f(2)=3'mü bilmiyoruz | 16 | 43,2 |
| X=2'de tanımlı mı bilmiyoruz | 6 | 16,2 |
| Sağ sol limit eşit mi bilmiyoruz | 3 | 8,1 |
| Limit olması sürekliliği gerektirmez | 5 | 13,5 |
| Diğer | 2 | 5,4 |

Yukarıda da ifade edildiği gibi, bir fonksiyonun bir noktada limitinin olması o noktada fonksiyonun daima sürekli olduğu anlamına gelmemektedir. Fonksiyonun x=2 noktasında sürekli olduğunun söylenebilmesi için bu bilgiye ek olarak fonksiyonun verilen noktada tanımlı ve limit değerinin fonksiyonun o noktadaki görüntüsüne eşit olması gerekmektedir. Öğretmen adaylarının sorunun B şıkkına verdikleri cevaplar incelendiğinde %75,7'sinin x=2 noktasında fonksiyonun sürekli olduğunun kesin olarak bilinemeyeceğini söyleyip, Tablo 3'de verilen sebepleri buna gerekçe olarak gösterdikleri görülmektedir. Buna göre, öğretmen adaylarının %24,3'ü fonksiyonun sürekli olduğunu belirtmiştir. Bu durum adayların yaklaşık dörtte birlik bir kısmında limiti olan bir fonksiyonun aynı zamanda sürekli olması yönündeki kavram yanılgısına sahip olduklarını göstermektedir.

Öğretmen adaylarının bir fonksiyonun limitinin olduğu noktayla o noktadaki tanımlılığı arasındaki ilişkiyi ortaya koyan cevaplarının dağılımı Tablo 4'de verilmiştir.

**Tablo 4.** Verilen Noktada Limit ve Tanımlılık İlişkisi (C şıkkı)

| *Verilen cevaplar* | *Frekans* | *%* |
|---|---|---|
| Daima doğrudur | 10 | 27 |
| Daima doğru değildir | 27 | 73 |
| Limit olması tanımlı olmayı gerektirmez | 16 | 43,2 |
| Limiti 3'e eşit olduğundan tanımlıdır | 4 | 10,8 |
| Belirsizlik olabilir | 1 | 2,7 |
| Sürekliyse tanımlıdır | 1 | 2,7 |

Daha önce de ifade edildiği gibi, bir fonksiyonun verilen noktada limitinin olabilmesi için o noktada tanımlı olması şart değildir. Diğer bir deyişle, bir noktada limitin olması fonksiyonun o noktada tanımlı olmasını gerektirmemektedir. Buna rağmen, Tablo 4'den de anlaşıldığı gibi, öğretmen adaylarının %73'ü soruyu doğru yanıtlarken, %27'sinin de literatürde ifade edilen limit alınan noktada fonksiyonun tanımlı olması gerektiği şeklindeki kavram yanılgısına sahip oldukları görülmüştür (Sierpinska, 1987; Williams, 1991; Bezuidenhout, 2001).

*Cebirsel ve grafiksel olarak ifade edilen bir fonksiyonun limit ve sürekliliği*

Öğretmen adaylarının cebirsel ve grafiksel olarak verilen bir fonksiyonun sürekliliğini ve limitini incelerken nelere dikkat ettiğini daha kapsamlı inceleyebilmek amacıyla ankette üç farklı fonksiyonun cebirsel ve grafiksel ifadesinin yan yana yer aldığı bir soruya (Tall & Vinner, 1981) yer verilmiştir.

**Tablo 5.** $f(x)=x^2$ Fonksiyonunun Sürekliliği

| *Verilen cevaplar* | *Frekans* | *%* |
|---|---|---|
| Süreklidir | 36 | 97,3 |
| Sürekli değildir | 1 | 2,7 |
| Sağ sol limit eşit | 4 | 10,8 |
| Tanımsızlık yok | 7 | 18,9 |
| Sıçrama yok | 5 | 13,5 |
| El kaldırmadan çizilebilir | 2 | 5,4 |
| Kritik nokta yok | 2 | 5,4 |
| Limitleri görüntüsüne eşit | 8 | 21,6 |
| Polinom fonksiyon olduğundan sürekli | 3 | 8,1 |

