

Ters Weibull Dağılımında Parametre Tahmin Yöntemlerinin Karşılaştırılması Üzerine Bir Simülasyon Çalışması

İdil Büşra KUTLU¹, Esin KÖKSAL BABACAN^{2*}

Öz

Yaşam süresi verilerini analiz etmek için uygun bir model olan Ters Weibull dağılımı, faydalı ömür ve yıpranma periyotları gibi çeşitli özellikleri modellemek için kullanılabilir. Farklı birçok alanda uygulama olanağına sahip olması nedeniyle, Ters Weibull dağılımının parametrelerinin etkin bir şekilde tahmin edilmesi önemlidir. Ters Weibull dağılımının parametrelerini tahmin etmek için genellikle; en küçük kareler, en çok olabilirlik ve Bayes tahmin yöntemleri kullanılmaktadır. Bayes tahmin yönteminde klasik yaklaşımdan farklı olarak parametreler de birer rasgele değişken olarak düşünülür. Bu nedenle parametrelerin de kendilerine ait dağılımları vardır. Önsel dağılım olarak bilinen bu dağılımlar örneklem bilgisi ile güncellenerek sonsal dağılımlar elde edilir ve parametreye ilişkin tüm çıkarımlar bu sonsal dağılım kullanılarak yapılır. Fakat uygulamalarda sonsal dağılımın hesaplanmasında bazı zorluklarla karşılaşılır. Bu gibi durumlarda sonuç çıkarımı yapabilmek için sayısal integrasyon yöntemleri veya Markov Zinciri Monte Carlo yöntemleri olarak bilinen simülasyon yöntemleri kullanılır. Bu çalışmada, Ters Weibull dağılımının parametrelerini tahmin etmek için kullanılan yöntemler incelenmiş ve yapılan simülasyon çalışması ile bu yöntemler karşılaştırılmıştır. Tahmin yöntemlerini karşılaştırmak için hata kareler ortalaması, kök hata kareler ortalaması ve ortalama mutlak hata ölçütleri kullanılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Ters Weibull Dağılımı, Bayes Tahmin edicisi, Lindley yaklaşımı, Monte Carlo simülasyonu.

A Simulation Study on Comparison of Parameter Estimation Methods for Inverse Weibull Distribution

Abstract

The Inverse Weibull distribution, which is an appropriate model for analyzing lifespan data, can be used to model various characteristics such as useful life and depreciation periods. Due to its applicability in many different fields, it is important to effectively estimate the parameters of the Inverse Weibull distribution. Commonly used methods for estimating the parameters of the Inverse Weibull distribution include least squares, maximum likelihood, and Bayesian estimation methods. In the Bayesian estimation method, unlike classical approaches, parameters are also considered as random variables. Therefore, these parameters have their own distributions, known as prior distributions. These distributions are updated with sample information to obtain posterior distributions, and all inferences about the parameters are made using this posterior distribution. However, in applications, there are some challenges in calculating the posterior distribution. In such cases, numerical integration methods or simulation methods known as Markov Chain Monte Carlo methods are used to make inferences. In this study, the methods used to estimate the parameters of the Inverse Weibull distribution are examined, and these methods are compared through a simulation study. To compare the forecasting methods, mean squared error, root mean squared error, and mean absolute error metrics have been used.

Keywords: Inverse Weibull distribution, bayes estimator, lindley approximation, Monte Carlo simulation.

¹Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik ABD, 06100, Ankara, Türkiye, idal.kutlu@yahoo.com

²Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, 06100, Ankara, Türkiye, ekoksal@science.ankara.edu.tr

*Sorumlu Yazar/Corresponding Author

1. Giriş

Weibull dağılımı, İsveçli fizikçi Waloddi Weibull'un adını taşıyan yaygın kullanıma sahip bir dağılımdır. Weibull bu dağılımı, malzemelerin kırılma mukavemetini analiz etmek için 1939 yılında bulmuş ve uygulamıştır (Weibull, W., 1951). O zamandan beri, güvenilirlik mühendisliğinde yaşam süresi verilerini analiz etmek için yaygın olarak kullanılmaktadır. Havacılık, elektronik, malzeme ve otomotiv endüstrilerinde birçok örneği bulunabilir. Ayrıca güvenilirlik mühendisliğinde ve yaşam süresi analizinde Gamma ve Log normal dağılıma alternatif olarak kullanılabilir. Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu, dağılımın parametrelerinin şekline bağlı olarak artabilir, azalabilir veya hiç değişmeyebilir. Veriler monoton olmayan bir risk fonksiyonunu gösteriyorsa, Weibull dağılımının kullanımı uygun değildir. Kundu ve Howlader, 2010 yılında yaptıkları çalışmalarında Ters Weibull dağılımının bu tür verileri analiz etmek için uygun bir model olacağını belirtmişlerdir (Kundu ve Howlader, 2010). Ters Weibull dağılımı da, Weibull dağılımı gibi, yaşam süreli veri analizi, güvenilirlik analizi ve mühendislik alanındaki istatistiksel modellerde yaygın bir kullanıma sahiptir. Şekil parametresinin aldığı değere göre zaman zaman Ters Rayleigh ve Ters Üstel dağılımlara benzerlik gösteren Ters Weibull dağılımı, arıza oranları ile ilgili veri setleri için oluşturulacak modellerde yaygın bir kullanıma sahiptir. Ters Weibull dağılımına sahip X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \alpha \lambda x^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda x^{-\alpha}}, x > 0; \alpha, \lambda > 0. \quad (1)$$

ile verilir. X 'in dağılım fonksiyonu ise,

$$F(x) = e^{-\lambda x^{-\alpha}}, x > 0 \quad (2)$$

biçimindedir. Burada; α şekil, λ ise ölçek parametresidir (Yao ve ark., 2011). Beklenen değer ve varyans,

$$E(X) = \lambda^{\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \quad (3)$$

$$Var(X) = \lambda^{\frac{2}{\alpha}} \left(\Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) - \left(\Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right)^2 \right) \quad (4)$$

biçiminde ifade edilir. (1) ve (2)'den güvenilirlik ve hazard fonksiyonları,

$$R(x) = 1 - e^{-\lambda x^{-\alpha}}, x \geq 0, \alpha, \lambda > 0 \quad (5)$$

$$H(x) = \frac{\lambda \alpha^{-\alpha-1} e^{-\lambda x^{-\alpha}}}{1 - e^{-\lambda x^{-\alpha}}}, x \geq 0, \alpha, \lambda > 0 \quad (6)$$

