

Araştırma Makalesi - Research Article

Fonksiyonel Derecelendirilmiş İki Boyutlu Plakanın Isıl Analizi

Thermal Analysis of Functionally Graded Two-Dimensional Plate

Oğuzhan Demirel¹, Durmuş Yarımabuç^{1*}

Geliş / Received: 24/06/2024

Revize / Revised: 04/10/2024

Kabul / Accepted: 21/10/2024

ÖZ

Kararlı durumdaki iki boyutlu heterojen bir plakanın ısı transferi probleminin kapalı form çözümü ele alınmıştır. Kararlı durumda olduğu düşünülen bu plakanın ısı iletkenliğinin, iki yönde üstel olarak değiştiği varsayılmıştır. Bu koşullar altında elde edilen kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümü, değişkenlerine ayırma yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Çözümün doğruluğunu test etmek için sınır koşullarında verilen keyfi fonksiyonlar kullanılmıştır. Farklı ısı akı değerleri için elde edilen sonuçlar grafikler üzerinde tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler- Heterojen Plaka, Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme, Değişkenlerine Ayırma Yöntemi

ABSTRACT

A closed form solution of the heat transfer problem of a two-dimensional heterogeneous plate under steady state condition is discussed. It is assumed that the thermal conductivity of this plate, which is in steady state, varies exponentially in two directions. The analytical solution of the partial differential equation obtained under these conditions is obtained using the separation of variables method. Arbitrary functions given in boundary conditions are used to test the accuracy of the solution. The results obtained for different heat flux values are discussed on graphs.

Keywords- Heterogeneous Plate, Functionally Graded Materials, Separation of Variables Method

¹İletişim: demirelemu@hotmail.com (<https://orcid.org/0009-0001-2341-3401>)

Matematik Bölümü, Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Osmaniye

²*Sorumlu yazar İletişim: durmusyarimpabuc@osmaniye.edu.tr (<https://orcid.org/0000-0002-8763-1125>)

Matematik Bölümü, Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Osmaniye

I. GİRİŞ

Birbirine paralel iki yüzeyin sınırlandırdığı ve kalınlığı diğer boyutlara göre oldukça küçük olan düz yapılar ince plakalar olarak tanımlanır. Yapısal olarak daha hafif mühendislik elemanları oluşturması nedeniyle köprüler, hidrolik yapılar, konteynırlar, uçaklar, depolar, tanklar, basınçlı kaplar gibi mühendisliğin birçok alanında yaygın olarak kullanılmaktadır. Farklı çevre koşullarına uygun malzeme ihtiyacından ortaya çıkan kompozit malzemeler başlangıçta hem sıcaklığa hem de deformasyona dayanıklı olması için üretilmişlerdir. İlerleyen süreçlerde daha yüksek sıcaklık ve dayanım süreleri için fonksiyonel dereceli malzeme ihtiyacı ortaya çıkmıştır. Kompozit bir malzeme türü olarak da nitelendirilen bu malzemeler, Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler (FDM) olarak literatüre geçmiştir. İlk olarak Japon malzeme bilimcilerinin farklı malzemelerin üstün özelliklerinin birleştirilmesi fikrinden doğmuş olan bu fonksiyonel dereceli malzemelerin, bu alandaki hızlı gelişmelere paralel olarak çok geniş kullanım alanları ortaya çıkmıştır. FDM uygulamaları ilk zamanlarda genel olarak metal ile seramik malzemenin kompozit olarak birleştirilmesiyle elde edilirken, günümüzde homojen ya da heterojen dağılım gösterecek şekilde bu malzemeler iç içe geçirilerek elde edilmektedir. FDM'lerde metal-seramik malzeme özellikleri bir yüzeyden diğer yüzeye geçerken bir konum fonksiyonuna bağlı olarak malzeme bileşenlerinin dağılımına göre sürekli ya da kademeli olarak değişim gösterir. Dereceli yapısı sayesinde çok yüksek sıcaklıklara dayanabilme kapasitesi, sağlamlığı, iletkenliği, düşük özgül ağırlığa sahip olması gibi daha pek çok özelliğinden dolayı uzay ve havacılık, endüstriyel malzemeler, tıp, savunma sanayi, enerji, optoelektrik vb. gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Isı iletimi olgusuna, kaynaktan son kullanıcıya ısı enerjisi aktaran borulama gibi yüksek hızlarda ısı transferinin gerçekleştiği uygulamalarda yaygın olarak karşılaşılmaktadır.

