



## Preservice Mathematics Teachers' Perceptions of Infinity, Indeterminate and Undefined

Derya ÇELİK\* & Elif AKŞAN

Karadeniz Technical University, Trabzon, TURKEY

Received: 10.05.2012

Accepted: 05.06.2013

---

*Abstract* – The aim of this study is to reveal the perceptions of preservice mathematics teachers on the concepts of infinity, indeterminate and undefined. The study was conducted with 83 teacher candidates attending to Primary School Mathematics Education at a state-owned university. A two-part test was applied to preservice teachers. In the first part of the test, three questions were directly posed to preservice teachers to clarify what they understand the concepts of infinity, indeterminate, and undefined. In the second part of the test, nine cases representing infinity, indeterminate and undefined ( $\infty+\infty$ ,  $1\infty$  and  $1/0$  etc.) were given to the teacher candidates and they were asked to explain what these symbolic representations mean to them. Based on the data obtained from the test, the candidate teachers (23%) has been more successful in explaining the concept of indeterminate. Except for the concept of undefined, their daily life experiences were seem to be effective to their explanations about the other two concepts. It was also determined that preservice teachers substitute these three concepts to each other. Besides, the study concluded that previously learned some dominant rules were quite effective to teacher' candidates' decisions of the about given symbolical cases.

*Key words:* Infinity, Indeterminate, Undefined, Preservice mathematics teachers

*DOI No:* <http://dx.doi.org/10.12973/nefmed158>

### Summary

#### Purpose and Significance

An extensive review of the literature revealed that most of the various grade level students have difficulty in understanding the concepts of infinity and undefined. A review of literature also showed that there is limited studies conducted about the concept of indeterminate. Since these concepts are vitally important in comprehending the basic and advanced mathematical topics (limit, continuity, derivative, integral etc.), researches on teachers' and pre-service teachers' perception of these concepts are essential. The aim of this study is to reveal the pre-service mathematics teachers' perceptions about the concepts of infinity, indeterminate and undefined.

---

\* Corresponding author: Derya ÇELİK, Asist. Prof. Dr. in Mathematics Education, Fatih Faculty of Education, Karadeniz Technical University, Trabzon, TURKEY. *E-mail:* deryacelik@ktu.edu.tr

### **Method**

This study was conducted with 83 teacher candidates studying Primary School Mathematics Education at a state-owned university, Turkey. A two-part test was developed to reveal pre-service teachers' perception on the concepts of infinity, indeterminate, and undefined. In the first part of the test, three questions were directly posed to pre-service teachers to clarify what they understand the concepts of infinity, indeterminate, and undefined. In the second part of the test, nine cases representing infinity, indeterminate and undefined ( $\infty+\infty$ ,  $1\infty$  and  $1/0$  etc.) were given to the teacher candidates and they were asked to explain what these symbolic representations mean to them. Content analysis was used to analyze teacher candidates' responses.

### **Results**

The data obtained from the first part of the test showed 23% of teacher candidates' explanations about indeterminate can be accepted as correct, while almost none of them explained concepts of infinity and undefined in a satisfactory way. The highest frequency of responses classified as insufficient or vague was for the concept of infinity (61%). The majority of teacher candidates in this study matched the concept of infinity with the concepts such as 'without end', 'very big', 'without borders', and 'unknown number'. The highest frequency of response classified as incorrect was for the concept of undefined (40%). Most of these teacher candidates explaining undefined concept incorrectly confused the term undefined with indeterminate. Almost one fourth of the teacher candidates gave no responses to the questions inquiring what they understand from these concepts.

The results of the second part showed that teacher candidates mainly succeed in linking the concepts of infinity, indeterminate and undefined with their symbolic representations (except for  $0.\infty$ ,  $1\infty$ , and  $\infty-\infty$ ). However, they failed to explain what these symbolic representations mean to them. While more than half of the teacher candidates did not present any explanation to support their responses, most of the answers were either rule-based or only verbal representation of the given symbolic form (As seen in the example of " $3.\infty = \infty$ . If infinity is multiplied by a number it is again infinity"). The most frequent incorrect answers given by participants in three cases representing infinity ( $\infty+\infty$ ,  $3.\infty$  and  $\infty^n$ ) were indeterminate and undefined, respectively. Unlike the findings about infinity, the incorrect answers given by the teacher candidates in the cases representing indeterminate vary. For example, while 'infinity' was the most common incorrect answer for  $\infty/\infty$  and  $\infty-\infty$  expressions (see Table 8, Table 10); it was indeterminate for  $0/0$  (Table 9), 1 for  $1^\infty$  (Table 11), and 0 for  $0.\infty$  (Table 12). In addition, it was determined that all rational explanations by

teacher candidates were rule-based (e.g. “ $1^{\infty}=1$  because all powers of 1 are equal to itself”). The most frequent wrong answers given by participants to undefined form  $1/0$  were mainly infinity and indeterminate.

### **Discussion and Conclusions**

The teacher candidates were more successful in explaining indeterminate than other two concepts. Except for the concept of undefined, their daily life experiences were seen to be effective to their explanations about the other two concepts. It was also determined that pre-service teachers substitute these three concepts to each other. Besides, the study concluded that certain previously learned dominant rules were quite effective to teacher candidates' decisions of the about given symbolical cases.

# Matematik Öğretmeni Adaylarının Sonsuzluk, Belirsizlik ve Tanımsızlık Kavramlarına İlişkin Anlamaları

Derya ÇELİK<sup>†</sup>, Elif AKŞAN

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi, Trabzon, Türkiye

Makale Gönderme Tarihi: 10.05.2012

Makale Kabul Tarihi: 05.06.2013

*Özet* – Bu araştırmanın amacı, matematik öğretmeni adaylarının sonsuzluk, belirsizlik ve tanımsızlık kavramları ile ilgili anlamalarını ortaya koymaktır. Araştırma bir devlet üniversitesinin İlköğretim Matematik Öğretmenliği programına devam eden 83 öğretmen adayıyla yürütülmüştür. Öğretmen adaylarına iki bölümden oluşan bir test uygulanmıştır. Testin birinci bölümünde öğretmen adaylarına doğrudan bu kavramlardan ne anladıkları yönelik üç soru yöneltilmiştir. İkinci bölümünde ise sonsuzluk, belirsizlik ve tanımsızlığı sembolik olarak temsil eden dokuz durum ( $\infty+\infty, 1\infty, \infty-\infty, \dots$ ) verilmiş ve öğretmen adaylarından bu sembolik gösterimlerin/formların kendileri için ne anlam ifade ettiğini nedenleri ile birlikte açıklamaları istenmiştir. Elde edilen sonuçlara göre öğretmen adayları en fazla belirsiz kavramını açıklamada başarılı (%23) olmuştur. Tanımsızlık kavramı dışında, diğer iki kavramla ilgili açıklamalarında günlük yaşam deneyimlerinin etkili olduğu ortaya çıkmıştır. Ayrıca öğretmen adaylarının sonsuzluk, belirsizlik ve tanımsızlık kavramlarını birbirinin yerine kullandıkları belirlenmiştir. Diğer taraftan öğretmen adaylarının verilen sembolik duruma ilişkin kararlarında önceden öğrendikleri bazı baskın kuralların oldukça etkili olduğu ortaya çıkmıştır.

*Anahtar kelimeler:* Sonsuzluk, Belirsizlik, Tanımsızlık, Matematik Öğretmeni Adayları

## Giriş

Günlük yaşamda “sonsuz” genellikle çok uzakta, ulaşılamayacak bir yer ya da çok büyük miktarlar anlamında kullanılmaktadır (Nesin, 2002). Her ne kadar ikinci anlamı sonsuzun matematiksel anlamına daha yakın ise de matematikte sonsuz farklı anlamlara da sahiptir (Nesin, 2002). Antik Yunan’dan yakın zamana kadar matematikçiler ve filozoflar sonsuzun anlamı üzerine kafa yormuş, bugün itibari ile kabul gören tanımı 19. yüzyılın sonlarına doğru George Cantor’un kümeler konusundaki çalışmaları ile şekillenmiştir (Yıldırım, 2000). En genel hali ile sonsuz kavramı sürekli artan veya sürekli azalan anlamlarında kullanılan bir sıfattır (Nesin, 2002).