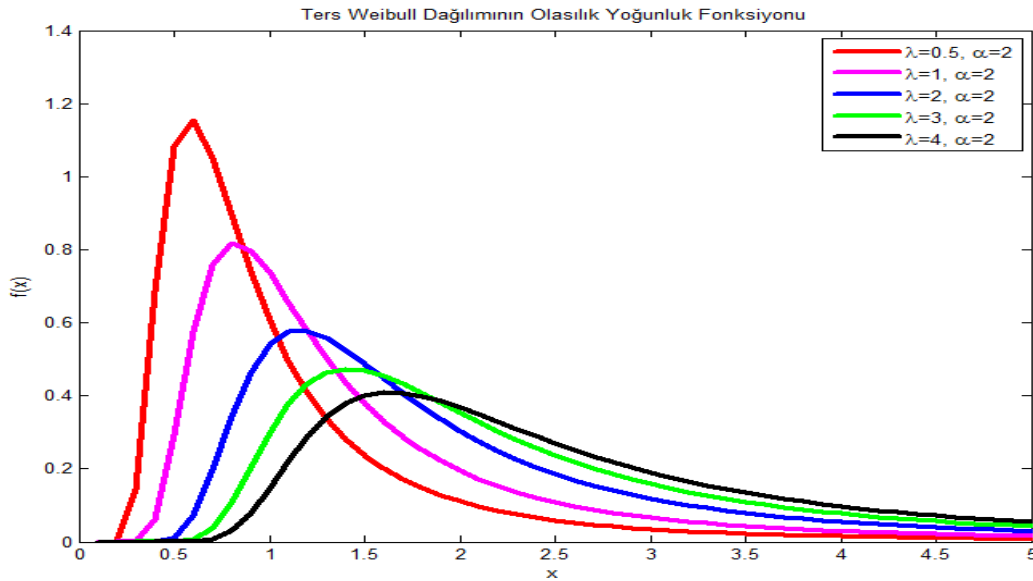
biçiminde yazılabilir (Sultan, 2008).

Ters Weibull dağılımının parametrelerinden birisi şekil parametresidir. Şekil parametresi, grafik yönteminde elde edilen regresyon doğrusunun eğimine eşittir. Bu nedenle, eğim olarak da bilinir. Eğim, 0 ile 1 arasında bir değer aldığından, yani $0 < \alpha < 1$ olduğunda, başarısızlık oranları zaman içinde artmaktadır. $\alpha=1$ olduğunda dağılımın Ters Üstel dağılım ile; $\alpha=2$ olduğunda ise Ters Rayleigh dağılımı ile aynı olduğu söylenebilir (Khan, S.M. and et. al.,2008). Bu ilişkiler aşağıdaki Tablo 1 ile verilmiştir.

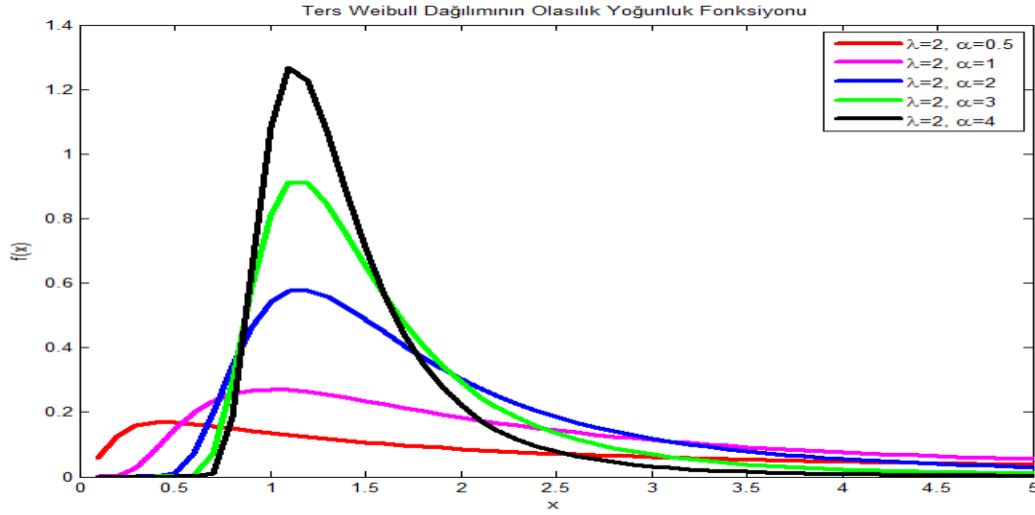
Tablo 1. Ters Weibull ile ilişkili dağılımlar

Dağılım	α :şekil, λ : ölçek parametresi	Özellikler
Ters Weibull	α, λ	Genel form, yıpranma ve güvenilirlik analizi.
Ters Rayleigh	$\alpha = 2, \lambda$	Ters Weibull'un özel durumu, ilk başarısızlık süresi.
Ters Üstel	$\alpha = 1, \lambda$	Ters Weibull'un özel durumu, basit olaylar için.

Dağılımın diğer bir parametresi olan ölçek parametresi zaman içeren birimlere sahiptir. Şekil parametresi sabit olduğunda, ölçek parametresinin değeri artarsa, dağılımın basıklığı artar, buna paralel olarak yüksekliği azalır. Ölçek parametresinin değeri azaldığında, dağılımın yüksekliği artar dolayısıyla daha sivri uçlu olur. Şekil ve ölçek parametrelerinin değişimine göre Ters Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki grafiklerde verilmiştir.



