

GREY MODEL(1,1) İLE USD-TRY FİYAT TAHMİNİ VE HATALARIN MARKOV ZİNCİR YÖNTEMİ İLE DÜZELTMESİ

Alper KARABAY¹

Özet

Bu makalede, finansal piyasalarda oldukça önemli bir yeri olan kur tahmininde, Türkiye’de çok fazla bilinmeyen ve uygulanmayan Grey Model(1,1) ile USD-TRY kur tahmini yapılmış ve tahmin sonuçları Markov Zincir yöntemi ile düzeltilmeye çalışılmıştır. Bu modelin kur tahminlerinde ne derece başarılı sonuçlar vereceği araştırılmıştır. 2010-2015 yılları arasında USD-TRY kur değerleri kullanılarak oluşturulacak model ile 2016 yılı ilk üç aylık kur tahminleri yapılmıştır. Bu amaçla belirtilen yıllar arasında alt dönemlerde kullanılarak en uygun model oluşturulmaya çalışılmıştır. Grey Model(1,1) in monoton artan seriler için elverişli yapısı finansal piyasaların dalgalı hareketlerinde çok başarılı sonuçlar vermemiştir. Grey Model ile oluşturulan modelden elde edilen tahmin sonuçlarının hata terimleri Markov Zincir yöntemi ile düzeltilmeye ve tahmin gücü artırılmaya çalışılmıştır. Elde edilen sonuçlar ekonomik anlamda kullanışlı değildir.

Anahtar kelimeler: Grey Model, Kur Tahmini, Markov Zinciri

JEL Sınıflandırması: C51, C53, F31.

USD-TRY FORWARD PRICE FORECAST WITH GREY MODEL(1,1) AND ERROR FIXING WITH MARKOV CHAIN

Abstract

In this article, grey model (1,1) which is not known and applied widely in Turkey, is used to forecast foreign currency. Forecast errors are fixed with Markov Chain to strenghten forecast values. To evaluate the capability of this model, USD-TRY currency values In 2010-2015 period and subsets are used to build the model and 2016 first quarter period USD-TRY currency expected values are forecasted. GM(1,1) could be useful for monotonically ascending time series, but not for financial time series which fluctuate. Forecast results even after fixed with Markov Chain are not usefull in economical sense.

Keywords: Grey Model, Currency Forecast, Markov Chain

JEL Classification: C51, C53, F31.

Makale geliş tarihi: 21 Şubat 2017

Makale kabul tarihi: 21 Kasım 2017

¹ İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Finans Anabilim Dalı Doktora Öğrencisi

GİRİŞ

Çok uzun yıllardan beri ciddi rekabetin olduğu finansal piyasalarda, piyasa ile ilgili tüm yatırımcı, oyuncu ve akademik çevreler tarafından bir adım önde olabilmek veya fiyat değişimlerinin nedenini açıklayabilmek için çeşitli modeller geliştirilmiş ve hala geliştirilmeye devam etmektedir.

Bu modellerin bazıları kısa vade tahminleri için bazıları uzun vade tahminleri için kullanılırken, modellere girebilecek değişkenler de en az modellerin geçerliliği ve eksik yönleri ile birlikte modeller kadar tartışılmıştır. Bir ülkenin makro ekonomik göstergeleri kadar ilişki içinde bulunduğu ülkelerin makro ekonomik göstergeleri de iki ülke arasındaki para değişiminin oranını ifade eden kur üzerinde etkilidir. Ayrıca ülkenin politik riski gibi subjektif kriterler de kur üzerinde etkili olabilmektedir.

Mevcut modeller içinde kusursuz olan, en iyi tahmin eden modeli şu ana kadar elbette ki bulunamamıştır. Aksi takdirde tüm piyasa üyeleri bu model ile işlem yapar ve rekabet oldukça azalır. Bununla birlikte bir süre sonra bu model dahi yeteri kadar efektif olmayabilirdi. Kur tahmini gün geçtikçe daha önemli olmakta ve en iyi tahmini yapan kişi ve kurumlar finans piyasasında bir adım öne geçmektedir.

Bu çalışmanın amacı genelde finansal uygulamalarda çok sık kullanılmayan Grey Model ile USD-TRY kurunun gelecek dönem tahmininin yapılabilirliğinin araştırılmasıdır.

1. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Yapılan çalışmalar incelendiğinde genelde bir kaç yöntem bir arada incelenmiş ve karşılaştırma yapılmıştır. Yurtdışı çalışmalarda yapay sinir ağları da oldukça sık kullanılmakla birlikte Türkiye için yapılan çalışmalarda bu yöntem az rastlanılmıştır. Özellikle Grey Model ile Türkiye’de çok fazla çalışma bulunamamıştır. Altın fiyatları ile yapılan bir çalışmada Markov Zinciri direkt olarak fiyatlar için uygulanmıştır. Matematiksel modelin bulunmadığı yöntemleri nitelendirmek için kullanılan Blac-Box modeller ile yapılan çalışmalarda mevcuttur. Grey model, matematiksel modelin tam olarak bilindiği, ‘white’ model olarak isimlendirilen modeller ile matematiksel modelin bilinmediği bir başka ifade ile işleyişin tam olarak bilinmediği ‘Black’ model arasında kalmaktadır.

JULONG D.(1988) çalışmasında Grey System Theory ile uygulamamızda kullandığımız modelin teorik çerçevelerini anlatmıştır. Modelin geliştiricisi Çin’li ünlü matematikçidir. Grey sistemi davranış, işleyiş mekanizması, yapısal ve bilgisel olarak eksiklikler içeren sistemler olarak tanımlamaktadır. Grey sistemin ve uygulamalarının amacını, “sosyal bilimler ile doğa bilimler arasındaki boşluklara köprü olmak” şeklinde tanımlar.

ÖNALAN Ö.(2014) çalışmasında 17.09.2012-17.11.2013 döneminde USD-TRY kurları ile Grey-Markov yöntemini kullanarak tahmin yapmıştır. Modelin kısa zaman dönemi için oldukça doğru kestirimler sunduğunu, kestirim ufku uzadıkça modelin doğruluğunun zayıfladığını ifade etmiştir. Markov Zincirinde sayının artırılması ile daha duyarlı tahminler yapılabileceğini ifade etmiştir.

KAYACAN E., ULUTAŞ B., KAYNAK O.(2010) çalışmalarında zaman serileri için Grey sistem teorisini incelemişler ve modelin zaman serilerinde performansını değerlendirmişlerdir. Hataların hesaba katılması ile modelin geliştirilebileceğini belirtmişlerdir. GM(1,1) in monoton tip işlemlerde başarılı tahmin yaptığını bulmuşlardır.

Aynı çalışmada S eğrisi şeklinde olan seriler için aynı başarılı performansı göstermediğini ifade etmişlerdir.

