



A Concept of "Accumulation Point" and Its Usage

Ömer Faruk Çetin*, Arif Dane & Mehmet Bekdemir

¹Erzincan University, Erzincan, TURKEY

Received: 27.04.2012

Accepted: 04.12.2012

Abstract – The purpose of this study is to investigate what kind of problems the third and fourth grade students at the Faculty of Science and Literature and the Faculty of Education have on defining the accumulation point, a central concept, knowing the concepts necessary for defining it and deciding where to use it. The study was carried out through the survey model. The data was collected through the Concept Information Form (CIF) from a total of 107 third and fourth grade students who studied Mathematics at the Faculty of Science and Literature and the Faculty of Education in an intermediately-populated city located in the Eastern Anatolia Region, Turkey, during the fall term of the educational year 2011-2012. A descriptive analysis was conducted on the data. It was concluded that students have problems on "defining the accumulation point", "knowing the concepts necessary for defining it" and "deciding where to use it".

Key words: accumulation point, limit, derivative, learning disabilities, misconceptions.

Summary

Introduction

The point should have an accumulation point because a function has a limit at a particular point. Without a complete understanding into the accumulation point, it is inevitable that students will have misconceptions about the concept of a limit. Therefore, the accumulation point is a central concept to that of a limit and all the other concepts related to it.

* Corresponding author: Ömer Faruk Çetin, Asist. Prof. Dr. in Mathematics Education, Education Faculty, Erzincan University, Erzincan, TURKEY.

E-mail: fcetin80@hotmail.com

Purpose

The purpose of this study is to investigate how the students of mathematics define “the accumulation point”, a central concept, and relate it to other concepts.

Methodology

The study was conducted through the survey model. In addition, the data was collected only qualitatively, since the purpose was to describe how students define “the accumulation point” and relate it to other concepts.

Population

The population was comprised of a total of 107 third and the fourth grade students who studied Mathematics at the Faculty of Science and Literature and the Faculty of Education in an intermediately-populated city located in the Eastern Anatolia Region, Turkey.

Data Collection Instrument

The data was collected through the Concept Information Form (CIF), the content of which was designed by four domain experts and one language expert. As a pilot scheme, the form was conducted on 30 third grade students of Mathematics at the Faculty of Education. Owing to the problems revealed through the pilot scheme, three domain experts revised the form. An item was excluded from the study before it was finalized.

Data Analysis

Within a lesson time, the students were asked to provide answers to the questions included in the CIF individually and in a written form. All the answer sheets were taken into account so that they could be analyzed descriptively. In addition, the domain experts identified and categorized the definitions of “the accumulation point”, the concepts required for it, and the concepts that could be defined with it. In accordance with these categories, the answer sheets were grouped under certain themes and levels by common consent among the three researchers in order to ensure reliability. Accordingly, the answers provided to the first question in the CIF were evaluated under the themes “correct”, “partially correct” and “wrong or no answer” and interpreted with direct quotations. Similarly, the answers to the second and third questions were evaluated and interpreted in a way in which “wrong or no answer” corresponded to level zero, “stating one single concept in a correct way” corresponded to level 1, “stating two concepts in a correct way” corresponded to level 2” and “stating at least three concepts in a correct way” corresponded to level 3.

Results

The findings on the first sub-problem of the study (What are the percentages of students who can define the accumulation point in a correct way by faculty and grade?) are as follows:

The students at the Faculty of Science and Literature and Faculty of Education could not provide a correct answer when they were asked to “define the accumulation point”. The third grade students at the Faculty of Science and Literature and Faculty of Education could provide a partially correct answer by 62% and 68% respectively whereas the same percentages were 39% and 48% respectively for the fourth grade students. While the third grade students gave wrong answers by 31% and 28% respectively, the same percentages were 43% and 52% respectively for the fourth grade students. The percentages of the third grade students who did not provide any answers were 7% and 4% respectively for the third grade students whereas the same percentages were 18% and 0% respectively for the fourth grade students.

The findings on the second sub-problem of the study (What kind of mistakes do students make in defining the accumulation point?) are as follows:

The mistakes that the students made in defining the accumulation point were grouped under five headings according to their level of importance.

1. Confusing the accumulation point with the set of accumulation points,
2. Using the concept “limit value” rather than the accumulation point,
3. Thinking that a function should exist in order for the accumulation point to be in existence,
4. Believing that the accumulation point should be an element of a set,
5. Confusing neighborhood with deleted neighborhood.

The findings on the third sub-problem of the study (What concepts do students use to define the accumulation point?) are as follows:

The third grade students mostly used the concepts “Neighborhood- deleted neighborhood” whereas the fourth grade students mainly used the concepts “Set-Interval”.

The findings on the fourth sub-problem of the study (What concepts do students define by using the accumulation point?) are as follows:

All of the students mainly used the concepts “Limit-Left and Right Hand Limits”.

Conclusion and Discussion

The results concerning the first sub-problem are as follows:

None of the students at the Faculty of Science and Faculty of Education could define “the accumulation point” in a correct way. Considering that “the accumulation point” forms the basis of a limit and other concepts related to it, inadequate learning of the former could lead to difficulties and misconceptions in the latter.