Şekil 1. Şekil parametresi sabitken ölçek parametresinin farklı değerleri için Ters Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu



Şekil 2. Ölçek parametresi sabitken şekil parametresinin farklı değerleri için Ters Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

Klasik ve Bayes yaklaşımları kullanılarak Ters Weibull dağılımı üzerinde çeşitli araştırmalar yapılmıştır. Johnson ve arkadaşları (1994) tarafından, Frechet dağılımı olarak adlandırılan Ters Weibull dağılımının hazard fonksiyonu, Log-Normal ve Ters Gauss dağılımlarına benzerdir (Murthy ve ark., 2004). Carriere, 1992 yılında yaptığı çalışmada, bir popülasyonun ölüm oranı eğrisini modellemek için Ters Weibull dağılımını kullanmıştır. Keller ve Kamath, 1982 yılında yaptıkları çalışmada bu dağılımın, pistonlar, krank milleri ve ana yataklar gibi dizel motorlarının mekanik parçalarındaki bozulma olaylarını modellemek için uygun olduğunu ileri sürmüşlerdir. Erto, 1986 yılında yaptığı çalışmada, Ters Weibull dağılımının, sabit bir gerilimin etkisine maruz kalan bir yalıtım sıvısının parçalanması gibi birçok veriye iyi uyum sağladığını göstermiştir (Nelson, 1982). Calabria ve Pulcini, 1990 yılında yaptıkları çalışmada, Ters Weibull dağılımının en çok olabilirlik tahminlerini ve güvenilirliğini, tam ve sağdan sansürlü veriler için analiz etmişlerdir. Monte Carlo simülasyonu ile bu tahmin edicilerin istatistiksel özellikleri ile en küçük kareler tahminlerini karşılaştırmışlardır. Yine, Calabria ve Pulcini, 1994 yılında yaptıkları çalışmada, Ters Weibull dağılımının, mekanik bozulma olaylarını tanımlamak için uygun bir model olduğunu ileri sürmüşlerdir. Çalışmada, Ters Weibull dağılımının güvenilirliği olarak ifade edilen $R(t)$ 'nin, en çok olabilirlik tahmin edicisinin istatistiksel özellikleri incelenmiştir. Khan ve arkadaşları, 2008 yılında yaptıkları çalışmada, farklı dağılımlara yaklaşan Ters Weibull dağılımının esnekliğini göstermişler ve simülasyon analizi ile şekil, ölçek parametreleri gibi ilgili parametreleri karşılaştırmışlardır. Sultan (2008), sıra istatistiklerini kullanarak, yalnızca şekil parametresinin bilindiği ve hem şekil hem ölçek parametresinin bilinmediği iki farklı durum için, en çok olabilirlik yöntemi başta olmak üzere farklı tahmin yöntemleri ve farklı kayıp fonksiyonları altında Ters Weibull dağılım parametrelerini elde etmiş ve karşılaştırmıştır. Sultan (2010), Ters Weibull dağılımından düşük kayıt değerlerini kullanarak, yalnızca şekil parametresinin bilindiği ve hem şekil hem ölçek parametresinin bilinmediği

iki farklı durum için farklı tahmin yöntemleri geliştirilmesi üzerinde durmuştur. Yao ve arkadaşları (2011), entropi kayıp fonksiyonu altında parametrelerin E-Bayes ve ampirik Bayes tahminlerini elde etmişler ve tahminlerin hata kareler ortalamalarını Monte Carlo simülasyon yöntemi ile karşılaştırmışlardır. Ellah (2012), genelleştirilmiş sıra istatistikleri kavramını, farklı yorumlara sahip çeşitli sıralı rasgele değişken modellerine birleşik bir yaklaşım olarak tanıtmıştır. Kundu ve arkadaşları (2013), ilerleyen tür 2. tip sansürlü veriye dayanan iki parametrelili bir Ters Weibull dağılımının bilinmeyen parametrelerinin istatistiksel çıkarımını ele almışlardır. Singh ve Sharma (2013), 2.tip hibrid sansürlü veriler altında Ters Weibull dağılım parametrelerinin tahmini için Bayes yaklaşımını ele almışlar ve parametreler için en yüksek sonsal yoğunluklu güvenilirlik aralıklarını oluşturmuşlardır. Singh ve Kumar (2013), tam veri durumu ile 1.tip ve 2.tip sansürlü veriler için, genel entropi ve hata kareler kayıp fonksiyonları altında Ters Weibull dağılım parametrelerinin Bayes tahmin edicilerini elde etmişlerdir. Yahgmaei ve arkadaşları (2013), hata kareler, entropi ve precautionary kayıp fonksiyonları altında, yarı karesel, gamma ve düzgün dağılım olmak üzere üç farklı önsel dağılım belirleyerek, Ters Weibull dağılımına ait ölçek parametresinin Bayes tahmin edicilerini elde etmişlerdir. Baldawi ve arkadaşları (2014), Ters Weibull dağılımının ölçek parametresinin Bayes tahminlerini yarı karesel kayıp fonksiyonu ve üstel kayıp fonksiyonu altında elde etmişlerdir. Elshahat ve Ismail (2014), Ters Weibull dağılımının yeni bir formunun bilinmeyen parametrelerini “yarı olabilirlik” yöntemi ile tahmin etmiş ve önerilen yarı olabilirlik tahmin edicilerini en çok olabilirlik tahmin edicileriyle karşılaştırmak için bir simülasyon çalışması yapmışlardır. Mudasar ve arkadaşları (2015), Linex ve karesel olmak üzere, iki farklı kayıp fonksiyonu altında Ters Weibull dağılımının ölçek parametresinin Bayes tahmin edicileri ile bu tahmin edicilerin risk fonksiyonlarını elde etmişlerdir. Chiodo ve arkadaşları (2015), tipik rüzgar hızı verileriyle ilgili büyük bir sayısal simülasyon setini kullanarak, Bayes tahmin edicilerinin verimliliği için Gumbel dağılımını alternatif bir aşırı değer modeli olarak kabul etmişlerdir. Çalışmada özellikle, tahmin edilen rüzgar hızının, olasılık dağılımlarından ayrılımlarına ilişkin tahminlerin sağlamlığı üzerinde durmuşlardır. Ahmad ve arkadaşları (2015), Ters Weibull dağılımının ölçek parametresini tahmin etmek için, üç farklı kayıp fonksiyonu altında Jeffrey’s ve Quasi önsellerini kullanmışlardır. Loganathan ve Uma (2017), iki parametrelili Ters Weibull dağılımı için farklı yöntemler kullanarak parametre tahmini yapmışlardır. Fisher bilgi matrisini kullanarak en çok olabilirlik, en küçük kareler, moment tahminlerini elde etmişler ve bu tahminleri hata kareler ortalaması ölçütünü kullanarak simülasyon yöntemiyle karşılaştırmışlardır.