Literatüre bakıldığında iki boyutlu levhaların ısı iletimi probleminin sayısal yöntemlerle çözümünün zor olduğu görülmektedir. Karmaşık tipteki problemler için ısı iletimi problemlerinin analitik çözümü mevcut değildir. Literatürde bu alanda yapılmış bazı çalışmalar sırasıyla şu şekilde verilebilir. Tornabene vd. [1] çift kavisli lamine kompozit kabukların ve panellerin statik davranışını araştırmışlardır. Yine Tornabene vd. bir başka çalışmalarında [2] ince ve kalın çift kavisli lamine kompozit kabukların ve farklı eğriliklere sahip panellerin serbest titreşimleri için 2 boyutlu yüksek dereceli eşdeğer tek katman teorisinin genel bir formülasyonunu sunmuşlardır. Kullikov vd. [3] örnekleme yüzeyleri (SaS) tekniğini kullanarak hibrit-karışık bir ANS dört düğümlü kabuk elemanı geliştirmişlerdir. Lei vd. [4] birinci dereceden kayma deformasyonu plaka teorisine dayanan lamine FD-CNT takviyeli kompozit plakaların serbest titreşim analizi için elemansız kp-Ritz yöntemini kullanmışlardır. Katman sayısını ve laminasyon açısının etkilerini de detaylı olarak incelemişlerdir. Lie vd. [5] bir başka çalışmalarında karbon nanotüp (CNT) ile güçlendirilmiş fonksiyonel derecelendirilmiş dönen silindirik panellerin serbest titreşimi üzerinde çalışmışlardır. Çalışmalarında elementsiz çekirdek parçacıklı Ritz yöntemini (kp-Ritz) kullanmışlardır. Dönen silindirik panelleri, panellerin kalınlık yönü boyunca farklı dağılımlara sahip tek duvarlı karbon nanotüpler (SWCNT) ile güçlendirerek elde ettikleri dönen panellerin etkin malzeme özelliklerini tahmin etmek için genişletilmiş karışım kuralını kullanmışlardır. Yine Lie vd. [6] bir başka çalışmalarında IMLS-Ritz yöntemini kullanarak Pasternak temellerine dayanan fonksiyonel derecelendirilmiş karbon nanotüp (FD-CNT) takviyeli kompozit kalın düz kenarlı dörtgen plakaların serbest titreşim davranışlarını ele almışlardır. FD-CNT takviyeli kompozit plakalar, kalınlık yönünde derecelendirilmiş malzeme özellikleri ile eksenel yönde tek eksenli olarak hizalanmış CNT takviyeli yapıya sahiptir. Geliştirilmiş hareketli en küçük kareler Ritz (IMLS-Ritz) yönteminin sayısal kararlılığını göstermek için örnek problemler ele alıp yakınsama durumlarını incelemişlerdir. Lie vd. [7] bir çalışmalarında mükemmel şekilde bağlanmış karbon nanotüp takviyeli fonksiyonel derecelendirilmiş (CNTR-FD) katmanlardan oluşan, karbon nanotüp takviyeli fonksiyonel olarak derecelendirilmiş kompozit lamine plakaların bükülme tepkilerini incelemişlerdir. Song Z vd. [8] yüksek dereceli CNT takviyeli fonksiyonel derecelendirilmiş plakaların titreşim özelliklerini, bu plakaların titreşim davranışları üzerindeki CNT dağılımlarını ve piezoelektrik yama yerleşimlerinin titreşim kontrol etkileri üzerindeki etkilerini analiz ettikleri çalışmalarında ana plakanın üst ve alt yüzeylerine bağlanan piezoelektrik aktüatör ve sensör çiftleri kullanmışlardır. Shaw LL [9] çok katmanlı ve bileşimsel olarak derecelendirilmiş plakalar ve kaplamalardaki termal artık gerilimlerin analizini yaparken çok katmanlı malzemelerde bileşim gradyanı, elastik modül, termal genleşme katsayısı ve katman sayısı dahil olmak üzere farklı malzeme bileşenlerinin artık gerilimlerin büyüklüğü ve dağılımı üzerindeki etkileri üzerine sistematik çalışmalar yapmıştır. Artık gerilimlere bağlı olarak plakaların ve kaplamaların şekilsel değişikliklerini de araştırmıştır. Reddy vd. [10] fonksiyonel derecelendirilmiş silindirlerin ve plakaların dinamik termoelastik tepkisini incelemek için termal yüklemeye maruz kalan fonksiyonel derecelendirilmiş eksenel simetrik bir silindir problemi ve yanı sıra fonksiyonel olarak derecelendirilmiş bir plaka için, üç boyutlu bir ısı iletim denklemi ile birleştirilmiş enine kayma şekil değiştirmelerini ve dönmeleri hesaba katan birinci dereceden kayma deformasyonu plaka teorisini (FSDT) kullanan bir termoelastik sınır değeri problemi formüle etmişlerdir. Reddy vd. [11] fonksiyonel derecelendirilmiş dikdörtgen plakaların üç boyutlu termomekanik deformasyonlarını asimptotik bir yöntem kullanarak incelemişlerdir. Fonksiyonel olarak derecelendirilmiş dikdörtgen plakaların termoelastik deformasyonlarının sonuçlarını kıyaslayarak genellikle iki boyutlu plaka teorileri tarafından yapılan sabit kalınlık boyunca sapma varsayımının termal yük durumu için geçersiz olduğu, ancak mekanik yük durumu