The results concerning the second sub-problem are as follows:

Some of the students confused “the accumulation point” with “the set of accumulation points”. It is recommended that teachers place emphasis on the difference and correlation between the accumulation point and the set of accumulation points. Furthermore, some of the students used the concept “limit value” instead of “the accumulation point”. The finding is a surprising one, for the accumulation point is one of the prerequisites for “a limit” and associated with domain whereas the limit value is related to co-domain. Also, some of the students believed that a function should be defined in a set as a prerequisite for the existence of the accumulation point in the set. The belief might have resulted from the fact that functions are covered earlier in the curriculum than limits and other related concepts. Therefore, it is recommended that teachers should emphasize that function is not a prerequisite for the accumulation point. Moreover, some of the students noted that the accumulation point of a set should be an element of that set. The misconception might be one of the reasons why they confused “neighborhood” with “deleted neighborhood”. Thus, it is recommended that teachers emphasize that the accumulation point need not be an element of the set but each deleted neighborhood should include an element from the set. In addition, all of the students made an effort to define “the accumulation point” in the sets of natural numbers and real numbers.

The results concerning the third sub-problem are as follows:

Regardless of their grade, the students at the Faculty of Education were able to state more concepts required for defining the accumulation point than those at the Faculty of Science and Education. The third grade students often used relatively more complicated concepts such as “Neighborhood-deleted neighborhood” while the fourth grade students chose the simpler ones like “Set-Interval”. Similarly, the number of concepts the students stated to define “the accumulation point” decreased as they moved to a higher grade.

The results concerning the fourth sub-problem are as follows:

In stating the concepts they could define by using the accumulation point, most of the third grade students at the Faculty of Science and Literature were at level 3 while the fewest students were at level 0. As for the fourth grade, most of the students were at level 2 while the fewest students were at level 3. On the other hand, most of the third grade students at the Faculty of Education were at level 1 whereas none of them were at level 3.

Yığılma Noktası Kavramı ve Kullanımı

Ömer Faruk Çetin[†], Arif Dane & Mehmet Bekdemir

Erzincan Üniversitesi, Erzincan, TÜRKİYE

Makale Gönderme Tarihi: 27.04.2012

Makale Kabul Tarihi: 04.12.2012

Özet – Bu çalışmanın amacı matematik programlarındaki öğrencilerin temel bir kavram olan “yığılma noktası” kavramını nasıl tanımladıkları ve diğer kavramlarla nasıl ilişkilendirdiklerini araştırmaktır. Çalışmada tarama modeli kullanılmıştır. Veriler, 2011–2012 eğitim-öğretim yılı güz yarıyılında Doğu Anadolu Bölgesi’nin nüfus açısından orta ölçekli bir ilinde bulunan Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Programı ile Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programının üçüncü ve dördüncü sınıflarında öğrenim gören 107 öğrenciden Kavram Bilgi Formu (KBF) kullanılarak toplanmıştır. Elde edilen veriler betimsel olarak analiz edilmiştir. Öğrencilerin “yığılma noktasının tanımı”, “yığılma noktasını tanımlamak için gerekli olan kavramları bilme” ve “yığılma noktası kavramını nerelerde kullanacaklarına” dair güçlükler yaşadıkları tespit edilmiştir.

Anahtar kelimeler: yığılma noktası, limit, türev, öğrenme güçlükleri, kavram yanılgısı.

Giriş

Nesnelerin veya olayların ortak özelliklerini kapsayan ve bir ortak ad altında toplayan genel tasarım olarak tanımlanan “kavram” aslında düşünmeyi sağlayan zihinsel araçtır. Kavramlar bireyin fiziksel ve sosyal dünyayı anlamasını ve çevresiyle iletişim kurabilmesini sağlar. Kavramlara sahip olmayan bebeklik çağını geçirmiş bireyin düşünmesi bir bebeğin düşünmesi gibi sadece duyuşsal algılamalarıyla sınırlıdır. Bir grup varlık, olay, fikir, bilgi ve süreçlerle ilişkiler kurulmasına yardım eden kavramların bazıları somut ve basit, bazıları ise soyut ve karmaşıktır. Bireyler somut ve basit kavramları kendi kendilerine veya çevrelerinden öğrenebilirlerken, soyut ve karmaşık olan kavramları öğrenmek için genellikle formal eğitime ihtiyaç duymaktadır. Örneğin Türkçe, kimya, fizik gibi alanlardaki kavramlar formal eğitimle kazanılabilmektedir (Senemoğlu, 2010). Matematikte de kullanılan kavramlar genellikle soyut, karmaşık ve hiyerarşıktır (Nesbit, 1996). Üstelik formal eğitimde sınıf düzeyleri arttıkça matematiksel kavramların soyutluk, karmaşıklık ve hiyerarşıklık düzeyleri de

[†] İletişim: Ömer Faruk Çetin, Yrd. Doç. Dr., İlköğretim Matematik Eğitimi ABD, İlköğretim Bölümü, Eğitim Fakültesi, Erzincan Üniversitesi, Erzincan, TÜRKİYE.