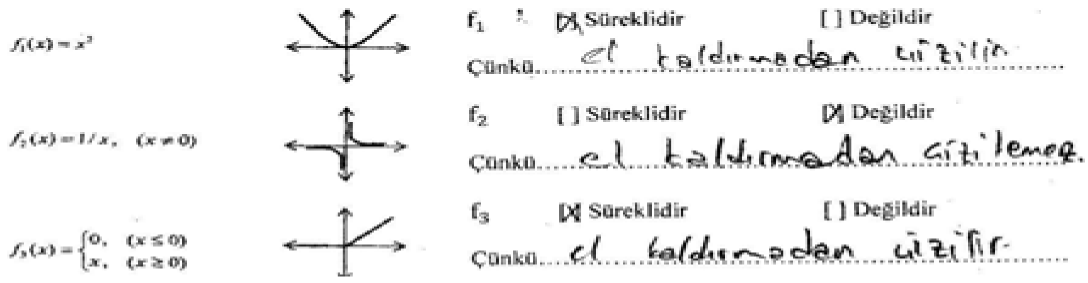
İlk olarak $f(x)=x^2$ fonksiyonu verilmiştir. Bilindiği üzere bu fonksiyon ikinci dereceden bir polinom fonksiyon olup grafiği tek parçadan oluşmaktadır ve reel sayılar üzerinde süreklidir. Öğretmen adaylarının bu fonksiyonun sürekliliği ile ilgili Tablo 5'de verilen cevaplarının dağılımına bakıldığında, neredeyse tamamına yakınının (%97,3) doğru olduğu görülmüştür.

Aynı soruda verilen ikinci fonksiyon olan $f(x)=1/x$, grafiği tek parçadan oluşmayan fakat verilen aralıkta ($x\neq 0$ için) sürekli bir fonksiyondur. Buna rağmen öğretmen adaylarının soruya verdiği cevaplar incelendiğinde, Tablo 6'dan da anlaşıldığı gibi, fonksiyonun sürekli olduğu yönünde cevap verenlerin oranın %62,2 olduğu görülmektedir. Bu durum bir önceki fonksiyondaki başarı oranının önemli bir ölçüde düştüğünü ortaya koymaktadır.

**Tablo 6.** $f(x)=1/x$ Fonksiyonunun Sürekliliği

| *Verilen cevaplar* | *Frekans* | *%* |
|---|---|---|
| Süreklidir | 23 | 62,2 |
| Sürekli değildir | 13 | 35,1 |
| Tanımsız yapan nokta yok | 5 | 13,5 |
| Her noktada limit var ve görüntüsüne eşit | 4 | 10,8 |
| Sağ-sol limit farklı | 2 | 5,4 |
| El kaldırmadan çizilemez | 2 | 5,4 |
| x=0 için limit yok | 8 | 21,6 |
| Diğer | 2 | 5,4 |
| Boş | 1 | 2,7 |

Söz konusu fonksiyonun sürekli olmadığını söyleyen öğretmen adaylarının gerekçelerine bakıldığında ise, bunların "sağ-sol limit farklı", "fonksiyonun grafiği el kaldırmadan çizilemez", "x=0 için limit yok" gibi ifadeler kullandıkları ve soruda x=0 noktası tanım kümesinden çıkarılmış olmasına rağmen, Şekil 1'deki öğrenci gibi, sürekliliği incelerken bunu göz ardı ederek sadece fonksiyonun grafiğine göre cevap verdikleri görülmüştür.




**Şekil 1.** Öğretmen Adaylarından Birinin Soruya Verdiği Cevap

Soruda verilen son fonksiyon ise, reel sayılarda sürekli parçalı bir fonksiyon olup, sıfırdan küçük ya da eşit x değerleri için 0 ve sıfırdan büyük ya da eşit x değerleri için x şeklinde tanımlanmıştır (f(x)=0 eğer x<=0, f(x)=x eğer x>=0). Tablo 7'nin de ortaya koyduğu gibi öğretmen adaylarının doğru cevap oranları %89,2'lere ulaşmaktadır.