Vishwakarma ve arkadaşları (2018), ilerleyen tür ikinci tip sansürlü gözlemler olması durumunda Ters Weibull dağılımının parametrelerini en çok olabilirlik yöntemi ve Bayesci yöntemle tahmin etmişlerdir. Bayes sonuç çıkarımı için hata kareler ortalaması kayıp fonksiyonu altında MZMC yöntemlerinden Metropolis-Hasting algoritmasını uygulamışlardır. Tahmin performanslarını

Monte Carlo simülasyon çalışması ile karşılaştırmışlar, daha sonra gerçek veri seti üzerinde bir uygulama çalışması yapmışlardır (Vishwakarma ve arkadaşları, 2018). Algarni ve arkadaşları (2020), Ters Weibull dağılımının üç parametreliliği önermişler ve önerdikleri bu yeni dağılımda tahmin performanslarını karşılaştırmak için Monte Carlo simülasyon çalışması yapmışlardır. Algarni ve arkadaşları (2021), ilerleyen tür ikinci tip sansürlü veri durumunda Ters Weibull dağılımının parametrelerini en çok olabilirlik yöntemi ve Bayesci yöntemlerden Lindley yaklaşımı ve Metropolis-Hasting algoritması kullanarak tahmin etmiş ve tahmin performanslarını hata kareler ortalaması ölçütüne göre karşılaştırmışlardır. Gül (2023), Unit Weibull dağılımının parametrelerini tahmin etmek için yedi farklı tahmin yöntemi kullanmış ve yöntemlerin performanslarını yan ve hata kare ortalaması aracılığıyla karşılaştırmak için kapsamlı bir Monte Carlo simülasyon çalışması yapmıştır. Köksal Babacan (2024), Ters Weibull dağılımının ölçek parametresini tahmin etmek için Bayes tahmin yöntemini kullanmış ve farklı kayıp fonksiyonları altındaki tahmin performanslarını Monte Carlo simülasyonu ile karşılaştırmıştır.

2. Ters Weibull Dağılımının Parametrelerinin Tahmini

Günümüzde arıza oranları ile ilişkili verilerin analizinde sıkça kullanılan Ters Weibull olasılık dağılımı, genellikle iki parametreliliği logaritmik bir model içerir. Ters Weibull olasılık dağılımının parametrelerinin tahmininde değişik yöntemler kullanılabilir. Bu yöntemlerden; grafik yöntemi, en küçük kareler yöntemi, en çok olabilirlik yöntemi ve momentler yöntemi en sık kullanılanlar arasındadır. Dağılımın uygulamadaki başarısı, parametre tahminlerinin iyi yapılmasına bağlıdır.

2.1. En Küçük Kareler Yöntemi ile Ters Weibull dağılımının parametrelerinin tahmini

$X_1, X_2, \dots, X_n$ Ters Weibull dağılımından alınan rasgele bir örneklem olmak üzere, birikimli dağılım fonksiyonunun her iki tarafının logaritması alınarak

$$\ln[-\ln F(X)] = \ln \lambda - \alpha \ln x \quad (7)$$

biçiminde bir fonksiyona dönüştürülür. Burada, $Y = \ln[-\ln F(X)]$, $X = \ln x$, $\beta_1 = -\alpha$, $\beta_0 = \ln \lambda$ dönüşümleri kullanılarak eşitlik

$$Y = \beta_1 X + \beta_0 \quad (8)$$

biçiminde lineer olarak yazılabilir. $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ ile $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele örnekleminin sıra istatistikleri gösterilsin. $i = 1, 2, \dots, n$ için, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 'lerin (i) . en küçük sıra istatistiği $X_{(i)}$ 'dir.

Ortalama aralığı (mean rank), birikimli dağılım fonksiyonu $F(x)$ 'in değerlerini tahmin etmek için kullanılır,

$$\hat{F}(x_{(i)}) = \frac{i}{n+1}. \quad (9)$$

Son olarak, hata kareler toplamı minimize edilerek, β_0 ve β_1 regresyon parametreleri belirlenir.

$$Q(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 \ln x_{(i)})^2 \quad (10)$$

β_0 ve β_1 'i tahmin etmek için, Q 'nun sırasıyla β_0 ve β_1 'e göre kısmi türevi alınarak

$$\frac{dQ}{d\beta_0} = 0 \text{ ve } \frac{dQ}{d\beta_1} = 0 \quad (11)$$

biçiminde sıfıra eşitlenir. Buradan, β_0 ve β_1 'in tahminleri, $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n \ln x_{(i)} \ln[-\ln \hat{F}(x_{(i)})] - \sum_{i=1}^n \ln x_{(i)} \sum_{i=1}^n \ln[-\ln \hat{F}(x_{(i)})]}{n \sum_{i=1}^n \ln^2 x_{(i)} - (\sum_{i=1}^n \ln x_{(i)})^2} \quad (12)$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln[-\ln \hat{F}(x_{(i)})] + \hat{\alpha} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_{(i)} \quad (13)$$

biçiminde elde edilir. Buna göre, λ ve α 'nın tahmin edicileri $\hat{\lambda}$ ve $\hat{\alpha}$

$$\hat{\alpha} = \frac{n \sum_{i=1}^n \ln x_{(i)} \ln[-\ln \hat{F}(x_{(i)})] - \sum_{i=1}^n \ln x_{(i)} \sum_{i=1}^n \ln[-\ln \hat{F}(x_{(i)})]}{n \sum_{i=1}^n \ln^2 x_{(i)} - (\sum_{i=1}^n \ln x_{(i)})^2} \quad (14)$$

$$\hat{\lambda} = \exp \left[\sum_{i=1}^n \ln[-\ln \hat{F}(x_{(i)})] + \hat{\alpha} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_{(i)} \right] \quad (15)$$

olarak yazılabilir (Loganathan ve Uma, 2017).