ÖZDAĞOĞLU A., ÖZDAĞOĞLU G., KURT GÜMÜŞ G.(2012) çalışmalarında 2005-2009 döneminde gram altın fiyatlarını kullanarak, Markov Zinciri ile tanımlayıcı istatistiklerin elde edilmesinden sonra, daha teknik ve detaylı istatistik yöntemlere geçmeden önce bir ara ya da ön analiz olarak değerlendirmişlerdir.

ENGEL C.(1994) çalışmasında 1973-1986 yılları arasındaki veriler ile 1986-1991 dönem kur tahminini mark, pound ve Fransız franc gibi belli başlı dövizleri USD karşı değerleri için Markov ile incelemiştir. Modelin çok iyi tahmin sonuçları vermediğini ifade etmiştir.

İLARSLAN K.(2014) çalışmasında hisse senedi fiyat hareketlerinin tahmin edilmesinde Markov Zincirini kullanmıştır. Bu çalışmada hisse senedi fiyat hareketleri bir gün sonrası için “düşecek”, “yüksülecek” ve “aynı kalacak” durumları çerçevesinde incelenmiştir. Bankacılık endeksine dahil 10 hisseden 9 adedi için başarılı bir tahmin yapıldığını belirtmiştir.

MOSTAFAEI H., KORDNOORI S. ve OSTADRAHIMI M.(2011) çalışmasında Brent petrol fiyatlarındaki dalgalanmaları Markov Zinciri ile incelemiştir. Brent petrol fiyatlarının 9 aylık süreç içerisinde örnek dönem ile uyumlu olduğunu belirtmişlerdir.

XUERUI Z.(2015) çalışmasında Grey yöntemi petrol üretim tesislerinde bir tür üretim yöntemi(Well Productivity Prediction) ile ilgili olarak tahmin için kullanmıştır.

ZHANG Y.(2010) trafik yoğunluğu ile ilgili çalışmasında, Grey Markov modelin trafik yoğunluğunu tahmin etmede güvenilir sonuçlar verdiğini ifade etmiştir.

HUI S., YANG F., LI Z., LIU Q., ve DONG J.(2009) çalışmalarında Grey modeli kara çam ağaçlarının büyüme tahminlerinde kullanmışlardır.

Markov Zinciri kullanılarak finansal varlığın fiyatını tahmin eden çalışmalarda direkt fiyat tahmini yerine fiyatların değişmesinde yön veya sonraki fiyat aralığı tahmin edilmiştir. Ancak fiyatların sonraki durumu için net bir fiyat tahmini yapılmamıştır. Örneğin petrol fiyatları için bir gün sonra (\$49-\$53) tahmini gibi. Markov Zinciri, hata terimlerini düzeltmek için kullanan çalışmalarda, hata terimlerinin bir sonraki durumda alabileceği değerler için net ifadeler kullanılmamış ya da finansal araçların fiyat tahmininde olduğu gibi aralık ifade edilmiştir.

2. GREY MODEL

Sistem teorisinde, sistem kendisi ile ilgili bilinen bilgilerin miktarını renk ile tanımlamakta. Matematiksel modellerin bilinmediği durumlarda yapılacak tahminler için Black ifadesi kullanılmakta. Bloc-Box tahmin yöntemleri bu düşünce ile hareket etmekte. Bunun karşılığında White ifadesi matematiksel modeli tam olarak bilinen işlemler için kullanılmakta. Bunların arasında da doğal olarak Grey model bulunmaktadır. Gerçek hayatta daima bilinen ve bilinmeyenler olacağı için her sistem Gri olarak düşünülebilir. (KAYACAN ve diğerleri, 2010)

Döviz kurları lineer olmayan, rassal ve yüksek oranda durağan olmayan finansal zaman serileri oldukları için geleneksel lineer istatistiksel metotlar ile uygun bir model bulmak çok zordur.

Gri Sistem teorisi 1982 yılında bulunmuştur. (JULONG D.,1988). Gri Sistem teorisi Çin’de tarım, ekoloji, ekonomi, meteoroloji, ilaç, tarih, coğrafya, endüstri, deprem, jeoloji, hidroloji, spor, askeriye v.b. alanlarda kullanılmaktadır. Uluslararası ilişkiler üzerine yapılan çalışmalarda da Grey yöntem kullanılmıştır. Direkt olarak fiyatlar ile çalışılması açısından dikkat çekici bir modeldir.

GM(1,1) modeli matematiksel hesaplamaların kolay olması nedeni ile en çok kullanılan Grey Model uygulamasıdır. GM(n,m) modeli için m değişken sayısı ve n n. mertebeden diferansiyel denklemi ifade etmektedir.(JULONG D.,1988)

Orijinal seri negatif olmayan zaman serisidir. $x^{(0)}(k)$ dizisinin düzgünlük derecesi aşağıda tanımlanan oran kullanılarak test edilir. Eğer bu oran (0,1345 – 7,389) aralığı içerisine düşerse seri testi geçmiş demektir. Eğer test başarısız olursa orjinal seriye dönüşüm uygulanarak seri düzleştirilir ve tekrar teste tabi tutulur. (ÖNALAN Ö., 2014)

$$\sigma(k) = \frac{x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k-1)} \quad k = 2,3, \dots n \quad (1)$$

Fiyat verilerini ham seri olarak ele alan bu sistem seri içerisindeki her bir fiyatı kendisinden önce gelen fiyatlar ile toplayarak yeni bir kümülatif seri oluşturur. Daha sonra bu yeni seride iki ardışık (komşu) arasında ortalama alınarak bir Z serisi oluşturulur. (JULONG D.,1988)

X^0 :ham seri, X^1 kümülatif seri, Z ortalama serisi, k eleman indisi olmak üzere

AGO: Kümülatif işlem operatörü (Accumulated Generating Operation)

AGO $X^{(0)} = X^1$ olarak ifade edilir.

$$X^{(1)}(k) = \sum_{m=1}^k X^{(0)}(m) \quad (2)$$

$$z^{(1)}(k) = 0,5x^{(1)}(k) + 0,5x^{(1)}(k-1) \quad k=1,2,\dots,n,\dots \quad (3)$$

Burada ardışık terimler eşit ağırlıklı ortalama ile z serisi oluşturulmuştur. Önalın Ö. Çalışmasında (2014) ağırlıkların farklı değerler verilerek hesaplanabileceğini ifade etmiştir.