için iyi bir yaklaşım olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Reddy JN [12] Navier'in dikdörtgen plaka çözümleri ve üçüncü dereceden kayma deformasyonu plaka teorisine dayanan, kalınlık boyunca fonksiyonel olarak derecelendirilmiş plakaların analizi için sonlu elemanlar modeline dayanan teorik bir formülasyon üzerinde çalışmıştır. Nicholas Fantuzzi vd. [13] Genelleştirilmiş Diferansiyel Dörtlü Sonlu Elemanlar Yöntemi (GDQFEM) kullanarak geometrik süreksizliklere ve keyfi kavisli sınırlara sahip orta kalınlıkta FD plakaların dinamik davranışını araştırmışlardır. Apalak vd. [14] tarafından fonksiyonel olarak derecelendirilmiş plakaların malzeme özelliklerinin, plaka kalınlığı yönü boyunca değil, düzlem içi yön boyunca kuvvet yasasına göre değiştiği varsayılarak farklı kenar ısı akışları için yapılandırılarak birleştirilmiş fonksiyonel derecelendirilmiş kenetlenmiş plakaların termal artık gerilme analizleri yapılmıştır. Bağcı vd. [15], iki boyutlu termoelastik ısı iletimi ve Navier denklemlerini sonlu farklar yöntemini kullanılarak ayırıştırılmış ve elde edilen doğrusal denklem sistemini pseudo tekil değer yöntemi kullanarak çözmüşlerdir. Çalışmalarında, farklı düzlem içi malzeme bileşimleri ve düzlem içi ısı akışları için fonksiyonel derecelendirilmiş kenetlenmiş plakaların geçici termal artık gerilme analizlerini yapmışlardır. Apalak vd. [16] malzeme bileşiminin, levha kalınlığı yönü boyunca değil, düzlem içi yön boyunca kuvvet yasasına göre değişeceği varsayılarak yapılandırıcıyla birleştirilmiş fonksiyonel derecelendirilmiş kenetlenmiş dairesel plakalarda düzlem içi bileşimsel gradyan üssünün ve yönünün termal artık gerilim ve deformasyonlar üzerindeki etkilerini araştırmışlardır. Apalak vd. [17] fonksiyonel olarak derecelendirilmiş plakaların malzeme özelliklerinin, plaka kalınlığı yönü boyunca değil, düzlem içi yön boyunca kuvvet yasasına göre değiştiği varsayılarak düzlem içi sabit iç ve dış kenar ısı akıları için fonksiyonel derecelendirilmiş kenetlenmiş içi boş dairesel plakaların termal artık gerilme analizlerini yapmışlardır. Sadowski vd. [18] termal şoka maruz kalan FDM silindirik plakalarda sıcaklık alanı problemine ve ısı transfer katsayısının değerlendirilmesine çalışmışlardır. Alibeigloo A [19] termo-mekanik yüklere maruz kalan basit destekli kenarları olan fonksiyonel derecelendirilmiş dikdörtgen plakaların üç boyutlu termo-elastik analizini gerçekleştirmiştir. Sıcaklık değişiminin, uygulanan mekanik yükün, gradyan indeksinin, en boy oranının ve kalınlık/uzunluk oranının plakanın davranışı üzerindeki etkilerini incelemiştir. Apalak vd. [20] iki seramik kenarı boyunca sabit düzlem içi ısı akısına maruz kalan çift yönlü fonksiyonel derecelendirilmiş kenetlenmiş plakaların termal gerilme ve deformasyon durumlarını araştırmışlardır. Apalak vd. [21] farklı kenar ısı akıları için yapılandırılarak birleştirilmiş fonksiyonel derecelendirilmiş kenetlenmiş plakaların termal artık gerilme analizini yapmışlardır. Apalak vd. [22] bir başka çalışmalarında, farklı düzlem içi malzeme bileşimleri ve düzlem içi ısı akıları için fonksiyonel olarak derecelendirilmiş kenetlenmiş plakaların geçici termal artık gerilme analizlerini gerçekleştirmişlerdir. Boggarapu vd. [23] işlevsel olarak derecelendirilmiş malzeme araştırmalarındaki son gelişmelere genel bir bakış sunmaktadır. Demirbaş vd. [24] düzlem boyunca iki yönde fonksiyonel derecelendirilmiş dikdörtgen plakaların termo-mekanik davranışını, üç boyutlu elastiklik denklemleri ile incelemiştir. Demirbaş vd. [25], kenetlenmiş fonksiyonel dereceli dikdörtgen plakaların iki boyutlu termoelastik analizlerini, malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olduğunu göz önünde bulundurarak sonlu farklar ve elemanlar yöntemleri ile çözmüşlerdir. Ghatage vd. [26] çok yönlü kademeli (kiriş/plaka/kabuk) yapıların modellenmesi ve analizi üzerine kapsamlı bir inceleme sunmuşlardır. Golbahar vd. [27] tarafından belirli bir ısıtma zaman aralığında istenen alan sıcaklık dağılımlarına ulaşmak için fonksiyonel olarak derecelendirilmiş kalın plakaların sınırlarındaki ısı akışlarını tahmin etmek için optimal bir kontrol prosedürü sunulmaktadır. Leetsch vd. [28] yapmış oldukları çalışmada, enine termal yüklere maruz kalan fonksiyonel dereceli plakaların üç boyutlu termomekanik davranışını, bir dizi iki boyutlu sonlu plaka elemanı ile incelemiştir. Marchuk [29] tarafından üç boyutlu formülasyonda katmanlı, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş plakaların termal olarak gerilimli durumunu incelemek için iki yaklaşım geliştirilmiştir. İlk yaklaşımda, Reissner varyasyon ilkesini kullanarak, bir integral diferansiyel denge denklemleri sistemi ve karşılık gelen sınır koşulları, bir varsayım getirilmeden elde edilmiştir. İkinci yaklaşımda, üç boyutlu termoelastik dengenin diferansiyel denklemlerini oluşturmak için yapı kalınlığı boyunca aranan fonksiyonların polinom yaklaşımı kullanılmıştır. Matysiak vd. [30], fonksiyonel dereceli tabakanın ve kompozit malzemenin ısı iletkenliği ve geometrik özelliklerinin, cisimlerdeki sıcaklık ve ısı akısı dağılımları üzerindeki etkisini araştırmışlardır. Pala vd. [31] sabit hızla hareket eden ısı kaynağı tarafından ısıtılan dikdörtgensel plaka üzerindeki sıcaklık dağılımının analitik çözümünü, çift katlı Fourier serisi kullanarak çözmüşlerdir. Tek doğrultuda doğrusal ve dairesel hareketli ısı kaynakları için inceleme yapmışlardır. Yarımabuç vd. [32], homojen olmayan genel sınır koşullarına sahip iki boyutlu anizotropik bir plakanın ısı iletim analizini, sonlu eleman tabanlı ANSYS-Fluent ile ele almışlardır. Malzemenin ısı iletkenliği ile ısı üretim parametrelerinin iki uzay değişkenine göre keyfi olarak değiştiği varsayılmıştır. Baytak vd. [33], fonksiyonel dereceli veya lamine kompozit plakalarda termal gerilim dağılımı için analitik bir formül önermişlerdir. Farklı elastik modüllere sahip deneysel modellerin üretimindeki deneysel sorunları tartışmışlardır. Yarımabuç vd. [34], heterojen bir ortamda iki boyutlu kararlı durumdaki ısı transferi problemini, iki boyutlu pseudospektral Chebyshev yöntemi ile analiz etmişlerdir. İç ısı üretiminin iki yönde keyfi olarak değiştiği varsayılırken, malzemenin ısı iletkenlik katsayısını Mori-Tanaka modeli ile iki yönlü (kalınlık-uzunluk) olarak derecelendirildiği varsayılmıştır.