E-mail: fcetin80@hotmail.com

artmaktadır. Bu özelliklerden dolayı yeni bir matematiksel kavramın veya bilginin öğrenilmesi büyük ölçüde öncesindeki kavramların anlamlı olarak öğrenilmesine ve aralarındaki ilişkilerin doğru kurulabilmesine bağlıdır. Bu süreç üst düzey düşünme becerisi gerektirdiğinden matematiksel kavramların öğrenilmesinde, birçok araştırmanın da ortaya koyduğu gibi, çeşitli zorluklarla karşılaşmaktadır. Alan ve problem çözmedeki temel bilgi ve becerilere sahip olmamaktan (Tall, 1993; Yudariah ve Roselainy, 2001) kaynaklanan öğrenme güçlükleri cebir, geometri ve trigonometri gibi matematiğin alt alanlarında olduğu kadar analiz alt alanında da mevcuttur. Analiz; genel olarak fonksiyon, limit, süreklilik, türev ve integral kavramlarını inceleyen matematiğin bir alt dalıdır. Analizde limit kavramı; süreklilik, dizi, türev ve integral gibi pek çok önemli kavramla çok yakın ve güçlü ilişkisi nedeniyle en temel kavramlardan birisidir (Cornu, 1991). Bu nedenle limit kavramı analiz alanında en çok hakkında araştırma yapılan kavramlardan biridir (Baştürk ve Dönmez, 2011a). Araştırmalar, öğrencilerin limit kavramına ilişkin çeşitli kavram yanılgılarına sahip olduklarını ve bu kavramları öğrenirken zorluklar yaşadıklarını ortaya koymuştur (Cornu, 1991; Davis ve Vinner, 1986; Szydlik, 2000; Tall ve Vinner, 1981; Williams, 1991). Bunlar; genel hatlarıyla “limit ulaşılacak en üst değer ve aşılmaması gereken bir sınır”, “bir fonksiyonun bir noktada limitinin olması için o noktada tanımlı olması”, “limit alınan noktanın fonksiyonunun tanım kümesinde yer alması”, “fonksiyonun limitinin olması için sürekli olması”, “fonksiyonun her noktada limiti olması gerektiği”, “limit değerinin asla ulaşılabilir olmadığı” ve “verilen fonksiyonun belli bir değere yaklaşmasını irdelemeksizin yaklaşılan değeri fonksiyonda basitçe yerine koyarak limit değerine ulaşılacağı düşünülmesi” şeklinde sınıflanabilir (Akbulut ve Işık, 2005; Baştürk ve Dönmez, 2011b; Bergthold, 1999; Bezuidenhout, 2001; Cornu, 1991; Davis ve Vinner, 1986; Dönmez, (2009); Gray ve Tall, 1991; Jordaan, 2005; Orton, 1983; Szydlik, 2000; Tall ve Vinner, 1981; Tall, 1993; Williams, 1989, 1991).

Limit kavramında ortaya çıkan öğrenme güçlüklerinin veya kavram yanılgılarının birçoğu yığılma (limit) noktası kavramıyla ilişkilidir. Çünkü bir fonksiyonun herhangi bir noktada limitinin var olması için öncelikle o noktanın yığılma noktası olması gerekmektedir (Balcı,1997). Bundan dolayı yığılma noktası limit ve limitle ilişkili olan kavramların merkezinde yer alır. Yani, limitle ilgili güçlük ve yanılgıları gidermek için yığılma noktası kavramı üzerinde öncelikle durulmalıdır. Diğer taraftan da “ $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $a \in \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer a 'nın her bir komşuluğunda, A kümesinin a 'dan farklı en az bir elemanı varsa a 'ya A 'nın

yığılma noktası denir (Balcı,1997).” şeklindeki yığılma noktası tanımından da anlaşılacağı gibi bu kavramın tanımlanması için nokta, komşuluk gibi kavramlara ihtiyaç duyulur.

Bu kadar temel bir kavram olmasına rağmen limit ve limitle bağlantılı diğer kavramlarla ilgili birkaç araştırma (Przenioslo, 2004) dışında araştırmalarda yığılma noktasından hiç bahsedilmemesi ilgi çekicidir. Ayrıca araştırmacıların yaklaşık 20 yıllık deneyimleri limit kavramı ve onunla ilişkili diğer kavramların öğretiminde yığılma noktası kavramı üzerinde yeterince veya hiç durulmadığı ve bu kavramın daha derinlemesine araştırılması düşüncesine götürmüştür. Araştırma bu gerekçelerle tasarlanmış ve yapılmıştır.

Çalışmanın Amacı

Bu çalışmanın amacı matematik programlarındaki öğrencilerin “yığılma noktası” kavramını nasıl tanımladıkları ve diğer kavramlarla nasıl ilişkilendirdiklerini araştırmaktır. Bu amaca uygun olarak aşağıdaki alt problemlere cevap aranmıştır.

1. Öğrencilerin fakülte ve sınıf düzeyine göre “yığılma noktasını” doğru tanımlama oranları nedir?
2. Öğrenciler “yığılma noktasını” tanımlarken ne gibi hatalar yapmaktadırlar?
3. Öğrenciler “yığılma noktası” kavramını tanımlamada hangi kavramları kullanmaktadırlar?
4. Öğrenciler hangi kavramları tanımlamada “yığılma noktası” kavramını kullanmaktadırlar?

Yöntem

Bu çalışmada tarama modeli kullanılmıştır. Tarama modeli, geçmişte veya halen var olan bir durumu var olduğu şekliyle betimlemeyi amaçlayan bir araştırma yaklaşımıdır. Bu modelde araştırmaya konu olan olay, birey, grup veya nesne kendi koşulları içinde olduğu gibi tanımlanmaya çalışılır (Karasar, 2008). Bu çalışmada öğrencilerin “yığılma noktası” kavramını nasıl tanımladıkları ve ilişkilendirdiklerini betimlenmek istendiğinden sadece nitel veri toplama yöntemi kullanılmıştır.

Çalışma Grubu

Çalışma grubunu, Doğu Anadolu Bölgesi'nin nüfus açısından orta ölçekli bir ilinde bulunan ağırlıklı olarak matematik alan eğitimi ve öğretimi veren Fen Edebiyat Matematik Programı ile Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programlarının üçüncü ve dördüncü sınıflardan öğrenim gören 107 öğrenci oluşturmaktadır. Fen Edebiyat Fakültesi

Matematik Programında “Yığılma noktası” kavramı ağırlıklı olarak birinci sınıfta Analiz-I ve II; ikinci sınıfta Analiz-III ve IV, üçüncü sınıfta Kompleks Fonksiyonlar Teorisi-I ve II, Topoloji-I ve II; dördüncü sınıfta Reel ve Fonksiyonel Analiz derslerinde kullanılmaktadır. Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Programında ise bu kavram ikinci sınıfta Analiz-I ve II ile üçüncü sınıfta Analiz-III derslerinde görülmektedir.

