



## Examination of the Abstraction Process about Linear Equation of Two Sixth Grade Students

Dilek SEZGİN MEMNUN<sup>\*</sup>, Murat ALTUN

Uludag University, Bursa, TURKEY

Received: 12.12.2011

Accepted: 14.05.2012

---

*Abstract* –The abstraction process of the  $y=kx$  linear equation of two sixth grade students, who have upper level success in mathematics, has been researched by using RBC+C abstraction model. Firstly, research and application problems have been prepared in form, which would allow distinguishing, recognising, building-with, construction and consolidation cognitive activities with this aim. Prepared problems have been presented to the student group that constituted of two students during the applications and it has been provided that the students worked together on these problems. It has been examined through two different applications, which were performed at different times, whether the students have constructed the  $y=kx$  linear equation of themselves, or not. Besides, their situation of recognising and using the required preliminary knowledge during the abstraction process has been investigated. In conclusion, it has been understood that both of the students could recognise and build-with the preliminary knowledge, which is required for construction of the  $y=kx$  linear equation and that they have constructed the  $y=kx$  linear equation of themselves.

Keywords: Abstraction, RBC+C Abstraction Theory, equation,  $y=kx$  linear equation.

### Summary

#### Introduction

The RBC+C abstraction model, which has been put forward by Hershkowitz, Schwarz and Dreyfus in 2001 as *RBC (Recognizing - Building with- Construction) abstraction model* and has taken its final form as the *RBC+Cabstraction model(Recognizing - Building with- Construction and Consolidation)*, provides opportunities to study the knowledge abstraction process over four different observable cognitive actions (Dreyfus, 2007; Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus, 2001). It has three phases as the requirement for a new construction, emergence of the construction and consolidation of the construction (Dreyfus, 2007).In a

---

<sup>\*</sup> Corresponding author: Dilek Sezgin Memnun, Dr., Uludag University, Faculty of Education, Department of Elementary Education, Gorukle, Bursa, TURKEY.  
E-mail: dilekmemnun@gmail.com

sense, abstraction starts with the need for a new construction according to this model and it covers consolidation of the newly created entity in the future through recognising and building-with actions (Tsamir & Dreyfus, 2002). Because of that, RBC+C Abstraction Model is seen to be beneficial for understanding what may be blocking an individual's knowledge and problem solving process. The RBC+C model is studied in many researches (Dreyfus & Tsamir, 2004; Tsamir & Dreyfus, 2002), and used for explaining the abstraction process, despite the model is rather new.

The abstraction process of the  $y=kx$  linear equation of two sixth grade students, who are known to be successful in the mathematics education, has been researched by using RBC+C abstraction model in this study. It is thought that the conclusions obtained from this research have the importance in terms of determining the paths for observing the construction of the knowledge for learning of different mathematical subjects.

### **Methodology**

This research, which is performed as a case study, has been performed with the student group that constituted of two sixth class students from Süleyman Cüra İlköğretim Okulu, which was one of the typical primary schools in Bursa. These students were 12 years old and they are named as Yılmaz and Doğan in this study. They had not learned the  $y=kx$  linear equation knowledge when they participated in the study. It has been understood that they have been successful in mathematics due to their mathematics course` grades, and their teachers` statements.

*Two different application problems* have been included with the purpose of examining the construction process of  $y=kx$  linear equation knowledge, which have been allowed for studying similar situations and which have been created around *different events* that students could recognise from their daily life's. Care has been taken in designing these problems that they should have the form as to allow opportunity for the abstraction to be executed within the process, to contain a new structure, to be able to reveal mathematical thinking of the students and their knowledge abstraction processes and to allow for the opportunity to strengthen this construction or to let the students to use new structures for forming of the new abstractions.

Interviews/applications carried out in the 2009-2010 spring semester with the two students at the same time and in the same environment, in order that they could get fellow help by having chance to speak about the subject amongst themselves and thinking out loud. The applications performed separately for each of the applications and research problems that were contained within the scope of the research.

Applications have been performed in a room, which has been allocated by the school and where only both of the students and the researcher were in. Also, it has been recorded with the use of a video camera, which were located on a place that could also be seen by the students. The research problems have been directed to the students by the researcher / the participant observer. A verbal and a speechless communication of students with each other and with the researchers have been observed. The *semi-constructed* and *participant observer* data collection methods for qualitative researches, the *work sheets* and *video recordings* data collection tools have been used.

Analysis of the data has been performed by using *descriptive analysis*, which is one of the most commonly used qualitative data analysis methods. The student work sheets, which they have used to solve the problems, and the video recordings, which have been recorded during the interviews, have been analysed at this stage to figure out the knowledge construction process. The analysis of knowledge construction process has been executed by analysing the data group. The statements, which have been organized in systematic and clear form in the student groups that *contained two of the students*, in terms of the cognition point of view. The RBC theory has been taken as a reference for examining the knowledge abstraction process of students. A framework has been created, and this framework has been used to determine as to which data should be organized and presented under which themes. Since the RBC+C Abstraction Model has been used as a tool for examining the knowledge abstraction process, the themes for the analysis of the interview texts determined as; *recognising, building-with, construction and consolidation*.

### **Conclusion and Suggestions**

It has been understood that the students, who named as Yılmaz and Dogan in this study, could recognise and build-with the algebraic operations, table and graphic knowledge. These students could *recognise and build-with the notion of equation with one unknown* and *could construct and consolidate the notion of equation with two unknowns*. The students have *consolidated the notion of equation with two unknowns in the form of  $y=kx$* . They could write down an *equation with two unknowns in the form of  $y=kx$*  by using this notion and use this expression while solving the problems. It has been understood that Doğan and Yılmaz could *recognise the notions of line segment, ray and line* and they could relate the graphs, which they have drawn, with the equations, which they have written down. As the conclusion, we could say that these two students have constructed the *notion of equation with two unknowns* in the form of  $y=kx$ .

# İki Altıncı Sınıf Öğrencisinin Doğru Denklemine Oluşturma Sürecinin İncelenmesi

Dilek SEZGİN MEMNUN<sup>\*</sup>, Murat ALTUN

Uludağ Üniversitesi, Bursa, TÜRKİYE

Makale Gönderme Tarihi: 12.12.2011

Makale Kabul Tarihi: 14.05.2012

Özet – Bu çalışmada, matematik eğitiminde başarılı oldukları bilinen iki altıncı sınıf öğrencisinin  $y=kx$  biçimindeki doğru denklemi oluşturma süreci bilişsel eylemler üzerinden bilgi oluşumu sürecinin incelenmesine fırsat veren RBC+C soyutlama modeli aracılığı ile incelenmiştir. Bu amaçla öncelikle tanıma, kullanma, oluşturma ve pekiştirme bilişsel eylemlerinin fark edilmesine imkân verebilecek tarzda araştırma ve uygulama problemleri hazırlanmıştır. Ardından, iki öğrencinin oluşturduğu öğrenci grubuna hazırlanan problemler sunulmuş ve öğrencilerin bu araştırma problemleri üzerinde birlikte çalışmalarını sağlanmıştır. Bu öğrencilerin bu araştırma problemleri üzerinde çalışmalarını ile gerçekleştirilen iki farklı uygulama kapsamında, öğrencilerin  $y=kx$  biçimindeki doğru denklemi oluşturup oluşturamadıkları araştırılmış ve bu oluşturma esnasında gerekli olan ön bilgileri tanıyıp kullanabilme durumları incelenmiştir. Yapılan incelemeler sonucunda, iki öğrencinin de  $y=kx$  biçimindeki doğru denklemi oluşturmaları için gerekli ön bilgileri tanıyıp kullanabildikleri ve doğru denklemi oluşturdıkları anlaşılmıştır.

Anahtar kelimeler: Soyutlama, RBC+C Soyutlama Modeli, denklem bilgisi, doğru denklemi.

## Giriş

*Soyutlama* kavramı tarih boyunca birçok bilgi filozofu tarafından ele alınmış olan bir kavram olmakla birlikte, bu kavramın araştırmacılar arasında tek bir anlamı üzerinde tam bir fikir birliği varılmamıştır (Hazzan, 1999; Ohlsson ve Regan, 2001; Tsamir ve Dreyfus, 2002). Eğitim kuramcıları tarafından da araştırılan bir kavram olan *soyutlama* üzerine son yıllarda yapılan tartışmalar sonucunda, soyutlama fikri günümüzde *bilişsel* ve *sosyokültürel* olmak üzere iki farklı bakış açısıyla yorumlanmış ve soyutlamayı bu bakış açıları ile ele alan farklı soyutlama modelleri geliştirilmiştir.

Somuttan soyuta geçiş süreci olarak bilinen soyutlamayı *bilişsel* ve *sosyokültürel* bakış açıları ile anlamlandırmayı amaçlayan modeller incelendiğinde; soyutlamayı sosyokültürel

\*İletişim: Dilek Sezgin Memnun, Dr., Uludağ Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, Matematik Eğitimi ABD, Görükle, Bursa, TÜRKİYE.  
E-mail: dilekmemnun@gmail.com

bakış açısı ile ele alan modeller arasında Hershkowitz, Schwarz ve Dreyfus tarafından 2001 yılında ortaya atılan *RBC (Recognizing - Building with- Construction) Soyutlama Modeli* dikkati çekmektedir. Matematiksel soyutlama süreçlerinin analiz edilmesi amacıyla ortaya atılan bu model, 2007 yılında Dreyfus tarafından soyutlama sürecine *pekiştirme (consolidation)* bilişsel eyleminin de eklenmesiyle *RBC+C Soyutlama Modeli* şeklindeki son halini almıştır. RBC+C soyutlama modeli oldukça yeni bir soyutlama modeli olmasına rağmen birçok araştırmacı tarafından benimsenmiş ve soyutlama sürecini açıklamada (Dreyfus, Hershkowitz ve Schwarz, 2001a ve 2001b; Hershkowitz ve diğ., 2001; Hershkowitz, 2004; Özmantar ve Monaghan, 2007; Özmantar ve Roper, 2004) kullanılmıştır. Üstelik bu konuda yapılan araştırmalar da, bu modelin uygun modifikasyonlar yapılarak birçok farklı konuya uygulanabileceğini de göstermiştir (Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson ve Zaslavsky, 2006).

### ***RBC+C Soyutlama Modeli***

Soyutlama için diyalektik yaklaşımı benimseyen bu araştırmacılar soyutlamayı “önceden edinilmiş matematiksel bilgilerin yeni bir matematiksel yapı oluşturmak üzere dikey olarak yeniden organizasyonu aktivitesi” şeklinde tanımlamışlardır (Hershkowitz ve diğ., 2001; Dreyfus ve diğ. 2001a ve 2001b; Dreyfus, 2007). Bu araştırmacılara göre, soyutlamanın gerçekleşmesi için yeni bir matematiksel yapıya ulaşmak için eski yapıların yeniden düzenlenmesi, bunlar arasında bağlantı ve ilişki kurulması, bunların tek bir matematiksel düşünce süreci içinde birleştirilmesi gerekmektedir (Dreyfus, 2007).

Bireylerin düşüncelerinin eylemlere dayanılarak tanımlandığı bu modelde, soyutlamanın *nasıl gözlenebileceği* sorusuna karşılık olarak, bilişsel eylemlerin *gözlenebileceği* (Dreyfus ve Tsamir, 2004; Dreyfus, 2007) düşüncesi ile ortaya atılan dört farklı *gözlenebilir bilişsel eylem* [*tanıma* - recognizing, *kullanma* - building with, *oluşturma* - construction ve *pekiştirme* - consolidation] üzerinden bilgi oluşturmaya yani soyutlama sürecinin incelenmesine fırsat verilmektedir. Bu dört eylem (*tanıma*, *kullanma*, *oluşturma* ve *pekiştirme*) de bilişsel yani epistemik eylemlerdir (Dreyfus ve Tsamir, 2004; Dreyfus, 2007; Hershkowitz ve diğ., 2001). Bu modelde yer alan bilişsel eylemler belirli yollarla birbiri içinde meydana gelmektedir. Yani, bu eylemler bazen sıralı eylemler halinde olabilecekleri gibi, bazen biri diğerinin tamamlayıcısı olabilmektedirler (Dreyfus, 2007).