Bu çalışmada, kararlı durumda olduğu düşünülen fonksiyonel derecelendirilmiş iki boyutlu plakanın ısı iletim analizi ele alınmıştır. Plakanın ısı iletkenliğinin iki yönde üstel olarak fonksiyonel derecelendirildiği varsayılmıştır. Bu koşullar altında sabit katsayılı homojen kısmi diferansiyel denklem elde edilmiştir. Literatürden farklı olarak ısı iletim katsayısının iki yönde değiştiği durumun analitik çözümü, değişkenlerine ayırma yöntemi ile ilk defa bu çalışmada ele alınmıştır. Çözümün doğruluğunu test etmek için sınır koşullarında verilen keyfi fonksiyonlar kullanılmıştır. Farklı ısı akı değerleri için elde edilen sonuçlar grafikler üzerinde tartışılmıştır.

II. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu çalışmada, dikdörtgen bir bölgede fonksiyonel derecelendirilmiş plakanın ısı iletim katsayısının iki uzay değişkenine göre keyfi olarak değiştiği iki boyutlu bir ısı iletimi problemi ele alınmıştır. Bu koşullar altında homojen doğrusal kısmi diferansiyel denklem

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(k(\eta, \xi) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(k(\eta, \xi) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) = 0, \quad (-L < \eta < L, -W < \xi < W) \quad (1)$$

şeklinde elde edilir. Bu plaka için sınır koşulları

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta}(-L, \xi) = -\frac{q_0''}{k(-L, \xi)}; \quad \theta(L, \xi) = G(\xi) \quad (2a)$$

$$\theta(\eta, -W) = F(\eta); \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(\eta, W) = 0 \quad (2b)$$

şeklinde alınmıştır. Burada sırasıyla $\theta(\eta, \xi)$, $k(\eta, \xi)$, q_0'' , θ_∞ ; sıcaklık, ısı iletim katsayısı, sabit yüzey ısı akısı ve sabit ortam sıcaklığıdır. $F(\eta)$ ve $G(\xi)$ rastgele fonksiyonları temsil etmektedir. Bütün değişkenleri aynı mertebeye getirmek ve daha etkili bir çözüm elde edebilmek için aşağıdaki boyutsuz parametreler kullanılmıştır:

$$x = \frac{\eta}{L}, \quad y = \frac{\xi}{W}, \quad T = \frac{\theta - \theta_\infty}{\theta_{max} - \theta_\infty} \quad (3)$$

Bu çalışmada ısı iletkenlik katsayısının iki değişkene göre değiştiği

$$k(\eta, \xi) = k_0 e^{\alpha \left(\frac{\eta}{L} \right)} e^{-\gamma \left(\frac{\xi}{W} \right)}, \quad (4)$$

varsayılmıştır. Boyutsuzlaştırma parametreleri (3) ve ısı iletim katsayısı (4) sistemi modelleyen kısmi diferansiyel denklem (1) ve sınır koşullarında yerine yazılırsa, ısı iletim probleminin boyutsuz denklemi ve sınır koşulları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial T}{\partial x} - c^2 \gamma \frac{\partial T}{\partial y} + c^2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (-1 < x < 1, -1 < y < 1) \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(-1, y) = -ae^\alpha e^{\gamma y}; \quad T(1, y) = G(y) \quad (6a)$$

$$T(x, -1) = F(x); \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x, 1) = 0. \quad (6b)$$

Burada $c = L/W$ sabit, $a = q_0''/k_0(\theta_{max} - \theta_\infty)$ boyutsuz ısı akısını göstermektedir. Bu denklemin değişkenlerine ayırma yöntemi ile analitik olarak çözülebilmesi için kısmi diferansiyel denklemin homojen olmasının yanında en az bir yönde sınır koşullarının da homojen olması gerekir. Sınır koşullarının bir yönde homojen olmasını sağlamak için sıcaklık fonksiyonu

$$T(x, y) = T_1(x, y) + T_2(x, y) \quad (7)$$

olacak şekilde ayrılsın. $T_1(x, y)$ için x yönündeki sınır koşulları (6a)

$$\frac{\partial T_1(-1, y)}{\partial x} = -ae^\alpha e^{\gamma y}, \quad T_1(1, y) = G(y) \quad (8)$$

şeklinde seçilirse, $T_2(x, y)$ için x yönündeki sınır koşulları

$$\frac{\partial T_2(-1, y)}{\partial x} = 0, \quad T_2(1, y) = 0 \quad (9)$$

olur. $T_1(x, y)$ için belirlenen sınır koşullarını (8) sağlayacak şekilde ikinci dereceden bir ifade,

$$T_1(x, y) = -ae^{\gamma y + \alpha x} + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 [ae^{\gamma y + \alpha x} x + G(y)] \quad (10)$$

yazılabilir. Benzer şekilde $T_2(x, y)$ için y yönündeki sınır koşulları ise

$$T_2(x, -1) = F(x) - T_1(x, -1); \quad \frac{\partial T_2}{\partial y}(x, 1) = -\frac{\partial T_1}{\partial y}(x, 1) \quad (11)$$