Aşağıdaki ifadede a ve b parametreleri en küçük kareler yöntemi ile çözülür. (JULONG D.,1988)

$$X^{(0)}(k) + a * Z^{(1)}(k) = b \quad (4)$$

IAGO:Ters Kümülatif işlem operatörü

GM(1,1) modeli için diferansiyel denklem çözülür ve değerler yerine konursa aşağıdaki sonuç elde edilir. (JULONG D.,1988)

$$\hat{X}^{(1)}(k+1) = \left[X^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] * e^{-ak} + \frac{b}{a} \quad (5)$$

Yukarıdaki eşitlikten, kümülatif $X^{(1)}(k)$ benzer şekilde yazılır ve iki denklem birbirinden çıkarılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) \quad (6)$$

$$X^{(0)}(k+1) = (1 - e^{-a}) * \left[X^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] * e^{-ak} \quad (7)$$

Fonksiyonda tek değişken indis olacağından ve bir önceki dizi elemanına göre bir fazla olacağından fonksiyondan elde edilecek yeni elemanlar, fiyatlar, sabit bir şekilde artacaktır.

(k+H) zamanındaki veri tahmini için formülü genel olarak aşağıdaki şekilde yazabiliriz.(KAYACAN ve diğerleri,2010)

$$X^{(0)}(k+H) = (1 - e^{-a}) * \left[X^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] * e^{-a(k+H-1)} \quad (8)$$

2.1. Modelin Uygunluğunun Test Edilmesi

Uygulamaya geçmeden önce modelin uygunluğu ve etkinliğinin test edilmesi gerekmektedir. Bu test işlemi için mutlak ortalama hata, varyans oranı ve küçük hata olasılığı kullanılır. (ÖNALAN Ö.,2014)

k=1,2,.....,n olmak üzere aşağıdaki formüller sırası ile orijinal verilerin ortalaması, tahmin hatası ve ortalama hata olmak üzere,

$$\bar{X}^{(0)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^{(0)}(k) \quad (9)$$

$$\varepsilon(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k) \quad (10)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon(k) \quad (11)$$

$$Hata\ oranı\ c = \frac{S_2}{S_1} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\varepsilon(k) - \bar{\varepsilon})^2}}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x^{(0)}(k) - \bar{x}^{(0)})^2}} \quad (12)$$

S_1 : Orijinal verilerin standart sapması

S_2 : Hata değerlerinin standart sapması

C nin küçük değerleri modelin daha iyi olduğunu gösterir. Bu değer aslında kestirim hatasının değişim oranını ifade eder. (ÖNALAN Ö.,2014)

Küçük hata olasılığı $p = P\{|\varepsilon(k) - \bar{\varepsilon}| < 0,6745 S_1\}$

Bu p değeri 0,6745 değerinden daha küçük olan kestirim hatasının göreceli yanlışlığının olasılığıdır. Genelde p nin 0,95 den daha büyük olması istenir. Kestirimin doğruluğu için p ve C çifti aşağıdaki dört grupta karakterize edilebilir. (ÖNALAN Ö.,2014)

Tablo 1 :Hata Olasılığı ve Kestirim Endeksi

Kategori	Kestirim İndeksi	
	p	C
İyi	>0,95	<0,35
Vasıflı	>0,80	<0,50
Makul	>0,70	<0,65
Kötü	<=0,70	>=0,65

3. MARKOV ZİNCİRİ

GM modelin düzeltilmesi için kullanılabilir yöntemlerden birisi de markov zinciridir. Diğer bir yöntem fourier hata düzeltme modelidir(Fourier residual modification model). Gerçek değerler x^0 ile model tarafından tahmin edilen değerler \hat{x}^0 arasındaki fark kalıntı serisi(residual series) olarak nitelendirilir. (HSU L.C.,2003)

Markov zinciri metodu sistemin gelecek durumunu, sistemin farklı durumları arasındaki geçiş olasılıklarını kullanarak kestirir.(ÖNALAN Ö.,2014)

$$\varepsilon^{(0)}(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}_0^{(0)}(k), k = 2,3, \dots n \quad (13)$$

Hata terimlerinin bir Markov Zincir özelliği taşıması için hata teriminin gelecek değeri sadece bir önceki değere bağlı olmalıdır.

Hata terimlerinin en küçük değeri ile en büyük değeri arasındaki mesafe istenildiği kadar aralığa bölünür. Eğer hata aralığı küçük bir adım sayısına bölünürse hatalar çok sık buldukları aralıkta kalırlar. Burada dikkat edilmesi gereken bu işlemde sonra oluşacak geçiş matrisinin bir yutan Markov Zinciri (absorbing Markov Cahin) olmamasıdır. Aksi bir durumda hata bir sonraki adıma geçmez ve sürekli aynı aralıkta kalır. Hata aralığını aralıklara bölme işleminde hata adımları ne kadar çok olursa bir adımdan bir başka adıma geçme ihtimali birbirine çok yakın olasılık durumu içerebilir. Bir adımda eğer birbirine yakın olasılık değerleri var ise bir sonraki adım incelenir. Sonraki hata değeri bu iki adımdaki değerlerin ortalamasıdır. (ZHANG Y.,2010)

Geçiş matrisi olarak isimlendirilen matris nxn boyutlu her bir satır toplamı 1 olacak bir matristir. p_{ij} : i durumundan j durumuna geçiş olasılığı ve n olası durumlardır. Geçmiş hatalar gözlemlenerek bir hatanın bir aralıktan diğer bir hata aralığına geçtiği durumlar tespit edilerek oluşturulur. Bu durumların frekansları çıkartılarak olasılık geçiş matrisi oluşturulur.

Hata adımları bir aralık olacağından, bir hatanın bir sonraki duruma geçişinde değeri bu aralığın ortalaması olarak alınabilir. Yapılacak tahminlerde oluşacak yeni hata değerleri tahmin modeli geliştirmek için kullanılan serinin hata değerleri alt ve üst limitleri dışında kalıyorsa modelde, parametrelerde, hata terimleri dağılımlarında düzeltme yapılması gerekir. Markov zinciri ile hata düzeltmesi örnek modelden elde edilecek hata alt ve üst limitleri

dahilinde yapılacaktır. Son adımdaki hata adımı, bir sonraki durumda nerede olacak şu an için bilinmediğinden bu işlemler sırasında son hata değeri dikkate alınmayacaktır. Ancak dikkat edilmesi gereken nokta son adımdaki hata değerinin serinin hata değerlerinin alt ve üst limitlerinin içinde olması, bu limitleri belirleyen değer olmamasıdır.

Markov zinciri ile hata terimleri düzeltilirken adımlar çok dar tutulursa bu adımların orta noktasının yeni hata değeri olarak düşünülmesi ekonomik olarak kabul edilebilir. Ancak yutan Markov zinciri oluşmaması veya uygulayıcı tercihi olarak bir başka neden ile hata adımları Markov zinciri için geniş tutulursa ve hata düzeltme sırasında bu aralığın orta noktası GM(1,1) model düzeltmesinde kullanılırsa hata terimi olarak hep aynı değerler kullanılacaktır. Bu aralık içerisinde düzeltmede kullanılacak değer bir başka yöntem ile de incelenecektir.