<sup>†</sup> İletişim: Derya ÇELİK, Yrd.Doç.Dr., Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, İlköğretim Bölümü, Fatih Eğitim Fakültesi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon, TÜRKİYE.  
E-posta: deryacelik@ktu.edu.tr

Sonsuzluk kavramı gerek ortaöğretim gerek lisans düzeyi matematikte sıklıkla kullanılan kavramlardan biridir. Sayılar, kümeler, dizi ve seriler, limit gibi önemli matematik konularında bu kavramla karşılaşmaktadır. Bununla birlikte daha alt sınıf seviyelerinde de bu kavram sezgisel olarak kullanılmaktadır (Özmantar, 2008). İlköğretim programlarında yer alan doğru, düzlem, sonsuz çoklukta basamak içeren devirli ondalık sayı, pi sayısı, irrasyonel sayı gibi kavramlarının öğretiminde de sonsuz kavramına ihtiyaç duyulmaktadır (Özmantar, 2008). O halde öğrencilerin bu kavramla ilgili anlamalarının, matematiğin diğer konu ve kavramlarıyla (küme, dizi, seri, limit, devirli ondalık sayı,...) ilgili öğrenmelerini etkileyebileceği sonucuna varılabilir. Literatürde bu iddiayı destekler nitelikte araştırma sonuçları yer almaktadır. Nair (2010) rasyonel fonksiyonların limiti, sürekliliği ve asimptotları ile ilgili üniversite öğrencilerinin anlamalarını araştırdığı çalışmasında, öğrencilerin belli bir noktada limiti hesaplayabildiklerini fakat sonsuzda limit hesaplamalarında başarısız olduklarını ortaya koymuştur. Ancak gerek zorluğu gerek önemine istinaden matematik öğretim programlarında bu kavramının açık olarak tartışıldığı bir konu başlığı yer almamaktadır. Dolayısıyla öğrencilerin bu kavram ile ilgili anlamaları, sezgisel kavrama veya tesadüfi öğrenmeler ile sınırlı kalmaktadır ki bu kavramların ne kadar doğru anlamlar ile örtüştüğünün incelenmesi önemlidir.

Farklı sınıf seviyelerinde öğrencilerin sonsuzluk kavramı ile ilgili anlamalarını konu alan birçok çalışma yürütülmüştür (Aztekin, 2008; Dubinsky, Weller, Mcdonald , & Brown, 2005; Eryvnyck, 1994; Fischbein, 2001; Kanpolat, 2010; Mamolo & Zazkis, 2008 ; Monaghan, 1986; Monaghan, 2001; Nair, 2010; Singer & Voica, 2003; Singer & Voica, 2007; Singer & Voica, 2008; Tall & Tirosh, 2001). Monaghan (1986)'ya göre bu kavramla ilgili en temel öğrenci zorlukları arasında, sonsuzluğun belirli (genellikle çok büyük) bir sayıya eş tutulması veya bir sayı olarak algılanması ve sonsuzluk tektir anlayışı yer almaktadır. Singer & Voica (2003) 10-14 yaş arası öğrenciler üzerinde yürüttükleri çalışmada, öğrencilerin sonsuzluğu sezgisel olarak; sürekli artan, çok büyük, sınırsız, sayılabilen ve sayı olarak tanımladıkları görülmüştür ki bunlardan bir kısmı kısmen doğru sayılabilecek iken bir kısmı ise yanlıştır. Benzer şekilde Dubinsky et al. (2005) öğrencilerin sonsuzluk kavramını ile ilgili farklı zihinsel yapılarla sahip olduklarını ortaya koymuştur. Yapılan bu araştırmalar öğrencilerin sonsuzluk kavramını anlamlandırma ile ilgili güçlüklerle sahip olduğunu ortaya koymaktadır.

Sonsuzluk ile birlikte tanımsızlık da öğrencilerin anlamada zorluk yaşadığı kavramlar arasında yer almaktadır (Reys & Grouws, 1975; Tsamir & Sheffer, 2000; Tsamir, Sheffer , & Tirosh, 2000). Tanımsızlık, standart tanım kullanıldığında uygun bir sonuç bulunamaması

durumunda ortaya çıkmaktadır (Özmantar, 2008). Örneklendirmek gerekirse; bir bölme işleminde bölen olarak kullanılamayan tek sayı sıfırdır; yani sıfır ile bölme tanımsızdır. Çünkü  $a, b \in R$  olmak üzere  $a/b$  şeklindeki bölme aslında  $a \cdot (1/b)$  şeklinde bir çarpma problemidir. Sıfırın çarpma işlemine göre tersi olmadığı için, yani sıfır ile çarpıldığında 1 sonucunu veren herhangi bir reel sayı mevcut olmadığı için  $a/0$  şeklindeki bölmede tanımsız olmaktadır (Qiiinn, Lamberg, & Perin, 2008). Tsamir et al. (2000)'e göre birçok öğrencinin her matematiksel işlemin sayısal bir sonucu olması gerektiği şeklindeki inançları, sıfır ile bölmenin neden tanımsız olduğunu anlamalarını güçleştirmektedir. Daha ileri sınıflarında bazı öğrenciler ise bir sayıyı sıfır ile bölmenin imkansız olduğunu bilmekle birlikte, nedeni sorulduğunda açıklayamamakta veya “öğretmenim öyle söyledi” cevabını verme eğilimindedirler (Reys & Grouws, 1975).

Sonsuzluk ve tanımsızlıkla birlikte öğrencilerin sıklıkla karşılaştığı ve anlamada güçlük çektikleri diğer bir kavram ise belirsizliktir. Belirsizlik, farklı olası sonuçlardan hangisinin geçerli olduğunun bilinmediği veya farklı yaklaşımlarla farklı sonuçlara ulaşılması durumunda ortaya çıkmaktadır (Özmantar, 2008). Bu konuda yapılmış araştırmalar, genellikle limit kavramı ile ilişkili olarak belirsizlik durumlarının ele alındığı çalışmalar ile sıfıra bölme, sıfırın sıfıra bölümü gibi durumlar hakkında öğrencilerin, öğretmen ya da öğretmen adaylarının anlama ve kavram yanlışlarının irdelendiği çalışmalarla sınırlıdır. Az sayıda çalışma bu konuyu odağına almıştır (Aşık, 2010).

Yapılan literatür taraması sonucunda, her seviyedeki birçok öğrencinin sonsuzluk, tanımsızlık ve belirsizlik kavramlarını anlamlandırmada güçlük çektikleri ve kavram yanlışlarına sahip olduklarını ortaya çıkmıştır. Bu ise temel ve ileri düzey matematik konularının (dizi, seriler, limit, süreklilik, türev, integral gibi) anlaşılabilir olması açısından çok önemli olan bu kavramlarla ilgili olarak öğretmenlerin anlamalarının araştırılması gerekliliğini ortaya koymuştur. Öğretmenlerin alan bilgisinin öğretimi şekillendirdiği gerçeğinden hareketle (Ball, 1990a), öğretmenlerin bu kavramlarla ilgili sahip olabileceği kafa karışıklığının öğrencileri kavram yanlışlarına götürebileceği unutulmamalıdır. Literatür incelendiğinde sonsuzluk, belirsizlik ve tanımsızlık kavramları üzerine öğretmen veya öğretmen adaylarının anlamalarını belirlemeye yönelik çalışmaların, öğrenciler üzerinde yapılan çalışmalara kıyasla daha az olduğu görülmektedir (Aşık, 2010; Ball, 1990b; Cankoy, 2010; Crespo & Cynthia, 2006; Even & Tirosh, 1995; Singer & Voica, 2003; Qiiinn, Lamberg, & Perrin, 2008). Ball (1990b), 19 ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmen adayı ile yaptığı görüşmeler ışığında sıfır ile bölme ile ilgili öğretmen adaylarının anlamalarının kavramsal anlamadan daha

çok ezber bilgilere dayandığını ortaya koymuştur. Benzer sonuçlar Crespo & Cynthia (2006) ve Qiiinn et.al. (2008) tarafından da bulunmuştur. Cankoy (2010) çalışmasında; matematik öğretmenlerinin  $a^0$ ,  $0!$  ve  $a/0$ 'ın öğretimine yönelik açıklamalarının kavramsal olmaktan ziyade ağırlıklı olarak ezbere yönelik işlemsel düzeyde açıklamalar olduğunu belirlemiştir. Even & Tirosch (1995) otuz üç matematik öğretmeni üzerinde yürüttükleri çalışmada, öğretmenlerin belirsizlik ve tanımsızlık durumlarına ( $4/0$ ,  $0/0$ ,  $0^0$ ,  $(-8)^{1/3}$ ) ilişkin anlamalarını araştırmıştır. Çalışma sonucunda öğretmenlerin tanımsız ve belirsizlik durumlarını belirleyebildikleri, ancak açıklamalarının (kendilerine ve öğrencilerine) kural tabanlı olduğu ortaya çıkmıştır.