şeklinde elde edilir. $T(x, y) = T_1(x, y) + T_2(x, y)$ bağıntısı kısmi diferansiyel denklemde yerine yazılırsa, $T_2(x, y)$ ye bağlı kısmi diferansiyel denklemin

$$\frac{\partial^2 T_2(x, y)}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial T_2(x, y)}{\partial x} - c^2 \gamma \frac{\partial T_2(x, y)}{\partial y} + c^2 \frac{\partial^2 T_2(x, y)}{\partial y^2} = f_1(x, y) \quad (12)$$

x yönündeki homojen sınır koşulları (9) ve y yönündeki sınır koşulları (11) kullanılarak değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözümü yapılabilir. Buradaki sağ taraf fonksiyonu ise aşağıdaki gibidir.

$$f_1(x, y) = -\frac{\partial^2 T_1(x, y)}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial T_1(x, y)}{\partial x} + c^2 \gamma \frac{\partial T_1(x, y)}{\partial y} - c^2 \frac{\partial^2 T_1(x, y)}{\partial y^2} \quad (13)$$

$T_2(x, y)$ nin x yönündeki homojen sınır koşulları (9) kullanılarak çözümü, Fourier kosinüs serisi

$$T_2(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(y)}{\cos(\lambda)} \cos(\lambda x + \lambda), \quad \lambda = (2n + 1) \frac{\pi}{4} \quad (14)$$

formunda elde edilir. $T_2(x, y)$ nin y yönündeki sınır koşulları (11) kullanılarak $C_n(y)$ fonksiyonu bulunabilir. $T_2(x, y)$ için önerilen Fourier kosinüs serisi kısmi diferansiyel denklemde (12) yerine yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{c^2}{\cos(\lambda)} C''_n(y) - \frac{c^2 \gamma}{\cos(\lambda)} C'_n(y) - \frac{\lambda^2}{\cos(\lambda)} C_n(y) \right] \cos(\lambda x + \lambda) - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda C_n(y)}{\cos(\lambda)} \right] \sin(\lambda x + \lambda) = f_1(x, y) \quad (15)$$

elde edilir. Bu denklemin her iki tarafı $\cos(\lambda x + \lambda)$ ile çarpılıp $[-1, 1]$ aralığında x değişkenine göre integrali alınır;

$$C''_n(y) - \gamma C'_n(y) - \left(\frac{2\lambda^2 + \alpha}{2c^2} \right) C_n(y) = S_1(y) \quad (16)$$

şeklinde $C_n(y)$ fonksiyonuna bağlı sabit katsayılı homojen olmayan ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem elde edilir. Burada,

$$S_1(y) = \frac{\cos(\lambda)}{c^2} \int_{-1}^1 f_1(x) \cos(\lambda x + \lambda) dx$$

(17)

integrali ile bulunur. Bu diferansiyel denklemin çözümü

$$C_n(y) = C_n^h(y) + C_n^p(y) \quad (18)$$

biçiminde olup burada $C_n^h(y)$ homojen çözümü, $C_n^p(y)$ özel çözümü ifade etmektedir. Homojen diferansiyel denklemin karakteristik denkleminin kökleri

$$r_n^{1,2} = \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4P}}{2}, \quad P = \frac{2\lambda^2 + \alpha}{2c^2}$$

olmak üzere homojen çözüm

$$C_n^h(y) = d_1 e^{r_1 y} + d_2 e^{r_2 y} \quad (19)$$

şeklinde elde edilir. $C_n^p(y)$ özel çözümü, sağ taraf fonksiyonu $S_1(y)$ sonlu sayıda türeve sahip ise belirsiz katsayılar metodu ile, sonlu sayıda türeve sahip değilse parametrelerin değişimi metodu ile çözülebilir. Buradaki özel çözüm metodu sınır koşullarındaki $F(x)$ ve $G(y)$ fonksiyonlarının seçimine bağlıdır. Bu fonksiyonlar özel olarak

$$F(x) = 1 - 3x, \quad G(y) = \sin(2y) \quad (20)$$

şeklinde sonlu türeve sahip birer fonksiyon olarak seçilirse özel çözüm belirsiz katsayılar metodu ile

$$C_n^p(y) = A_1 e^{\gamma y} + A_2 \cos(2y) + A_3 \sin(2y) \quad (21)$$

şeklinde bulunur. $F(x)$ ve $G(y)$ fonksiyonlarının sonlu türeve sahip olmayan seçimlerinde ise çözüm parametrelerin değişimi yöntemi ile bulunabilir. Buradaki A_1, A_2 ve A_3 katsayıları, özel çözümün denkleme yerine yazılması ile kolayca bulunabilir. Nihayetinde $C_n(y)$ denklemin genel çözümü

$$C_n(y) = d_1 e^{r_1 y} + d_2 e^{r_2 y} + C_n^p(y) \quad (22)$$

şeklinde elde edilir. Buradaki d_1 ve d_2 integral sabitleri y yönündeki sınır koşulları (11) kullanılarak bulunur. Öncelikle $T_2(x, -1) = f_2(x)$ sınır koşulu (14) denkleminde yerine yazılıp denklemin her iki tarafı $\cos(\lambda x + \lambda)$ ile çarpılıp $[-1, 1]$ aralığında x değişkenine göre integrali alınırsa;

$$C_n(-1) = \cos(\lambda) \int_{-1}^1 f_2(x) \cos(\lambda x + \lambda) dx \quad (23)$$

bulunur. Bu koşul kullanılarak d_1 ve d_2 integral sabitlerine bağlı ilk denklem

$$d_1 e^{-r_1} + d_2 e^{-r_2} = M \quad (24)$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$M = \cos(\lambda) \int_{-1}^1 f_2(x) \cos(\lambda x + \lambda) dx - (A_1 e^{-\gamma} + A_2 \cos(2) - A_3 \sin(2)) \quad (25)$$