Markov zinciri ile finansal varlıkların fiyatlarının tespit edilmesi çok yararlı bir çalışma olmaz kanaatindeyim. Çünkü inceleme döneminde fiyatların alt ve üst limiti ileriki dönemlerde muhtemelen değişecektir. Bunun yerine Markov zinciri, hata düzeltme amacı ile kullanılırsa daha uzun süre geçerliliğini koruyacaktır. Zaten ana modelde hata terimlerinin alt ve üst limiti çok kısa sürede geçerliliğini yitiriyorsa model muhtemelen çok iyi değildir.

4. UYGULAMA

4.1. Veriler

01.01.2010-31.12.2015 tarihleri arasında Matriks veri dağıtım şirketinin yayınladığı USD-TRY kurları kapanış değerleri kullanılmıştır. Toplam gözlem sayısı 1565 adettir.

Tablo 2: Gözlem sayıları

Dönem / Yıl	Gözlem sayısı
2010	261
2011	260
2012	261
2013	261
2014	261
2015	261
2010-2015	1565

4.2. Yöntem

Öncelikle 1565 adet, 2010-2015 yılları arası, verinin tamamı ile uygulama yapılacak daha sonra 2011-2015, 2012-2015, 2013-2015, 2014-2015 ve son olarak sadece 2015 yılları verileri kullanılarak kestirim indeksi (p,C) değerleri incelenecektir. En uygun dönem ile bulunacak a,b parametreleri yardımı ile 2016 yılı ilk 3 ay kapanışları tahmin edilecektir. Bu tahminler gerçekleşen değerler ile karşılaştırılacaktır. Yapılan tahminlerde oluşacak hatalar gözlemlendikten sonra hataların frekansları incelenerek günlük hata değişimleri, tahminlerin hataları Markov zinciri ile düzeltilebilecek şekilde frekanslara ayrılacaktır. Bu aşamada hata aralığı farklı fiyat adımlarına göre incelenerek sonuçlar raporlanacaktır. Ayrıca z serisi oluşturulurken Önalın Ö.' nün 2014 yılı çalışmasında ifade edildiği gibi farklı ağırlık, en az hata terimi verecek olan seri ile yapılan tahmin üzerinde, değerleri ile denenecektir.

Tahmin fonksiyonunda artışların ardışık indisler için sabit bir şekilde olacağı söylenmişti. Bu nedenle incelenen fiyat dizisinin artışlarının oranı tahmin artışları ile karşılaştırılacaktır. Getiriler bileşik getiri olarak hesaplanacaktır. $\ln\left(\frac{X_{i+1}^0}{X_i^0}\right)$

Modelin düzeltilmesi için, Markov zincirinde belirtilen şekilde hataların en küçük değeri ile en büyük değeri arasında fiyat adımları oluşturulur ve yapılacak tahminde bir önceki hata durumuna göre modelden çıkacak sonuca hata terimi ilave edilir.

4.3. Deneysel Çalışma

2010-2015 yılları arasındaki veriler ile serinin uygunluğu test edilmiş $\sigma(k)$ değeri [0,9686 - 1,0380] aralığında kalmıştır. Aşağıdaki tabloda 2010-2015 yıl aralığından başlayarak, 2016 yıllık ilk üç ay USD-TRY döviz kuru tahmininde kullanılacak farklı dönemlere ait GM(1,1) modelin, gözlem sayısı, a ve b parametreleri ile C(hata oranı) listelenmiştir.

Tablo 3: Dönemler için a,b parametreleri ve hata oranı

Veri Seti	Gözlem Sayısı	a	b	C
2010-2015	1565	-0,0005	1,3519	0,3141
2011-2015	1304	-0,0005	1,4734	0,3352
2012-2015	1044	-0,0006	1,5805	0,3172
2013-2015	783	-0,0007	1,7097	0,2603
2014-2015	522	-0,0008	1,9864	0,3484
2015	261	-0,0009	2,4304	0,4332

Yukarıdaki tablolarda hata oranı en düşük dönem 2013-2015 yılı aralığı olarak bulunmuştur. 2016 yılı ilk 3 aylık dönem tahmini için kullanılacak dönemler içinden en küçük hata oranına sahip olması nedeni ile tahmin çalışmamızı 2013-2015 yılına ait parametreler ile yapacağız. Bu döneme ait hata oranı 0,2603 kestirim indeks tablosu Tablo 1 değerlerine göre “iyi” kategorisinde yer almaktadır. 2013-2015 ile oluşturulan modelde parametreler, hata terimleri için en küçük kareler yöntemi kullanılarak bulunmuştur.

Tablo 4: Model a,b parametreleri

Veri Seti	Gözlem Sayısı	a	b	$X^{(0)}(1)$
2013-2015	783	-0,0007	1,7097	1,7847

2013-2015 arası döneme ait en düşük, ortalama ve en yüksek artış oranı (% r) aşağıdaki şekildedir. Ayrıca tabloda bu döneme ait tahminlerin artış değerleri de verilmiştir. GM(1,1) model doğal olarak sabit bir artışa sahiptir.

Tablo 5: Modele ve tahmin serisine ait %r artış oranları

% r	Minimum	Ortalama	Maksimum
ORJİNAL FİYAT SERİSİ	-3,1881%	0,0629%	3,3181%

TAHMİN SERİSİ	0,0695%	0,0695%	0,0695%
---------------	---------	---------	---------

Görüldüğü gibi tahmin ile elde edilen seri artış oranı tüm dönem boyunca sabit ve orijinal serinin ortalamasına çok yakındır. İncelenen tüm dönem ve bazı alt dönemler için fiyat serisinin ortalama artışı ve bu döneme ait GM(1,1) modelin tahmin serisinin artışı aşağıda Tablo 6 ile verilmiştir.

r_1 : X^0 serisi günlük artış oranı $(\ln \frac{X_{i+1}^0}{X_i^0})$ ortalaması

r_2 : GM(1,1) model tahmin \hat{X}^0 serisi artış oranı $(\ln \frac{\hat{X}_{i+1}^0}{\hat{X}_i^0})$ ortalaması

Tablo 6: Tüm alt dönemlere ait model ve orijinal seri artış oranı

Dönem	r_1	r_2
2010-2015	0,00042	0,00045
2011-2015	0,00048	0,00048
2012-2015	0,00041	0,00056
2013-2015	0,00062	0,00069
2014-2015	0,00058	0,00078
2013-2014	0,00051	0,00049
2012-2013	0,00007	0,00025
2011-2012	0,00026	0,00029
2010-2011	0,00044	0,00032
2015	0,00086	0,00086
2014	0,00032	0,00015
2013	0,00071	0,00069
2012	-0,00023	0,00003
2011	0,00075	0,00089