2.2. En Çok Olabilirlik Yöntemi ile Ters Weibull dağılımının parametrelerinin tahmini

$X_1, X_2, \dots, X_n$ Ters Weibull dağılımından alınan n birimlik bir örneklem olmak üzere olabilirlik fonksiyonu

$$L(\lambda, \alpha) = \alpha^n \lambda^n \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda (\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha})} \quad (16)$$

biçiminde yazılır. Olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınır;

$$l(\alpha, \lambda | x) = n \log \alpha + n \log \lambda - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \quad (17)$$

elde edilir. $l(\alpha, \lambda | x)$ 'nin α ve λ 'ya göre 1.dereceden kısmi türevleri alınarak sıfıra eşitlendiğinde;

$$\frac{dl(\alpha, \lambda | x)}{d\alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \log(1/x_i) = 0 \quad (18)$$

$$\frac{dl(\alpha, \lambda | x)}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} = 0 \quad (19)$$

olur. λ parametresinin tahmin edicisi $\hat{\lambda}$ ve α parametresinin tahmin edicisi $\hat{\alpha}$ yı hesaplamak için sayısal yöntemler uygulanabilir (Loganathan ve Uma, 2017). Çalışma kapsamında parametre tahminlerini elde etmek için çok değişkenli durumda kullanılan Newton-Raphson yöntemi kullanılmıştır.

2.3 Bayesci Yöntemle Ters Weibull dağılımının parametrelerinin tahmini

$X_1, X_2, \dots, X_n$ Ters Weibull dağılımından alınan n birimlik bir örneklem olmak üzere (16) ve (17) ile verilen olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonları göz önüne alınsın. Bayes analizinde, ilgilenilen parametrenin, belirli önsel dağılıma sahip rasgele bir değişken olduğu düşünülür. Önsel dağılım parametreleri hiper-parametre olarak adlandırılır. Önsel dağılımın seçimi genellikle mevcut olan önsel bilgilerin türüne dayanır. Bu nedenle seçilen önsel ailesi, hiper-parametrelerin hesaplanmasında kolaylık sağlaması amacıyla esnek olmalıdır. Pratikteki pek çok problemde, verilen varyans ile parametrenin beklenen değeri kavramı, beklenen değere olan güveni gösterir. Yani, seçilen önselin varyansının küçük bir değer olması, beklenen değere olan güveni artırırken; varyansın büyük bir değer olması beklenen değere olan güveni azaltır. Bunun yanı sıra, önselin seçimi, matematiksel manipülasyonları da kolaylaştıran bir husustur. Bu noktalar göz önünde bulundurularak, burada α ve λ parametreleri için önsel dağılım olarak bağımsız Gamma dağılımları alınmıştır. Buna göre,

$$g_1(\alpha) = \frac{p_1^{q_1}}{\Gamma(q_1)} e^{-p_1 \alpha} \alpha^{q_1-1} \quad (20)$$

$$g_2(\lambda) = \frac{p_2^{q_2}}{\Gamma(q_2)} e^{-p_2 \lambda} \lambda^{q_2-1} \quad (21)$$

olmak üzere ortak önsel olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(\alpha, \lambda) = \frac{p_1^{q_1} p_2^{q_2}}{\Gamma(q_1) \Gamma(q_2)} \alpha^{q_1-1} \lambda^{q_2-1} \exp(-p_1 \alpha - p_2 \lambda), \alpha > 0, \lambda > 0 \quad (22)$$

biçiminde elde edilmiştir. Bayes tahmin edicilerini elde edebilmek için ilk olarak olabilirlik fonksiyonu ile önsel dağılımlar çarpımı

$$\begin{aligned}\pi(\alpha, \lambda, x) &= L(x|\lambda, \alpha) \cdot g_1(\alpha) \cdot g_2(\lambda) \\ &= \alpha^n \lambda^n \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha})} \frac{p_1^{q_1} p_2^{q_2}}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \alpha^{q_1-1} \lambda^{q_2-1} \exp(-p_1\alpha - p_2\lambda)\end{aligned}\quad (23)$$

ve daha sonra her iki parametreye göre integral alınarak X 'in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \iint \pi(\alpha, \lambda|x) d\alpha d\lambda \\ &= \iint \alpha^n \lambda^n \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha})} \frac{p_1^{q_1} p_2^{q_2}}{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)} \alpha^{q_1-1} \lambda^{q_2-1} \exp(-p_1\alpha - p_2\lambda) d\alpha d\lambda\end{aligned}\quad (24)$$

biçiminde elde edilmiştir. Daha sonra olabilirlik fonksiyonu marjinal fonksiyona oranlanarak iki parametre için ortak sonsal olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned}\pi(\alpha, \lambda|x) &= \frac{\pi(\alpha, \lambda, x)}{\pi(x)} \\ &= \frac{\alpha^{n+q_1-1} \lambda^{n+q_2-1} \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}) - p_1\alpha - p_2\lambda}}{\iint \alpha^{n+q_1-1} \lambda^{n+q_2-1} \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}) - p_1\alpha - p_2\lambda} d\alpha d\lambda}\end{aligned}\quad (25)$$

olarak elde edilmiştir. Parametrelere ilişkin sonsal marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını elde etmek için sırayla parametrelere göre integral alınmış ve marjinal sonsal olasılık yoğunluk fonksiyonları

$$\begin{aligned}\pi_1(\lambda|x) &= \int \pi(\alpha, \lambda|x) d\alpha \\ &= \lambda^{n+q_2-1} e^{-p_2\lambda} \int \frac{\alpha^{n+q_1-1} \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}) - p_1\alpha}}{\iint \alpha^{n+q_1-1} \lambda^{n+q_2-1} \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}) - p_1\alpha - p_2\lambda} d\alpha d\lambda} d\alpha\end{aligned}\quad (26)$$

$$\begin{aligned}\pi_2(\alpha|x) &= \int \pi(\alpha, \lambda|x) d\lambda \\ &= \alpha^{n+q_1-1} \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-p_1\alpha} \int \frac{e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}) - p_2\lambda} \lambda^{n+q_2-1}}{\iint \alpha^{n+q_1-1} \lambda^{n+q_2-1} \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}) - p_1\alpha - p_2\lambda} d\alpha d\lambda} d\lambda\end{aligned}\quad (27)$$

olarak elde edilmiştir. Karesel hata kayıp fonksiyonu altında aranan tahmin ediciler bu dağılımların beklenen değerleri olacaktır. Buna göre beklenen değerler