Genel bir değerlendirme yapılacak olursa, yapılan çalışmalar öğretmen/öğretmen adaylarının bu kavramlarla ilgili anlamalarının iyi yapılandırılmış olmadığına işaret etmektedir. Diğer taraftan birbiri ile ilişkili ve sıkça birbirinin yerine kullanılan bu üç kavramı birlikte ele alan çok az sayıda araştırmaya literatürde rastlanılmıştır (Aşık, 2010; Even & Tirosch, 1995; Kanbolat, 2010). Ayrıca bu konu ile ilgili ulusal literatürün ise çok sınırlı olduğu görülmektedir. Öğrenciler tarafından birçok durumda ayırt bile edilemeyen bu üç kavram hakkında öğretmen adaylarının ne düşündükleri bu araştırmanın konusu olmuştur.

Bu araştırmanın amacı ise, matematik öğretmeni adaylarının sonsuzluk, belirsizlik ve tanımsızlık kavramları ile ilgili anlamalarını ortaya koymaktır.

## Yöntem

Bu çalışma 2010-2011 eğitim-öğretim yılında bir devlet üniversitesinin İlköğretim Matematik Öğretmenliği programına devam eden 83 öğretmen adayı (20 bay ve 63 bayan olmak üzere) ile yürütülmüştür. Öğretmen adayları birinci sınıfta olup elde edilen sonuçlar iki farklı bakış açısından yorumlanabilir. İlk olarak programa yeni kayıt olan öğrencilerin bazı temel matematik kavramlarla (sonsuzluk, belirsizlik, tanımsızlık) ilgili anlamalarını ortaya koymak, alan ve alan öğretme bilgisinin formal anlamda yapılandırıldığı öğretmen eğitimi programlarına yönelik önerilerde bulunmayı mümkün kılacaktır. Diğer taraftan, katılımcılar belli bir başarı yüzdesine sahip 12. sınıfı yeni tamamlamış öğrenciler olarak düşünüldüğünde, ortaöğretim programlarına yönelik önerilerde bulunma fırsatı elde edilecektir.

Öğretmen adaylarının sonsuzluk, belirsizlik ve tanımsızlık kavramları ile ilgili anlamalarını ortaya çıkarmak amacıyla katılımcılar iki ana bölümden oluşan bir test

uygulanmıştır. Birinci bölümde öğretmen adaylarına doğrudan bu kavramlardan ne anladıklarını kendi cümleleri ile açıklamalarını isteyen üç soru sorulmuştur

1) Sonsuzluk kavramını kendi cümlelerinizle açıklayınız?  
2) Belirsizlik kavramını kendi cümlelerinizle açıklayınız?  
3) Tanımsızlık kavramını kendi cümlelerinizle açıklayınız?

Şekil 1. I. Bölümde Yer Alan Sorular

İkinci bölümde ise öğretmen adaylarına -sıklıkla karşılaştıkları- sonsuzluk, belirsizlik ve tanımsızlığı sembolik olarak temsil eden dokuz durum ( $\infty+\infty, \infty-\infty, 1/0, \dots$ ) verilmiştir. Öğretmen adaylarından bu sembolik gösterimlerin kendileri için ne anlam ifade ettiğini nedenleri ile birlikte açıklamaları istenmiştir.

Aşağıda verilen sembolik gösterimler sizin için ne anlam ifade etmektedir?  
Cevabınızı nedeni ile açıklayınız.

a) $\infty+\infty$	b) $1^\infty$	c) $\infty-\infty$	d) $\infty^{\infty} (n \in \mathbb{Z}^+)$	e) $1/0$
f) $0/0$	g) $1.\infty$	h) $0.\infty$	i) $\infty/\infty$	

Şekil 2. II. Bölümde Yer Alan Sorular

Matematik sembolik yönü çok kuvvetli bir çalışma alanı olup, diğer matematik kavramlarda olduğu gibi sonsuz kavramı için de bir sembol ( $\infty$ ) kullanılmaktadır. Öğrenciler lise yıllarından itibaren sıklıkla bu sembolik gösterimle karşı karşıya geldikleri de bir gerçektir. Burada önemli olan söz konusu sembol ve bu sembol kullanılarak ifade edilen sembolik gösterimlerin ( $0.\infty$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty-\infty$  gibi) öğretmen adayları için ifade ettiği anlam ile bir matematikçi için ifade ettiği anlamın ne kadar örtüştüğüdür. İkinci bölümde yer alan sorular bu duruma açıklık getirmesi açısından önemlidir.

Soruların çalışmanın amacına uygunluğu konusunda iki matematik eğitimcisi ve bir matematikçinin görüşleri alınmış, son şekli verilen sorular 40 dakikalık sürede öğretmen adaylarına uygulanmıştır.

Açık uçlu üç sorudan oluşan testin ilk bölümüne öğrencilerin verdikleri cevaplar “tam ve ikna edici açıklama”, “Belirsiz veya yetersiz açıklama”, “Yanlış açıklama” ve “Açıklama yok” şeklinde dört kategoride içerik analizine tabi tutulmuştur. Her bir kategori ve bu kategoride yer alan cevapların niteliği aşağıda açıklanmıştır.

Tam ve ikna edici açıklama: Tam ve doğru açıklamaları içeren cevaplar,

Belirsiz veya yetersiz açıklama: Yetersiz veya tam olarak anlaşılabilen cevaplar,

Yanlış açıklama: Yanlış veya ilişkisiz açıklamalar içeren cevaplar,



Açıklama yok: Soruya cevap niteliği taşıyacak herhangi bir açıklama olmaması.

Her üç soru için her bir kategorideki cevaplar frekans ve yüzdelerle ifade edilmiştir. Ayrıca yukarıda tanımlanan her bir kategoride yer alan cevaplar kendi aralarında benzerlik ve farklılıkları dikkate alınarak sınıflandırılmıştır. Bu sınıfları temsil eden örnek öğrenci cevapları frekans ve yüzdeleri ile birlikte sunulmuştur.

Testin ikinci bölümde yer alan sorular için cevabın doğruluğu ve hataların belirlenmesine yönelik içerik analizi yapılmıştır. İlk olarak öğretmen adaylarının verdikleri cevaplar “Doğru”, “Yanlış” ve “Boş” şeklinde üç kategoride analiz edilmiştir. Daha sonra “yanlış” kategorisinde cevaplardaki ortak hatalar tespit edilmiş, frekans ile birlikte sunulmuştur.

Yapılan çalışmanın güvenilirliğini artırmak için analiz işlemi araştırmacılar tarafından ayrı ayrı yapılmış ve karşılaştırılmıştır. Fikir ayrılığına düşülen noktalarda en uygun sınıflandırmanın hangisi olacağına birlikte karar verilmiştir.

## Bulgular

Çalışmadan elde edilen bulgular iki alt başlık halinde sunulmuştur.

### Testin Birinci Bölümünden Elde Edilen Bulgular

Katılımcıların testin birinci bölümündeki “*Sonsuzluk kavramını kendi cümlelerinizle açıklayınız*” sorusuna vermiş olduğu cevaplar Tablo 1’de özetlenmiştir.

Tablo 1. Öğretmen Adaylarının Sonsuzluk Kavramına İlişkin Açıklamaları

Kategori	f	%	Örnek açıklamalar	f	%
Tam ve ikna edici açıklama	1	1	Sayılarla ifade edilmeyecek kadar büyük veya küçük olan	1	1
Yetersiz veya belirsiz açıklama	51	61	Sonucun sürekli devam etmesi	15	18
			Sonucun sonsuza kadar gitmesi	14	17
			Sonu olmayan ifadeler	10	12
			Sonucun tahmin edilemeyecek kadar büyük olması	3	4
			Sınırlı olmayan ifadeler	3	4
			Diğer	6	7
Yanlış açıklama	13	16	Sonucun sayısal değerinin kesin olarak bilinmemesi	11	13
			Sayının sıfıra bölümü	2	2
Açıklama yok	18	22	-	18	22
Toplam				83	100

Tablo 1’e göre yalnızca bir öğretmen adayı tam ve ikna edici açıklama kategorisinde sınıflandırılabilir cevap vermiştir. Cevapları yetersiz veya belirsiz açıklama kategorisinde

sınıflandırılan katılımcılar, ki %61'lik bir çoğunluğu temsil etmektedirler, sonsuzluk kavramını genellikle sonu olmayan, çok büyük ve sınırsız kavramları ile eşleştirmişlerdir. Bu kategoride sınıflandırılan cevaplar dikkatli bir şekilde incelendiğinde öğretmen adaylarının bir işlemde elde edilen sonuç üzerinden tanımlama yapmaya çalıştıkları görülmektedir. Cevapları yanlış kategorisinde sınıflandırılan öğretmen adayları ise genellikle belirsizlik ve tanımsızlığa vurgu yapan açıklamalar yapmıştır. Katılımcıların %22'si bu soruya ilişkin herhangi bir açıklama yapmamıştır.