RBC+C modeline uygun *soyutlama* yeni bir yapı için ihtiyaç, yapının ortaya çıkışı ve yapının pekiştirilmesi olmak üzere üç aşamalıdır (Dreyfus, 2007). Yani, bu modele göre soyutlama yeni bir yapıya ihtiyaç duyulması ile başlar, yeni soyutlanmış bir varlığın

oluşturulması ve yeni oluşturulan varlığın ileride tanıma ve kullanma eylemleri yoluyla sağlanlaştırılmasını yani pekiştirilmesini kapsar (Tsamir ve Dreyfus, 2002).

Bu araştırma kapsamında gerçekleştirilecek olan öğretim esnasındaki değerlendirmelerde, bireylerin *gözlenebilir dört bilişsel eylem üzerinden* bilgiyi oluşturmaları süreç içerisinde incelenecek ve teorik yapının öngördüğü müdahalelerde bulunularak öğrenme sürecinin nasıl ilerlediği *RBC+C soyutlama modeli* aracılığı ile araştırılacaktır.

### ***Araştırmanın Amacı ve Önemi***

Son yıllarda özellikle de ülkemizde yapılan araştırmalar incelendiğinde yeni öğretim tasarımları oluşturmaya, tasarlanan veya var olan öğretim/öğrenme biçimlerinin değerlendirmesini yapmaya yönelik nitel araştırmaların sayısında hızlı bir artış olduğu görülmektedir. Bu araştırmaların çoğunda, yapılan analizlerin içerik analizi, betimsel analiz vb. yöntemler kullanılarak gerçekleştirildiği anlaşılmaktadır. Bununla birlikte, yapılan bu araştırmaların öğrenme sürecini ve öğrenmenin niteliğini incelemeye etkili oldukları fakat yeterli olmadıkları görülmektedir. Bu durum ise, bireylerin bilgiyi soyutlamalarını konu edinen, soyutlama esnasında izledikleri yolları ve bilgi oluşturma süreçleri derinlemesine inceleyen farklı çalışmalara olan ihtiyacı göstermektedir.

Bu araştırmada, yapılan bu tür araştırmalardan *farklı olarak* bazı matematik öğretim uygulamaları esnasındaki *bilgi oluşumunun* yani *soyutlamanın* niteliğinin değerlendirilmesine yer verilecektir. Araştırma, bu yönüyle yapılan birçok araştırmadan farklılık göstermektedir ve bu yönüyle önemlidir. Üstelik 2005 yılı İlköğretim Matematik Dersi Programı'nda da, matematikle ilgili bilgilerin kavramsal temellerinin oluşturulmasına daha çok zaman ayırma; böylece kavramsal ve işlemsel bilgi ve beceriler arasında ilişkiler kurma önemsenmiştir. Bu yapılırken de öğrencilerin somut deneyimlerinden, sezgilerinden yararlanarak *matematikselsel anlamları oluşturmalarına ve soyutlama yapabilmelerine* yardımcı olma amaç edinilmiştir (Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, 2005).

Bu araştırma kapsamındaki bilgi oluşumu sürecinin incelenmesinde, sosyo-kültürel soyutlama modellerinden biri olan *RBC+C soyutlama modeli* kullanılacaktır. Bu modelde; matematiksel yapıların ortaya çıkışı, bağlantılı problemlerin yer aldığı uygulamalar dizisi içinde bu yeni yapıların pekiştirilmesi, bireylerin tek başına çalışma veya grup çalışması yapabileceği ortamı içeren farklı işbirlikli ve bireysel sosyal ortamlarda öğrenme göz önünde bulundurulmaktadır (Dreyfus, 2007). Ayrıca, bu model bireylerin bilgiyi öğrenme süreçlerinin analizine imkân vermekte ve sürecin analizini oldukça kolaylaştırmaktadır. Araştırmacıya *tanıma, kullanma, oluşturma ve pekiştirme* bilişsel eylemleri üzerinden soyutlama sürecinin



inceleme ve bu eylemlerin birbiriyle ne şekilde iç içe olduğunu anlama fırsatı da tanımaktadır. Bu durum ise, bireylerin bilgi oluşturma süreçlerinin bu model aracılığıyla analizinin geçerli ve etkili olacağını gösterir niteliktedir.

Araştırma kapsamında, öğrenme ortamlarında gerçekleştirilen öğretim durumlarının bilgi oluşumu açısından incelenmesi söz konusudur ve bu durum *süreç değerlendirmeyi* gerektirmektedir. Bu nedenle, araştırmada yer alacak öğrenme denemelerinin tüm matematik konularını kapsayacak şekilde düzenlenmesi ve bu öğretimlerin gerçekleştirilmesi imkânsızdır. Bu durum, araştırmancının belli bir matematik konusu ya da konuları üzerinden gerçekleştirilmesini gerektirmektedir.

Birçok araştırmada, Analitik Geometri'ye ilişkin doğru denklemi konusunun önemli olmakla birlikte öğrencilerin anlamakta zorluk çektikleri ve bazı kavram yanlışlarına sahip oldukları kavramları kapsadığı ortaya koyulmuştur (Birgin, 2006; Erbaş, Çetinkaya ve Ersoy, 2009). Bazı araştırmalarda da (Birgin ve Kutluca, 2006; Turanlı, Keçeli ve Türker, 2007), doğru denklemi ile ilgili olarak öğrencilerde karşılaşılan yanlışların fonksiyonlar, karmaşık sayılar, limit, türev ve integral gibi lise müfredatının ilerleyen konularında öğrenciler için ciddi öğrenme zorluklarını da beraberinde getirebildiği, yani yanlış anlamaların ilerde daha büyük yanlış anlamalara yol açabileceği açıklanmıştır. Bunun yanında, doğru denklemi sosyal değer taşıyan problemlerin ortaya koyulması için oldukça elverişlidir. Buna karşın, bu alanda yapılmış araştırmaların yetersizliği de dikkati çekmektedir. Ayrıca, yapılan bazı araştırmalarda (Erbaş ve diğ., 2009) bu konuda daha geniş boyutlarda ve farklı örneklemelerden derlenecek verilere olan gereksinim vurgulanmış, başarılı ve başarısız öğrencilerin davranış ve düşünme yapılarının incelenmesinin önemi açıklanmıştır. Bu nedenle, bu araştırmada Analitik Geometri'ye ilişkin  $y=kx$  biçimindeki doğru denklemi bilgisinin uygun öğrenme ortamlarında öğrenimi esnasındaki *bilgi oluşumunun* (*soyutlamanın*) niteliğinin değerlendirilmesi amaçlanmıştır.

Bu araştırmadan elde edilecek sonuçlar, doğru denkleminin öğreniminde öğrencilerin bilgi oluşumu için izlenecek yolları belirleme açısından önem arz etmekte olup, araştırma bu yönüyle önemlidir. Ayrıca, bu araştırmada düzenlenen öğrenme ortamlarında öğrencilerin bilgi oluşumu süreçlerinin incelenmesi, ilköğretim ders programlarının uygulamalarında öğrencilerin bilgi oluşturmalarının nasıl gerçekleşeceğini tespit edilmesi konusunda örnek teşkil edebilir. Üstelik bu şekilde *RBC+C soyutlama modeli* güçlendirilebilir ve daha geçerli hale de getirilebilir. Çünkü bu geçerli hale getirme yani matematiksel öğrenme üzerindeki

araştırma aynı zamanda örnekler üzerinde temellenmektedir. Yani, örnekler modelin kurulmasında merkezi ve önemli bir rol oynamaktadır (Bills ve diğ., 2006).

### Yöntem

Bu bölümde, iki altıncı sınıf öğrencisinin  $y=kx$  biçimindeki doğru denklemi bilgisini oluşturma sürecinin RBC+C soyutlama modeli aracılığı ile incelenmesi amacıyla gerçekleştirilen analizlere ve bu analizlere ilişkin olarak yapılan yorumlara yer verilmiştir.

#### *Araştırma Modeli*

Bu çalışmada, 1980’li yıllarda eğitim araştırmalarındaki dinamikleri ve süreci ayrıntılı biçimde açıklamak amacıyla eğitimde sıklıkla kullanılmaya başlanan (Merriam, 1988; Akt. Vural ve Cenkseven, 2005) *örnek olay incelemesine* yer verilmiştir.

#### *Araştırmaya Katılan Öğrenciler*

Bu araştırma, 2009-2010 eğitim-öğretim yılında Bursa ilinde bulunan tipik ilköğretim okullarından biri olan Süleyman Cüra İlköğretim Okulu’nda öğrenim görmekte olan ve matematik ders notları ile öğretmenlerinin söylemlerinden matematik dersinde başarılı oldukları anlaşılan araştırmaya katılma konusunda gönüllü iki altıncı sınıf öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir. Araştırmada Yılmaz ve Doğan olarak adlandırılan 12 yaşındaki bu öğrenciler, doğru denklemi bilgisini henüz öğrenmemiş olan yani bu konu üzerinde çalışmamış olan öğrencilerdir.

#### *Veri Toplama Yöntemleri*

Bu araştırma kapsamında yapılan uygulamalarda *yarı yapılandırılmış görüşme* ile *katılımcı gözlem* yöntemleri kullanılmıştır.

Bu araştırma kapsamında yapılan uygulamalarda, öğrencilere yapılandırılmış problemler yönlendirilmiştir. Bununla birlikte, bu uygulamalarda araştırmacı tarafından öğrencilerin önceden edindiği matematiksel yapıları tanıma ve kullanmalarına ilişkin yönlendirmeler yapılması ve gerekli durumlarda öğrencilere “düzenlediğin tablo istenilen bilgiyi gösteriyor mu?”, “grafik çizimine neden bu şekilde başladın?” gibi öğrencilerin düşünme biçimlerini yansıtmalarını ve açıklamalarını sağlayacağı düşünülen yapılandırılmamış sorular yönlendirilmesi planlanmıştır. Bu nedenle, bu çalışmada ne tam yapılandırılmış görüşme kadar katı, ne de yapılandırılmamış görüşme kadar esnek olan yani bu iki uç arasında yer alan *yarı yapılandırılmış görüşme* yöntemi uygulanmıştır. *Katılımcı gözlemde* ise, gözlem yapan birey gözlenenlerle birlikte olup onlardan biri gibi



davranmaktadır ve bu sayede davranışların nedenleri daha derinliğine ve daha geçerli bir biçimde öğrenilebilmektedir (Karasar, 2005). Bu yöntem aracılığı ile araştırmaya katılan öğrencilerin problemlerin çalışıldığı uygulama sürecindeki davranışları gözlemlenmiştir.

### ***Veri Toplama Araçları***

Örnek olay çalışmasında kullanılan veri toplama araçları, üzerinde örnek olay çalışmasının yürütüldüğü problemlerin bulunduğu ve öğrencilerin kendilerine yöneltilen problemlerle ilgili çözümler yaptıkları *çalışma kâğıtları* ile *görüşme sırasında kaydedilen video kayıtlarıdır*.