Veri Toplama Aracı

Bu çalışmada veriler, içeriği dört alan uzmanı ve bir dil uzmanı tarafından hazırlanmış olan Kavram Bilgi Formu (KBF) olarak adlandırılan form yardımı ile toplanmıştır. KBF yığılma noktası kavramıyla ilgili üç açık uçlu sorudan oluşmaktadır. Buna göre KBF'nin birinci sorusu “*Yığılma noktasını tanımlayıp bir örnek veriniz.*”, ikincisi “*Yığılma noktasını tanımlamada hangi kavramları kullanırsınız, örneklerle açıklayınız.*” ve üçüncüsü de “*Hangi kavramları açıklamak için yığılma noktası kavramına ihtiyaç duyarız örneklerle açıklayınız.*” şeklindedir. KBF'nin pilot çalışması Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programındaki 30 üçüncü sınıf öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışması sonucunda “yığılma noktasına günlük yaşamdan bir örnek veriniz” sorusuna hiç yanıt verilmemesinden dolayı üç alan uzmanı tarafından bu soru KBF den çıkartılmıştır.

Veri Toplama ve Analizi

Bir ders saatinde öğrencilerden KBF formu üzerindeki soruları bireysel ve yazılı olarak cevaplamaları istenmiştir. Cevaplama sürecinde öğrencilerin birbirlerini etkilemeleri engellenmiştir. Çalışmanın verileri betimsel olarak analiz edilmiştir. Betimsel analizde veriler araştırma sorularının ortaya koyduğu temalara göre düzenlenebileceği gibi görüşmede kullanılan sorular dikkate alınarak sunulabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Her bir öğrenciden alınan KBF formları numaralandırılmış (numaralandırmada soldan ilk harf “F” fen-edebiyat fakültesini, “E” eğitim fakültesini, harften sonraki ilk sayı sınıf düzeyini ve harften sonraki ikinci sayıda sıra numarasını göstermektedir) ve veriler bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Betimsel olarak analiz yapılabilmesi için tüm cevap kâğıtları okunmuş ve “yığılma noktası” kavramı tanımı, bu tanımlama için gerekli olan kavramlar ile yığılma noktası kavramı kullanılarak tanımlanabilecek kavramlar alan uzmanları tarafından belirlenmiş ve sınıflandırılmıştır. Okuyucu güvenilirliğini sağlamak için öğrencilerin cevap kâğıtları bu sınıflandırmalara göre üç araştırmacının ortak kararlarıyla kategorilere (temalara) ve düzeylere ayrılmıştır. Buna göre, KBF' un birinci sorusunun cevapları “doğru”, “kısmen doğru”, “yanlış veya cevap vermeme” şeklindeki kategorilere göre değerlendirilmiş ve doğrudan alıntılarla yorumlanmıştır. Benzer şekilde ikinci ve üçüncü soruların cevapları da

“yanlış veya cevap vermeme” sıfır düzeyi, “sadece bir kavramı doğru olarak ifade etme” bir düzeyi, “sadece iki kavramı doğru olarak ifade etme” iki düzeyi ve “en az üç kavram doğru olarak ifade etme” üç düzeylerine göre değerlendirilmiş ve yorumlanmıştır.

Bulgular ve Yorumlar

Araştırmanın “Öğrencilerin fakülte ve sınıf düzeyine göre yığılma noktasını doğru tanımlama oranları nedir?” şeklindeki birinci alt problemine ilişkin bulgular Tablo 1’de verilmiştir.

Tablo 1. “Yığılma Noktasını Tanımlayıp Bir Örnek Veriniz” Sorusuna Verilen Yanıtların Kategorilere Göre Dağılımı.

Kategoriler	Fen Edebiyat Fakültesi				Eğitim Fakültesi			
	3 Sınıf		4. Sınıf		3 Sınıf		4. Sınıf	
	f	%	f	%	f	%	f	%
Doğru yanıt verenler	0	0	0	0	0	0	0	0
Kısmen doğru yanıt verenler	18	62	11	39	17	68	12	48
Yanlış yanıt verenler	9	31	12	43	7	28	13	52
Yanıt vermeyenler	2	7	5	18	1	4	0	0
Toplam	29	100	28	100	25	100	25	100
Genel Toplam			57				50	

Tablo 1’e göre çalışmaya katılan Fen Edebiyat ve Eğitim Fakültesi öğrencileri “yığılma noktasını tanımlayınız” sorusuna doğru yanıt verememişlerdir. Sırasıyla Fen Edebiyat ve Eğitim Fakültesi üçüncü sınıf öğrencilerinin %62, %68’ i, dördüncü sınıf öğrencilerinin %39, %48’ si bu soruya kısmen doğru yanıt vermişlerdir. Bu soruya yanlış yanıt verenlerin yüzdesi üçüncü sınıflarda %31, %28 ve dördüncü sınıflarda %43, %52 dir. Yanıt vermeyenlerin yüzdeleri üçüncü sınıflarda %7, %4 ve dördüncü sınıflarda %18, %0 dir.

Kısmen doğru yanıt veren öğrencilerden F.3,8, F.4,28, E.3,5, E.4,12 kodlu öğrencilerin ifadeleri aşağıdaki gibidir.

F.3,8: Bir kümenin herhangi bir komşuluğunda kümenin başka elemanlarını barındıran noktalar.

F.4,28: Boştan farklı bir A kümesinin yığılma noktasının olabilmesi için $\forall \varepsilon > 0$ için \exists bir $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ aralığında bir x değeri varsa buna yığılma noktası denir. Yani bir ε komşuluğundaki limit değeri sonucu x’in elde edilmesidir.