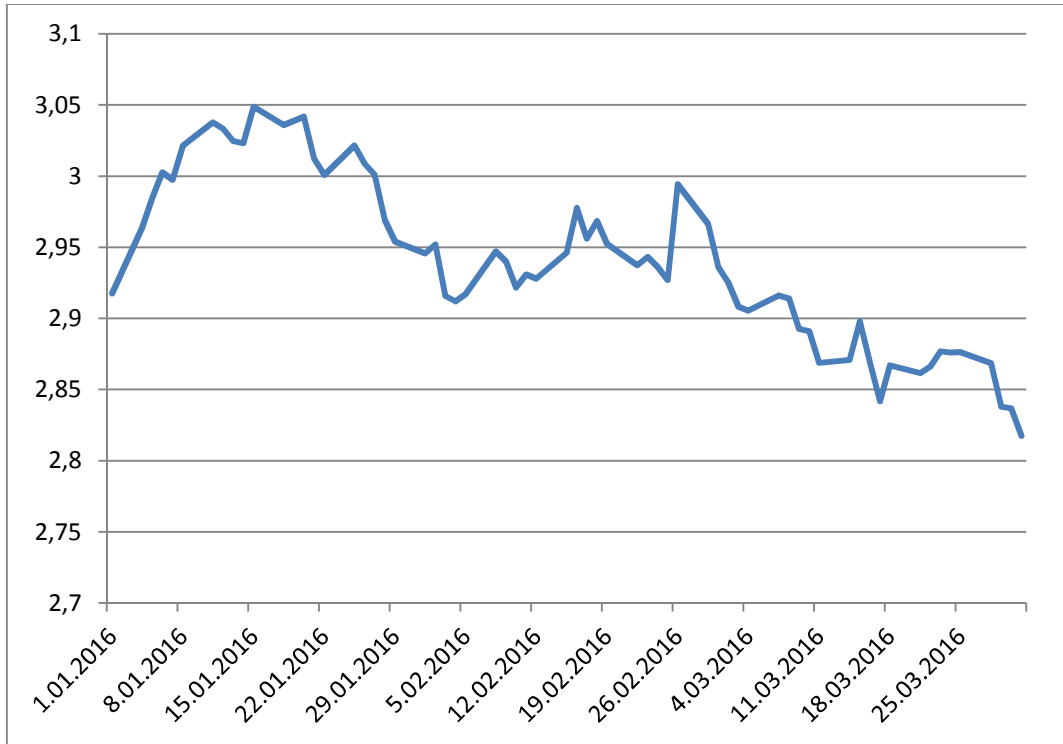
Görüldüğü gibi birçok dönem için GM(1,1) model ile yapılan tahminin artış oranı döneme ait fiyatların ortalama artış oranına çok yakın. Bir yıldan fazla dönem içeren alt dönemler içinde GM(1,1) model tahmin artış oranı ile gerçek fiyatların ortalama artış oranı farklı olduğunda bu dönemin içinde yer alan yıllardan birinde de bu oranlar farklı olmakta. Bir yıldan fazla dönemler için oranları farklılaştıran tek bir yılın varlığı göze çarpmakta. Dönem sayısı yani gözlem sayısı arttıkça, oranları farklılaştıran yılların etkisi azalmakta. Fiyat serisinin ortalama artışı ile GM(1,1) model artış oranı ekonomik olarak ciddi bir farklılık oluşturmamakta. Tahmin yapmak için kullanacağımız 2013-2015 yılı için fiyat artışlarının ortalama oranı 0,00062 ile bu döneme ait GM(1,1) model ile yapılan tahmin artış oranı 0,00069 arasında mutlak değer olarak fark günlük % 0,007 dir.

2011-2015 yılları için, yıl bazında orijinal fiyat serisinin getirilerinin standart sapması %0,46-0,82 arasında değişmektedir. İşin ilginç yanı GM(1,1) model ile yapılan tahmindeki

artış oranının serinin(fiyatların) artış ortalamasına yakın olduğu dönemlerde serinin(fiyatların) standart sapması %10 un üzerinde iken, bu iki ortalamanın çok farklı olduğu yıllarda serinin standart sapması, örneğin 2012 yılı için %2,6 ve 2014 yılı için %6,7 ile % 10 un altında kalmıştır.

2016 yılı ilk 3 ay tahmini için en son gözlem $k=783$ dür. Tahminlerde 01.01.2016 yılın ilk işlem günü işlem k değeri 784 olacak ve her bir işlem günü için $k+i$ şeklinde devam edecektir. Tahmin fonksiyonu a ve b parametreleri ile serinin ilk elemanı $X^{(0)} = 1,7847$ ve değişken olarak k indis değerini içerdiğinden yapılacak tahminler bir gün sonrasına veya 30, 45, 52 gibi ara günlere ve istenildiği kadar ileri bir güne yapılabilir.

Bu parametreler ve k değişkeni ile GM(1,1) model tahmini yapıldığında sonuçlar 01.01.2016-31.03.2016 tarihleri için aşağıda Tablo 7: Gerçek değerler ve GM(1,1) Tahmin verilmiştir. Bu değerler henüz Markov zinciri ile düzeltilmemiş değerlerdir. Gerçek değerler ile modelden tahmin edilen değerlerin farklarının mutlak değerleri incelendiğinde, tahmin dönemi uzadıkça mutlak hatalar artmaktadır.



Şekil 1:01.01.16-31.03.16 USD-TRY kurları

4.4. Farklı λ Değerleri

Önalın'ın çalışmasında (2014) farklı λ değerleri olabileceğinden bahsedilmiş ve özel olarak bu değerlerin 0,50 ağırlıklı ortalaması ile bulunması incelenmişti. Bu çalışmada tercih edilen 2013-2015 dönemine ait değerler λ nın çalışmada kullanılan 0,50 değerinden farklı 4 değer içinde sınanmış hata oranında bir değişim gözlemlenmemiştir. Ayrıca farklı değerler için a parametresi neredeyse hiç değişmemiş b parametresinde çok küçük değişiklikler gözlemlenmiştir. Dolayısıyla GM(1,1) modeli ile USD-TRY kur tahmini λ nın farklı değerlerine duyarlı değildir. 0,99 değeri kullanılarak oluşturulan modelde tahmin hata aralığı

$[-0,2111 , 0,2660]$ iken 0,50 değeri ile oluşturulan modelde bu hatalar $[-0,2102 , 0,2671]$ arasındadır. Bu bilgiler Tablo 8 de verilmiştir.

4.5. Markov Zinciri İle Hata Düzeltme

GM(1,1) model ile 2013-2015 yılları arasında yapılan tahminlerin hata değerleri $[-0,2111 , 0,2660]$ değerleri arasındadır. Hata terimlerinin oto korelasyonları lag 1-10 için Eviews programı ile elde edilerek aşağıda Tablo 9: Hata Terimi gecikmeli değerler korelasyonu verilmiştir. Hataların değeri ile bir önceki değer arasındaki oto korelasyon katsayısı 0,984 ve $R^2 = 0,9682$ değeri ile ekonomik olarak hata terimlerinin bir önceki değeri ile açıklanabileceğini düşünebiliriz. Bu hataların Markov Zinciri olarak nitelenebileceğini gösterir.