### ***Uygulama Problemlerinin Belirlenmesi***

Bu araştırmada, doğru denkleme ilişkin iki değişken arasındaki ilişkinin doğrusallığı bilgisinin oluşturulma sürecinin incelenmesi amacıyla,  $y=kx$  biçimindeki iki bilinmeyenli denkleminin uygulamalarını içeren, benzer durumların incelenmesine fırsat veren ve öğrencilerin günlük yaşamdan tanıdıkları *farklı olaylar* üzerinden kurgulanan *iki farklı uygulama problemine* yer verilmiştir. Bu problemlerin, soyutlamanın süreç içinde gerçekleşmesine fırsat tanıyacak, yeni bir yapı içerecek, öğrencilerin matematiksel düşüncelerini ve bilgiyi oluşturma süreçlerini açığa çıkarabilecek ve bu yapının sağlamlaştırılmasına imkân verecek ya da yeni soyutlamaların oluşumunda yeni yapıları kullanma konusunda öğrencilere izin verecek şekilde tasarlanmasına özen gösterilmiştir.

İkisi de  $y=kx$  biçimindeki doğru denkleminin oluşturulmasına yönelik olarak hazırlanmış olan bu araştırma ve uygulama problemlerinde, öğrencilerden sonuca ulaşmak için farklı olaylarda verilen bilgilere göre liste yapmaları, bu listedeki verileri kullanarak tablo oluşturmaları, tablodan yararlanarak grafik çizmeleri, bu grafik hakkında yorum yapmaları, uygulamada yer verilen farklı ve benzer sorulardan yararlanarak öğrencilerin sonuca ulaşmak için genelleme yapmaları ve ardından da bunu matematiksel olarak ifade etmeleri sağlanmaktadır. Yapılan bu uygulamaların ardından, öğrencilerin doğru denklemi bilgisini oluşturmaları beklenmektedir.

### ***Verilerin Toplanması***

Akran yardımı alabilmeleri, aralarında konuyu konuşma fırsatı bulabilmeleri ve sesli düşünebilmeleri amacıyla, görüşmeler/ uygulamalar bu araştırmaya katılan iki öğrenci ile aynı anda ve aynı ortamda 2009-2010 eğitim-öğretim yılı bahar döneminde yapılmıştır. Örnek olay incelemesine ilişkin uygulamalar, araştırma kapsamında yer alan uygulama ve araştırma problemlerinin her biri için ayrı ayrı gerçekleştirilmiştir.

Bu uygulamalar esnasında, öğrencilerin düşüncelerini açığa çıkarmak için gerekli uygun görülen araştırma problemleri araştırmacı yani katılımcı gözlemci tarafından öğrencilere yöneltilmiş, öğrencilerin birbirleriyle ve araştırmacılarla olan sözlü ve sözsüz iletişimlerini gözlenmiştir. Uygulamalar içinde sadece *öğrenci çiftinin* ve *araştırmacının* bulunduğu, okul tarafından tahsis edilen bir odada gerçekleştirilmiş ve öğrencilerin de görebileceği bir yere yerleştirilmiş olan bir video kamera sayesinde kayıt altına alınmıştır. Ayrıca, örnek olay çalışması sırasında kendilerine yöneltilen sorulara doğru ya da yanlış cevap vermelerinin önemli olmadığı öğrencilere açıklanmış, düşündükleri ve akıllarına gelen fikirlerin yanlış olabileceğini düşünmeleri halinde bile bu fikirlerini açıkça belirtmeleri istenmiş ve verecekleri cevapların ders notlarını hiçbir şekilde etkilemeyeceği açıklanmıştır.

Uygulama esnasında, öğrencilere *çalışma kâğıdı* verilmiş ve bu sayede öğrencilerin bilgi oluşturma süreçlerini açıklamaya katkısı olacağı düşünülen yazılı bilgilere de ulaşılmıştır. Araştırmacı yani katılımcı gözlemci tarafından, gerekli görülen durumlarda öğrencilerin düşüncelerini ve düşünme biçimlerini açığa çıkarmak için zaman zaman sorular yöneltilmiştir. Ayrıca, görüşmelerde öğreticinin uygulama esnasındaki rolü de dikkate alınmıştır.

### ***Verilerin Analizi***

Verilerin analizi ve yorumlanması nitel veri analizi türlerinden *betimsel analiz* ile gerçekleştirilmiştir.

Bu aşamada, öğrencilerin problemleri çözdüğü çalışma kâğıtları ile görüşme sırasında kaydedilen video kayıtları, bilgi oluşturma süreci bakımından analiz edilmiştir. Bilgi oluşturma sürecinin analizi *ikişer öğrenciden oluşan* öğrenci gruplarında sistematik ve açık bir şekilde düzenlenmiş veri grubunun yani ifadelerin bilişsel açıdan analiz edilmesi ile gerçekleştirilmiştir.

Öğrencilerin bilgi oluşturma süreçlerini incelemede RBC kuramı referans alınmıştır. Araştırmanın kavramsal çerçevesinden yola çıkılarak bir çerçeve oluşturulmuş ve bu çerçeveye göre verilerin hangi temalar altında düzenleneceği ve sunulacağı belirlenmiştir. Bilgi oluşturma süreçlerini incelemede RBC+C Soyutlama Modeli bir araç olarak kullanıldığından, yazılı görüşme metinlerinin analizi için belirlenmiş olan temalar; *tanıma, kullanma, oluşturma* ve *pekiştirme*dir.

Sürecin diyalektik yapısı da dikkate alınarak, her bir problemin çözümünde bu bilişsel eylemler *birlikte* gözlenmiş ve kaydedilmiştir. Yazılı görüşme metinlerinin analizi, bu dört bilişsel eyleme göre gerçekleştirilmiştir. Son olarak da, daha önce ayrıntılı bir biçimde

tanımlanan ve sunulan bulgulara anlam kazandırmak, bu bulgular arasındaki ilişkileri açıklamak ve bir takım sonuçlar çıkarmak üzere verilere dayalı olarak yorumlar yapılmıştır.

### **Bulgular ve Yorum**

Bu bölümde araştırmaya katılan öğrenci grubunun  $y=kx$  biçimindeki doğru denklemini oluşturma sürecine ilişkin bulgulara ve bu konuya ilişkin yapılan değerlendirmelere yer verilmiştir. Bu aşamada, öğrenci grubunun doğru denklemi bilgisini oluşturabilmeleri için gerekli olan bilgileri *tanıma* ve *kullanmaları* incelenmiş, doğru denklemini *oluşturup oluşturamadıkları* belirlenmeye çalışılmıştır. Yılmaz ve Doğan'ın yapılan görüşmelerde  $y=kx$  doğru denklemi bilgisini oluşturma süreci *tanıma*, *kullanma*, *oluşturma* ve *pekiştirme* eylemleri dikkate alınarak her bir araştırma problemi için ayrı ayrı değerlendirilmiş ve aşağıda sunulmuştur (Y: Yılmaz, D: Doğan, A: Araştırmacı). Bu öğrenciler, doğru denklemi bilgisini oluşturma sürecinin incelendiği uygulama problemlerinin birincisine 21 dakika 12 saniye, ikincisine 13 dakika 17 saniye zaman harcamışlardır.

#### ***Yavru Kaplumbağa Problemine İlişkin Bilgi Oluşturma Süreci***

Araştırmacı, 3 farklı araştırma ve uygulama probleminden birincisi olan *Yavru Kaplumbağa* problemini içeren çalışma kâğıdını öğrencilere vermiş ve öğrencilerden problemi okumalarını istemiştir.

Çalışma kâğıdında metnin ilk bölümü “*Bir yavru kaplumbağa yürüme denemeleri yapıyor. Bu yavru kaplumbağa dakikada 3 m. yürüyebiliyor. Öyle bir **tablo** düzenleyiniz ki, bu yavru kaplumbağanın yürüyüşte harcadığı zamana göre yürüdüğü yolu gösterebilir.*” şeklindedir. Yılmaz metni okurken Doğan da çalışma kâğıdına eğilmiş ve bir taraftan arkadaşını dinlerken, bir taraftan da metni içinden okumuştur. Ardından, kısa bir müddet sessizlik olmuştur. Yılmaz bir taraftan eli başında düşünüp bir taraftan da çalışma kâğıdına bakarken, Doğan problem üzerinde konuşmaya başlamıştır. Kısa bir müddet ne şekilde çalışacakları üzerine yaptıkları tartışmada tabloya yazılacak olan değişkenler ve bu değişkenlere atanacak değerler üzerinde konuşmuşlardır. Aşağıda, doğru denklemi bilgisinin oluşturulması süreci bakımından önemli olan bu görüşme metinlerinde yer verilmiştir.

111D: O zaman dakikada 3 m. yürüyorsa üçer üçer arttırabiliriz bunu... (Bu esnada Yılmaz başını sallayarak arkadaşının söylediğini onaylamıştır.)

Buraya (yukarı üst köşeyi göstererek) değil de, buraya (daha aşağıda bir noktayı göstererek) buraya zamanı yazalım... Buraya da (sağ üst köşeyi göstererek) Eee...

(Doğan'ın burada tablo yerine grafik düşündüğü anlaşılmaktadır. Bu esnada Yılmaz hareketlenmeye başlamıştır.)

- 112Y: Grafik mi çizeceğiz, tablo mu? (demiş ve ardından çalışma kâğıdına eğilerek çizmeye başlamıştır)
- (Doğan bir müddet arkadaşını izlemiş ve sonra da Yılmaz'ın kaldığı yerden çizimi tamamlamıştır.)
- 113D:(Yılmaz'a çalışma kâğıdında göstererek...) Şimdi buraya 5 dakikada yürüdüğü yolu yazsak, buraya 10 dakikada ve buraya da 30 dakikada yürüdüğü yolu yazsak olur mu? (dönerek arkadaşına bakmış ve bu konudaki fikrini almaya çalışmıştır.)
- 114Y: Önce 1 dakika var onu yazsak... (derken elini çenesine koymuş ve sonra da elini çekip hareketlenmiştir.) 5 dakikada...
- 115D: O zaman 5, 10, 15 (çalışma kâğıdında göstererek) gibi mi gidelim yoksa daha büyük mü? (demiş elini çekip düşünmeye başlamıştır)
- (Bu esnada Yılmaz da çalışma kâğıdına dikkatlice bakmaktadır. Bir müddet sessizliğin ardından, Yılmaz konuşmaya ve Doğan da arkadaşına bakmaya başlamıştır.)
- 116Y: Düşündüm... (derken hareketlenmiştir ve) ...5 iyi... (hareketlerinden Yılmaz'ın kararsız kaldığı anlaşılmaktadır)
- 117D: Bu ilk başlıklara tablonun anlaşılması için zamanı yazalım... (iki öğrenci de kalemleri ile çalışma kâğıdına eğilirler ve) yaz o zaman... (diye arkadaşına izin vermiştir.)
- (Yılmaz da hemen yazmaya başlamıştır. Doğan ise çalışma kâğıdına eğilmiş ve arkadaşının yazdığını kontrol etmektedir.)
- 118Y: (Tablodaki diğer boşluğu göstererek) Buraya ne yazalım?
- 119D: Oraya da yürüdüğü yol olarak metre yazalım...
- 120Y: O zaman, zaman bölümüne de dakika yazalım (demiş ve yazmaya başlamıştır. Rakamları yazmadan arkasına dayanmıştır.)
- 121D: Beşi yazalım o zaman. (Yılmaz tekrar çalışma kâğıdına eğilmiş ve yazmaya devam etmiştir. Doğan sessizce elini kulağına götürmüş ve içinden hesaplama yapmaya çalışmıştır. Ardından, tekrar konuşmuştur.) Onbeş...(tereddütlüdür)
- 122Y: Buraya 15 gelmez mi? (demiş ve hemen yazmaya başlamıştır)
- 123D: Evet... (Yılmaz'ın yazma işlemini tamamlamasının ardından konuşmaya devam etmiştir.) 15, 10, 30... (derken halen kulağını kaşımaktadır) (Yılmaz da yazmaya devam etmektedir.) 15... 45. (demiştir.)
- (Yılmaz yazma işlemini bitirmiş ve arkasına yaslanmış. Doğan eli yanağında konuşmaya başlamıştır.)
- 124D: Peki, buraya ne gelmesi lazım... (derken çalışma kâğıdında bir yeri arkadaşına göstermiştir. Yılmaz da araştırmacıya dönmüştür. Doğan konuşmaya devam etmiştir.) Hiçbirşey...(Biraz düşünceli olduğu görülmüştür.)