Katılımcıların testin “*Belirsizlik kavramını kendi cümlelerinizle açıklayınız*” şeklindeki ikinci sorusuna vermiş olduğu cevaplar Tablo 2’ de verilmiştir .

Tablo 2. Öğretmen Adaylarının Belirsizlik Kavramına İlişkin Açıklamaları

Kategori	f	%	Örnek açıklamalar	f	%
Tam ve ikna edici açıklama	19	23	Sonucun iki ya da daha fazla sayıda olması	3	4
			Sonucun belli olmaması durumu	16	19
Yetersiz veya belirsiz açıklama	27	33	Sonucun tam bir ifadesinin olmayışı	18	22
			Sonucun tahmin edilememesi	5	6
			Başka hale dönüştürülmeden çözüm yolu olmayan durumlar	4	5
Yanlış açıklama	16	19	Sayının sonsuz olma durumu	3	4
			Sonucun hangi sayı kümesine ait olduğunun bilinmemesi	2	2
			Paydanın sıfır olma hali	1	1
			Diğer	10	12
Açıklama yok	21	25	-	21	25
Toplam				83	100

Tablo 2’ye göre öğretmen adaylarının %23’ü belirsizlik kavramı ile ilgili doğru olarak sınıflandırılabilir açıklamalar yapmıştır. Bu öğretmen adaylarının birçoğu, açıklamalarını doğrudan kavramın günlük yaşamda kullanılan anlamına dayanmaktadır ki matematikteki anlamı da buna yakındır. Katılımcıların %33’ünün cevapları yetersiz veya belirsiz açıklama kategorisinde sınıflandırılmıştır. Cevapları bu kategoride yer alan öğretmen adaylarının %22’si bu kavramı “sonucun tam bir ifadesinin olmayışı” şeklinde açıklamıştır. “Başka hale dönüştürülmeden çözüm yolu olmayan durumlar” şeklinde cevap veren öğretmen adaylarının açıklamalarını limit hesaplamalarında karşılaştıkları işlemsel süreçle ilişkilendirdikleri görülmüştür. Öğretmen adaylarının %19’u ilişkili olmayanlar yanlış açıklamalar yapmış ve %25’i ise herhangi bir açıklama yapamamıştır.

Katılımcıların testin “*Tanımsızlık kavramını kendi cümlelerinizle açıklayınız*” şeklindeki üçüncü sorusuna vermiş olduğu cevaplar Tablo 3’de özetlenmiştir.

Tablo 3. Öğretmen Adaylarının Tanımsızlık Kavramına İlişkin Açıklamaları

Kategoriler	f	%	Örnek açıklamalar	f	%
Tam ve ikna edici açıklama	0	0	-	0	0
Yetersiz veya belirsiz açıklama	31	37	Paydanın sıfır olma hali	19	20
			İfade edilemeyen durumlar	7	8
			Sayısal karşılığı olmayan ifadeler	5	6
Yanlış açıklama	33	40	Sonucu tam olarak belli olmayan ifade	19	23
			Sonucun hiçbir sayı kümesine ait olmama durumu	7	8
			Çözüm kümesi bulunamayan durumlar	4	5
			Sıfırın sıfıra bölümü	3	4
Açıklama yok	19	23	-	19	23
Toplam				83	100

Tanımsızlık kavramına ilişkin tam ve ikna edici bir açıklama yapan öğretmen adayı olmamıştır. Öğretmen adaylarının % 20'si tanımsızlığı “paydanın sıfır olma hali” şeklinde bir örnek durum üzerinde açıklamaya çalışırken, % 14'ü “İfade edilemeyen durumlar” veya “Sayısal karşılığı olmayan ifadeler” şeklinde tanımsızlıkla ilişkilendirilebilecek ancak yeterli olmayan cevaplar vermiştir. Öğretmen adaylarının tanımsızlık kavramına ilişkin vermiş oldukları cevapların % 40'ı yanlış kategorisinde sınıflandırılmıştır. Cevapları yanlış olarak sınıflandırılan bu öğretmen adaylarının %23'ü tanımsızlığı, belirsizlikle karıştıran cevaplar vermiştir. Katılımcıların %8'i “sonucun hiçbir sayı kümesine ait olmama durumu” ve %5'i “çözüm kümesi bulunamayan durumlar” gibi denklem çözme süreci ile ilişkilendirilmiş cevaplar vermiştir. Tıpkı sonsuzluk ve belirsizlik kavramlarında olduğu gibi öğretmen adaylarının %23'i tanımsızlık kavramı ile ilgili herhangi bir açıklama yapmamıştır.

Özetle öğretmen adayları sonsuzluk ve belirsizlik kavramına ilişkin en çok “yetersiz veya belirsiz açıklama” yapmışken, tanımsızlık kavramına ilişkin en çok “yanlış açıklama” yapmıştır. Katılımcılar bu üç kavramdan en çok belirsizlik kavramına ilişkin “tam ve ikna edici açıklama” kategorisinde sınıflandırılabilir cevaplar vermişken, tanımsızlık kavramına ilişkin “tam ve ikna edici açıklama” yapan öğretmen adayı olmamıştır. Ayrıca katılımcıların yaklaşık dörtte biri her üç soruyu da boş bırakmıştır.

#### Testin İkinci Bölümünden Elde Edilen Bulgular

Katılımcıların testin ikinci bölümündeki “Aşağıda verilen sembolik gösterimler (sonsuzluk, tanımsızlık ve belirsizliği temsil eden dokuz sembolik gösterim) sizin için ne anlam ifade ediyor? Cevabınızı nedeni ile birlikte açıklayınız.” soruya vermiş oldukları cevaplara ilişkin frekans ve yüzdeler Tablo 4'de verilmiştir.

Tablo 4. Öğretmen Adaylarının Verilen Her Bir Durum için Verdikleri Cevaplar

Kavramlar	Sembolik Gösterimler	Doğru cevap		Yanlış cevap		Boş		Toplam	
		f	%	f	%	f	%	n	%
Sonsuzluk	1) $\infty+\infty$	65	78	15	18	3	4	83	100
	2) $1.\infty$	63	76	10	12	10	12	83	100
	3) $\infty^n$	50	60	19	23	14	17	83	100
Belirsizlik	4) $\infty/\infty$	62	75	15	18	6	7	83	100
	5) $0/0$	44	53	29	35	10	12	83	100
	6) $\infty-\infty$	41	49	36	43	6	7	83	100
	7) $1^\infty$	38	46	32	39	13	16	83	100
	8) $0.\infty$	32	39	42	51	9	11	83	100
Tanımsızlık	9) $1/0$	47	57	30	36	6	7	83	100

Tablo 4'deki veriler genel olarak incelendiğinde,  $\infty+\infty$ 'un öğretmen adaylarına ne ifade ettiği sorusu en yüksek doğru cevap yüzdesine ve en düşük boş bırakma yüzdesine sahiptir.  $0.\infty$  ise en düşük doğru cevap yüzdesine sahip durumdur.  $\infty^n$  ve  $1^\infty$  öğretmen adaylarının en çok cevapsız bıraktıkları iki durum olup her ikisi de üslü şekilde ifade edilmiştir. Çalışmanın bundan sonraki kısmında her bir sembolik gösterim için öğretmen adaylarının verdikleri cevaplar ayrıntılı bir şekilde ele alınacaktır.

Katılımcıların " $\infty+\infty$ " için verdikleri cevap ve yaptıkları açıklamalar Tablo 5' de verilmiştir.

Tablo 5. Öğretmen Adaylarının Testin İkinci Bölümünün 1. Sorusuna Verdikleri Cevaplar

1. soru	Kategoriler	%	Cevaplar	f	%	Verilen cevaba ilişkin öğrenci açıklamaları (frekansları ile birlikte)
$\infty+\infty$	Doğru cevap	78	$\infty$	65	78	Sonsuza giden bir ifadeye sonsuza giden bir ifade eklendiğinde sonuç yine sonsuza gider (25). Sonu olmayan bir şeyi başka bir şeyle toplarsak yine sonu olmaz.(4) Sonsuzun belli bir karşılığı olmadığı için sonuç yine sonsuzdur.(3) Tanımsızlıktır.(1) Açıklama yok (32)
	Yanlış cevap	18	Belirsiz	8	10	Değeri bilinmeyen iki sayının toplamının da değeri bilinmez.(6) Başka hale dönüştürülmeden cevabı bulunmayan durumlar(1) Açıklama yok (1)
			Tanımsız	5	6	Sonucun nereye gittiği bilinmiyor.(1) Açıklama yok (4)
			Diğer	2	2	-
Boş	4		3	4	-	