ile bulunur. Benzer şekilde, $\partial T_2 / \partial y(x, 1) = -\partial T_1 / \partial y(x, 1)$ sınır koşulu (14) denkleminde yerine yazılıp denklemin her iki tarafı $\cos(\lambda x + \lambda)$ ile çarpılıp $[-1, 1]$ aralığında x değişkenine göre integrallenirse;

$$C'_n(1) = -\cos(\lambda) \int_{-1}^1 \frac{\partial T_1(x, 1)}{\partial y} \cos(\lambda x + \lambda) dx \quad (26)$$

bulunur. Bu koşul kullanılarak d_1 ve d_2 integral sabitlerine bağlı ikinci denklem

$$r_1 e^{r_1} d_1 + r_2 e^{r_2} d_2 = N \quad (27)$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$N = -\cos(\lambda) \int_{-1}^1 \frac{\partial T_1(x, 1)}{\partial y} \cos(\lambda x + \lambda) dx - (A_1 \gamma e^{\gamma} - 2A_2 \sin(2) + 2A_3 \cos(2)) \quad (28)$$

ile elde edilir. d_1 ve d_2 ye bağlı bu lineer denklem sistemi (24) ve (27) çözülürse, integral sabitleri kolayca bulunur. Buna göre denklemin analitik çözümü

$$T(x, y) = T_1(x, y) + T_2(x, y) \quad (29)$$

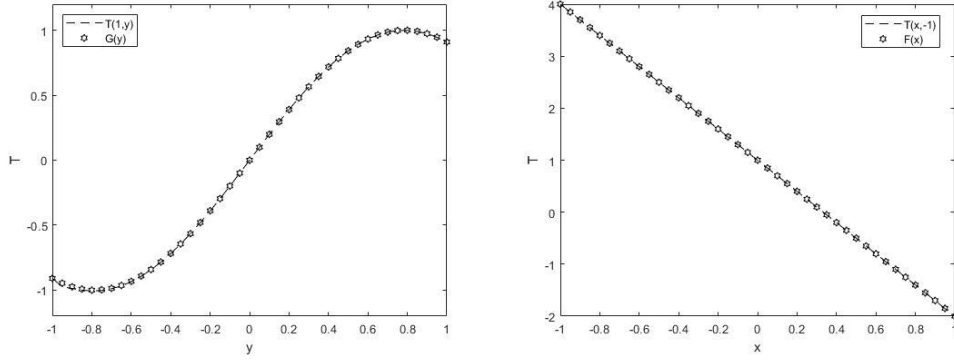
olup

$$T(x, y) = -a e^{\gamma y + \alpha} x + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 [a e^{\gamma y + \alpha} x + G(y)] + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(y)}{\cos(\lambda)} \cos(\lambda x + \lambda) \quad (30)$$

şeklinde elde edilir.

III. BULGULAR

Bu çalışmada, dikdörtgen bir bölgede fonksiyonel derecelendirilmiş plakanın ısı iletim katsayısının iki uzay değişkenine göre keyfi olarak değiştiği iki boyutlu bir ısı iletimi probleminin kapalı form çözümü ele alınmıştır. Malzeme özelliklerin eksenel yönlerdeki değişimi için $\alpha = -0.4$ ve $\gamma = 0.5$ olarak seçilmiştir. Bu malzeme gradyanı parametrelerinin sıfır alınması ($\alpha = \gamma = 0$) durumunda, homojen metal malzemenin elde edileceği açıktır. Çalışmada elde edilen sonuçların doğruluğunu test etmek için, (20) denklemi ile verilmiş keyfi olarak seçilen $F(x)$ ve $G(y)$ fonksiyonlarına karşılık gelen sınır koşulları Şekil 1’de karşılaştırılmış ve sonuçların örtüştüğü görülmüştür.