Doğan'ın 111D'deki ifadesinden grafik ile tabloyu karıştırdığı düşünülmektedir. Yılmaz'ın yaptığı çizim ile 112Y, 120Y ve 122Y'deki ifadelerinden ve Doğan'ın 113D, 117D, 121D ve 123D'deki ifadeleri ile arkadaşına çizim konusunda yaptığı yardımlardan, iki öğrencinin de *tablo bilgisini tanıyıp kullandıkları* görülmüştür. Birlikte tamamladıkları tablodan (Şekil 1) ve 122Y ile 123D'deki ifadelerinden bu öğrencilerin *kat ilişkisini* de doğru bir biçimde kullandıkları görülmüştür. Bununla birlikte; öğrencilerin kaplumbağanın belirlenecek herhangi bir zamanda yürüdüğü yolu göstermesi amacıyla oluşturulan tabloda

(Şekil 1) her dakikada değil de belli dakikalarda kaplumbağanın yürüdüğü yolu gösteren değerlerin yer aldığı ve 111D, 113D, 115D, 121D, 123D ve 122Y'deki ifadelerinden de *tahmin ve kontrol yöntemi* kullanmayı tercih ettikleri anlaşılmıştır. Bu aşamada, Yılmaz'ın 114Y ve 116Y'deki ifadelerinden başlangıçta tereddütte kaldığı fakat sonuçta bu konuda arkadaşını desteklediği de anlaşılmaktadır. Aşağıda, Yılmaz ile Doğan'ın birlikte çizdikleri tablo şekli görülmektedir.

Zaman (d)	Yol (m)
5	15
10	30
15	45

**Şekil 1.** Yılmaz ile Doğan'ın İlk Araştırma Problemi için Birlikte Oluşturdukları Tablo

Araştırma problemin ikinci bölümünde yer alan “*Bu yavru kaplumbağanın yürüyüşte harcadığı zaman ile yürüdüğü yol arasında sizce nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.*” şeklindeki metni Doğan okumuş ve Yılmaz ise dinlemiştir. Ardından, yine kısa bir süre sessizlik yaşanmıştır. Sonrasında, Doğan'ın soruyu sessiz bir şekilde yeniden okuduğu gözlenmiştir. Bununla birlikte; Doğan'ın burada soruyu okuyan kişi kendisi olmasına rağmen soruyu yeniden okuma ihtiyacı duymuştur ki, bu durum soruyu zihninde anlamlandırmada zorlandığına işaret edebilir. Bu da, bir önceki bölümde tablo ile grafiği karıştırmadığını yani sadece soruyu anlamlandırmadığını düşündürebilir. Ardından, eline kalemını almış ve kalemle çalışma kâğıdındaki tabloda sağ ve sol kısımları göstererek konuşmaya başlamıştır. Aşağıda bu görüşme metinleri görülmektedir.

129D: (Çalışma kâğıdında göstererek) Burası ile şurası arasındaki farkı soruyor.

(Kısa bir müddet sessizlik yaşanmıştır. Ardından, Yılmaz araştırmacıya ve arkadaşına bakarak konuşmuştur.)

130Y: ...üç kat o zaman... Öyle değil mi?

131D: Olabilir... (yerinde hareketlenmiştir) Bu kaplumbağa bu kadar yürüyorsa onun da üç katı yol... eee... metre yürümüş oluyor o zaman. Bu kaplumbağa... (eline kalemiyle tabloyu göstermektedir ve konuşmaya devam eder) ...beş dakika harcıyorsa o beş dakikanın üç katını yola harcıyor o zaman... (demiş ve onaylatmak için arkadaşına bakmıştır) ...yaz... (demiştir ve bu esnada iki öğrenci de hareketlenmiştir.)

132D: ...eee...

(Ardından, Yılmaz yazmak üzere eğilmiştir ve birlikte cevap olarak çalışma kâğıdına ne yazacaklarını bir müddet düşünmüşlerdir.) Bir süremiz var mı? (diye araştırmacıya dönerek sormuştur)

133A: (Araştırmacı çalışma kâğıdını işaret ederek) Hayır yok... Yalnız cevabı yazarken buradaki metinden yararlanabilirsiniz. (derken Doğan lafa karışmış ve konuşmaya başlamıştır.)

(Yılmaz ise yazmak amacıyla çalışma kâğıdına yönelmiştir.)

134Y: O zaman, yürüyüşte kaplumbağanın harcadığı zamanın... (cevabı söylerken bir taraftan da çalışma kâğıdına yazmaktadır.)

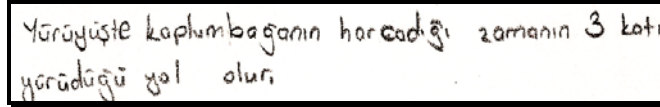
135D: ...3 katı... (bir taraftan çalışma kâğıdına eğilmiş ve arkadaşının yazdıklarını kontrol etmektedir)

136Y: ...yol olur. (yazmaya devam etmektedir)

137D: ...yürüdüğü yol olur.

(Yılmaz bu esnada arkadaşının söylemini de çalışma kâğıdına yazmak istemiş ve bir miktar silip düzeltmiştir.)

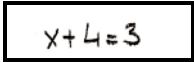
Öğrencilerin burada ne yazacakları konusunda düşüncelerinden düşüncelerini matematiksel anlamda yazıya aktarma konusunda zorlandıkları düşünülmektedir. Yılmaz'ın 130Y ve 136Y'deki ve Doğan'ın 131D ve 135D'deki ifadelerinden, iki öğrencinin de *kat ilişkisini* kolayca tanıyıp kullandıkları anlaşılmıştır. Aşağıdaki şekilde, öğrencilerin çalışma kâğıdına yazdıkları açıklama notu görülmektedir.



Yürüyüşte kaplumbağanın harcadığı zamanın 3 katı yürüdüğü yol olur.

### Şekil 2. Yılmaz ve Doğan'ın Birinci Araştırma Problemi için Yaptıkları Açıklama

Ardından, araştırma ve uygulama metninde yer alan ve yukarıda açıkladıkları kat ilişkisine ait bir denklem yazmaları beklenen üçüncü bölüme geçilmiştir. Bu bölümde yer alan soru metni, “Yukarıda verilen tablodan da yararlanarak öyle bir **denklem** yazınız ki, bu denklem kullanılarak bu yavru kaplumbağanın yürüyüşte harcadığı zamana göre yürüdüğü yol kolaylıkla bulunabilsin.” şeklindedir ve öğrencilerden yukarıda açıkladıkları kat ilişkisini gösteren bir denklem yazmaları istenmiştir. Bu bölümle ilgili olarak çalışma kâğıdında yer alan metni, iki öğrencide önce sessizce okumuş ve ardından bir müddet düşünmüştür. Bunun üzerine, araştırmacı öğrencilerden metni sesli bir şekilde yeniden okumalarını istemiştir ve arkadaşının da isteği üzerine metni Doğan okumaya başlamıştır. İki öğrencinin de kısa bir müddet düşüncelerinin ardından da, öğrenciler uygulama problemi hakkında araştırmacı ile tartışmışlardır. Bu sırada, Yılmaz'da eline kalemi almış ve sessizce yazmaya başlamış ve Doğan da arkadaşının yazdığı ifadeyi başı ile onaylamıştır. Aşağıda, Yılmaz tarafından yazılan ilk denklem ifadesi görülmektedir.



$$x + 4 = 3$$

### Şekil 3. Yazılan İlk Denklem İfadesi



Görüldüğü üzere, iki öğrenci de kat ilişkisini gösteren bir denklem ifadesi yazmada zorlanmış ve bir bilinmeyenli bir denklem ifadesi yazmışlardır. Bunun üzerine, araştırmacı öğrencilerin düşüncelerini geliştirmeleri amacıyla öğrencilere farklı sorular yönelmiştir. Aşağıda bu görüşme metinlerine yer verilmiştir:

146A: Evet, güzel. Peki, bu denklem türü olarak nasıl bir denklem türü biliyor musunuz?

147Y: Bir bilinmeyenli denklem...

148A: Peki, iki bilinmeyenli denklem gördünüz mü? (Doğan eline kalemi alıp bir şeyler yazmış gösterirken, Yılmaz da çalışma kâğıdına yazmaya başlamıştır.)

149Y: Böyle olur mu? (diye yazdığını araştırmacıya göstermiştir.)

(Yılmaz'ın iki tane  $x$  kullanarak " $2x+7=2-x$ " şeklinde yeni bir denklem yazdığı görülmüştür. Bu denklem çalışmada kullanılmak üzere yazılmış değildir. Araştırmacı sadece bu bilgiyi kullanıp kullanamayacaklarını anlamak istemiştir. Bunun üzerinde, araştırmacı yeniden müdahale yapma ihtiyacı duymuştur.)

150A: Burada bilinmeyenler neler, bana söyleyebilir misiniz?

151Y:  $x$ ...

152A: Ama ben iki tane bilinmeyenli demiştim.

153D: Aynı olmayacak yani...

(Doğan konuşurken, Yılmaz yazdığını aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi düzeltmiştir.)

$$2x + 7 = 2 - y$$

#### Şekil 4. Yılmaz Tarafından Kurulan İki Bilinmeyenli Denklem İfadesi

Ardından, araştırmacı öğrencilerden üçüncü bölümdeki bu bilgiyi kullanmalarını istemiştir.

154A: Şimdi, buradaki çalışma için benzer bir denklem yazabilir misiniz?

(Öğrencilerin bir müddet daha düşündükleri gözlenmiştir. Yılmaz oldukça sessizdir ve Doğan ise elini çenesine koymuş düşünmektedir.)

Mesela, burada değişkenlerimiz neler olmalı?

155Y: (Doğan'a bakarak, tablodaki yol ve zaman ifadelerini göstermiştir.) Bunlar olabilir... Olur mu?

156D: Olur. (başı ile de onaylamış ve ardından hareketlenip çalışma kâğıdına eğilmiştir) Sıra olarak nasıl yapacağız? (kısa bir süre düşünmüştür) Hımm... Beş...

157Y: Beş diyelim. (demiş ve çalışma kâğıdına yazmaya başlamıştır.)

158D: Beş çarpı üç (düşünürken) olabilir.

159Y: Olmadı...

160D: (Başı ile de onaylayarak) Evet, Olmadı.

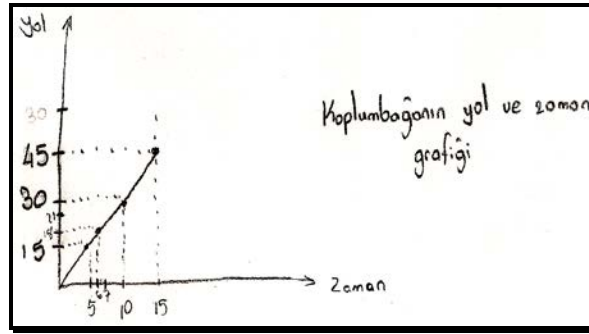
Burada yer alan görüşme metinlerinden; öğrencilerin ikisinin de denklem konusunu işlediklerini kabul etmekle birlikte, *bir bilinmeyenli denklemi tanıdıkları* (Yılmaz'ın bu denklemi yazması ve Doğan'ın ise arkadaşının yazdığı denklemi başı ile onaylamasından) fakat *iki bilinmeyenli denklem bilgisini* tanımakla birlikte tam anlamıyla *kullanamadıkları* görülmüştür (Yılmaz'ın Şekil 4'teki ve 149Y'deki ifadesi, Doğan'ın 153D ifadesi). Bununla



birlikte, araştırmacının desteğinin ardından öğrencilerin *iki bilinmeyenli denklem bilgisini oluşturduğu* (Doğan'ın 153D'deki ifadesi ile Yılmaz denklemi yazabilmesinden) anlaşılmıştır. Bununla birlikte; Doğan'ın 156D, 158D ve 160D'deki ifadeleri ile Yılmaz'ın 157Y ve 159Y'deki ifadelerinden ve yazdıklarından, iki öğrencinin de *iki bilinmeyenli denklem bilgisini* bu uygulama için *tanımakla birlikte kullanamadığı* anlaşılmıştır.