Öğretmen adaylarının %78'i bu soruya doğru cevap vermiş, %18'i yanlış cevap vermiş, %4 ise soruyu boş bırakmıştır. Doğru cevap veren 65 öğretmen adayının verdikleri cevaplara ilişkin açıklamaları incelendiğinde; yaklaşık olarak yarısının herhangi bir açıklama yapmadığı, 25 öğretmen adayının ise “Sonsuza giden bir ifadeye sonsuza giden bir ifade eklendiğinde sonuç yine sonsuza gider.” şeklinde verilen sembolik gösterimin sözel ifadesinden ibaret bir açıklama yaptığı tespit edilmiştir. Ayrıca, öğretmen adaylarının sonsuzun günlük yaşamda akla ilk gelen anlamı “sonu olmayan” ve yine günlük yaşamdaki deneyimler ile ilişkili olarak sonlu bir evrende sonsuz ile eşleştirilebilecek herhangi bir nesne olmadığına işaret eden “belli bir karşılığı olmaması” şeklinde cevaplar verdiği görülmüştür.  $\infty+\infty$  için öğretmen adaylarının %10'nu belirsiz ve %6'sı tanımsız şeklinde yanlış cevap vermiştir. Belirsiz cevabını veren öğretmen adayları ağırlıklı olarak “Değeri bilinmeyen iki sayının toplamının da değeri bilinmez.” biçiminde değeri bilinmeyen sayı olarak sonsuz algılamasını yansıtan açıklamalar yaparken, tanımsız cevabını veren öğrencilerin geneli herhangi bir açıklama yapmamıştır.

Katılımcıların “ $1.\infty$ ” için verdikleri cevap ve yaptıkları açıklamalar Tablo 6'da özetlenmiştir.

Tablo 6. Öğretmen Adaylarının Testin İkinci Bölümünün 2. Sorusuna Verdikleri Cevaplar

2. soru	Kategoriler	%	Cevaplar	f	%	Verilen cevaba ilişkin öğrenci açıklamaları (frekansları ile birlikte)
1. $\infty$	Doğru cevap	76	$\infty$	63	76	Sonsuzun bir sayı ile çarpılması yine sonsuzdur.(8) Sonsuzun sonu yok her şeyi içine alır.(2) Sonsuz belirsizdir.(2) Açıklama yok (51)
	Yanlış cevap	12	Belirsiz	9	11	Sayı. $\infty$ her zaman belirsizdir.(1) Sonsuzu neyle çarparsan çarp sonuç daima sonsuzdur.(3) Açıklama yok (5)
			Tanımsız	1	1	Açıklama yok (1)
Boş	12		10	12	-	

Tablo 6'ya göre öğretmen adaylarının % 76'sı bu soruya doğru cevap verirken %12'si yanlış cevap vermiş ve yine %12'si ise bu soruyu boş bırakmıştır.  $1.\infty$  için sonsuzdur şeklinde doğru cevap veren öğretmen adaylarının çok büyük çoğunluğu (63 öğretmen adayından 51'i) bu sembolik gösterimin neden sonsuzluğu temsil ettiğine ilişkin herhangi bir açıklama yapmazken, 8 öğretmen adayı soru ve cevabı tekrar eden açıklamalar yapmıştır. İki öğretmen adayının “Sonsuzun sonu yok her şeyi içine alır” şeklinde açıklamaları sonsuzu her şeyi kapsayan bir küme gibi algıladıklarını göstermektedir. “Sonsuz belirsizliktir” diyen iki öğretmen adayının ise sonsuz kavramı ile belirsizlik kavramını birbirine eşdeğer tuttuğu anlaşılmaktadır. Bu

soruya öğretmen adaylarının verdikleri yanlış cevaplar ağırlıklı olarak “Belirsizliği temsil eder.” şeklindedir. Bu durum için belirsiz cevabını veren bazı öğretmen adaylarının “Sonsuzu neyle çarparsan çarp sonuç daima sonsuzdur.” şeklindeki açıklamaları, katılımcıların zihninde sonsuzluk ve belirsizlik kavramlarının ne kadar iç içe geçtiğinin bir başka göstergesidir.

Katılımcıların “ $\infty^n$ ” için verdikleri cevap ve yaptıkları açıklamalar Tablo 7’ de sunulmuştur.

Tablo 7. Öğretmen Adaylarının Testin İkinci Bölümünün 3. Sorusuna Verdikleri Cevaplar

3. soru	Kategoriler	%	Cevaplar	f	%	Verilen cevaba ilişkin öğrenci açıklamaları (frekansları ile birlikte)
$\infty^n$	Doğru cevap	60	$\infty$	50	60	Sonsuzun herhangi bir katı alındığında cevap yine sonsuzdur.(22) Sonu olanı katlasak da artmaz.(1) Açıklama yok (35)
	Yanlış cevap	23	Belirsiz	15	18	Sonuç n’e bağlı, n’e göre değişir.(8) Açıklama yok (7)
			Tanımsız	3	4	Açıklama yok (3)
			Diğer	1	1	Diğer(1)
Boş	17		14	17	-	

Tablo 7’ye göre bu soruya öğretmen adaylarının % 60’ı doğru cevap vermiş, % 23’ü yanlış cevap vermiş, %17’si ise cevap vermemiştir. Bu diğerleri ile kıyaslandığında en fazla boş bırakılan sorudur. Doğru cevap veren 50 öğretmen adayının 35’i verdikleri cevaba ilişkin herhangi bir açıklama yapmazken, diğer öğretmen adaylarının yaptığı açıklamalar ise “Sonsuzun herhangi bir katı alındığında cevap yine sonsuzdur.” şeklinde soruyu ve verdikleri cevabı tekrarlamaktan öteye geçmemiştir. Bu soruya %18’lik bir yüzde ile belirsiz cevabını veren 15 öğretmen adayından 8’i gerekçe olarak “Sonuç n’e bağlı, n’e göre değişir” açıklama yapmıştır. Ancak bu öğretmen adayları soruda parantez içinde verilen  $n\mathbb{Z}^+$  ifadesini göz ardı etmiş ya da fark etmemiş görünmektedir. Tanımsızdır şeklinde cevap veren öğretmen adayları ise herhangi bir açıklama yapmamıştır.

Katılımcıların “ $\infty/\infty$ ” için verdikleri cevap ve yaptıkları açıklamalar Tablo 8’ de verilmiştir.



Tablo 9. Öğretmen Adaylarının Testin İkinci Bölümünün 5. Sorusuna Verdikleri Cevaplar

5. soru	Kategoriler	%	Cevaplar	f	%	Verilen cevaba ilişkin öğrenci açıklamaları (frekansları ile birlikte)
0/0	Doğru cevap	53	Belirsiz	44	53	Kesin bir sonuç yoktur.(5) Sıfırın bir değeri yoktur. Kendine bölümünün sonucu belirsizdir.(4) Bir sayının sıfıra bölümü tanımsız, sıfırın sıfıra bölümü belirsizdir.(3) Payda sıfır olamaz.(2) 0' in tüm sayılarla çarpımı 0'dur.Bu yüzden sayı belli değil.(1) Birden fazla cevabı vardır.(1) Dönüşüm uygulanarak çözüm bulunur.(1) Açıklama yok (27)
	Yanlış cevap	35	Tanımsız	25	30	Payda sıfır olamaz (8) Açıklama yok(17)
			Sonsuz	1	1	Açıklama yok (1)
			0	1	1	Bölen ya da bölünen sıfır olduğunda cevap hep sıfır'dır(1)
			Diğer	2	3	Dönüşüm uygulanarak cevap bulunur.(2)
	Boş	12		10	12	-

Bu grupta yetersiz olmakla birlikte doğruyu yansıtan “0” in tüm sayılarla çarpımı 0’dur. Bu yüzden sayı belli değil (1 kişi)” ve “Birden fazla cevabı vardır (1 kişi)” şeklinde açıklamalar da yapılmıştır. Öğretmen adaylarının %30’u 0/0 için tanımsızdır şeklinde cevap vermiştir. Burada da öğretmen adaylarının cevaplarına gerekçe olarak “payda sıfır olamaz” şeklinde kural tabanlı bir açıklama yaptıkları görülmektedir.

Katılımcıların “ $\infty-\infty$ ” için verdikleri cevap ve yaptıkları açıklamalar Tablo 10’da verilmiştir.