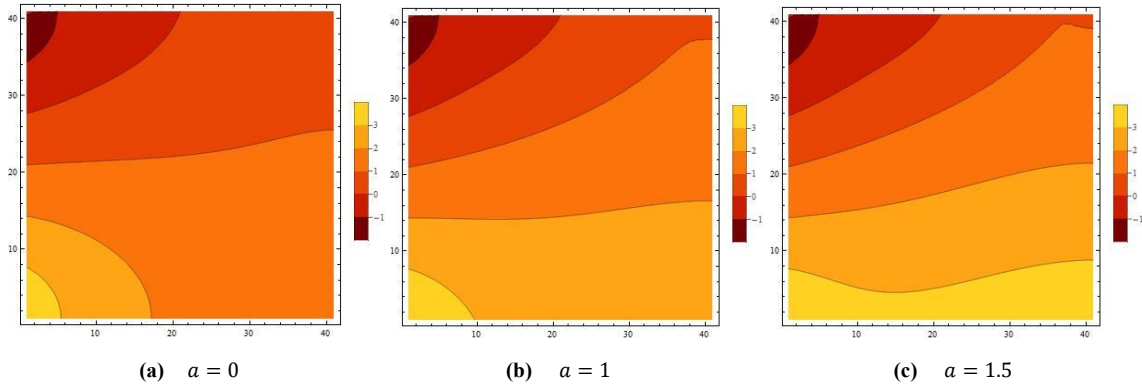


(a) $x = 1$ noktasında

(b) $y = -1$ noktasında

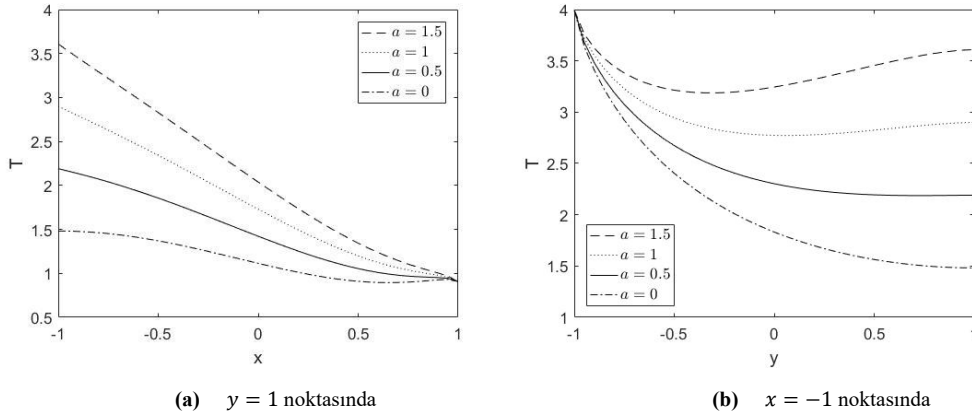
Şekil 1. Keyfi olarak seçilen $G(y)$ ve $F(x)$ fonksiyonlarına karşılık gelen sınır koşullarında sıcaklık dağılımlarının karşılaştırılması ($a = 1.5$).

Şekil 2’de farklı boyutsuz ısı akıları ($a = 0.5, 1, 1.5$) için plakalardaki sıcaklık dağılımının iki boyutlu grafiği verilmiştir. İzdüşüm grafiklerinde, rengin koyudan açığa doğru değişimi sıcaklığın arttığını göstermektedir. Plakanın sol tarafına ($x = -1$) etki eden boyutsuz ısı akı değerinin artması ve plakanın alt ucundaki ($y = -1$) sınır koşulunun etkisi ile sıcaklığın sol alt ucundan yukarı doğru arttığı gözlemlenmiştir.



Şekil 2. Farklı boyutsuz ısı akı değerleri için iki boyutlu sıcaklık dağılımları.

Şekil 3’te plakanın üst kenarı ($y = 1$) ile sol kenarında ($x = -1$) farklı boyutsuz ısı akı değerlerinde ($a = 0.5, 1, 1.5$) sırasıyla x ve y yönündeki sıcaklık dağılım grafikleri verilmiştir. Şekil 3(a) da $y = 1$ noktasında ısı akı değeri arttıkça sıcaklığın arttığı ve iç cidar ile dış cidar arasındaki sıcaklık farkının arttığı gözlemlenmiştir. Ayrıca $x = 1$ ekseninde sınır koşulunun sağlandığı da görülmüştür. Şekil 3(b) de ısı akısının plakaya uygulandığı bölgede ($x = -1$) ısı akı değeri arttıkça sıcaklık artmış ve $y = -1$ noktasında sınır koşulu zorlamasından dolayı iç cidar ile dış cidar arasındaki sıcaklık farkının azaldığı görülmüştür.



Şekil 3. Eksenlerin orta noktalarında farklı boyutsuz ısı akıları için sıcaklık dağılımları.

IV. SONUÇLAR

Bu çalışmada, ısı üretimi olmadığı düşünülen fonksiyonel derecelendirilmiş iki boyutlu plakanın ısı analizi ele alınmıştır. Plakanın ısı iletkenliğinin iki yönde fonksiyonel derecelendirildiği varsayılmıştır. Bu koşullar altında elde edilen kısmi diferansiyel denklemin kapalı form çözümü değişkenlerine ayırma yöntemi ile elde edilmiştir. Sonuçlar, farklı ısı akı değerlerine göre elde edilen grafikler üzerinde tartışılmıştır. Isı akısının artırılması ile sıcaklığın arttığı gözlemlenmiştir. Bu çalışmada elde edilen kapalı form çözümü, literatürde yapılacak olan sayısal çözümler için bir kıyaslama çözümü olacaktır.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi (BAP) destekli OKÜBAP-2023-PT2-022 numaralı projenin ürünüdür.

KAYNAKLAR

- [1] Tornabene, F., Fantuzzi, N., Viola, E. & Carrera, E. (2014). Static analysis of doubly-curved anisotropic shells and panels using CUF approach, differential geometry and differential quadrature method. *Composite structures*, 107(1), 675-697.
- [2] Tornabene, F., Fantuzzi, N., Baccocchi, M. & Viola, E. (2015). Accurate inter-laminar recovery for plates and doubly-curved shells with variable radii of curvature using layer-wise theories. *Composite Structures*, 124, 368-393.
- [3] Kulikov, G.M., Mamontov, A. A., Plotnikova, S.V. & Mamontov, S.A. (2015). Exact geometry solid-shell element based on a sampling surfaces technique for 3D stress analysis of doubly curved composite shells. *Curved and Layered Structures*, 3(1), 1-16.
- [4] Lei, Z., Zhang, L. & Liew, K. (2015). Free vibration analysis of laminated FG-CNT reinforced composite rectangular plates using the kp-Ritz method. *Composite Structures*, 127, 245-259.
- [5] Lei, Z., Zhang, L. & Liew, K. (2015). Vibration analysis of CNT-reinforced functionally graded rotating cylindrical panels using the element-free kp-Ritz method. *Composit Part B: Engineering*, 77, 291-303.
- [6] Lei, Z., Zhang, L. & Liew, K. (2016). Vibration of FG-CNT reinforced composite thick quadrilateral plates resting on Pasternak foundations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 64, 1-11.
- [7] Lei, Z., Zhang, L. & Liew, K. (2016). Analysis of laminated CNT reinforced functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *Composit Part B: Engineering*, 84, 211-221.
- [8] Song, Z., Zhang, L. & Liew, K. (2016). Active vibration control of CNT reinforced functionally graded plates based on a higher-order shear deformation theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, 105, 90-101.
- [9] Shaw, L.L. (1998). Thermal residual stresses in plates and coatings composed of multi-layered and functionally graded materials. *Composit Part B: Engineering*, 29(3), 199-210.
- [10] Reddy, J.N. & Chin, C.D. (1998). Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. *Journal of Thermal Stresses*, 21 (6), 593-626.
- [11] Reddy, J.N. & Cheng, Z.Q. (2001). Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 20(5), 841-855.
- [12] Reddy, J.N. (2000). Analysis of functionally graded plates. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 47(1-3), 663-684.