Uygulamanın dördüncü bölümünde yer alan “Öyle bir **grafik** çizin ki, bu yavru kaplumbağanın yürüyüşte harcadığı zamana göre yürüdüğü yolu gösterebilir.” şeklindeki metni, Doğan'ın hemen okuduğu görülmüştür. Ardından, öğrenciler birlikte çalışarak ve aralarında tartışarak, kısa sürede çizimi tamamlamışlardır. Çizimin tamamlanmasının ardından, araştırmacı öğrencilerden çizimi isimlendirmelerini istemiştir. Aşağıdaki şekilde, bu iki öğrencinin birlikte çizdikleri grafik ve grafiğe verdikleri isim görülmektedir.

Öğrencilerin burada birlikte yaptıkları çizimlerden (Şekil 5) ve görüşme metinlerinden *grafik bilgisini tanıyıp kullandıkları* anlaşılmıştır.



Şekil 5. Öğrencilerin Birlikte Çizdikleri İlk Grafik

Ardından, beşinci bölümde verilen “Çizdiğiniz grafikte hangi geometrik şekil oluştu? Açıklayınız.” şeklindeki metni sesli bir şekilde birlikte okumuş ve üzerinde tartışmaya başlamışlardır.

168A: Peki, bu grafikte oluşan şekil nedir? Ne oluştu?

(Doğan elini ağzına götürmüş ve Yılmaz ise arkasına yaslanmış düşünmektedirler.)

169D: (Doğan şekil üzerinde bir yerleri göstererek...) Buraları sayabilir miyiz, şuraları... (derken Yılmaz halen sessizce oturmaktadır.)

170A: Grafikte oluşan şekli soruyoruz?

171Y: Bence burada iki tane üçgen oluştu.

172A: Peki, Doğan?

(Doğan başını sağa sola çevirerek şekle bakmaktadır. İki öğrenci de bir müddet sessiz kalırlar ve ardından Doğan konuşmaya başlamıştır.)

173D: (Çalışma kâğıdında yatay ve dikey eksenini göstererek) Bunları saymıyoruz değil mi? (derken araştırmacıya bakmaktadır)

174A: Grafiği sormuyoruz, grafikte oluşan şekil nedir?

175D: (Noktalı çizgileri göstermiştir.) Bunlar değil o zaman...

176Y: Ka... (araştırmacıya bakarak tereddüt etmiş fakat devam etmiştir) Kare değil mi?

177A: Noktalar bize sadece yol gösterdi. Noktalar belirgin olmasaydı ne derdiniz?

(Doğan elini ağzına götürmüş ve Yılmaz da hiç kıpırdamadan düşünmektedir.)

178Y: (Kendinden emin konuşmuştur) Tamam... doğru parçası...

(Doğan da arkadaşını başı ile onaylamıştır.)

179D: Hı hı...

Bunun sonrasında, öğrenciler “*Grafikte oluşan bu geometrik şekilden faydalanarak grafiğe bir ad veriniz.*” şeklindeki uygulama metnini okumuş ve ardından Şekil 5’te görülen isimlendirmeyi yapmışlardır. Burada, Yılmaz’ın 178Y’deki ifadesi ve ardından Doğan’ın 179D’deki ifadesinde Yılmaz’ı onaylamasından, iki öğrencinin de *doğru parçası bilgisini tanıdıkları* anlaşılmıştır. Bununla birlikte, öğrencilerin yaptıkları çizimden grafiği çizmede başarılı oldukları yani *grafik bilgisini tanıyıp kullanabildikleri* fakat 169D, 173D, 175D ile 171Y, 176Y,’deki ifadelerinden grafikte oluşan şekli kararlaştırmada başarısız oldukları görülmüştür. Öğrencilerin özellikle de nokta belirlemede kullandıkları noktalı çizgiler üzerinden grafikteki şekil hakkında yorum yapma konusunda ısrarcı davranmaları bunun göstergesidir.

Ardından, bu öğrencilerden “*Bu yavru kaplumbağanın 21 m. yürümüş olması için kaç dakika yürümüş olması gerekir? Öncelikle yaptığınız grafikten yararlanarak bulunuz. Ardından cevabı yazdığınız denklem yardımıyla bulunuz ve elde ettiğiniz sonuçları karşılaştırınız.*” şeklindeki soruyu cevaplamaları istemiştir.

181A: Peki, ilk önce grafikten yararlanarak cevaba ulaşabilir misiniz?

(Yılmaz kalem ile kâğıda eğilmiş ve yazmaya, bir taraftan da yazdıklarını açıklamaya başlamıştır. Doğan da bu esnada dikkatlice kâğıda bakmakta ve arkadaşının yazdıklarını incelemektedir.)

182Y: Böyle yapabilirim.

(Şekil 6’da görüldüğü gibi, birlikte grafik üzerinde ara değerler olarak altı ve yediyi belirtmişlerdir.)

183A: Peki, Doğan sen ne düşünüyorsun?

184D: Altı olabilir... Yedi değil de... (bir taraftan iyice yerinden kalkmış ve çalışma kâğıdına dikkatlice bakmaktadır)

185A: Peki, o zaman denklemden yararlanalım şimdi de...

186D: Denklemimiz buydu... (diyerek daha önce yazdıklarına bakmıştır)

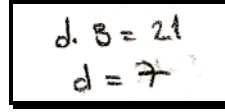
Pardon ya... Ben yanlış hesaplamışım cevap 7 olacak... (Bir müddet düşünmüşlerdir. Sonrasında, Yılmaz yazmaya başlamıştır.)

187Y: Yanlış yazdım. (arkasına doğrulmuştur.)

(Bu esnada Doğan arkadaşına yardımcı olmuştur.)

188D: 21... (Yılmaz silmiş ve doğru şekilde yeniden yazmıştır. Doğan da bu esnada arkadaşına yardımcı olmuştur) ...3 yazalım...

Bu aşamada; öğrencilerin bu araştırma problemine ilişkin iki bilinmeyenli denklemi kurmakta zorlanmakla birlikte, burada yer alan problemin çözümünde *denklemi* doğru bir şekilde kurdukları ve *kullandıkları* (188D'deki ifadedeki Doğan'ın söylemi ve Yılmaz'ın bu esnada arkadaşına yaptığı yardım) görülmüştür. Bu durum, öğrencilerin *iki bilinmeyenli denklem bilgisini* problem çözümünde *tanyıp kullandıklarını* gösterir niteliktedir. Aynı zamanda, öğrencilerin *grafiği* ve *grafikte yer alan eksenleri* burada yer alan sorunun çözümünde doğru bir şekilde *kullandıkları* (182Y ve 186D) anlaşılmıştır. Aşağıdaki şekilde, öğrencilerin bu aşamada kurdukları denklem ifadesi görülmektedir.



$$\begin{aligned} d. s &= 21 \\ d &= 7 \end{aligned}$$

**Şekil 6.** Yılmaz İle Doğan'ın Çözüm İçin Yazdıkları Denklem

Bunun sonrasında, öğrencilerden “*Bu yavru kaplumbağa 6 dakika sonunda kaç m. yürümüş olur? Öncelikle yaptığınız grafikten yararlanarak bulunuz. Ardından cevabı yazdığınız denklem yardımıyla bulunuz ve elde ettiğiniz sonuçları karşılaştırmız.*” şeklindeki soruyu cevaplamaları istenmiştir.

189A: Grafikten nasıl bulabilirsiniz?

(İki öğrenci de hemen grafiğe yönelmiştir ve aynı anda konuşmaya başlamışlardır.)

190Y: (Grafik üzerinde göstererek) Buradan bu tarafa olması lazım.

191D: Beşin paralelinde... (demiş ve grafik üzerinde çizmeye başlamıştır.)

(Bu esnada Yılmaz'ın da desteklemesiyle çizimi tamamlamışlardır. Şekil 5'te öğrencilerin bu çizimi görülmektedir.)

192A: Peki, cevabı ararken grafikte baktığınızda ve denklemle çözdüğünüzde aynı sonuca ulaştınız mı?

193Y: Hı hı... (Doğan da başı ile onaylamıştır.)

194A: Grafik de denklem de sonuçta aynı şeye ulaşmamızı sağlıyor mu?

195D: Evet. (Yılmaz da başı ile onaylamıştır.)

196A: O zaman denkleme isim verseniz, ne denklemi derdiniz? (Bir müddet düşünürler) Grafikte birlikte düşünseniz, grafik sizin için bir yol gösterici olsa?

Burada; öğrencilerin 193Y ve 195D'deki ifadelerinden grafik ile denklem ile yaptıkları çözümlerin aynı sonuca ulaşmalarını sağladığını anladıkları görülmüştür. Bununla birlikte, araştırmacının tüm yönlendirmelerine ve aralarında tartışmalarına rağmen öğrencilerin yazdıkları denkleme bir isim veremedikleri anlaşılmıştır. İlk uygulama olması nedeniyle, zaten öğrencilerin farkındalıklarının da henüz gelişmiş olmaması doğaldır. Aynı zamanda, yine öğrencilerin *grafiği* ve *grafikte yer alan eksenleri* burada yer alan sorunun çözümünde doğru bir şekilde *kullandıkları* (190Y ve 191D) anlaşılmıştır.

**Okuma Denemeleri Problemine İlişkin Bilgi Oluşturma Süreci**

*Doğru denklemi bilgisini oluşturma sürecinin nasıl gerçekleştiğinin ortaya koyulması amacıyla hazırlanmış olan ikinci uygulama problemi “Efe okumaya başladı. Yapılan okuma denemelerinden Efe’nin dakikada 25 kelime okuduğu anlaşılmaktadır.” üzerine kurulu bir problemdir. Birinci bölümde, öğrencilerden Efe’nin okuma esnasında harcadığı zamana göre okuduğu kelime sayısını gösteren bir tablo düzenlemeleri istenmektedir.*

Çalışma kâğıdında buna ilişkin yer alan metin “Öyle bir **tablo** düzenleyiniz ki, Efe’nin okuma esnasında harcadığı zamana göre okuduğu kelime sayısını gösterecek.” şeklindedir. Bu metni Doğan okumuş ve Yılmaz da dinlemiştir. Ardından da, iki öğrenci de hemen hareketlenmiş ve öncelikle uygulamada ne sorulduğu üzerinde yaptıkları tartışmanın sonrasında ise Doğan aşağıda görülen görüşme metni ile çizime başlamıştır.

200D: Bire yirmi beş... (çizmeye başlamış ve bir müddet çizime devam etmiştir)

Doğan’ın çizim esnasında yardıma ihtiyaç duymadığı ve yalnızca isim verirken arkadaşının fikrini de aldığı gözlenmiştir. Aşağıda, bu esnada yapılan bazı görüşme metinleri görülmektedir.

204D: Şimdi, dakikada 25 kelime...

205Y: İki dakikada 50...

206D: Tamam da, hangi dakikaları alalım...

(Yılmaz arkadaşının sorusu üzerine başını tavana çevirip çok kısa bir süre için düşünmüştür. Doğan da eli gözünde düşünürken, bir taraftan da konuşmaya başlamıştır.)

207D: (Bir önceki uygulama problemini düşünerek) 5, 10, 15 gittik... (arkadaşına bakarak) ... 3, 6, 9 gibi gidelim.

208Y: Tamam.