**Tablo 7.** Parçalı Olarak Tanımlanan Bir Fonksiyonun Sürekliliği

| *Verilen cevaplar* | *Frekans* | *%* |
|---|---|---|
| Süreklidir | 33 | 89,2 |
| Sürekli değildir | 2 | 5,4 |
| Limit var ve görüntüsüne eşit | 7 | 18,9 |
| Tanımsız yapan nokta yok | 10 | 27 |
| Sağ-sol limit farklı | 2 | 5,4 |
| Sağ-sol türev eşit | 1 | 2,7 |
| Sıçrama yok, el kaldırmadan çizilebilir | 6 | 16,2 |
| Diğer | 3 | 8,1 |
| Boş | 2 | 5,4 |

Sonuç olarak, sorudaki üç fonksiyon için verilen cevaplar genel olarak dikkate alındığında öğretmen adaylarının tek parçadan oluşan bir fonksiyonun sürekliliğini incelerken sorun yaşamadıkları; fakat fonksiyonun grafiği parçalı olduğunda kavram yanılgısına düşenlerin oranlarının arttığı görülmektedir. Ayrıca, fonksiyonun sürekliliğini incelerken grafiğinin "el kaldırmadan çizilebilmesinin" bazı öğretmen adayları tarafından verilen fonksiyonun sürekli olması yönünde bir ölçüt olarak alındığı da dikkati çeken noktalardan biridir (bak Şekil 1).

*Tanımsızlık ile belirsizlik arasındaki fark*

Burada öğretmen adaylarının tanımsızlık ile belirsizlik arasındaki ayrımın farkında olup olmadıkları gözlenmek istenmiştir. Bilindiği gibi, tanımsızlık standart tanım kullanıldığında uygun bir sonuç bulunamaması durumunda ortaya çıkmaktadır. Belirsizlik ise, farklı olası sonuçlardan geçerli olanın bilinmediği durumlarda ya da farklı yaklaşımlarla farklı sonuçlara ulaşılmasından dolayı ortaya çıkmaktadır (Özmantar, 2008). Örneğin, $\lim_{x\to\infty} x/2x$ ve $\lim_{x\to\infty} x/x$ ifadelerinin her ikisinde de $\infty/\infty$ durumu karşımıza çıkmaktadır. Halbuki bu bir belirsizliktir. Çünkü her iki ifade de $\infty/\infty$ durumu ortaya çıksa da birinin limiti 1/2 diğerinin ise 1'dir. Dolayısıyla aynı durma karşı farklı durumlar söz konusudur. Tanımsızlığa örnek vermek gerekirse, sıfırdan farklı bir x reel sayısının sıfıra bölümü tanımsızdır. Çünkü standart çarpma tanımı burada uygulanamamaktadır. Hiçbir sayının sıfır ile çarpımı x reel sayına eşit değildir.

Bu bağlamda öğretmen adaylarına $f(x) = x - 2 / x - 2\sqrt{2}$ fonksiyonu verilmiş ve onlardan ilk olarak fonksiyonun grafiğini çizmeleri istenmiştir. Yapılan çizimler incelendiğinde çizimlerin %75,5'inin doğru olduğu görülmüştür (doğru grafik x=2 noktasında tanımsız olan f(x)=1 doğrusunun grafiğidir). Öğretmen adaylarının %13,5'i grafiği çizerken belirsizlik noktasını dikkate almayarak x=1 doğrusunu çizmiş bunun yanında, %10,8'i ise fonksiyonla hiçbir şekilde ilgisi olmayan tamamen yanlış grafikler çizmiştir.

Söz konusu sorunun ikinci kısmında adaylardan f(2) değerini bulmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarından beklenen doğru cevap belirsizlik olduğunu belirtmeleri olmasına rağmen onların sadece %8,1'inin bu cevabı verdiği görülmüştür. Adayların %62,2 gibi bir çoğunluğunun soruya "tanımsız" cevabını vermesi öğretmen adaylarının tanımsızlık ve belirsizlik kavramları arasındaki farkı, en azından bu soruda, ayırt etmede bazı zorluklar yaşadıklarını göstermektedir. Cevaplarla ilgili dikkati çeken bir diğer nokta ise öğretmen adaylarının %27'sinin soruyu f(2)=1 olarak cevaplamış olmasıdır. Bu da adayların x=2 noktasındaki belirsizliği göz ardı ederek fonksiyonu sadeleştirip f(2)=1 sonucuna ulaştıkları anlamına gelmektedir.