Son gün 31.12.2015 tarihli hata teriminin bir sonraki adımını dikkate almadan örnek dönem 2013-2015 için yapılan tahminlerde hata terimleri $[-0.2102 , 0.2671]$ aralığında gerçekleşmişti. Bu aralığı 25 adım için bölersek Markov zinciri geçiş matrisi değerleri Tablo 10: Hata Adımları ile verildiği şekilde olur. Hata adımları 25 adıma bölüdüğü için hata adımlarının birçoğu için, bir sonraki geçişleri yine kendilerine denk gelmekte.

Tablo 7: Gerçek değerler ve GM(1,1) Tahmin

TARİH	GERÇEK DEĞER	GM(1,1) TAHMİN	TARİH	GERÇEK DEĞER	GM(1,1) TAHMİN	TARİH	GERÇEK DEĞER	GM(1,1) TAHMİN
01.01.16	2,9177	2,9486	01.02.16	2,9457	2,9919	01.03.16	2,9361	3,0359
04.01.16	2,9641	2,9507	02.02.16	2,9520	2,9940	02.03.16	2,9254	3,0380
05.01.16	2,9851	2,9527	03.02.16	2,9158	2,9961	03.03.16	2,9083	3,0401
06.01.16	3,0027	2,9548	04.02.16	2,9120	2,9982	04.03.16	2,9056	3,0422
07.01.16	2,9976	2,9568	05.02.16	2,9170	3,0003	07.03.16	2,9162	3,0444
08.01.16	3,0214	2,9589	08.02.16	2,9472	3,0024	08.03.16	2,9141	3,0465
11.01.16	3,0377	2,9609	09.02.16	2,9400	3,0044	09.03.16	2,8928	3,0486
12.01.16	3,0332	2,9630	10.02.16	2,9217	3,0065	10.03.16	2,8912	3,0507
13.01.16	3,0247	2,9650	11.02.16	2,9309	3,0086	11.03.16	2,8689	3,0528
14.01.16	3,0231	2,9671	12.02.16	2,9280	3,0107	14.03.16	2,8709	3,0550
15.01.16	3,0488	2,9692	15.02.16	2,9462	3,0128	15.03.16	2,8981	3,0571
18.01.16	3,0360	2,9712	16.02.16	2,9778	3,0149	16.03.16	2,8697	3,0592
19.01.16	3,0389	2,9733	17.02.16	2,9562	3,0170	17.03.16	2,8420	3,0613
20.01.16	3,0418	2,9754	18.02.16	2,9685	3,0191	18.03.16	2,8672	3,0635
21.01.16	3,0124	2,9774	19.02.16	2,9526	3,0212	21.03.16	2,8618	3,0656
22.01.16	3,0010	2,9795	22.02.16	2,9374	3,0233	22.03.16	2,8664	3,0677
25.01.16	3,0217	2,9816	23.02.16	2,9434	3,0254	23.03.16	2,8769	3,0698
26.01.16	3,0088	2,9836	24.02.16	2,9363	3,0275	24.03.16	2,8761	3,0720
27.01.16	3,0012	2,9857	25.02.16	2,9272	3,0296	25.03.16	2,8764	3,0741
28.01.16	2,9691	2,9878	26.02.16	2,9945	3,0317	28.03.16	2,8687	3,0762
29.01.16	2,9542	2,9899	29.02.16	2,9664	3,0338	29.03.16	2,8380	3,0784

						30.03.16	2,8370	3,0805
						31.03.16	2,8177	3,0827

Tablo 8: Farklı λ Değerleri için a,b parametreleri

λ	a	b
0	-0,0007	1,7102
0,1	-0,0007	1,7102
0,9	-0,0007	1,7092
1	-0,0007	1,7091

Tablo 9: Hata Terimi gecikmeli değerler korelasyonu

Lag	AC
1	0.984
2	0.969
3	0.953
4	0.938
5	0.923
6	0.908
7	0.893
8	0.877
9	0.861
10	0.848

31.12.2015 tarihli örnek verilerde modelden hesaplanan son gün hata değeri -0,0271 dir. Hata adımları için 25 adet değer bazı değerler yer kaplamaması için silinerek aşağıda verilmiştir.

Tablo 10: Hata Adımları

Adım	Alt Limit	Üst Limit
1	-0,2102	-0,1911
2	-0,1911	-0,1720
....
13	0,0189	0,0380
....
...
21	0,1717	0,1908
....
23	0,2099	0,2290
24	0,2290	0,2481
25	0,2481	0,2671

-0,0271 değeri Tablo 10: Hata Adımları'na göre 11.adım aralığına düşmekte. Hata adımlarına uygun hazırlanan Markov zinciri geçiş matrisinde 11.adım için bir sonraki adım olasılığı en yüksek yine 11.adımdır. Bu aralığın orta noktasını bir sonraki tahmine eklersek 2,9486 olarak GM(1,1) model ile tahmin edilen değer Markov zinciri ile düzeltildiğinde 01.01.2016 tarihli USD-TRY kur tahmini 2,9389 olmakta ve hata değeri -0,0212 olarak gerçekleşmekte. Bu hata değeri Tablo 10: Hata Adımları'nda 11.adım olarak gözükmekte ve bu adıma ait bir sonraki geçiş olasılığı en yüksek değeri 11.adım olmakta. 04.01.2016 GM(1,1) model tahmini olan 2,9507 değerine 11.adım aralık ortalama değeri ilave edildiğinde Markov zinciri ile düzeltilmiş USD-TRY değeri 2,9409 ve hata değeri 0,0232 olmakta. Bu şekilde hata aralığı ve bir sonraki geçiş adımı her bir tahmin günü için bulunarak GM(1,1) model ile yapılan tahminlerin Markov zinciri ile düzeltilmiş hali Tablo 11: GM(1,1) Markov zinciri USD-TRY kur tahmini ile verilmiştir. GM(1,1) model ile elde edilen tahminlerin hata aralığı [-0,2650 , 0,0796] iken Markov zinciri ile düzeltilmiş tahmin değerlerinin hata aralığı [-0,1798 , 0,0722] olarak gerçekleşmiştir. Hata aralığı bir miktar daralmasına rağmen çok büyük bir değişiklik olmamıştır. Hata değerleri yüzde olarak ele alınırsa ekonomik olarak kabul edilmesi zor olacak derecede büyük olmaktadır. Hataların bu derece büyük olmasının sebebi 2016 ilk 3 ayı içerisinde USD-TRY döviz kurunun aşağı yönlü bir trend izlemesi, buna karşılık GM modelin monoton artan bir tahminde bulunmasıdır.