(Doğan değerleri tabloya yazdıktan, sonra arkasına kısa bir müddet için yaslanmıştı.)

209D: Evet...

210Y: Yetmiş beş. (çalışma kâğıdına eğilmiş ve kelime sayısı yazısını göstermektedir)

(Bunun üzerine, Doğan arkadaşının söylediğini ve ardından da diğer kelime sayısına ilişkin değerleri tabloya yazmıştır.)

Öğrencilerin buradaki (200D, 204D, 209D ve 205Y, 208Y, 210Y) ifadelerinden, *kat ilişkisi* hakkındaki bilgiyi *tanıyıp kullandıkları* anlaşılmaktadır. Aşağıdaki şekilde, Doğan tarafından arkadaşının da yardımıyla çizilip tamamlanan ve Efe’nin zamana göre okuduğu kelime sayısını gösteren şekil görülmektedir. Burada, öğrencilerin Efe’nin herhangi bir zaman müddetinde kaç kelime okuduğu hakkında tahminde bulunabilecekleri ve daha yüksek zaman aralıklarında için tablo değerlerini yazmalarının tahmin yapmada kolaylık sağlayabileceğini düşündükleri anlaşılmıştır. Bu durum da, yine öğrencilerin problemin çözümüne ulaşmada

genelleme yerine tahmin etmeye çabaladıklarını gösterir niteliktedir. Fakat araştırmacı tarafından birinci uygulamada tabloyu bu şekilde yazmış olmalarının yani oluşturdukları tabloda yer alan değerlerinin öğrencilerin denklem yazmalarını etkilemiş olabileceği düşünülmüş ve bu nedenle bu uygulamada tabloyu ne şekilde oluşturmaları gerektiği konusunda aşağıda görüldüğü şekilde müdahale yapma ihtiyacı duyulmuştur.

211A: Peki, tablo değerlerini bir dakikadan başlayarak yazabilir miydik?

212D: Tabii...

213Y: Yazabilirdik.

214A: O zaman, bunun için yeni bir tablo daha çizerseniz?

Bunun üzerine yine Doğan çizimi yapmaya başlamış, bir müddet çizime Yılmaz devam etmiş ve ardından da Doğan tablo değerlerini yazmayı tamamlamıştır. İki öğrencinin de bu esnada yardıma ihtiyaç duymadıkları gözlenmiştir. Bu durum, iki öğrencinin de *tablo bilgisini tanıdıklarını* ve rahatlıkla *kullandıklarını* göstermektedir. Bununla birlikte, burada yine tabloya atadıkları değerler de, öğrencilerin *kat ilişkisini* doğru *kullandıklarını* gösterir niteliktedir. Aşağıda verilen Şekil 7’de, Yılmaz ve Doğan’ın ikinci uygulama problemi için birlikte çizdikleri tablo şekilleri görülmektedir.

2 Aman (d)	Kelime S. (k)
3	75
6	150
9	225

2 Aman (d)	Kel. S. (k)
1	25
2	50
3	75
4	100
5	125
6	150

Şekil 7. Yılmaz ve Doğan’ın İkinci Uygulama için Birlikte Yaptıkları Tablo Çizimi

Ardından, “Efe’nin okuduğu kelime sayısı ile bu okuma esnasında harcadığı zaman arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.” şeklindeki çalışma kâğıdında yer alan uygulamanın ikinci bölümüne geçilmiştir. Doğan uygulamanın bu kısmını okuma sırasını arkadaşına vermiş ve kendisi de çalışma kâğıdına eğilip dinlemiştir. Bunun üzerine Yılmaz probleme ilişkin ikinci bölümdeki metni okumuştur. Öğrenciler çok kısa bir süre düşünmüşlerdir ve bu esnada Doğan’ın yine metnin son kısmını tekrarladığı gözlenmiştir. Yine kısa bir düşünmenin ardından, aralarında tartışarak aşağıda görülen ifadeyi yazmışlardır.

Efe'nin okuduğu kelime sayısı harcadığı zamanın 25 katıdır.

Şekil 8. Öğrencilerin İkinci Uygulama Problemi için Birlikte Yazdıkları İfade

Bu uygulamanın üçüncü bölümünde verilen “Yukarıda verilen tablodan da yararlanarak öyle bir **denklem** yazınız ki, bu denklem kullanılarak Efe’nin okuma esnasında harcadığı zamana göre okuduğu kelime sayısı kolaylıkla bulunabilsin. (Efe’nin okuma esnasında harcadığı zamana göre okuduğu kelime sayısı arasındaki ilişkiyi gösterebilir)” şeklindeki ifadeyi Doğan okumaya başlamıştır ve bu işleminin tamamlanmasının ardından, Yılmaz cevabı Doğan’dan yazmasını istemiştir. Doğan ilk yazdığını silmiş ve yeniden yazdığı matematiksel ifadenin doğruluğunu arkadaşına danışmıştır. Ardından, bir miktar daha silmiş ve çözüm üzerinde bir süre daha tartışmışlardır. Aşağıda bu esnada yapılan görüşme metinlerine yer verilmiştir.

226Y: Zamanla 25’i çarparsak... (eliyle çalışma kâğıdını işaret ederek konuşmaktadır)

227D: O zaman  $d+25=k$  diyebilir miyiz?

(Bir taraftan arkadaşına bakmaktadır.)

228Y: Çarpı...

229D: Çarpar mıyız?

230Y: (Eliyle çalışma kâğıdında göstererek) Bir kere yirmi beş yirmi beş eder.

231D: O zaman  $d$  çarpı yirmi beş... kelime sayısını buluruz.

(Bir taraftan ifadeyi yazmıştır ve yazmayı bitirince arkasına yaslanmıştır.)

232Y: Evet... (derken Yılmaz’ın kendinden oldukça emin olduğu görülmüştür)

233D: Evet...

$$d \times 25 = k$$

Şekil 9. Doğan ve Yılmaz’ın İkinci Problem için Yazdıkları Denklem İfadesi

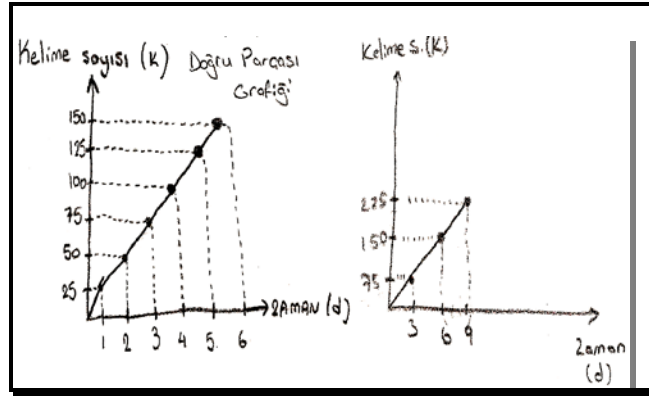
Burada yer alan görüşme metinlerinde 226Y, 228Y, 230Y ve 232Y’deki ifadelerinden, Yılmaz’ın *kat ilişkisini denkleme yazarken* doğru bir biçimde kullandığı ve Doğan (227D)’in ise başlangıçta denklem ifadesinde kat ilişkisi yerine toplama kullanmayı denediği fakat ardından arkadaşı ile aralarında yaptıkları tartışmanın da sonucunda çözümde kat ilişkisinin daha uygun olacağını (231D ve 233D) kararlaştırdığı görülmüştür. Yine öğrencilerin buradaki ifadelerinden ve Şekil 9’dan, iki öğrencinin de birinci uygulamada oluşturmakla birlikte *matematiksel gösterimini* gerçekleştiremedikleri *iki bilinmeyenli denklem bilgisini* bu uygulamada *gerçekleştirebildikleri* yani *iki bilinmeyenli denklem bilgisini pekiştirdikleri* anlaşılmıştır. Bu durum da, araştırmacının oluşturdukları tabloya yaptığı müdahalenin etkili olduğu ve bu sayede öğrencilerin kat ilişkisini denklem yazmada kolaylıkla kullanmalarının sağlanmış olmasının etkili olduğu düşünülmektedir.

Ardından, öğrencilerin bir sonraki bölüm için çalışma kâğıdında gördükleri “Öyle bir **grafik** çizin ki, Efe’nin okuma esnasında harcadığı zamana göre okuduğu kelime sayısını *gösterebilir*.” şeklindeki ifadeyi okuma ihtiyacı bile duymadan aralarında konuşarak grafiği



çizmeye başladıkları görülmüştür. Bu esnada, Doğan ilk olarak yatay ve dikey eksenleri çizmiş, arkasından arkadaşı ile de tartışarak grafiği çizmiştir.

Öğrenciler aralarında da tartışarak çizimi gerçekleştirmişlerdir. Bu aşamada; Yılmaz'ın büyük bir dikkatle arkadaşını izlediği ve bazen arkadaşını düzelttiği, Doğan'ın ise çizimi gerçekleştirdiği görülmüştür. Aşağıdaki şekilde, öğrencilerin birlikte çizdikleri grafikler görülmektedir. Öğrencilerin çizdikleri bu grafikler, iki öğrencinin de *çizgi grafiği tanıyıp kullandıklarını* gösterir niteliktedir. Bu grafik incelendiğinde, öğrencilerin grafiği doğru bir biçimde çizdikleri grafiklerde oluşan şekle (0,0) noktasını da dâhil ettikleri gözlenmiştir. Bununla birlikte, öğrencilerin grafik hakkında yaptıkları tek hatanın eksenlere atadıkları değerler arasındaki aralıkların nasıl olması gerektiği konusuna dikkat etmemeleridir.



**Şekil 10.** Doğan ve Yılmaz'ın İkinci Uygulama için Çizdikleri Grafikler

Bunun sonrasında, iki öğrenci birlikte uygulama probleminin beşinci bölümüne ilişkin “Çizdiğiniz grafikte hangi geometrik şekil oluştu? Açıklayınız.” şeklindeki metni okumuştur. Doğan dayanamamış ve hemen cevabı söyleyivermiştir.

243D: Doğru parçası (derken çalışma kâğıdına da cevabı yazmıştır)

244Y: Hı hı...

Öğrencilerin buradaki ifadelerinden (243D ve 244Y), Şekil 10'daki grafikte gördükleri şekli doğru parçası olarak adlandırdıkları yani *doğru parçası bilgisini tanıyıp kullandıklarını* anlaşılmıştır. Probleme ilişkin çalışma kâğıdında yer alan “Grafikte oluşan bu geometrik şekilden faydalanarak grafiğe bir ad veriniz.” şeklindeki metni öğrenciler birlikte okumuştur.

245A: Peki, grafiği isimlendirmenizi istesek, bu grafiğe oluşan şekli de göz önüne alarak ne diyebilirsiniz?

246D: Doğru parçası grafiği diyebilir miyiz?

247Y: Hı hı...(demiş ve ifadeyi çalışma kâğıdına yazmıştır. Şekil 10'da Yılmaz'ın yazdığı bu ifade de görülmektedir.)

Burada, öğrencilerin grafikte gördükleri şekle odaklanmaya başladıkları ve grafiği doğru adlandırdıkları (246D ve 247Y) görülmüştür.



Ardından, “Efe’nin 175 kelime okumuş olması için kaç dakika okumaya devam etmiş olması gerekir? Öncelikle yaptığınız grafikten yararlanarak bulunuz. Ardından cevabı yazdığınız denklem yardımıyla bulunuz ve sonuçları karşılaştırınız.” şeklindeki problemi okumuş ve cevap aramaya başlamışlardır.

248D: Yedi...

249A: Grafikten bakarak gösterebilir misiniz?

250D: Grafikte fazla yukarıya çıkmayacağımız için bunun hemen... eee... (derken birinci grafikteki değerlerin yeterli olmadığını söylemeye çalışmıştır)

251Y: O zaman diğer grafiği kullanalım. (derken ikinci grafiği işaret etmiştir. Ardından, grafikteki yerleri göstererek) ...şuraya gelir.