Son olarak aynı soruda adaylara, fonksiyonun x=2 noktasında bir limite sahip olup olmadığı ve varsa bu limit değerinin kaç olduğu sorulmuştur. Adaylardan beklenen doğru cevap f(x) fonksiyonunun $x\to 2$ için limitinin var olduğu ve 1 değerine eşit olduğudur. Adayların cevaplarına bakıldığında büyük bir çoğunluğun soruyu doğru olarak cevapladığını (%89,2), sadece %10,8'lik bir kesimin fonksiyonun limitinin olmadığını söyleyerek yanlış cevap verdiği görülmüştür. Bu durum az da olsa bazı öğretmen adaylarının limit hesaplarken "belirsizlik durumlarında limit yoktur" şeklinde ortaya çıkan kavram yanılgısına sahip olduğunu göstermektedir.

**Sonuç ve Öneriler**

Herhangi bir kavramla ilgili kavram yanılgılarının ortaya konması, söz konusu kavramın öğretmen tarafından anlatılması sırasında dikkat edilmesi gereken noktaların neler olduğu konusunda önemli bilgiler vermektedir. Yapılan araştırma öğretmen adaylarının limit ve süreklilik kavramlarına ilişkin çeşitli kavram yanılgılarına sahip olduğunu göstermektedir. Bunlar özetlenecek olursa:

(i) Sonsuzu bir limit değeri olarak algılama: Öğretmen adaylarının bir kısmı $x\to\infty$ için limiti $\infty$ bulmuşlar, sanki bu fonksiyonun çok uzak bir noktada, "sonsuzda" limiti vardır şeklinde yorumlamışlardır. Oysa reel bir değere eşit olması gereken limit bir sayı olmayan sonsuza eşit olamaz. Yine benzer şekilde $x\to\infty$ için limit 0'a eşit ise $f(\infty)=0$ yazılabileceğini belirtmişlerdir. Bu da öğretmen adaylarının literatürde de (Graeber & Johnson, 1991) belirtildiği gibi limiti fonksiyonda istenen değeri yerine yazma olarak gördüklerini göstermektedir.

(ii) Bir fonksiyon bir noktada limiti varsa o noktada tanımlı ve sürekli olması gerektiği inancı: Elde edilen sonuçlardan biri de öğretmen adaylarının, limit alınan noktada fonksiyonun tanımlı ve sürekli olması gerektiği yönünde kavram yanılgısına sahip olduğu şeklindedir. Oysaki bir fonksiyonun verilen bir noktada sürekli olabilmesi için fonksiyonun o noktada tanımlı ve limit değerinin fonksiyonun görüntüsüne eşit olması gerektiği ve bir fonksiyonun bir noktada limitinin olması için o noktada tanımlı olmasının gerekmediği limit ve süreklilik konusundaki bilinmesi gereken en temel bilgilerdir.

(iii) Grafiğinde sıçrama ve kırılma varsa, fonksiyon o noktada tanımlı bile olsa limiti yoktur: Öğretmen adayları tek parçadan oluşan bir fonksiyonun sürekliliğini incelerken sorun yaşamamalarına rağmen, fonksiyon grafiği parçalı olduğu durumlarda adayların kavram yanılgısına düşme oranı yükselmiştir. Ayrıca, bazı öğretmen adayları tarafından fonksiyonun sürekliliğini incelerken grafiğin el kaldırmadan çizilebilmesinin, verilen fonksiyonun sürekli olması için bir ölçüt olarak alındığı da dikkati çeken noktalardan biridir.

(iv) Tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarının birbirinden ayırt edilememesi: Öğretmen adaylarının sonsuzluk kavramını algılamakta zorlandıkları ve tanımsızlık-belirsizlik kavramları arasındaki farkı ayırt etmede sorun yaşadıkları görülmektedir.