$$\hat{\alpha} = E(\alpha) = \int \alpha \pi_2(\alpha|x) d\alpha$$

$$\hat{\alpha} = \int \alpha^{n+q_1} \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-p_1 \alpha} \int \frac{e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}) - p_2 \lambda} \lambda^{n+q_2-1}}{\iint \alpha^{n+q_1-1} \lambda^{n+q_2-1} \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}) - p_1 \alpha - p_2 \lambda} d\alpha d\lambda} d\lambda d\alpha \quad (28)$$

$$\hat{\lambda} = E(\lambda) = \int \lambda \pi_1(\lambda|x) d\lambda$$

$$\hat{\lambda} = \int \lambda^{n+q_2} e^{-p_2 \lambda} \int \frac{\alpha^{n+q_1-1} \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}) - p_1 \alpha}}{\iint \alpha^{n+q_1-1} \lambda^{n+q_2-1} \prod_{i=1}^n x_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}) - p_1 \alpha - p_2 \lambda} d\alpha d\lambda} d\alpha d\lambda \quad (29)$$

ile hesaplanır. Tahmin edicileri bulabilmek için yukarıdaki integraller analitik olarak hesaplanamadığından ya nümerik integrasyon yöntemlerine ya da Markov Zinciri Monte Carlo (MZMC) olarak isimlendirilen simülasyon yöntemlerine ihtiyaç duyulur. İlk olarak, Bayes tahmin edicilerini elde edebilmek için Lindley tarafından önerilen yaklaşım kullanılmıştır (Lindley, 1980).

2.3.1 Lindley yaklaşımı ile Ters Weibull dağılımının parametrelerinin tahmini

Lindley, n 'nin yeterince büyük olması durumunda çok parametrelili dağılımlarda zorlanılan integrallerin yaklaşık çözümüne ilişkin olarak Lindley yaklaşımını önermiştir (Lindley, 1980). Bu kısımda, Lindley yaklaşımı kullanılarak Ters Weibull dağılımının parametreleri için Lindley tahmin edicileri elde edilmiştir. Her iki parametre için de önsel dağılım birbirinden bağımsız Gamma dağılımı olarak alındığında ortak önsel olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$g(\alpha, \lambda) = \frac{p_1^{q_1} p_2^{q_2}}{\Gamma(q_1) \Gamma(q_2)} \alpha^{q_1-1} \lambda^{q_2-1} \exp(-p_1 \alpha - p_2 \lambda), \alpha > 0, \lambda > 0 \quad (30)$$

biçiminde olur. Bu fonksiyonun logaritması alındığında,

$$\begin{aligned} G(\alpha, \lambda) &= \log g(\alpha, \lambda) \\ &= q_1 \log p_1 + q_2 \log p_2 - \log \Gamma(q_1) - \log \Gamma(q_2) + (q_1 - 1) \log \alpha + (q_2 - 1) \log \lambda \end{aligned} \quad (31)$$

elde edilir. Bu fonksiyonun sırasıyla α ve λ 'ya göre türevleri alınır,

$$g_1 = \frac{dG(\alpha, \lambda)}{d\alpha} = \frac{q_1 - 1}{\alpha} - p_1 \quad (32)$$

$$g_2 = \frac{dG(\alpha, \lambda)}{d\lambda} = \frac{q_2 - 1}{\lambda} - p_2 \quad (33)$$

olur. Buradan, Lindley yöntemi uygulanarak aşağıdaki işlemler yapılmış ve parametreler için Bayes tahmin edicileri elde edilmiştir.

$$L_1 = \frac{d \log L(\alpha, \lambda)}{d\alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i) \quad (34)$$

$$L_{12} = \frac{d^2 \log L(\alpha, \lambda)}{d\alpha d\lambda} = \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{d \log L(\alpha, \lambda)}{d\lambda} \right) = \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \right) = - \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i)$$

$$L_{112} = \frac{d^3 \log L(\alpha, \lambda)}{d\alpha^2 d\lambda} = \frac{d}{d\alpha} \left(- \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i) \right) = - \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} (\ln(x_i))^2$$

$$\begin{aligned} L_{121} &= \frac{d^3 \log L(\alpha, \lambda)}{d\alpha d\lambda d\alpha} = \frac{d^2}{d\alpha d\lambda} \left(\frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i) \right) \\ &= \frac{d}{d\alpha} \left(- \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i) \right) = - \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} (\ln(x_i))^2 \end{aligned}$$

$$L_{122} = \frac{d^3 \log L(\alpha, \lambda)}{d\alpha d\lambda^2} = \frac{d^2}{d\alpha d\lambda} \left(\frac{d}{d\lambda} L_2 \right) = \frac{d^2}{d\alpha d\lambda} \left(\frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \right) = 0$$

$$L_2 = \frac{d \log L(\alpha, \lambda)}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}, \quad L_{21} = \frac{d^2 \log L(\alpha, \lambda)}{d\lambda d\alpha} = - \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i)$$

$$L_{221} = \frac{d^3 \log L(\alpha, \lambda)}{d\lambda^2 d\alpha} = 0, \quad L_{212} = \frac{d^3 \log L(\alpha, \lambda)}{d\lambda d\alpha d\lambda} = 0$$

$$L_{211} = \frac{d^3 \log L(\alpha, \lambda)}{d\lambda d\alpha^2} = \frac{d}{d\lambda} \left(- \frac{n}{\alpha^2} - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} (\ln(x_i))^2 \right) = \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} (\ln(x_i))^2$$

$$L_{222} = \frac{d^3 \log L(\alpha, \lambda)}{d\lambda^3} = 2 \frac{n}{\lambda^3}, \quad L_{111} = - \frac{n}{\alpha^2} - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} (\ln(x_i))^2$$

$$L_{12} = - \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i), \quad L_{21} = - \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i)$$

$$L_{22} = - \frac{n}{\lambda^2}, \quad l_{111} = \frac{2n}{\alpha^3} - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} (\ln(x_i))^3$$

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}} \begin{bmatrix} L_{22} & -L_{12} \\ -L_{21} & L_{11} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}} \begin{bmatrix} -\frac{n}{\lambda^2} & \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i) \\ \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i) & -\frac{n}{\alpha^2} - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} (\ln(x_i))^2 \end{bmatrix}$$

$$\left(-\frac{n}{\alpha^2} - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} (\ln(x_i))^2 \right) \cdot \left(-\frac{n}{\lambda^2} \right) + \left(-\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i) \right)^2 = T$$

$$-\frac{n}{\lambda^2} = U, \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} \ln(x_i) = V, -\frac{n}{\alpha^2} - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} (\ln(x_i))^2 = W$$