E.3,5: Yığılma noktası bir sayının etrafında birbirine ve sayıya çok yakın şekilde bulunan noktalar kümesidir. Mesela sayı doğrusu buna en güzel örnektir. Sayı doğrusunda hiç boş nokta yoktur ve tam sayılar yığılma noktalarıdır.

E.4,12: Bir kümede herhangi bir A noktası çıkarılıp bu A noktasının $\varepsilon > 0$ olacak şekilde en küçük ε komşuluğuna yığılma noktası denir.

Yanlış yanıt veren öğrencilerden F.3,14, F.4,25, E.3,14, E.4,18 kodlu öğrencilerin ifadeleri aşağıdaki gibidir.

F.3,14: $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir $N(\varepsilon)$ sayısı vardır ki $n > N(\varepsilon)$ olacak şekilde $|x - x_0| < \varepsilon$ eşitsizliği bir $N(\varepsilon)$ sayısı bulunur. Bu tanımdan yola çıkarak $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ aralığına yığılma noktası denir.

F.4,25: $A \neq \emptyset$ ve $f(x)$ bir fonksiyon olsun. $\forall x \in A$ için $\forall \varepsilon > 0$ olacak şekilde x_0 $f(x)$ fonksiyonu $\exists x_0 \in f(x)$ oluyorsa yığılma noktasıdır.

E.3,14: $f : A \rightarrow R$ olsun. Bir noktaya yaklaşan sağdan ve soldan değerlere denir. R de olması gerekiyor. Tam sayılarda olursa yığılma noktası olmaz.

E.4,18: Limit değerinin yaklaştığı noktadır.

Yığılma Noktasını Tanımlarken Yapılan Hatalar

Öğrencilerin yığılma noktasını tanımlarken yaptıkları hatalar vurgularına göre bir araya getirilerek aşağıdaki beş başlık altında verilmiştir.

1. Yığılma noktası ile yığılma noktaları kümesini karıştırmama,
2. Yığılma noktası yerine limit değeri kavramını kullanma,
3. Yığılma noktasının var olması için bir fonksiyonun var olması gerektiği,
4. Yığılma noktasının kümenin elemanı olması gerektiğini ifade etme,
5. Komşuluk ile delinmiş komşuluğu karıştırmama,

Yığılma noktası ile yığılma noktalarının kümesini karıştırmış öğrencilerden F.3,14 ve E.4,12 kodlu öğrencilerin ifadeleri aşağıdaki gibidir.

F.3,14: $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir $N(\varepsilon)$ sayısı vardır ki $n > N(\varepsilon)$ olacak şekilde $|x - x_0| < \varepsilon$ eşitsizliği bir $N(\varepsilon)$ sayısı bulunur. Bu tanımdan yola çıkarak $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ aralığına yığılma noktası denir.

E.4,12: Bir kümede herhangi bir A noktası çıkarılıp bu A noktasının $\varepsilon > 0$ olacak şekilde en küçük ε komşuluğuna yığılma noktası denir.

Yığılma noktası yerine limit değerini almış öğrencilerden E.4,17 ve E.4,22 kodlu öğrencilerin ifadeleri aşağıdaki gibidir.

E.4,17: Kısaca limit değerinin yaklaştığı nokta diyebiliriz.

E.4,22: Limit değerinin yaklaştığı noktaya yığılma noktası denir.

Yığılma noktasının varlığını bir fonksiyonun varlığı ile ilişkilendiren öğrencilerden F.4,4 kodlu öğrencinin ifadesi aşağıdaki gibidir.

F.4,4: Fonksiyondaki belli bir değer için bir noktaya ε – komşuluğundaki yakınsamasına denir.

Yığılma noktasının kümenin elemanı olması gerektiğini ifade eden öğrencilerden F.4,11 kodlu öğrencinin ifadesi aşağıdaki gibidir.

F.4,11: Fonksiyonu tanımsız yapan noktaya yığılma noktası denir.

Komşuluk ile delinmiş komşuluğu karıştırmış öğrencilerden F.3,12 ve E.4,5 kodlu öğrencilerin ifadeleri aşağıdaki gibidir.

F.3,12: Üzerinde bir uzay tanımlanmış bir kümenin herhangi bir komşuluğunda kümenin tüm noktalarını barındıran noktadır.

E.4,5: Belli bir x_0 noktasına yakın komşuluğundaki yoğunluk yığılma noktası olarak adlandırılır.

Yığılma Noktası Kavramını Tanımlamada Kullanılan Kavramlar

“Öğrenciler yığılma noktası kavramını tanımlamada hangi kavramları kullanmaktadırlar?” şeklindeki üçüncü alt probleme ilişkin bulgular Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 2. Yığılma Noktasını Tanımlamada Kullanılan Kavramların Algı Düzeylerine Göre Dağılımı.

Algı Düzeyleri	Fen Edebiyat Fakültesi				Eğitim Fakültesi			
	3 Sınıf		4. Sınıf		3 Sınıf		4. Sınıf	
	f	%	f	%	F	%	f	%
0 düzeyi	8	27	13	46	3	12	10	40
1 düzeyi	19	66	7	25	8	32	9	36
2 düzeyi	2	7	6	22	10	40	4	16
3 düzeyi	0	0	2	7	4	16	2	8
Toplam	29	100	28	100	25	100	25	100

Tablo 2’ e göre çalışmaya katılan Fen Edebiyat Fakültesi üçüncü sınıf öğrencilerinin %27 si sıfır düzeyinde, %66 sı bir düzeyinde, %7 si iki düzeyinde olup üç düzeyinde hiç öğrenci yoktur. Fen Edebiyat Fakültesi dördüncü sınıf öğrencilerinin %46 sı sıfır düzeyinde, %25 i bir düzeyinde, %22 si iki düzeyinde, %7 si de üç düzeyindedir. Eğitim Fakültesi üçüncü sınıf öğrencilerinin %12 si sıfır düzeyinde, %32 si bir düzeyinde, %40 ı iki düzeyinde, %16 sı da üç düzeyindedir. Eğitim Fakültesi dördüncü sınıf öğrencilerinin %40 ı sıfır düzeyinde, %36 sı bir düzeyinde, %16 sı iki düzeyinde, %8 i de üç düzeyindedir

“Yığılma noktasını tanımlamada hangi kavramları kullanırsınız, örneklerle açıklayınız” sorusuna verilen yanıtlarda geçen doğru kavramlar ve tekrarlanma sayıları Tablo 3’de verilmiştir.