Tablo 10. Öğretmen Adaylarının Testin İkinci Bölümünün 6. Sorusuna Verdikleri Cevaplar

6. soru	Kategoriler	%	Cevaplar	f	%	Verilen cevaba ilişkin öğrenci açıklamaları (frekansları ile birlikte)
$\infty-\infty$	Doğru cevap	49	Belirsiz	41	49	Sonsuzun ne olduğu bilinmiyor.(11) Hangi sonsuzun daha büyük olduğu bilinmiyor.(9) Aynı iki şeyin farkı 0 olmalı fakat $\infty$ da çıkabilir.(2) $\infty$ dan $\infty$ çıkarılması bir şey ifade etmez.(2) Başka hale dönüştürülmeden cevabı bulunmayan durumdur.(2) Açıklama yok(15)
	Yanlış cevap	36	Sonsuz	23	28	Değerini bilmediğimiz sayıları toplayıp çıkarsak da sonuç değişmez.(14) Açıklama yok (9)
			Tanımsız	6	7	Sonsuzun büyüklüğü bilinmiyor (1) Açıklama yok (5)
			0	6	7	Bir sayıyı kendisinden çıkardığımızda sonuç yine sıfırdır.(3) Açıklama yok(3)
			Diğer	1	1	-
	Boş	6		6	7	-



Tablo 10 incelendiğinde öğretmen adaylarının % 49'nun bu sembolik gösterimi belirsizlik şeklinde doğru olarak yorumladığı anlaşılmaktadır. Cevaplarının gerekçelerini açıklamaları istendiği kısmı ise yaklaşık üçte biri boş bırakırken, diğerleri ağırlıklı olarak “Sonsuzun ne olduğu bilinmiyor (11 kişi)” şeklinde sayı olarak sonsuz algılamasına örnek teşkil eden, “Hangi sonsuzun daha büyük olduğu bilinmiyor (9 kişi)” şeklinde sayı olarak sonsuz algılaması veya farklı yoğunlukta sonsuzluğun varlığına işaret edebilecek açıklamalar yapmıştır. “ $\infty-\infty$ ” için katılımcıların %28’si sonsuz, %7’si tanımsız ve %7’si sıfır şeklinde yanlış cevaplar vermiştir. Her üç yanlış cevapta da katılımcıların yaptığı açıklamalar incelendiğinde sayı olarak sonsuz şeklinde bir algılamının ve buna bağlı çıkarımların varlığı görülmektedir.

Katılımcıların “ $1^\infty$ ” için verdikleri cevap ve yaptıkları açıklamalar Tablo 11’ de yer almaktadır.

Tablo 11. Öğretmen Adaylarının Testin İkinci Bölümünün 7. Sorusuna Verdikleri Cevaplar

7. soru	Kategoriler	%	Cevaplar	f	%	Verilen cevaba ilişkin öğrenci açıklamaları (frekansları ile birlikte)
$1^\infty$	Doğru cevap	46	Belirsiz	38	46	Sonuç ya 1 ya da $\infty$ dur.(7) Açıklama yok (31)
	Yanlış cevap	39	1	21	25	1’in her kuvveti kendisine eşittir.(15) 1 çarpmada etkisiz elemandır.(1) Açıklama yok (5)
			0	4	5	Üst daha çabuk arttığı için sonuç sıfırdır.(1) Açıklama yok (3)
			Sonsuz	3	4	Açıklama yok (3)
			Tanımsız	3	4	Kuvvet olan sonsuzun nereye ulaştığı belli değil(1) Açıklama yok (2)
			Diğer	1	1	-
	Boş	15	13	15	-	

Tablo 11’e göre öğretmen adaylarının %46’sı bu soruya doğru cevap vermiş, %39’u ise yanlış cevap vermiştir. Bu soru %14 ile en çok boş bırakılan sorular arasında yer almıştır. Doğru cevap veren 38 katılımcıdan 31’i verdikleri cevap için herhangi bir açıklama yapamazken, yalnızca 7 öğretmen adayı farklı iki sonuç elde edilebileceğinden hareketle belirsizliğe vurgu yapmıştır. Öğretmen adaylarının dörtte biri ise “1’in her kuvveti kendisine eşittir”, “1 çarpmada etkisiz elemandır” gibi kurala dayalı gerekçelerle  $1^\infty$  ifadesinin 1’e eşit olduğu şeklinde doğru olmayan bir sonuca varmıştır. Bunun dışında katılımcıların %4-5’lik yüzdeyle ve çoğunlukla herhangi bir açıklama yapmaksızın 0, sonsuz ve tanımsız şeklinde doğru olmayan cevaplar verdiği ortaya çıkmıştır.

Katılımcıların “0.∞” için verdikleri cevap ve yaptıkları açıklamalar Tablo 12’ de verilmiştir.

Tablo 12. Öğretmen Adaylarının Testin İkinci Bölümünün 8. Sorusuna Verdikleri Cevaplar

8. soru	Kategoriler	%	Cevaplar	f	%	Verilen cevaba ilişkin öğrenci açıklamaları (frekansları ile birlikte)
0.∞	Doğru cevap	39	Belirsiz	32	39	Sonuç hem sıfır hem de sonsuz olabilir.(6) Sonsuz ya da sıfır birbirini kapsar.(5) Açıklama yok (21)
	Yanlış cevap	51	0	22	27	Yutan eleman neyle çarpılırsa sonuç 0’dır.(17) Açıklama yok (5)
			Sonsuz	10	12	Sonsuz her şeyi içine alır.(3) Açıklama yok (7)
			Tanımsız	10	12	Sıfır yutan eleman, sonsuz bilinmeyen bir değer olduğundan sonuç tanımsızdır.(3) Açıklama yok (7)
Boş	10		9	10	-	

Bu soru diğerleri ile kıyaslandığında %39’luk düşük doğru cevap yüzdesi ve %51’lik yüksek yanlış cevap yüzdesi ile dikkat çekmektedir. Doğru cevap veren 32 öğretmen adayından 21’i herhangi bir açıklama yapmazken, az sayıda öğretmen adayı “sonuç hem sıfır hem de sonsuz olabilir (6 kişi)” şeklinde eksik olmakla birlikte doğru sayılabilecek bir açıklama yapmıştır ki bu şu ana kadarki en fazla doğru açıklama oranıdır.

Tablo 12 incelendiğinde katılımcıların % 27’si bu soru için sıfır cevabını vermiştir ki bu oran yanlış cevap veren öğretmen adaylarının yarısından fazlasına karşılık gelmektedir. Sıfırın çarpma işleminde yutan eleman olması ile ilgili kuralın öğretmen adaylarının bu şekilde cevap vermesinin temel sebebi olduğu yine katılımcıların yaptıkları açıklamalardan anlaşılmaktadır. Bu soruya ilişkin sıfır dışındaki diğer yanlış cevaplar aynı yüzde(%12) ile sonsuz ve tanımsız şeklindedir. Tablo 12’de dikkat çeken bir başka bulgu “belirsiz” cevabını veren 5 öğretmen adayı ve “sonsuz” cevabını veren 3 öğretmen adayının sonsuzu her şeyi içine alan, kapsayan bir küme gibi algıladığına işaret eden cevapları olmuştur.

Katılımcıların “1/0” için verdikleri cevap ve yaptıkları açıklamalar Tablo 13’ de verilmiştir.

Tablo 13. Öğretmen Adaylarının Testin İkinci Bölümünün 9. Sorusuna Verdikleri Cevaplar

9. soru	Kategoriler	%	Cevaplar	f	%	Verilen cevaba ilişkin öğrenci açıklamaları (frekansları ile birlikte)		
1/0	Doğru cevap	57	Tanımsız	47	57	Payda sıfır olamaz (26) Sıfırı hangi sayıyla çarparsak çarpalım sonuç asla 1 olamaz(6) Dönüşüm uygulanarak çözüm bulunur(1) Diğer (2) Açıklama yok (12)		
			Yanlış cevap	36	Sonsuz	13	16	0 tanımlanmadığı için sonuç sonsuz(2) Açıklama yok (11)
					Belirsiz	11	13	Bir sayı değeri olmayan başka bir sayıya bölünürse bölüm bilinemez.(4) Açıklama yok (7)
					1	1	1	Açıklama yok(1)
					0	1	1	Açıklama yok(1)
					Diğer	4	5	Reel sayılarda tanımsız irrasyonel sayılarda sonsuzdur.(1) Hiçbir sayı sıfıra bölünemez(1) Açıklama yok(2)
			Boş	7	6	7		

Tablo 13'e göre bu soruya ilişkin olarak öğretmen adaylarının %57'si tanımsızdır şeklinde doğru cevap vermiş, %36'sı ise ağırlıklı olarak sonsuz veya belirsizdir şeklinde yanlış cevap vermiştir. Bu ifadenin tanımsız olduğunu ifade eden 35 öğretmen adayından 26'sı gerekçe olarak "payda sıfır olmaz" şeklinde kurala dayalı bir açıklama yapmıştır. 6 öğretmen adayı ise bölmenin tanımından hareketle 1/0 ifadesinin tanımlı olmadığına vurgu yapan "Sıfırı hangi sayıyla çarparsak çarpalım sonuç asla 1 olamaz" şeklinde doğru sayılabilecek bir açıklama dile getirmiştir. Sonsuz ve belirsiz cevabını veren öğretmen adaylarından büyük bir çoğunluğu açıklama kısmını boş bırakmıştır. Sonsuz cevabını veren 13 öğretmen adayından 2'si "0 tanımlanmadığı için sonuç sonsuz", belirsiz cevabını veren 11 öğretmen adayından 4'ü "Bir sayı değeri olmayan başka bir sayıya bölünürse bölüm bilinemez" biçimindeki açıklamaları ile sıfıra yükledikleri farklı anlamları ortaya koymuştur. Bu soruya öğretmen adaylarının %7'si ise cevap vermemiştir.