(v) Limit değerine ilişkin kavram yanılgıları: Araştırmada ortaya çıkan bir diğer sonuç, öğretmen adaylarının bir fonksiyonun limitini, bu fonksiyonun olabildiğince yaklaştığı; ancak hiçbir zaman ulaşamadığı bir değer olarak görmeleridir. Yine bazı öğretmen adayları bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin fonksiyonun aynı sınır değeri olduğu, fonksiyonun limit değerinin üstünde değerler alamayacağı, bir fonksiyonun bir noktada birden çok limit değerinin olabileceği, bir fonksiyonun bir noktada limitinin olması için artan ya da azalan olması gerektiği şeklinde kavram yanılgılarına sahip olduğu görülmektedir. Tespit edilen bu kavram yanılgıları diğer araştırmacılar (Tall & Vinner, 1981; Williams, 1989, 1991; Szydlik, 2000; Akbulut & Işık, 2005; Huillet, 2005; Jordaan, 2005; Özmantar & Yeşildere, 2008) tarafından tespit edilenlerle oldukça benzerlik göstermektedir.

Bu durum dikkatleri, öğretmen adaylarının 3,5 yıl alan eğitimlerini aldıkları Fen-Edebiyat Fakülteleri'ndeki alan derslerinin içeriğinin ve niteliğinin sorgulanması gerektiği üzerine çekmektedir. Acaba bu dersler öğretmen adaylarının ihtiyaçlarına cevap verebilecek nitelikte midir? Araştırmanın da ortaya koyduğu gibi bu süreç neden onların kavramsal öğrenmelerini zenginleştirememekte ve belki lise dönemlerinden getirdikleri kavram yanılgılarını düzeltmekte yetersiz kalmaktadır? Ne yazık ki Türkiye'de bu fakülteler matematik öğretmeni yetiştirmeden ziyade uzman yetiştirmeye yöneliktir ve matematikçi yetiştirmektedir (Aslan, 2003). Öğretmen adayları 3,5 yıl boyunca neredeyse hiçbir ayrıma tabi tutulmadan matematik bölümü öğrencileriyle aynı dersleri almakta ve aynı sınavlara beraber girerek değerlendirilmektedirler. Öğretmen adaylarının bu sistem hakkındaki şikâyetlerini ortaya koyan çalışmalar onların çoğunlukla buradaki derslerin kendilerine hitap etmediğini ve kavram öğretimi yönünden kendilerini zayıf hissettiklerini dile getirdiklerini rapor etmektedir (Yiğit & Akdeniz, 2004; Saraç, 2006; Baştürk, 2009b). Oysaki öğretmen adaylarının ileride öğretecekleri matematiği öğrenmeleri ya da Stylianides ve Stylianides'in (2006) ifade ettiği gibi öğretmen adaylarına yönelik alan derslerinde kullanılan matematiksel kavramların onların ileride mesleklerini yaparken kullanacaklarıyla uyumlu olması gerekmektedir.

Ülkemizde son günlerde Fen-Edebiyat Fakülteleri'nden mezun olan her adaya öğretmenlik yapma hakkının verileceğinin tartışıldığı şu günlerde, bu fakültelerin programlarının ve verilen derslerin içeriğinin yapılacak başka çalışmalarla daha detaylı olarak incelenmesi ve eksikliklerin belirlenerek ortaya konması öğretmen eğitimi açısından oldukça önem ifade etmektedir.

Öğretmen adaylarının sahip oldukları kavram yanılgılarını kendi ders anlatımlarında öğrencilerine yansıtma ihtimali oldukça yüksektir. Kavram yanılgıları ile ders anlatımları üzerine adaylarla yapılan çalışmalar bu ikisi arasında sıkı bir ilişki olduğunu rapor etmektedir (Boz, 2004; Canbazoğlu, 2008; Baştürk, 2009a; Dönmez, 2009). Dolayısıyla eğitim fakültesindeki derslerde öğretmen adaylarının kavram yanılgılarına karşı daha donanımlı yetişmesini sağlayacak derslere ve içeriklere yer verilmelidir. Örneğin çeşitli konularda literatürden seçilmiş kavram yanılgıları öğretmen adaylarına yorumlatılabilir ve bunları teşhis edemeyen adaylarda benzer yanılgıların olduğu düşüncesinden hareketle düzeltme ve iyileştirme yoluna gidilebilir.