Tablo 3. Yığılma Noktasını Tanımlamada Kullanılan Doğru Kavramlar Ve Tekrarlanma Sayıları.

Kategoriler	Fen Edebiyat Fakültesi		Eğitim Fakültesi	
	3 Sınıf	4. Sınıf	3 Sınıf	4. Sınıf
	f	f	f	f
Komşuluk -Delinmiş Komşuluk	16	7	13	7
Eleman- Nokta	5	4	12	4
Küme- Aralık	1	10	10	8
Metrik	1	2	0	0
Yuvar- İç nokta	0	2	3	1
Sonsuz	0	0	1	3

Tablo 3’den anlaşılacağı gibi göre çalışmaya katılan Fen Edebiyat Fakültesi üçüncü sınıf öğrencileri “Komşuluk-Delinmiş Komşuluk ” kavramlarını en çok kullanırken, “Yuvar-İç nokta” ve “Sonsuz” kavramlarını hiç kullanmamışlardır. Fen Edebiyat Fakültesi dördüncü sınıf öğrencileri “Küme-Aralık” kavramlarını en çok kullanırken, “Sonsuz” kavramlarını hiç kullanmamışlardır. Benzer şekilde Eğitim Fakültesi üçüncü sınıf öğrencileri “Komşuluk-Delinmiş Komşuluk” kavramlarını en çok kullanırken, “Metrik” kavramını hiç kullanmamışlardır. Eğitim Fakültesi dördüncü sınıf öğrencileri “Küme-Aralık” kavramlarını en çok kullanırken, “Metrik” kavramını hiç kullanmamışlardır.

“Yığılma Noktası” Kavramı Kullanılarak Açıklanan Kavramlar

“Öğrenciler hangi kavramları tanımlamada yığılma noktası kavramını kullanmaktadırlar?” alt problemine ilişkin bulgular Tablo 4’de verilmiştir

Tablo 4. “Hangi Kavramları Açıklamak İçin Yığılma Noktası Kavramına İhtiyaç Duyarız Örneklerle Açıklayınız” Sorusuna Verilen Yanıtların Algı Düzeylerine Göre Dağılımı.

Algı Düzeyleri	Fen Edebiyat Fakültesi				Eğitim Fakültesi			
	3 Sınıf		4. Sınıf		3 Sınıf		4. Sınıf	
	f	%	f	%	f	%	f	%
0 düzeyi	3	10	5	18	5	20	6	24

1 düzeyi	6	20	7	25	11	44	7	28
2 düzeyi	8	28	12	43	9	36	8	32
3 düzeyi	12	42	4	14	0	0	4	16
Toplam	29	100	28	100	25	100	25	100

Tablo 4'e göre çalışmaya katılan Fen Edebiyat Fakültesi üçüncü sınıf öğrencilerinin %10 u sıfır düzeyinde, %20 si bir düzeyinde, %28 i iki düzeyinde, %42 si de üç düzeyindedir. Fen Edebiyat Fakültesi dördüncü sınıf öğrencilerinin %18 i sıfır düzeyinde, %25 i bir düzeyinde, %43 ü iki düzeyinde, %14 ü de üç düzeyindedir. Eğitim Fakültesi üçüncü sınıf öğrencilerinin %20 si sıfır düzeyinde, %44 ü bir düzeyinde, %36 sı iki düzeyinde, %0 ı da üç düzeyindedir. Eğitim Fakültesi dördüncü sınıf öğrencilerinin %24 ü sıfır düzeyinde, %28 si bir düzeyinde, %32 si iki düzeyinde, %16 sı da üç düzeyindedir

“Hangi kavramları açıklamak için yığılma noktası kavramına ihtiyaç duyarız örneklerle açıklayınız.” Sorusuna öğrencilerin verdikleri yanıtlarda geçen doğru kavramlar ve tekrarlanma sayıları Tablo 5’de verilmiştir.

Tablo 5. Açıklamak İçin Yığılma Noktası Kavramına İhtiyaç Duyulan Kavramlar Ve Tekrarlanma Sayıları.