### Tartışma ve Sonuçlar

Bu çalışma kapsamında öğretmen adaylarının ortaöğretim ve lisans düzeyi birçok matematik konu ile ilişkili sonsuzluk, belirsizlik ve tanımsızlık kavramlarını nasıl anlamlandırdıklarını ortaya koymak amaçlanmıştır. Bu amaçla ilk olarak bu kavramlardan ne anladıkları doğrudan öğretmen adaylarına sorulmuştur. Daha sonra bu kavramlarla ilgili

sıklıkla karşılaştıkları bazı sembolik gösterimler öğretmen adaylarına verilmiş, ilişkili olduğu kavramla eşleştirmeleri ve seçimlerinin nedenini açıklamaları istenmiştir.

Yapılan çalışma, öğretmen adaylarının bu üç kavramdan en çok belirsiz kavramını doğru sayılabilecek şekilde açıklayabildiğini göstermiştir. Belirsiz kavramının matematikte ve günlük yaşamdaki anlamlarının birbirine yakın olması, öğretmen adaylarının belirsiz kavramını açıklamada diğer kavramlara göre daha başarılı olmasının bir sebebi olabilir. Öğretmen adayları sonsuzluk ve tanımsızlık kavramlarını ise doğru bir şekilde açıklamada başarılı olamamıştır. Sonsuzluk kavramına ilişkin açıklamalarını ağırlıklı olarak, sonu olmayan, çok büyük, sınırsız, bilinmeyen sayı kavramlarına dayandırdıkları, tanımsız kavramına ilişkin açıklamalarını da ağırlıklı olarak sayının sıfıra bölümü örnek durumuna dayandırarak yapmaya çalıştıkları belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının yaklaşık dörtte birinin sonsuzluk, belirsizlik ve tanımsızlık kavramlarından ne anladıkları yönündeki soruya herhangi bir cevap verememiş olması da oldukça dikkat çekicidir.

Bir bütün olarak öğretmen adaylarının yaptığı açıklamalar değerlendirildiğinde, sonsuzluk kavramı ile ilgili anlamalarını ağırlıklı olarak günlük yaşam deneyimlerinin şekillendirdiği sonucuna ulaşılabilir. Sonsuz kavramının günlük yaşamda akla ilk gelen anlamı “sonu olmayan”, yine günlük yaşamdaki deneyimler ile ilişkili olarak sonlu evrende sonsuz ile eşleştirilebilecek herhangi bir nesne olmadığına işaret eden “belli bir karşılığı olmaması” şeklinde ki açıklamalar buna örnek gösterilebilir. Belirsizlik kavramı için yapılan tanımlamaların da günlük yaşamda sıkça kullandığımız “belirsiz” kelimesinin anlamı etrafında şekillendiği düşünülürse, öğretmen adaylarının günlük yaşam deneyimlerinden etkilenme durumunun bu kavram içinde geçerli olduğu söylenebilir. Buradan hareketle öğretmen adaylarının geçmişteki öğrenme-öğretme etkinliklerinin matematiksel anlamda sonsuzluk ve belirsizlik kavramlarını zihinlerinde yapılandırmalarına çok yardımcı olamadığı ifade edilebilir. Tanımsızlık kavramı sonsuzluk ve belirsizlik kavramlarından farklı olarak daha çok matematiksel içerikte öğretmen adaylarının karşılaştığı bir kavram olup bu kavramla ilgili öğretmen adaylarının açıklamaları kural tabanlı olmaktan (sayısının sıfıra bölümü tanımsızlıktır gibi) öteye geçememiştir. Diğer taraftan literatürde sonsuzluk kavramı hakkında öğrencilerin çok büyük, sınırsız ve sayı olarak sonsuz algılamalarına ilişkin bulgular yer almaktadır (Monaghan, 1986; Monaghan, 2001; Singer & Voica 2003). Bu çalışmada da bu bulguları destekler nitelikte veriler elde edilmiş olmakla birlikte bazı öğretmen adaylarının sonsuzu “değeri bilinmeyen bir sayı” olarak da algıladıkları sonucuna da ulaşılmıştır.

Öğretmen adayları sonsuzluk, belirsizlik ve tanımsızlık durumlarını temsil eden ve sembolik formda verilen çoğu ifadenin ilişkili olduğu kavramı belirlemede başarılı olmuştur. Ancak söz konusu sembolik formların neden sonsuzluk, belirsizlik veya tanımsızlığa karşılık geldiğini ortaya koymada aynı başarıyı gösterememişlerdir. Öğretmen adaylarının yarıdan fazlası verdikleri cevaba ilişkin herhangi bir açıklama yapamazken, yapılan açıklamaların büyük bir çoğunluğu ya kural tabanlı olmuş ya da sembolik formun sözel temsilini ifade etmekten öteye geçememiştir. Bu durum söz konusu sembolik formlarla ilgili öğretmen adaylarının çok yüzeysel anlamalara sahip olduğunun ve anlamalarının daha çok ilköğretim ve lise yıllarında karşılaştıkları sonsuzluk, tanımsızlık ve belirsizliği temsil eden örneklerle sınırlı olduğunun bir göstergesidir. Bu sonuç, öğretmen adaylarının bazı sembolik formlara ilişkin doğru cevap yüzdelerinin daha yüksek olmasının sebebinin de açıklayabilir. Örneğin, lisede öğrenciler limit hesaplamalarında  $\infty/\infty$ ,  $0/0$  ve  $\infty-\infty$  belirsizlik durumları ile sıklıkla karşılaşmakta, dolayısıyla bu sembolik gösterimlerin belirsizlik durumunu temsil ettiğini kolaylıkla belirlemektedirler. Fakat nedenini açıklamakta zorlanmışlardır. Bazı öğretmen adaylarının “dönüşümler uygulanarak ancak cevaba ulaşılır” şeklindeki açıklamalarının temelinde de yine limitle ilgili bu işlemsel süreç yatmaktadır.

Sonsuzluğu temsil eden her üç durumda ( $\infty+\infty$ ,  $3.\infty$  ve  $\infty^n$ ) öğrencilerin verdikleri yanlış cevaplar arasında belirsizlik cevabı ilk sırada yer almakta, onu tanımsızlık takip etmektedir. Sonsuzluktan farklı olarak, belirsizliği temsil eden durumlara öğretmen adaylarının verdikleri en belirgin yanlış cevaplar farklılaşmaktadır. Şöyle ki,  $\infty-\infty$  ve  $\infty/\infty$  belirsizlik ifadeleri için öğretmen adaylarının verdikleri yanlış cevaplar arasında “sonsuz” ilk sırada yer almaktayken  $0/0$  için tanımsızlık,  $1^\infty$  için 1 ve  $0.\infty$  için cevabı ilk sırada yer alan yanlışlar arasındadır. Ayrıca öğretmen adaylarının verdikleri cevaplara dair açıklamalarının da istisnasız kural tabanlı olduğu belirlenmiştir (örneğin “ $1^\infty=1$ ’dir. Çünkü 1’in tüm kuvvetleri kendisine eşittir”). Çalışmada  $1/0$  şeklindeki tanımsızlık durumu için öğretmen adaylarının verdikleri yanlış cevaplar ağırlıklı olarak sonsuz ve belirsizlik olarak ortaya çıkmıştır. Buradan hareketle ulaşılabilecek sonuçlardan biri öğretmen adaylarının bu üç kavramı birbirine karıştırdıkları, sonsuzluğu belirsizlik, belirsizliği tanımsızlık yerine kullandıkları şeklinde olabilir ki literatürde de bu yönde sonuçlar mevcuttur (Kanpolat 2010).