Bu araştırma kapsamında, öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konusundaki alan bilgileri konuyla ilgili sahip olduklarını kavram yanılgıları bağlamında ortaya konmaya çalışılmıştır. Şüphesiz alan bilgisini belirlemede kavram yanılgılarının tespit edilmesi tek başına yeterli değildir. Yapılacak başka çalışmalarla burada kullanılan Alan Bilgisi Anketi'ndeki sorulara yeni sorular eklenerek, kavram yanılgıları dışındaki değişkenlere bakılıp öğretmen adaylarının alan bilgileri daha detaylı olarak incelenebilir.

**Teşekkür**

Yazarlar araştırmaya katılan Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı son sınıf öğrencilerine teşekkür eder.

**Kaynaklar**

Akbulut, K., & Işık, A. (2005). Limit kavramının anlaşılmasında etkileşimli öğretim stratejisinin etkinliğinin incelenmesi ve bu süreçte karşılaşılan kavram yanılgıları. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *13*(2), 497-512.

Anderson, C.W., & Smith, E.L. (1987). Teaching science. In Richardson-Koehler, V. (Ed.), *Educators' handbook: A research perspective* (84-111). New York: Longman, Inc.

Aslan, K. (2003). Eğitim fakültelerinin yeniden yapılandırılmalarına ilişkin bir değerlendirme. *Balıkesir Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, *6*(9), 23-37.

Ball, D. L. (1990). The mathematical understanding that pre-service teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal*, *90*(4), 449-466.

Ball, D.L., & McDiarmid, G.W. (1990). The subject matter preparation of teachers. In W.R. Houston (Ed.) *Handbook of Research on Teacher Education.* New York: Macmillan.

Baştürk, S. (2009a). Mutlak değer kavramı örneğinde öğretmen adaylarının öğrenci hatalarına yaklaşımları. *Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi Dergisi*, 3(1), 174-194.

Baştürk, S. (2009b). Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarına göre fen edebiyat fakültelerindeki alan eğitimi. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 10(3), 137-160.

Baştürk, S., & Dönmez, G. (2008). Üniversite mezunu yetişkinlerde sayı kavramı. *VIII. Uluslar arası Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*. Bolu: Abant İzzet Baysal Üniversitesi.

Bergthold, T.A. (1999). *Patterns of analytical thinking and knowledge use in students' early understanding of the limit concept.* Unpublished Doctoral Dissertation, University of Oklahama, Oklahama.

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuty: some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematics Education in Science and Techonolgy*, *32*(4), 487-500.

Boz, N. (2004). Öğrencilerin hatasını tespit etme ve nedenlerini irdeleme. *XIII. Ulusal Eğitim Bilimleri Kurultayı,* İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Malatya.

Canbazoğlu, S. (2008). *Fen bilgisi öğretmen adaylarının maddenin tanecikli yapısı ünitesine ilişkin pedagojik alan bilgilerinin değerlendirilmesi.* Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Enstitüsü, Ankara.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Eds.), *Advanced mathematical thinking* (153-166). Dordrect, The Netherlands: Kluwer Academic.

Çetin, N. (2009). The performance of undergraduate students in the limit concept. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *40*(3), 323-330.

Davis, R. B., & Vinner, S. (1986). The notion of limit; some seemingly an avoidable misconception stages, *J. Math. Behav*., *5*, 281–303.

Dönmez, G. (2009). *Matematik öğretmen adaylarının limit ve süreklilik kavramlarına ilişkin pedagojik alan bilgilerinin değerlendirilmesi.* Yayınlanmamış Yüksek Lisans tezi, Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü-İstanbul.

Eroğlu, G. (1999). *Gazi üniversitesine bağlı eğitim fakültelerinden mezun öğretmenlerin öğretmenlik davranışları ile ilgili yeterliklerine ilişkin görüşleri.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Fennema, E., & Franke, M.L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (147-164). New York: Macmillan.

Gökçe, E. (1999). *İlköğretim öğretmenlerinin yeterlikleri.* Yayımlanmamış Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Graber, A., & Johnson, M. (Eds.) (1991). *Insights into secondary school students' understanding of mathematics*. College Park, University of Maryland, MD.

Grossman, P.L., Wilson, W.M., & Shulman, L.S. (1989). Teachers of substance: Subject matter knowledge for teaching. In M.C. Reynolds (Ed.), *Knowledge base for the beginning teacher.* New York: Pergamon Press.