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{U}{T} & \frac{V}{T} \\ \frac{V}{T} & \frac{W}{T} \end{bmatrix}$$

$$u(\alpha, \lambda) = \alpha \text{ alınırsa}, u_1 = 1, u_2 = u_{12} = u_{21} = u_{22} = u_{11} = 0$$

$$\hat{\alpha}_{Bayes} = \hat{\alpha}_{ML} + G_{11}g_1 + G_{12}g_2 + \frac{1}{2}(l_{111}G_{11}^2 + 3l_{112}G_{11}G_{22} + l_{222}G_{12}G_{22}) \quad (35)$$

$$u(\alpha, \lambda) = \lambda \text{ alınırsa}, u_2 = 1, u_1 = u_{12} = u_{21} = u_{22} = u_{11} = 0$$

$$\hat{\lambda}_{Bayes} = \hat{\lambda}_{ML} + G_{21}g_1 + G_{22}g_2 + \frac{1}{2}(l_{222}G_{22}^2 + 3l_{112}(G_{11}G_{22} + 2G_{12}^2) + l_{111}G_{11}G_{12}) \quad (36)$$

Yapılan işlemler sonucunda parametrelere ilişkin Bayes tahmin edicileri,

$$\hat{\alpha}_B = \hat{\alpha} + \frac{U}{T} \left(\frac{q_1 - 1}{\hat{\alpha}} - p_1 \right) + \frac{V}{T} \left(\frac{q_2 - 1}{\hat{\lambda}} - p_2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{2n}{\hat{\alpha}^3} - \hat{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i^{-\hat{\alpha}} (\ln(x_i))^3 \right) \left(\frac{U}{T} \right)^2 +$$

$$3 \left(-\sum_{i=1}^n x_i^{-\hat{\alpha}} (\ln(x_i))^2 \right) \frac{U}{T} \frac{V}{T} + \frac{2n}{\hat{\lambda}^3} \frac{V}{T} \frac{W}{T} \quad (37)$$

$$\hat{\lambda}_B = \hat{\lambda} + \frac{V}{T} \left(\frac{q_1 - 1}{\hat{\alpha}} - p_1 \right) + \frac{W}{T} \left(\frac{q_2 - 1}{\hat{\lambda}} - p_2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{2n}{\hat{\lambda}^3} \left(\frac{W}{T} \right)^2 \right) + \left(-\sum_{i=1}^n x_i^{-\hat{\alpha}} (\ln(x_i))^2 \right)$$

$$\left(\frac{U}{T} \frac{W}{T} + 2 \left(\frac{V}{T} \right)^2 \right) + \left(\frac{2n}{\hat{\alpha}^3} - \hat{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i^{-\hat{\alpha}} (\ln(x_i))^3 \right) \frac{U}{T} \frac{V}{T} \quad (38)$$

biçiminde elde edilir. Burada, $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\lambda}$ ile, α ve λ 'nın en çok olabirlik tahmin edicileri ifade edilmektedir.

2.3.2 MZMC Yöntemleri ile Ters Weibull dağılımının parametrelerinin tahmini

Bayesci yaklaşımda, modelin veriye uygulanması çoğu zaman karmaşık, yüksek boyutlu integrallerin hesaplanmasını gerektiren çıkarım sorunlarına yol açabilir. Bu integraller için analitik çözümler elde edilemediği durumlarda, hesaplamalar için simülasyon yöntemleri kullanılır. Bu yöntemler MZMC yöntemleri olarak bilinir. MC yöntemleri, tekrarlanan rasgele örneklemeler kullanılarak nümerik çözümlerin yapıldığı yöntemlerdir. Fizik, mühendislik, istatistik, ekonomi, programlama gibi birçok farklı alanda kullanılmaktadır. MC yöntemleri çok çeşitli olmakla birlikte, soruna yönelik girdi tanımları yapılması, belirli bir olasılık dağılımına göre rasgele girdilerin üretilmesi, girdiler üzerinden belirleyici hesapların yapılması olmak üzere temel bir yapıya sahiptirler. MZMC, bir olasılık dağılımı üzerinden örneklemeler ile, Markov zincirinin denge dağılımına ulaşmayı hedefleyen algoritmalar grubuna verilen isimdir. Örneklenmek istenen soruna ilişkin boyut sayısının yüksek olması, diğer yöntemleri kullanışsız hale getirirken, MZMC yöntemleri çoğu zaman uygulanabilir tek yöntem olmaktadır. Genellikle rasgele yürüyüş mantığı ile çalışan algoritmalar kullanılmaktadır. Bunlardan bazıları Metropolis, Metropolis-Hasting ve Gibbs algoritmalarıdır. Özetle MZMC yöntemi, sonsal dağılımlardan örneklem çekmek için kullanılan bir simülasyon yöntemidir. Bu yöntem ile, istenilen hedef dağılımdan örnekleme yapılır. Her örnek bir öncekine bağlı olduğundan burada Markov zinciri gösterimi mevcuttur. Markov zinciri, θ^{t-1} rasgele değişkenine bağlı θ^t rasgele değişkenlerinden oluşan, $\theta^1, \theta^2, \dots$ biçiminde bir dizidir. Tanner, 1993; Gilks ve arkadaşları, 1996; Chen ve arkadaşları, 2000; Liu, 2001; Gelman ve arkadaşları, 2004; Robert ve Casella, 2004; Congdon, 2001; Congdon, 2003; Congdon, 2005 tarafından yapılan çalışmalar sayesinde MZMC yöntemi Bayesci yaklaşımın uygulamada sıklıkla kullanılır hale gelmesini sağlamıştır (Cengiz ve arkadaşları, 2013). Sonsal ortalama tahmininin standart hatası, Monte Carlo Standart Hata (MCSH) olarak bilinir ve simülasyonun doğruluğunun ölçüsü olarak kullanılır. Monte Carlo standart hata oranının %5'den küçük olduğu durumda MZMC zincirinin yakınsamaya ulaştığı söylenir (Öztürk ve Cengiz, 2017).