252D: Şurada, 160... Evet...

İki öğrenci de çalışma kâğıdına eğilmiş ve grafik üzerinde sonucu göstermişlerdir. Öğrencilerin buradaki ifadelerinden (248D, 250D, 252D ve 251Y) ve grafik üzerinde doğru gösterimler yapmalarından, iki öğrencinin de grafiği doğru bir biçimde okuyabildikleri yani çizdiği *grafiği* problemin çözümünde *kullanabildiği* anlaşılmıştır. Ardından, araştırmacı tarafından öğrencilerden denklem yardımıyla çözüme ulaşmaları istenmiştir. Bu esnada, Yılmaz düşünürken Doğan’ın sesli bir şekilde düşünmeye başladığı gözlenmiştir.

253A: Peki, denklemlerle...

254D: 25... (derken eli ağzında düşünmüştür)

255Y: 175...

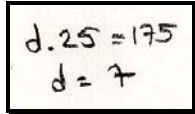
(Bu esnada Doğan çalışma kâğıdına yönelmiş ve cevabı yazmaya başlamıştır. Yılmaz ise arkadaşının yazdığına bakmış ve beğenmeyip başka bir şeyler yazmaya başlamıştır.)

256Y: 25’e böleriz.

257D: 175’i 25’e... (derken arkadaşına bakıp onaylatmaya çalışmıştır.)

258Y: 175’i 25’e böleriz (derken bir taraftan da cevabı yazmıştır. Ardından rahatlayıp arkasına yaslanmıştır.)

Aşağıdaki şekilde, öğrencilerin denklem yardımıyla yaptıkları çözümleri görülmektedir.



$$\begin{aligned} d \cdot 25 &= 175 \\ d &= 7 \end{aligned}$$

**Şekil 11.** Öğrencilerin İkinci Problem için Yaptıkları Çözümleri

Sonuç olarak; öğrencilerin 254D, 257D ile 255Y, 256Y ve 258Y’deki ifadeleri ve birlikte yazdıkları ifade (Şekil 11), iki öğrencinin de oluşturduğu *iki bilinmeyenli denklem bilgisini* problem çözümünde doğru biçimde *kullandıklarını* göstermektedir.

Araştırmacının da isteği üzerine öğrencilerin birlikte “Efe 8 dakika sonunda kaç kelime okumuş olur? Öncelikle yaptığınız grafikten yararlanarak bulunuz. Ardından cevabı yazdığınız denklem yardımıyla bulunuz ve sonuçları karşılaştırınız.” şeklindeki metni

okudukları ve grafik ile de denklem ile de doğru sonuca ulaştıkları görülmüştür. Buradaki çözümlerinden de, yine öğrencilerin *grafik okuyabildikleri* yani başka bir ifadeyle *grafik ve grafikte görülen eksenleri* problemin sonucuna ulaşmada *kullanabildikleri* ve *iki bilinmeyenli denklem bilgisini kullanabildikleri* anlaşılmıştır. Son olarak, bu probleme öğrencilerin doğru denklemi hakkında oluşturdukları bilgiyi ortaya koymak amacıyla eklenmiş olan “*Yukarıda elde ettiğiniz denkleme bir ad verecek olsanız ne denklemi dersiniz?*” şeklindeki soruyu okumuşlardır. Aşağıda bu bölüme ilişkin görüşme metinlerinin bazıları yer almaktadır.

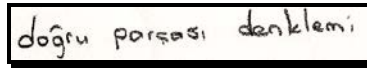
266D: Evet.

267A: O zaman bu denkleme bir isim verecek olsak ne denklemi deriz?

268D: Doğru parçası denklemi (derken Yılmaz’ın ise sessiz kaldığı görülmüştür)

269Y: Doğru... (başı ile de onaylamıştır)

Aşağıdaki şekilde, Doğan’ın yazdığı çalışma kâğıdından bir kesit görülmektedir.



**Şekil 12.** Doğan’ın Düşüncesini Yazdığı Çalışma Kâğıdından Kesit

Doğan (266D)’ın grafik ile denklem arasında bağlantı kurmaya başladığı görülmüş ve bu öğrencilerin (268D ve 269Y’de arkadaşını onaylamasından) denklemi doğru parçası denklemi olarak adlandırdıkları anlaşılmıştır ki, bu durum iki öğrencinin de *doğru denklem bilgisini oluşturduğunu* düşündürmektedir. Sonuç olarak; bu iki uygulamanın sonucunda öğrencilerin grafik, kat ilişkisi, tablo, doğru parçası ve denklem bilgilerini tanıyıp kullandıkları, iki bilinmeyenli denklem bilgisini oluşturdukları görülmüştür. Öğrencilerin oluşturdukları grafik ile yazdıkları denklem arasında ilişkiyi fark ettikleri ve bunun sonucunda da, *doğru denklem bilgisini oluşturdukları* anlaşılmıştır.

### ***Öğrencilerin Uygulamadaki Bilgi Oluşturma Sürecinin Genel Değerlendirmesi***

#### ***Bilgi Oluşturma Sürecinin Kat İlişkisi Anlamında Değerlendirilmesi***

Birinci uygulamada Yılmaz’ın 122Y, 130Y ve 136Y’deki ile Doğan’ın 123D, 131D ve 135D’deki ifadeleri; ikinci uygulamada Yılmaz’ın 205Y, 208Y, 210Y ve 217Y’deki ifadeleri ile Doğan’ın 200D, 204D, 209D ve 218D’deki ifadeleri; Doğan’ın 227D’deki ifadesinde başlangıçta denklem ifadesinde kat ilişkisi yerine toplama kullanmayı denemesi fakat ardından arkadaşı ile aralarında yaptıkları tartışmanın da sonucunda çözümde kat ilişkisinin daha uygun olacağını (231D ve 233D) kararlaştırması; çizdikleri tablolara doğru değerler atamaları; verilenler arasındaki ilişkileri Şekil 2 ve Şekil 8’de görüldüğü gibi doğru bir biçimde açıklamaları, bu öğrencilerin *cebirsal işlemleri* ve bu işlemlere ilişkin *kat ilişkisini tanıyıp kullandıklarını* gösterir ve kanıtlar niteliktedir.

*Bilgi Oluşturma Sürecinin Tablo Bilgisi Anlamında Değerlendirilmesi*

Birinci uygulamada Yılmaz'ın 112Y, 120Y ve 122Y'deki ve Doğan'ın 113D, 117D, 121D ve 123D'deki ifadelerinden, her iki uygulama esnasında öğrencilerin birlikte gerçekleştirdikleri tablo çizimleri ile arkadaşına çizim konusunda yaptığı yardımlardan, bu öğrencilerin *tablo bilgisini tanıyıp kullandıkları* anlaşılmıştır.

*Bilgi Oluşturma Sürecinin Denklem Bilgisi Anlamında Değerlendirilmesi*

Birinci uygulamada Yılmaz'ın yazdığı bir bilinmeyenli denklem ifadesi ve Doğan'ın da bu ifadeyi arkadaşının yazdığı denklemi başı ile onaylaması, öğrencilerin *bir bilinmeyenli denklem bilgisini tanıdıklarını* düşündürmektedir. Yılmaz'ın 149Y'deki ifadesi ve " $2x+7=2-x$ " şeklinde bir denklem ifadesinden de, bu öğrencilerin *iki bilinmeyenli denklem bilgisini* tam anlamıyla *tanyıp kullanamadıkları* görülmüştür. Bu durumun, öğrencilerin bu konuyu matematik derslerinde araştırmanın hemen öncesinde öğrenmiş olmaları nedeniyle henüz pekiştirememiş olmalarından kaynaklandığı düşünülmektedir. Araştırmacının destek ve yönlendirmelerinin ardından da; Doğan'ın 153D'deki ifadesi ile Yılmaz'ın denklemi yazabilmesi ise, bu öğrencilerin *iki bilinmeyenli denklem konusundaki yanlışlarının ortadan kalktığını* ve *iki bilinmeyenli denklem bilgisini oluşturdukları* anlaşılmıştır. Yine, öğrencilerin 156D, 158D, 160D, 157Y ve 159Y'deki ifadeleri, iki öğrencinin de *iki bilinmeyenli denklem bilgisini* bu uygulama için *tanıdığını* fakat bu bilgiyi uygulama için gerekli *denklem ifadesi yani matematiksel gösterim yazmada kullanmada zorlandığını* düşündürmektedir. Birinci uygulamanın son kısmında yer alan problemlerin çözümünde Doğan'ın 188D'deki söylemi ile Yılmaz'ın bu esnada arkadaşına yaptığı yardımdan da, iki öğrencinin de birinci uygulamada *denklemi doğru bir şekilde oluşturup kullandığı* yani problem çözümünde *iki bilinmeyenli denklem bilgisini tanıyıp kullandığı* anlaşılmaktadır. İkinci uygulamada Yılmaz'ın 226Y, 228Y, 230Y ve 232Y'deki ifadeleri ile Şekil 6'daki gösterimden, bu öğrencilerden *iki bilinmeyenli denklem bilgisini pekiştirdikleri* anlaşılmıştır.

*Sürecin Grafik Bilgisi Anlamında Değerlendirilmesi*

Başlangıçta çizilen grafiklerde (Şekil 5 ve 10) oluşan şekilleri grafik üzerinde nokta belirlemede kullanılan noktalı çizgiler üzerinden yorumladıkları ifadeler (169D, 173D, 175D, 171Y ve 176Y), araştırmaya katılan öğrencilerin grafikte oluşan şekli anlamada zorlandıklarını göstermiştir. Yılmaz ve Doğan'ın birinci uygulamadaki 182Y, 190Y, 186D, 191D'deki ve ikinci uygulamadaki 248D, 250D, 252D, 251Y, 317D'deki ifadeleri ile uygulamalarda yer alan problemlerin çözümlerinde çizdikleri grafikler üzerinde doğru gösterimler yapmaları da, bu öğrencilerin grafiği doğru bir biçimde oluşturup

okuyabildiklerini yani çizdikleri *grafiği* ve *grafikte yer alan yatay ve dikey eksenleri tanıdıklarını* ve burada yer alan problemin çözümlerinde doğru bir şekilde *kullandıklarını* gösterir niteliktedir.

#### *Sürecin Geometrik Şekiller Anlamında Değerlendirilmesi*

Yılmaz ve Doğan'ın 178Y, 179D, 243D, 244Y,246D ve 247Y'deki ifadelerinden ve öğrenci grubunda gerçekleştirilen bu uygulamalar esnasında çizilen grafiklerde (Şekil 5 ve Şekil 10) gördükleri şekli doğru parçası ya da ışın olarak adlandırmalarından, bu öğrencilerin *doğru parçası, ışın* gibi geometrik şekillere ilişkin bilgileri *tanyıp kullanmaya* çabaladıkları görülmüştür. Bununla birlikte; uygulamalarda öğrencilerin çizdikleri grafikler, *koordinat sistemine ilişkin birinci bölge bilgisinin tanınmasını ve kullanımını* gerektirmiştir. Bu durum ise, çizilen grafiklerde oluşan geometrik şekillerin *ışın* ya da *doğru parçası* olarak adlandırılmasına yol açmıştır. Bu uygulamalarda, öğrencilerin doğru denklemini ifade etmeleri beklenmemekte ve *doğru parçası* ya da *ışın denklemi* gibi ifadeleri kullanmaları yeterli görülmektedir. Bu grafik ve adlandırma ile yazılan denklem ve yapılacak adlandırma arasındaki ilişkiyi fark etmelerinin önemli olduğu düşünülmektedir. Bu nedenle de, öğrencilerin *doğru parçası, ışın* ve *doğru bilgilerini tanyıp kullandıkları*, araştırmanın birinci bölümünde oluşturdukları *koordinat sisteminin birinci bölge bilgisini* yani başka bir ifadeyle grafik bilgisini *pekiştirdikleri* anlaşılmıştır.