Öğretmen adaylarının vermiş oldukları cevaplar (doğru veya yanlış) bir bütün olarak değerlendirildiğinde ulaşılabilecek bir başka sonuç; sonsuz sembolü ve sonsuz sembolü ile ilgili temel işlemleri (toplama, çıkarma, kuvvet alma gibi) içeren sembolik formları genelde sonsuzluk kavramı ile ilişkilendirme eğiliminde olmalarıdır. Ayrıca sonsuz sembolünün var

olduğu tüm durumlarda, sonsuzun diğer durumları kapsayacağı düşüncesinden hareketle, sonucun sonsuz olması gerektiği düşüncesinin de hakim olduğu görülmektedir. Kanpolat (2010) farklı seviyelerde öğrenciler üzerinde yaptığı çalışmada benzer bir sonuca dikkat çekmiştir. Diğer taraftan öğretmen adaylarının verilen sembolik duruma ilişkin kararlarında önceden öğrendikleri bazı baskın kuralların ( $0$  çarpımda yutan elemandır gibi) oldukça etkili olduğu anlaşılmaktadır.

Öğretmen adaylarının verdikleri cevaplardan ( $1^\infty=1$ ,  $0 \cdot \infty=0$ ,  $\infty-\infty=0$  gibi cevaplar) çıkarılabilecek bir başka sonuç sonsuzun sayı olarak algılanmasıdır. Öğretmen adayları sayılar için geçerli olan kuralları ( $0$  ile bir sayının çarpımının sıfır olması gibi) kullanarak verdikleri cevapları açıklamışlardır. Yapılan çeşitli araştırmalar bunu destekler nitelikte bulgular içermektedir (Monaghan,1986; Nesin,2002; Özmantar, 2008; Singer & Voica ,2003). Nesin (2002)'ye göre sonsuz kavramının sayı (belli bir nesne) olarak anlaşılmasının temel sebeplerinden birinin sonsuz için kullanılan semboldür. Ayrıca sonsuz sembolü kullanılarak genişletilmiş reel sayılarda tanımlanmış işlemler sonsuzun sayı olarak algılanmasını kuvvetlendirmektedir.

## Öneriler

Matematiksel kavramların bir kısmı günlük yaşamda da kullanılmaktadır. Bu şekildeki kavramların bazı durumlarda günlük yaşam ve matematikteki anlamı birbirine yakın iken bazı durumlarda ise çok farklı olabilmektedir. Dolayısıyla birey, matematiksel içerikte bu kavramları iyi yapılandırılmadıysa, doğru olsun ya da olmasın matematiksel terimle ilgili sezgisel anlamalarını işe koşmaktadır. Öğretmen adaylarının sonsuz ve belirsizlik kavramları ile ilgili açıklamalarında bu durum kendini hissettirmiştir. Diğer taraftan genellikle matematik içerikte karşılaşılan tanımsızlık kavramı ile ilgili adaylarının açıklamalarında günlük yaşam deneyimleri çok etkili olmamıştır. O halde ileri seviye matematik konularının anlaşılması açısından önemli olan bu kavramların, öğrencilerin tesadüfi öğrenme ve sezgilerine bırakılmadan, zihninde yapılandırmasında öğretmen yardımcıdır. Madem bu işi öğretmen yapacak öğretmen eğitimi programları da öğretmen adaylarının tesadüfi öğrenme ve sezgilerine bu işi bırakmamalıdır. Birbirini destekler nitelikte alan ve alan öğretimi derslerinde bu kavramlara vurgu yapılmalı, öğrenci seviyesi dikkate alınarak, bu kavramların öğrenciler için nasıl anlamlı hale getirilebileceği konusunda örnekler sunulmalı ve tartışılmalıdır.

Öğretmen adaylarının sonsuz, belirsiz ve tanımsızlık durumlarını temsil eden ve sembolik formlarla ilgili anlamalarının çok yüzeysel ve kural tabanlı olduğu sonucundan hareketle bu kavramlar ve ilişkili sembolik formların (özellikle sonsuz sembolü kullanılarak tanımlanan işlemlerin) asıl anlamları üzerine alt sınıflardan itibaren durulmalıdır. Üniversitede ise özellikle alan derslerinde bu konuya odaklanması gerekmektedir.

### Kaynakça

- Aşık, S. (2010). Tanımsızlık ve Belirsizlik Kavramlarının Öğretmen ve Öğretmen Adaylarının Görüş ve Performansları Bağlamında İncelenmesi: 0, 1 ve  $\infty$  İle Yapılan İşlemler. Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Aztekin, S. (2008). Farklı Yaş Gruplarındaki Öğrencilerde Yapılanmış Sonsuzluk Kavramlarının Araştırılması. Yayınlanmış Doktora Tezi. Gazi Üniversitesi Eğitim Bölümleri Enstitüsü, Ankara.
- Aztekin, S., Arıkan, A., & Sriraman, B. (2010). The Constructs of PhD Students about Infinity: An Application of Repertory Grids. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 7(1), 149-174.
- Ball, D.L. (1990a). The MAThematical Understanding that Prospective Teachers Bring to Teacher Education. *Elementary School Journal*, 90(4), 449-466.
- Ball, D.L. (1990b). Prospective Elementary and Secondary Teachers' Understanding of Division. *Journal for Research in Mathematics Education*. 21(2), 132-144.
- Cankoy, O. (2010). Mathematics Teachers' Topic-Specific Pedagogical Content Knowledge in the Context of Teaching  $a^0$ ,  $0!$  and  $a/0$ . *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 10(2), 749-769.
- Crespo, S. & Cynthia, N. (2006). Challenging Preservice Teachers' Mathematical Understanding: The Case of Division by Zero. *School Science & Mathematics*, 106 (2), 84-98.
- Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M.A., & Brown, A. (2005). Some Historical Issues and Paradoxes Regarding The Concept of Infinity: An Apos-Based Analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58(3), 335-359.
- Ervynck, G. (1994). Students' Conceptions of Infinity in the Calculus. Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies (PRIMUS), 4 (1), 84-96.



- Even, R. & Tirosh, D. (1995). Subject-Matter Knowledge and Knowledge about Students As Sources of Teacher Presentations of The Subject-Matter. *Educational Studies in Mathematics*, 29 (1), 1-20.
- Fischbein, E. (2001). Tacit Models and Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2), 309-329.
- Kanbolat, O. (2010). Bazı Matematiksel Kavramlarla İlgili Epistemolojik Engeller. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Mamolo, A. & Zazkis, R. (2008). Paradoxes as a Window to Infinity. *Research in Mathematics Education*, 10(2), 167-182.
- Monaghan, J.D. (1986). Adolescents' Understanding of Limits and Infinity. Yayınlanmış Doktora Tezi, University of Warwick.
- Monaghan, J.D. (2001). Young Peoples' Ideas of Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2-3), 239-257.
- Nair, G.S. (2010). College Students' Concept Images of Asymptotes, Limits, and Continuity of Rational Functions, Yayınlanmış Doktora Tezi, The Ohio State University.
- Nesin, A. (2002). Matematik ve Sonsuz.  
[http://www.alinesin.org/popular\\_math/S\\_7\\_matematik\\_ve\\_sonsuz.doc](http://www.alinesin.org/popular_math/S_7_matematik_ve_sonsuz.doc) internet adresinden 3 Mart 2011 tarihinde indirilmiştir.
- Özmantar, F. (2008). *Sonsuzluk Kavramı: Tarihsel Gelişimi, Öğrenci Zorlukları ve Çözüm Önerileri*. Eds. M.F.Özmantar, E. Bingölbali ve H.Akkoç. Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri (s.151-180). Pegem Akademi, Ankara.
- Quinn, R.J., Lamberg, T.D., & Perrin, J.R. (2008). Teacher Perceptions of Division by Zero. *The Clearing House*, 81 (3), 101-104.
- Reys, R. E., & Grouws, D. A (1975). Division Involving Zero: Some Revealing Thoughts from Interviewing Children. *School Science and Mathematics*, 78, 593-605.
- Singer, M. & Voica, C. (2003). Perception of Infinity: Does it Really Help in Problem Solving?. *The Mathematics Education into the 21st Century Project Proceedings of the International Conference*.
- Singer, M. & Voica, C. (2007). Children's Perceptions on Infinity: Could They Be Structured?  
<http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME5b/WG3.pdf> adresinden 10 Mayıs 2011 tarihinde indirilmiştir.



- Singer, M. & Voica, C. (2008). Between Perception and Intuition: Learning About Infinity. *The Journal of Mathematical Behavior*, 27, 188-205.
- Tall, T. & Tirosh, D. (2001). Infinity -The Never-Ending Struggle. *Educational Studies in Mathematics*, 48 (2-3),129-136.
- Tsamir, P. & Sheffer, R.(2000). Concrete and Formal Arguments: The Case of Division by Zero. *Mathematics Education Research*, 12(2), 92-106.
- Tsamir, P., Sheffer, R., & Tirosh, D.(2000). Intuitions and Undefined operations: The Cases of Division by Zero. *Focus on Learning in Mathematics*, 22 (1), 1–16.
- Yıldırım, C. (2000). *Matematiksel Düşünme*, 3. Basım, Remzi Kitapevi, İstanbul.