Gürdal, A., Şahin, F., & Çağlar, A. (2001). *Fen Eğitimi İlkeler Stratejiler ve Yöntemler.* İstanbul: Marmara Üniversitesi Yayınları.

Halim, L., & Meerah, S. M. (2002). Science teachers' pedagogical content knowledge and its influence on physics teaching. *Research in Science and Technological Education*, *20*(2), 215–227.

Hammer, D. (1996). Misconceptions or P-Primes: How may alternative perspectives of cognitive structure influence instructional perceptions and intentions? *The Journal of the Learning Science, 5*, 97-127.

Hashweh, M. (1987). Effects of subject matter knowledge in the teaching of biology and physics. *Teaching and Teacher Education, 33*(1), 47-63.

Huillet, D. (2005). Mozambican teachers' professional knowledge about limits of functions. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, (pp. 169-176). Melbourne: PME.

Jordaan, T. (2005). *Misconceptions of the limit concept in a mathematics course for engineering students.* Unpublished Master of Science Dissertation, University of South Africa.

Karasar, N. (2000). *Bilimsel Araştırma Yöntemi* (12. Basım). Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.

Kathlen, M.S. (1994). *The development and validation of a categorization of misconceptions in the learning of chemistry*. Unpublished Doctoral Dissertation, University of Massachusetts.

McDiarmid, G.W., Ball, D.L., & Anderson, C. (1989). Why staying ahead one chapter just won't work: Subject-specific pedagogy. In M.C. Reynolds (Ed.), *Knowledge base for the beginning teacher.* New York: Pergamon Press.

Miles, M.B., & Huberman, M.A. (1994). *An Expanded Sourcebook Qualitative Data Analysis*. London: Sage Publication.

Özmantar, M. F. (2008). Sonsuzluk kavramı: Tarihsel gelişimi, öğrenci zorlukları ve çözüm önerileri. M. F. Özmantar, E. Bingölbali ve H. Akkoç (Ed). *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* (151-180). Ankara: Pegem Kitabevi.

Özmantar, M.F, & Yeşildere, S. (2008). Limit ve süreklilik konularında kavram yanılgıları ve çözüm arayışları. M. F. Özmantar, E. Bingölbali ve H. Akkoç (Ed). *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* (181-221). Ankara: Pegem Kitabevi.

Reynolds, A., Haymore, J., Ringstaff, C., & Grossman, P. (1988). Teachers and curricular materials: Who is driving whom? *Curriculum Perspectives, 8*(1), 22-29.

Sanders, L.R., Borko, H., & Lockard, J.D. (1993). Secondary science teachers' knowledge base when teaching science courses in and out of their area of certification. *Journal of Research in Science Teaching, 30*(7), 723-736.

Saraç, C. (2006). Türk dili ve edebiyatı öğretmeni adaylarının fen-edebiyat fakültelerinde karşılaştıkları problemler. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *14*(2), 349-358.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*, 4–14.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, *18*, 371-397.

Smith, D.C. (1999). Changing our teaching: The role of pedagogical content knowledge in elementary science. In J. Gess-Newsome, & N. G. Lederman (Eds.), *Pedagogical content knowledge and science education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Stylianides, A.J., & Stylianides, G.J. (2006). Content knowledge for mathematics teaching: the case of reasoning and proving. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 5, (pp. 201-208). Prague: PME.

Szydlik, J.E. (2000). Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(3), 258-276.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151–169.

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. Grouws (Eds.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning.* (127-146). New York: MacMillan.

Williams, R.S. (1989). *Understanding of the limit concept in college calculus students*. Unpublished Doctoral Dissertation. University of Winconsin-Madison.

Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 219-236.

Yağbasan, R., Güneş, B., Özdemir, İ. E., Temiz, B. K., Gülçiçek, Ç., Kanlı, U., Ünsal, Y, & Tunç, T. (2005). *Konu Alanı Ders Kitabı İnceleme Kılavuzu – FİZİK*. Ankara: Gazi Kitabevi.

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2005). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Seçkin Kitabevi.

Yiğit, N., & Akdeniz A.R. (2004).Öğretmen adaylarının fen-edebiyat fakültesindeki Problemleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *12*(1), 77-84.