Kategoriler	Fen Edebiyat Fakültesi		Eğitim Fakültesi	
	3. Sınıf	4. Sınıf	3.Sınıf	4. Sınıf
	f	f	f	f
Limit, Sağdan-Soldan Limit	25	24	19	19
Süreklilik	19	14	2	8
Türev	12	6	1	7
Dizi-Serilerde Limit ve Yakınsaklık	2	0	6	0
İntegral	0	0	1	1

Tablo 5’den anlaşılacağı gibi göre çalışmaya katılan Fen Edebiyat Fakültesi üçüncü sınıf öğrencileri “Limit, Sağdan-Soldan Limit” kavramlarını en çok kullanırken, “İntegral” kavramını hiç kullanmamışlardır. Fen Edebiyat Fakültesi dördüncü sınıf öğrencileri “Limit, Sağdan-Soldan Limit” kavramlarını en çok kullanırken, “İntegral” ve “Dizi-Serilerde Limit ve Yakınsaklık” kavramlarını hiç kullanmamışlardır. Benzer şekilde Eğitim Fakültesi üçüncü sınıf öğrencileri “Limit, Sağdan-Soldan Limit” kavramlarını en çok kullanırken, “İntegral” kavramını en az kullanmışlardır. Eğitim Fakültesi dördüncü sınıf öğrencileri “Limit, Sağdan-

Soldan Limit" kavramlarını en çok kullanırken, "Dizi-Serilerde Limit ve Yakınsaklık" kavramlarını hiç kullanmamışlardır. Her iki fakülte öğrencileri de "Limit, Sağdan-Soldan Limit" kavramlarını açıklamak için "yığılma noktası" kavramına ihtiyaç duyarken "integral" kavramında dikkate almamışlardır.

Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Araştırmanın "Öğrencilerin fakülte ve sınıf düzeyine göre yığılma noktasını doğru tanımlama oranları nedir?" şeklindeki birinci alt problemine ilişkin sonuçlar;

Çalışmaya katılan Fen Edebiyat ve Eğitim Fakültesi öğrencilerinin hiç biri "yığılma noktası" kavramını doğru olarak tanımlayamamıştır. Bu sonuç, araştırmalarda ortaya konan "öğrencilerin limit ve limitle ilgili kavramları öğrenmede zorluk yaşadıkları ve bu konularda kavram yanlışlarına sahip oldukları (Akbulut ve Işık, 2005; Baştürk ve Dönmez, 2011b; Bergthold, 1999; Bezuidenhout, 2001; Cornu, 1991; Davis ve Vinner, 1986; Gray ve Tall, 1991; Jordaan, 2005; Orton, 1981; Szydlik, 2000; Tall ve Vinner, 1981; Tall, 1993; Williams, 1989, 1991)" sonucu ile paralellik göstermektedir. "Yığılma noktası", limit ve limitle ilgili kavramların temelini oluşturduğundan, bu kavramın yeterince öğrenilmemesi limit ve diğer kavramlarda yaşanan güçlük ve yanlışların nedeni olabilir. Bu durumun araştırılması önerilmektedir.

Her iki fakültenin üçüncü sınıf öğrencilerinin yarısından fazlası kısmen doğru tanımlama yaparken son sınıf öğrencilerinin yarısından azı yapmıştır. Aynı zamanda üçüncü sınıf öğrencilerinin yanlış yanıt verme yüzdeleri dördüncü sınıf öğrencilerinin yanlış yanıt verme yüzdelerinden düşüktür. Bu sonuçlar her iki fakülte öğrencilerinin "yığılma noktasını" içeren dersleri son sınıftan önceki dönemlerde almış olmalarından ve sonraki derslerinde kullanmamış olmalarından kaynaklanmış olabilir. Fen-Edebiyat Fakültesi öğrencilerinin yanıt vermeme yüzdeleri her iki sınıfta da Eğitim Fakültesi öğrencilerinin yanıt vermeme yüzdelerinden yüksektir. Bu durum Fen Edebiyat Fakültesi öğrencileri ile Eğitim Fakültesi öğrencilerinin doğru ya da yanlış ifadelerine verilen dönütlerin farklılığından kaynaklanmış olabilir. Konunun araştırılması önerilir.

Öğrencilerin bazıları "yığılma noktası" ile "yığılma noktalarının kümesi" karıştırmaktadırlar. Bu durum öğrencilerin nokta yerine bu noktaların oluşturduğu kümeyi kullandıklarını göstermektedir. Yığılma noktası ve yığılma noktaları kümesi ayrımı ve ilişkileri üzerinde durulması önerilir. Öğrencilerin bir kısmı da "Yığılma noktası" yerine "limit değeri" kavramını kullanmaktadır. Yığılma noktası kavramı limit kavramından önce ve

hatta limit kavramının ön şart kavramlarından birisi olması ve ayrıca yığılma noktası kavramı tanım kümesiyle ilişkili bir kavram iken limit değeri kavramı değer kümesi ile ilişkili bir kavram olmasına rağmen bu kavramların karıştırılması ilginçtir. Bu sonuç limitle ilgili yapılan araştırmalarda ortaya çıkan tanım kümesi ve limit değeri ile ilgili kavram yanlışlarının (Akbulut ve Işık, 2005; Baştürk ve Dönmez, 2011b; Bezuidenhout, 2001; Gray ve Tall, 1991; Jordaan, 2005; Szydlik, 2000) nedenlerinden birisi olabilir. Bazı öğrenciler “Yığılma noktasının varlığının ön şartı olarak o kümede bir fonksiyon tanımlı olması gerekliliğini” görmektedir. Bu durum dersler içeriğinde önce fonksiyonlardan bahsedilip sonra limit ve limitle ilişkili kavramların olmasından kaynaklanmış olabilir. Buna göre yığılma noktası kavramının tanımlanması için bir fonksiyonun olması gerekmediğinin vurgulanması önerilir. Bir kısım öğrencide bir kümenin yığılma noktasının mutlaka o kümenin elemanı olması gerekliliğini vurgulamıştır. Bu durum öğrencilerin yığılma noktası kavramını tanımlarken “komşuluk” ile “delinmiş komşuluk” kavramlarını karıştırmalarının da bir nedeni olabilir. Ayrıca yine bu sonuç limit ile ilgili yapılan araştırmalarda (Akbulut ve Işık, 2005; Baştürk ve Dönmez, 2011b; Jordaan, 2005; Szydlik, 2000) ortaya konan “bir fonksiyonun bir noktada limitinin olması için o noktada tanımlı olması gerektiği” şeklindeki yanlışların da nedeni olabilir. Yığılma noktası kavramı öğretiminde yığılma noktasının o kümenin elemanı olması gerekmediğine, fakat delinmiş her komşuluğunun o kümeden eleman içermesinin gerekliliğinin vurgulanması önerilir.