- [13] Fantuzzi, N., Tornabene, F. & Viola, E. (2016). Four-parameter functionally graded cracked plates of arbitrary shape: a GDQFEM solution for free vibrations. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 23(1), 89–107.
- [14] Apalak, M.K. & Bağcı, M.D. (2011). Thermal residual stresses in adhesively bonded in-plane functionally graded clamped plates subjected to an edge heat flux. *Journal of Adhesion Science and Technology*, 25 (15), 1861–1908.
- [15] Bağcı, M.D. & Apalak, M.K. (2011). Thermal residual stresses in one-directional functionally graded plates subjected to in-plane heat flux. *Numerical Heat Transfer Applications Part A: Applications*, 60(1), 50–83.
- [16] Apalak, M.K. & Demirbas, M.D. (2013). Thermal residual stresses in adhesively bonded in-plane functionally graded clamped circular hollow plates. *Journal of Adhesion Science and Technology*, 27(14), 1590–1623
- [17] Apalak, M.K. & Demirbas, M.D. (2015). Thermal residual stresses in in-plane functionally graded clamped hollow circular plates subjected to an edge heat flux. *Proceedings of The Institution of Mechanical Engineers Part L-Journal of Materials-Design and Applications*, 229(3), 236–260.
- [18] Sadowski, T., Boniecki, M., Librant, Z. & Nakonieczyn, K. (2007). Theoretical prediction and experimental verification of temperature distribution in FGM cylindrical plates subjected to thermal shock. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50(21-22), 4461–4467.
- [19] Alibeigloo, A. (2010). Exact Solution for Thermal-Elastic Response of Functionally Graded Rectangular Plates. *Composite structures*, 92(1), 113-121.
- [20] Apalak, M. & Demirbaş, M. (2018). Thermal Stress Analysis of In-Plane Two-Directional Functionally Graded Plates Subjected to In-Plane Edge Heat Fluxes. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*, 232(8), 693-716.
- [21] Apalak, M.K. & Bağcı, M.D. (2011). Thermal Residual Stresses in Adhesively Bonded In-Plane Functionally Graded Plates Subjected to an Edge Heat Flux. *Journal of Adhesion Science and Technology*, 25(15), 1681-1908.
- [22] Bağcı, M.D. & Apalak, M.K. (2011). Thermal Residual Stresses in On-Directional Functionally Graded Plates Subjected to In-Plane Heat Flux. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 60(1), 50-83.
- [23] Boggarapu, V., Gujjala, R., Ojha, S., Acharya, S., Chowdary, S. & Kumar Gara, D. (2021). State of the Art in Functionally Graded Materials.” *Composite Structures*, 262, 113596.
- [24] Demirbaş, M.D., Apalak, M.K. & Ekici, R. (2023). Determination of Three-Dimensional Thermo-Mechanical Behavior of Bidirectional Functionally Graded Rectangular Plates With the Theory of Elasticity. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 31(3), 1-29.
- [25] Demirbaş, M.D., Ekici, R. & Apalak, M.K. (2020). Thermoelastic Analysis of Temperature-Dependent Functionally Graded Rectangular Plates using Finite Difference Methods. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 27(9), 707-724.
- [26] Ghatage, P.S., Kar, V.R. & Sudhagar, P.E. (2020). On the Numerical Modelling and Analysis of Multi-Directional Functionally Graded. *Composite Structures: A Review, Composite Structures*, 236, 111837.
- [27] Golbahar Haghighi, M., Malekzadeh, P. & Rahideh, H. (2011). Three-Dimensional Transient Optimal Boundary Heating of Functionally Graded Plates. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 59(1), 76-95.
- [28] Leetsch, R., Wallmersperger, T. & Kröplin, B. (2009). Thermomechanical Modeling of Functionally Graded Plates. *Journal of intelligent material systems and structures*, 20(15), 1799-1813.
- [29] Marchuk, A.V. (2021). Analytical Solution of the Problem on the Thermally Stressed State of Functionally Graded Plates based on the 3D Elasticity Theory. *Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal*, 12(4), 37- 62.
- [30] Matysiak, S. & Perkowski, D. (2016). On Heat Conduction Problems in a Composite Half-Space With a Nonhomogeneous Coating. *Heat Transfer Research*, 47(12), 1141-1155.
- [31] Pala, Y. & Çavuş, M. (2011). Dikdörtgensel Plakalarda Hareketli Isı Kaynağının Oluşturduğu Sıcaklık dağılımı. *Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 17(1), 19-25.
- [32] Yarimpabuç, D., Cihan, E., Çelebi, K. & Eker, M. (2020). Heat Conduction Analysis of Two-Dimensional Anisotropic Plate. *Çukurova Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi*, 35(1), 139-148.
- [33] Baytak, T., Tosun, M., Ipek, C., Mollamahmutoglu, C. & Bulut, O. (2024). Thermal Stress Analysis for Functionally Graded Plates with Modulus Gradation, Part II. *Experimental Mechanics*, 64, 1229-1247.
- [34] Yarimpabuç, D., Eker, M. & Yıldırım, R. (2023). Thermal Analysis of Bi-Directional Functionally Graded Plates Subjected To Heat Generation. *Heat Transfer Research*, 55(6), 83-92.