Hata adımları eğer 50 aralık değer olarak ayrılrsa ve buna uygun Markov zinciri geçiş matrisi oluşturulursa, bu geçiş matrisinde birbirine yakın olasılıklar çok olacaktır. Tahmin edilecek döneme ait USD-TRY aşağı yönlü trend izlediğinden tahminleri gerçek değere yaklaştıracak düzeltme genelde büyük miktarlarda negatif işaretli hata adımlarının tahmine eklenmesi ile bulunabilir. 50 adıma bölünmüş hata aralığı 23. Adımdan sonra pozitif işaret almaya başlayacaktır. Bu hata adımlarının tahminleri daha büyüteceği açıktır.

4.6. Hata Adımlarına Farklı Bir Bakış

Hataların düzeltilmesi sırasında Markov Zincirinde yer alan hata adımları için geçiş olasılığına göre bir sonraki hata adımında aralığın orta noktası düzeltme terimi olarak kullanılmıştı. Eğer adımlar çok dar tutulup adım sayısı arttırılırsaydı yutan Markov Zinciri ihtimali ortaya çıkardı. Ancak bu durumda bu adımların orta noktası adım alt ve üst limitine yakın olacağından aralık içerisinde hangi değer alınacağı ekonomik olarak çok farklı sonuç ortaya çıkarmazdı. Aralık geniş tutularak küçük sayıda adım ile Markov Zinciri uygulamasında aralığın orta noktası alınarak yapılan düzeltme yerine, bu adımda yer alan her değer gerçekleşme olasılığını eşit kabul ederek uniform dağılıma uygun bir yapı oluşturmak uygun olabilir.

Bu durumda [0 – 1] aralığında rassal bir olasılık değeri üreterek her bir aralıkta hata düzeltme terimi olarak kullanılacak değer uniform dağılımdan çekilecek olursa ve bu işlem 100 kere simüle edilirse ortalama değer yine bu aralığın ortasına yakın olacaktır.

Bu nedenle hata adımlarının orta noktasının hata düzeltme terimi olarak düşünülmesi çok yanlış bir yaklaşım değildir.

Tablo 11: GM(1,1) Markov zinciri USD-TRY kur tahmini

TARİH	GERÇEK DEĞER	GM(1,1) MARKOV	TARİH	GERÇEK DEĞER	GM(1,1) MARKOV	TARİH	GERÇEK DEĞER	GM(1,1) MARKOV
01.01.16	2,9177	2,9007	01.02.16	2,9457	2,9822	01.03.16	2,9361	2,8925
04.01.16	2,9641	2,9409	02.02.16	2,952	2,9461	02.03.16	2,9254	3,0665
05.01.16	2,9851	2,9621	03.02.16	2,9158	2,9864	03.03.16	2,9083	2,8777
06.01.16	3,0027	2,9641	04.02.16	2,9120	2,9121	04.03.16	2,9056	3,0516
07.01.16	2,9976	2,9853	05.02.16	2,9170	2,9905	07.03.16	2,9162	2,8819
08.01.16	3,0214	2,9492	08.02.16	2,9472	2,9163	08.03.16	2,9141	3,0558
11.01.16	3,0377	3,0085	09.02.16	2,9400	3,0138	09.03.16	2,8928	2,8861
12.01.16	3,0332	2,9724	10.02.16	2,9217	2,9204	10.03.16	2,8912	3,0410
13.01.16	3,0247	3,0126	11.02.16	2,9309	2,9989	11.03.16	2,8689	2,8904
14.01.16	3,0231	2,9574	12.02.16	2,9280	2,9246	14.03.16	2,8709	3,0070
15.01.16	3,0488	3,0167	15.02.16	2,9462	3,0031	15.03.16	2,8981	2,8946
18.01.16	3,0360	2,9806	16.02.16	2,9778	2,9479	16.03.16	2,8697	3,0495
19.01.16	3,0389	3,0018	17.02.16	2,9562	3,0264	17.03.16	2,8420	2,8607
20.01.16	3,0418	2,9847	18.02.16	2,9685	2,9330	18.03.16	2,8672	3,0346
21.01.16	3,0124	3,0059	19.02.16	2,9526	3,0306	21.03.16	2,8618	2,8840
22.01.16	3,0010	2,9698	22.02.16	2,9374	2,9181	22.03.16	2,8664	3,0198
25.01.16	3,0217	2,9909	23.02.16	2,9434	3,0348	23.03.16	2,8769	2,8883
26.01.16	3,0088	2,9930	24.02.16	2,9363	2,9223	24.03.16	2,8761	3,0432
27.01.16	3,0012	2,9760	25.02.16	2,9272	3,0199	25.03.16	2,8764	2,8925
28.01.16	2,9691	2,9972	26.02.16	2,9945	2,9265	28.03.16	2,8687	3,0474
29.01.16	2,9542	2,9420	29.02.16	2,9664	3,0814	29.03.16	2,8380	2,8777
						30.03.16	2,8370	3,0135
						31.03.16	2,8177	2,8820

4.7. Kısa ve Yakın Dönem İle Model Oluşturma

“c” hata teriminin küçük olması nedeni ile seçilen 2013-2015 döneminden elde edilen model 2016 yılı ilk üç ayında USD-TRY kurunun aşağı yönlü bir trend izlemesi ve GM(1,1) modelin monoton artan yapısı, tahminlerde göreceli olarak yüksek hataya neden olmuştur. Sadece 2016 ilk iki ayı kullanılarak bir model oluşturulsa c hata terimi 0,8327 gibi yüksek bir rakam çıkmakta. Bu modelin hata aralığı [-0,0958 , 0,0591] olarak gerçekleşmekte. Buna rağmen bu modelden elde edilen parametreler ile 2016 mart ayı USD-TRY tahmini yapılırsa Markov Zinciri ile düzeltilmemiş şekilde tahmin hata değerleri [-0,0717 , 0,0046] arasında gerçekleşmektedir.

2015 yılı USD-TRY kapanış değerleri ile oluşturulan modelde hata terimi “c” 0,4332 olmaktadır. Bu modelin hata terimleri [-0,1707 , 0,2114] değerleri arasında değişmektedir. Bu model ile 2016 ilk üç ayı USD-TRY tahmininde Markov zincir ile düzeltilmeden önceki hata terimleri [-0,4028 , -0,0252] değerleri arasında yer almakta. Bu hata değerleri gerçek değerlere yüzde oran olarak [-%14,30 , -%0,83] arasında değişmektedir.

Aşağıdaki tabloda model için seçilen dönemler(2013-2015, 2015, 2016 ilk iki ay) olmak üzere bu modellerden yapılan tahmin için “c” hata terimi, modele ve tahminlere ait en küçük ve en büyük hata terimleri değer ve yüzde oranları verilmiştir.