Ayrıca öğrencilerin tamamı “yığılma noktası” kavramını doğal ve reel sayı kümelerinde tanımlamaya çalışmışlardır. Bu iki açıdan beklenen bir durumdur. Birincisi öğrencilerin bu kavramı göreceli olarak daha kolay olan uzayda tanımlamaya çalışmalarıdır. İkincisi de öğrenciler bu kavramı genel matematik, analiz I, reel analiz gibi birçok derslerde reel ve doğal sayılar kümesi üzerinde öğreniyor olmalarıdır. Fakat analiz II, III gibi derslerde iki, üç, ..., n boyutlu reel uzayda ve yine topoloji derslerinde de topolojik uzayda bu kavramı öğrenmelerine rağmen hiçbir öğrencinin bu uzaylarda tanımlamaya çalışmaması dikkat çekicidir.

Yığılma noktası kullanılarak tanımlanan kavramları ifade etmede her iki fakültenin üçüncü ve dördüncü sınıf öğrencileri en çok “Limit, Sağdan-Soldan Limit” kavramlarına vurgu yapmışlardır. Eğitim fakültesi öğrencileri her iki sınıf düzeyinde de Fen Edebiyat Fakültesi öğrencilerinden yığılma noktasını tanımlamak için gerekli olan kavramları daha fazla sayıda ifade etmişlerdir. Ayrıca her iki fakülte üçüncü sınıf öğrencileri en çok “Komşuluk-Delinmiş Komşuluk” kavramlarına vurgu yaparken son sınıf öğrencileri de en

çok "Küme-Aralık" kavramlarına vurgu yapmışlardır. Üçüncü sınıf öğrencileri "Komşuluk-Delinmiş Komşuluk" gibi karmaşık kavramları daha yüksek oranda kullanırken, dördüncü sınıf öğrencileri de bu kavramın yerine daha basit olan "Küme-Aralık" kavramlarını kullanmışlardır. Yine "yığılma noktası" kavramını tanımlamak için öğrenciler tarafından ifade edilen kavramları sayısı sınıf düzeyi arttıkça azalmıştır. Sınıf düzeyi arttıkça öğrencilerin daha fazla kavram bilmeleri ve bu kavramlar arasında doğru ilişkiler kurmaları beklendiğinden ortaya çıkan bu iki sonuç ilginçtir.

Kaynakça

- Akbulut, K., ve Işık, A. (2005). Limit kavramının anlaşılmasında etkileşimli öğretim stratejisinin etkinliğinin incelenmesi ve bu süreçte karşılaşılan kavram yanılgıları. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 13(2), 497-512.
- Balcı, M. (1997). *Matematik Analiz Cilt II*, Balcı Yayınları, Ankara.
- Baştürk, S. ve Dönmez, G. (2011a). Öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konusuna ilişkin pedagojik alan bilgilerinin öğretim programı bilgisi bağlamında incelenmesi. *International Online Journal of Educational Sciences*, 3(2), 743-775.
- Baştürk, S.ve Dönmez, G. (2011b). Matematik öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konusuyla ilgili kavram yanılgıları. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 5 (1), 225-249
- Bergthold, T.A. (1999). *Patterns of analytical thinking and knowledge use in students' early understanding of the limit concept*. Unpublished Doctoral Dissertation, University of Oklahoma, Oklahoma.
- Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 32(4), 487-500.
- Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Eds.), *Advanced mathematical thinking* (153-166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.
- Davis, R. B., and Vinner, S. (1986). The notion of limit; some seemingly an avoidable misconception stages, *J. Math. Behav.*, 5, 281-303.
- Dönmez, G. (2009). *Matematik öğretmen adaylarının limit ve süreklilik kavramlarına ilişkin pedagojik alan bilgilerinin değerlendirilmesi*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans tezi, Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü-İstanbul.

- Gray, E. M. and Tall, D. O., (1991). “ Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful mathematical Thinking”, *Proceedings of PME XIII, Assisi*, Vol. II, 72-79.
- Jordaan, T. (2005). *Misconceptions of the limit concept in a mathematics course for engineering students*. Unpublished Master of Science Dissertation, University of South Africa.
- Karasar, N. (2008). *Bilimsel araştırma yöntemleri*. Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.
- Nesbit, T. (1996). What counts? Mathematics education for adults. *Adult Basic Education*, 6, 69-83.
- Orton, A., (1983). “Students’ understanding of differentiation”, *Educational Studies in Mathematics*, 14, 235-250.
- Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*, 55, 103-132.
- Senemoğlu, N. (2010). *Gelişim, öğrenme ve öğretim: kuramdan uygulamaya*. (16th Edition). Ankara: Pegem Akademi.
- Szydlik, J.E. (2000). Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(3), 258-276.
- Tall, D., and Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151–169.
- Tall, D. (1993). Students Difficulties in Calculus. *Proceeding of Working Group 3 on Students’ Difficulties in Calculus*. ICME-7, Québec, Canada, (1993), 13-28.
- Williams, R.S. (1989). *Understanding of the limit concept in college calculus students*. Unpublished Doctoral Dissertation. University of Winconsin-Madison.
- Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 219-236.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2005). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Seçkin Kitabevi.
- Yudariah, M.,Y. and Roselainy, A.,R. (2001). Matematics Education at Universiti Teknologi Malaysia (UTM): Learning From Experience. *Journal Teknolog*, 34(E), 9–24.