#### *Sürecin Doğru Denklemi Anlamında Değerlendirilmesi*

Araştırmada  $y=kx$  biçimindeki iki bilinmeyenli denkleminin uygulamalarına yer veren her iki uygulamada da, Yılmaz ve Doğan denklem ile grafik arasındaki ilişkiyi fark edebilmiş (193Y, 195D, 265Y ve 266D) olmakla birlikte, ancak ikinci uygulamada denklemi *doğru parçası denklemi* (268D ve 269Y) olarak adlandırabilmişlerdir. Bu durum, iki öğrencinin de ikinci uygulamada *doğru denklemi bilgisini oluşturduğunu* göstermektedir.

### **Sonuçlar ve Öneriler**

Bu bölümde, matematikte başarılı iki altıncı sınıf öğrencinin doğru denklemi bilgisini oluşturma süreci RBC+C soyutlama modeli üzerinden incelenmesine ilişkin yapılan analizler ve yorumlar sonucunda ulaşılan sonuçlara ve önerilere yer verilmiştir.

Bu soyutlama modelinin *tanıma kullanma, oluşturma ve pekiştirme* bilişsel eylemlerine ilişkin yapılan bu analizler sonucunda; matematik başarıları yüksek düzeyde olan Yılmaz ve Doğan'ın *cebirselle işlemleri* ve bu işlemlerde *kat ilişkisi* ile *tablo bilgisini, grafik bilgisini tanyıp kullandıkları* görülmüştür. Bu öğrencilerin *bir bilinmeyenli denklem bilgisini tanyıp*

kullandıkları ve iki bilinmeyenli denklem bilgisini oluşturdukları, pekiştirdikleri ve tanıyıp kullanmada başarılı oldukları anlaşılmıştır. Doğan ve Yılmaz'ın grafikte oluşan şekle bir isim belirlerken *doğru parçası*, *ışın* ve *doğru bilgilerini tanıdıkları*, çizdikleri grafikler ile yazdıkları denklemleri ilişkilendirebildikleri ve uygulamalarda *kullanmaya* çalıştıkları anlaşılmıştır. Sonuç olarak da; araştırmaya katılan bu iki öğrencinin de ilk iki uygulamada  $y=kx$  şeklindeki *iki bilinmeyenli denklem bilgisini* oluşturdukları söylenebilir.

Bu araştırmada yer alan uygulamalarda öğrencilerin hem cebirde harflerin kullanımını algılamada hem de cebirsel ifadelerin yorumlanmasında zorluklar yaşadıkları görülmüştür ki, bu ise MacGregor ve Stacey (1997) ile Stacey ve MacGregor (1997) tarafından yapılan çalışmanın sonuçlarını desteklemektedir. Ertekin (2001) tarafından yapılan çalışmanın sonuçları da, öğrencilerin harfli ifadeler hakkında zorlukları olduğunu gösterir niteliktedir ki, bu durum bu çalışmada da doğrulanmıştır. Burada yer alan uygulamalarda, öğrencilerin grafiklerde oluşan şekilleri *doğru parçası* şeklinde adlandırmaları da, bu öğrencilerin *doğru parçasının* sınırlılık özelliğini farklı biçimlerde untabildiklerini gösterebilir. Bu durum da, Öksüz (2010) tarafından yapılan çalışmanın sonucunu destekler niteliktedir.

Bu uygulamalar esnasındaki problem çözümlerine ilişkin yapılan incelemelerde, öğrencilerin yazdıkları denklemleri çözüme ile eşitlik ve kat ilişkisine ait işlemlerin gerçekleştirmede zorlukları olmadığı anlaşılmıştır ki, bu durum Johnson ve Alibali (1999), Dede (2004), Akkaya ve Durmuş (2006) tarafından yapılan araştırmaların sonuçları ile örtüşmemektedir. Johnson ve Alibali (1999) ile Erbaş ve Ersoy (2000 ve 2002) tarafından yapılan araştırmalarda, altıncı sınıf öğrencilerinin çoğunun “eşittir” işaretinin anlamını bilmedikleri ve eşitliklerin yapısını tam olarak kavrayamadıkları yani öğrencilerin basit eşitliklerin çözümünde birtakım ciddi güçlüklerinin olduğu, Yenilmez ve Avcu (2009) tarafından yapılan araştırmada öğrencilerin denklem kurma ve kurulan denklemi çözüme problemlerinde zorluk çektikleri, Dede (2004) ve Akkaya ve Durmuş (2006) tarafından yapılan çalışmalarda ise öğrencilerin değişkenlerle işlem yaparken zorlandıkları yani denklemle işlem yapabilme yetersizliklerinin olduğu açıklanmıştır. Araştırmaya katılan bu iki öğrencinin, yapılan bu araştırmalardan farklı olarak bu konuda herhangi bir zorlukları olmaması ve uygulamalardaki problem çözümlerinde değişkenin farklı kullanımlarını bilmeleri, bu öğrencilerin matematik başarısı yüksek olan öğrenciler olmasından kaynaklanabilir. Yenilmez ve Avcu (2009)'nun öğrencilerin eşitliğin gösterimi ve korunumu sorularında problem yaşamadığı hakkındaki açıklamaları ise, bu çalışmada doğrulanmıştır.

Bu çalışmada, öğrencilerin oluşturdukları düşünülen  $y=kx$  biçimindeki *iki bilinmeyenli*

*denklem bilgisinin* pekiştirilmesine fırsat veren yeni araştırma problemlerinin uygulanması ve bu uygulamalara ilişkin değerlendirmeler yapılması uygun olabilir. Benzer şekilde, farklı matematiksel bilgilerin soyutlanma sürecinin RBC+C soyutlama modeli kullanılarak incelenmesine imkân veren farklı araştırmaların yapılması düşünülebilir. Bu tür araştırmalar, bireylerin bilgi kazanımı sırasında hangi süreçte ya da eylemde zorlandıklarının anlaşılmasına ve ardından zorlanılan konuya odaklanılarak bu konudaki sıkıntının çözülmesine yardımcı olabilir. Yani, bireylerin öğrenme süreçlerinin araştırılması ve incelenmesi kaliteli öğrenmeyi arttırabilir. Bu soyutlama teorisi aracılığıyla gerçekleştirilecek olan araştırmalar sayesinde, araştırmacı ve öğrencilerin soyutlama ve uygulamalar konusunda bilgi ve tecrübe kazanmaları sağlanabilir ve böylelikle belirli konulara ilişkin bilgilerin soyutlanma sürecinin daha etkin bir şekilde gerçekleşebilmesine ilişkin ipuçları öğrenilebilir.

### Kaynakça

- Akkaya, R. & Durmuş, S. (2006). İlköğretim 6-8. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanındaki kavram yanılgıları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 31, 1-12.
- Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A. & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. In J. Novotna (Ed.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Prague, Czech Republic: PME.
- Birgin, O. (2006). İlköğretim Öğrencilerinin Doğrunun Eğimi ile ilgili Öğrenme Düzeyleri ve Olası Kavram Yanılgıları. *I. Ulusal Matematik eğitimi Öğrenci Sempozyumu*. İzmir.
- Birgin, O. & Kutluca, T. (2006). Doğru Denklemi Konusunun Öğretimine Yönelik Bilgisayar Destekli Öğretim Materyal Örneği. *I. Ulusal Matematik eğitimi Öğrenci Sempozyumu*. İzmir.
- Dede, Y. (2004). Değişken kavramı ve öğrenimindeki zorlukların belirlenmesi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri Dergisi*, 4(1), 24-56.
- Dreyfus, T. (2007). Processes of Abstraction in Context the Nested Epistemic Actions Model. Retrieved on November 12, 2008 from <http://cresmet.asu.edu/news/i2/dreyfus.pdf>, 12 Ekim 2008.
- Dreyfus, T., Hershkowitz, R. & Schwarz, B. (2001a). Abstraction in context II: The case of peer interaction. *Cognitive Science Quarterly*, 1(3), 307-368.
- Dreyfus, T., Hershkowitz, R. & Schwarz, B. (2001b). The construction of abstract knowledge in interaction. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Eds.), *Proceedings of the 25th Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 2, pp. 377-384). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Institute.



- Dreyfus, T. & Tsamir, P. (2004). Ben's consolidation of knowledge structures about infinite sets. *Journal of Mathematical Behavior*, 23(3), 271-300.
- Erbaş, A. K., Çetinkaya, B. & Ersoy, Y. (2009). Öğrencilerin basit doğru denklemlerin çözümünde Karşılaştıkları güçlükler ve kavram yanılgıları. *Education and Science*, 34(152), 44-59.
- Erbaş, A. K. & Ersoy, Y. (2000). Cebir Öğretiminde Öğrencilerin Güçlükleri-II: Yanlışlarla İlgili Öğretmen Görüşleri. IV. *Ulusal Fen Eğitimi Kongresi*, (ss. 625-629). Ankara.
- Erbaş, A. K. & Ersoy, Y. (2002). Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin Eşitliklerin Çözümündeki Başarıları ve Olası Kavram Yanılgıları. V. *Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*. Ankara.
- Ertekin, E. (2001). *Denklem Öğretimindeki Hata ve Yanılgıların Teşhisi ve Alınması Gereken Tedbirler*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi, Konya.
- Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 71-90.
- Hershkowitz, R. (2004). From diversity to inclusion and back: Lenses on learning (Plenary Lecture). In M. J. Hoines and A. B. Fuglesad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 1, pp. 55-68). Bergen, Norway: PME.
- Hershkowitz, R., Schwarz, B. & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in contexts: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 195-222.
- Johnson, B. & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead you the other?. *Journal of Educational Psychology*, 91(1), 175-189.
- Karasar, N. (2005). *Bilimsel araştırma yöntemi: Kavramlar-ilkeler-teknikler*. Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.
- MacGregor, M. & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 1-19.
- Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (2005). *İlköğretim matematik dersi öğretim programı ve klavuzu*. Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü.
- Ohlsson, S. & Regan, S. (2001). A function for abstract ideas in conceptual discovery and learning. *Cognitive Science Quarterly*, 1(3), 243-277.
- Öksüz, C. (2010). İlköğretim yedinci sınıf üstün yetenekli öğrencilerin "Nokta, Doğru ve Düzlem" konularındaki kavram yanılgıları. *İlköğretim Online*, 9(2), 508-525.
- Özmantar, M. F. & Monaghan, J. (2007). A dialectical approach to the formation of mathematical abstractions. *Mathematics Education Research Journal*, 19(2), 89-112.
- Özmantar, M. F. & Roper, T. (2004). Mathematical Abstraction Through Scaffolding. In M. J. Hoines and A.B. Fuglesad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 3, pp. 481-488). Bergen, Norway: PME.
- Stacey, K. & MacGregor, M. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher*, 2(90), 110-113.



- Tsamir, P. & Dreyfus, T. (2002). Comparing infinite sets – A process of abstraction: The case of Ben. *Journal of Mathematical Behaviour*, 21, 1-23.
- Turanlı, N., Keçeli, V. & Türker, N. K. (2007). Ortaöğretim ikinci sınıf öğrencilerinin karmaşık sayılara yönelik tutumları ile karmaşık sayılar konusundaki kavram yanlışları ve ortak hataları. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 9(2), 135-149.
- Vural, R. A. & Cenkseven, F. (2005). Eğitim araştırmalarında örnek olay (vaka) çalışmaları: Tanımı, türleri, aşamaları ve raporlaştırılması. *Süleyman Demirel Üniversitesi Burdur Eğitim Fakültesi Dergisi*, 6(10), 126-139.
- Yenilmez, K. & Avcu, T. (2009). Altıncı sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanındaki başarı düzeyleri. *Ahi Evran Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 10(2), 37-45.