Tablo 12: Alt dönemler için c hata katsayısı ve model hataları

MODEL YILI	c	MODEL			
		min ε	maks ε	min % ε	maks % ε
2013-2015	0,2603	-0,2102	0,2671	-9,50%	11,10%
2015	0,4332	-0,1707	0,2114	-7,48%	6,91%
2016 Ocak-Şubat	0,8327	-0,095	0,0591	-3,28%	1,97%

Tablo 13: Modelden elde edilen tahminler için hata değerleri

	TAHMİN			
	min ε	maks ε	min % ε	maks % ε
2013-2015 Model, 2016 ilk üç ay tahmin	-0,2650	0,0796	-9,40%	2,61%
2015 Model, 2016 İlk üç ay tahmin	-0,4028	-0,025	-14,30%	-0,83%
2016 ilk iki ay model, 2016 Mart ayı tahmin	-0,0717	0,0046	-2,55%	0,16%

Görüldüğü gibi “c” hata terimi, 2016 Ocak-2016 Şubat dönemi model için seçildiğinde en yüksek çıkmasına rağmen, modelin ve bu modelden elde edilen parametrelerin yardımı ile yapılan tahminin hata terimleri Markov Zincir yöntem ile düzeltilmeden önce daha küçük değerlere (mutlak değer olarak) sahip olmakta. 2015 yılı ve 2016 ocak-şubat dönemi ile kurulan her iki

modelden elde edilen tahminlerin hatalarının mutlak değerleri her iki dönem içinde tahmin edilen gün uzadıkça artmakta. Benzer bir durumun 2013-2015 döneminden elde edilen tahminler içinde aynı olduğunu ifade etmiştim. Buradan çıkartılacak sonuç; tahmin dönemi uzadıkça hataların mutlak değerleri artmaktadır.

SONUÇ

GM(1,1) model yapısı itibari ile değer azalışı gösteren serilerde tahmin için çok elverişli değildir. 2016 yılı ilk aylarında USD-TRY kurunun azalan trend sergilemesi sabit bir şekilde artan GM(1,1) model ile yapılan tahminde hata teriminin tahmin dönemi arttıkça mutlak değer olarak artmasına neden olmuştur. GM(1,1) model istikrarlı ülke kurları için tahmin amacı ile kullanılamaz. Gelişen ülke kurlarında çeşitli dönemlerde gelişmiş ülke para birimlerine karşı değer kazanma söz konusu olduğundan GM(1,1) modelin kur tahmini için çok elverişli olmadığını söyleyebilirim. Finans alanında birçok varlık fiyatının dalgalı bir seyir izlemesi, değer kazanıp kaybetmesi nedeni ile GM(1,1) model finansal varlık fiyat tahmininde güvenli bir şekilde kullanılamaz.

“c” hata terimi, model seçiminde çok etkili bir kriter olmamıştır. Modelden yapılan tahminlerin hataları dikkate alındığında bu sonuca varabiliriz. Bunun nedeni kısa döneme ait hata teriminin göreceli olarak yüksek çıkmasına rağmen yakın dönemden elde edilen model, son dönemdeki gelişmeleri daha iyi yansıtmakta.

Markov zinciri ile düzletilmeden evvel GM(1,1) modelden yapılan tahminlerin hata değerleri gerçek değerlere yüzde olarak incelendiğinde maksimum %8,99 minimum % -2,65 ve ortalama % 2,49 olarak gerçekleşmiştir. Markov zinciri ile düzeltildiğinde bu rakamlar sırası ile % 6,08 maksimum, % -2,42 minimum ve ortalama % 0,94 olarak gerçekleşmiştir. maksimum ve minimum rakamlar Markov zinciri ile düzeltildiğinde çok değişmemiş ancak ortalama % 1 in altına inmiştir. Günlük hata değerleri ekonomik olarak değerlendirilebilecek bir tahmin yöntemi olmadığını göstermektedir.

GM(1,1) model monoton artan tahmin yapısı ile finansal araçların tahminine çok uygun değildir. Bu tahminin hata düzeltme işlemi ile tekrar gözden geçirilmesi güvenilecek sonuçlar vermemiştir. Bir başka hata düzeltme işlemi farklı sonuçlar verebilir.

Her şeye rağmen GM(1,1) model ile tahmin yapılmak istenirse, model için kullanılacak dönem kısa tutulmalı ve bu modelden yapılacak tahmin süresi bir aylık süreyi geçmemeli. Bu sebeple GM(1,1) modelin uzun dönem tahminlerinde iyi bir sonuç vermeyeceğini söyleyebilirim.

KAYNAKÇA

- ENGEL Charles , 1994 , **Can The Markov switching model forecast exchange rates ?**, Journal Of International Economics 36,151-165
- HSU Li-Chang, 2003, **Applying the Grey Prediction model to the global integrated circuit industry**, Technological Forecasting&Social Change 70(2003) 563-574
- HUI Shurong, YANG Fang, LI Zhenzhen, LIU Qiang, DONG Jianguo, 2009, **Application Of Grey System Theory To Forecast The Growth Of Larch**, International Journals Of Information And Systems Sciences, Volume 5, Number 3-4, Pages 522-527
- İLARSLAN Kenan, 2014, **Hisse Senedi Fiyat Hareketlerinin Tahmin Edilmesinde Markov Zincirlerinin Kullanılması:İMKB 10 Bankacılık Endeksi İşletmeleri Üzerine Ampirik Bir Çalışma** , Journal of Yasar University
- JULONG Deng, 1988, **The Journal Of Grey System-Introduction to Grey System Theory**, Sci-tech Information Services
- KAYACAN Erdal, ULUTAŞ Barış, KAYNAK Okyay ,2010, **Grey system theory-based models in time series prediction** , Expert Systems with Application 371784-1789
- MOSTAFAEİ Hamidreza, KONRDNOORİ Shaghayegh, OSTADRAHİMİ Mohammadmohsen, 2011, **Modelling The Fluctuations of Brent Oil Prices by a Probabilistic Markov Chain**, Journal of Computations&Modelling, vol.1, no.2, 17-26, International Scientific Press
- ÖNALAN Ömer, 2014, **Currency Exchange Rate Estimation Using The Grey Markov Prediction Model**, Journal of Economics, Finance and Accounting, volume:1 issue:3
- ÖZDAĞOĞLU Aşkın, ÖZDAĞOĞLU Güzin, KURT GÜMÜŞ Gülüzar, 2012, **Altın Fiyatındaki Dağılımların Markov Zinciri ile Analizi:Uzun Erimli Olasılıklar**, Erciyes Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi, sayı 40, Haziran Aralık,ss 119-142
- ZHANG Yinpeng, 2010, **Predicting Model of Traffic Volume Based On Grey-Markov**, Modern Applied Science, vol.4, No.3
- XUERUI Zheng, 2015, **The Application of Grey Relational Method on Well Productivity Prediction**, Electronic Journal of geotechnical Engineering Vol.20, Bund.7