MZMC simülasyon yöntemlerinde, başlangıç değerlerinin etkileri zincirin ilk adımlarında görülür. Daha sonraki adımlarda zincir yavaş yavaş başlangıç durumunu unuttur ve durağanlaşır. Analizlerde başlangıç değerlerinin etkisinden kurtulabilmek için zincirden elde edilen ilk gözlemler ihmal edilir. Bunlara, burn in (yakma) değerleri denir (Link and Barker, 2010). Literatürde, başlangıç değerlerinin etkisinden kurtulmak için zincir uzunluğunu belirlemeye yarayan birçok yöntem vardır.

Bu yöntemlerden en çok kullanılanı, çekilen örneklemin grafiğini inceleyerek zincir uzunluğuna karar vermektir (Gilks and et al., 1996; Walsh, 2004).

2.3.2.1. Metropolis Algoritması

Metropolis algoritması, Amerikalı fizik ve bilgisayar bilimcisi Nicholas C. Metropolis tarafından önerilen kolay ve pratik bir algoritmadır. İstenen bir hedef dağılımdan rasgele örneklem almak için kullanılır. Bu algoritma, belirli bir olasılık dağılımından elde edilen rasgele örneklerin, doğrudan dağılımın kestirilmesinde ya da integral hesaplamasında kullanılmasına dayanmaktadır. Ard arda üretilen rasgele değerler, bir olasılık karşılaştırmasına tabi tutularak seçilir. Bu şekilde, Markov zincirinin denge dağılımına erişilene kadar yeni rasgele değerler üretilmeye devam edilir. Tekrar sayısı ne kadar fazla olursa, denge dağılımını örnekleme kalitesi o kadar artar. Olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(\theta|y)$ olan bir dağılımdan rasgele örneklem alınmak istensin. θ^t ile f dağılımından elde edilen t .nci örnek gösterilsin. Bu algoritmada başlangıç değeri olarak θ^0 başlangıç değeri alınır ve “öneri” dağılımı olarak adlandırılan simetrik olan bir $q(\theta^{t+1}|\theta^t)$ yoğunluk fonksiyonu kullanılır. $(t + 1)$.nci adımda θ^t parametre değeri için $q(.|.)$ öneri dağılımından rasgele bir örnek üretilir ve yeni örnek “red” veya “kabul” edilir. Kabul edildiğinde, algoritma yeni örnek ile başlayarak tekrarlanır. Kabul edilmediğinde ise algoritma şu anki noktadan tekrara başlar. Bu şekilde, durduruluncaya kadar tekrarlar işlemine devam edilir. Bu algoritmanın avantajı, istenen tekrar sayısına ulaşıldığında örneklemin durdurulabilmesi ve toplam örnek sayısına karar verilebilmesidir. Metropolis algoritması için tek kısıt, $q(\theta_{yeni}|\theta^t)$ öneri dağılımının simetrik bir dağılım olmasıdır. Önerilen dağılım, örneklem elde etmesi bilinen bir dağılım olmalı ve θ^t bilindiğinde θ_{yeni} elde etme olasılığı ile θ_{yeni} bilindiğinde θ^t elde etme olasılığı birbirine eşit yani $q(\theta_{yeni}|\theta^t) = q(\theta^t|\theta_{yeni})$ olmalıdır.

2.3.2.2 Metropolis-Hasting Algoritması

Metropolis-Hasting (MH) algoritması Metropolis algoritmasının genelleştirilmiş özel bir halidir. Metropolis-Hasting algoritması Metropolis algoritması ile benzer şekilde çalışmakta olup, bu algoritmayı Metropolis algoritmasından ayıran en önemli fark hem simetrik hem de asimetrik dağılımlara uygulanabilir olmasıdır. Metropolis-Hasting algoritması aşağıdaki kabul olasılığını kullanır,

$$\alpha = \min \left(1, \frac{p(\theta^*)}{p(\theta^{t-1})} \frac{q(\theta^{t-1}|\theta^*)}{q(\theta^*|\theta^{t-1})} \right).$$

2.3.2.2.1 Tek değişkenli dağılımlar için Metropolis-Hasting algoritması

Tek değişkenli dağılımlar için, Metropolis-Hasting algoritmasının adımları aşağıda özetlenmiştir.

1. $t=1$
2. Bir u başlangıç değeri oluşturulur ve $\theta^{(t)} = u$ olarak alınır.
3. Aşağıdaki algoritma tekrar edilir,

$$t = t + 1$$

$q(\theta|\theta^{(t-1)})$ 'den bir θ^* teklifi belirlenir,

$$\text{Kabul olasılığı } \alpha = \min \left(1, \frac{p(\theta^*)}{p(\theta^{(t-1)})} \frac{q(\theta^{(t-1)}|\theta^*)}{q(\theta^*|\theta^{(t-1)})} \right) \text{ hesaplanır,}$$

Düzgün (0,1) dağılımından bir u oluşturulur,

$u \leq \alpha$ ise teklif kabul edilir ve $\theta^{(t)} = \theta^*$ alınır, değilse $\theta^{(t)} = \theta^{(t-1)}$ olur.

4. $t=T$ olana kadar adımlar tekrar edilir (Steyvers, 2015).

2.3.2.2.2 Çok değişkenli dağılımlar için Metropolis Hasting algoritması

Çok değişkenli dağılımlarda, değişkenleri örnekleme için iki farklı yolu vardır.

I. Gruplu güncelleme (*Blockwise Updating*)

Gruplu güncelleme adı verilen ilk yaklaşımda, hedef dağılım ile aynı boyutta olan bir öneri dağılımı kullanılır. Örneğin, n değişken içeren bir olasılık dağılımından örnek alınmak isteniyorsa, n boyutlu bir öneri dağılımı tasarlanır ve öneri (tüm n değişkenleri için değerler içeren) bir blok olarak kabul edilir veya reddedilir. Aşağıda, n bileşen içeren rasgele bir değişkeni temsil etmek için $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ vektör gösterimi kullanılmış olup, $\theta^{(t)}$ örnekleme'deki t .inci durumu temsil etmektedir. Bu, skaler değişkenlerin vektörlerle yer değiştirdiği Metropolis-Hasting örnekleycisinin genişletilmesine götürür.

1. $t=1$
2. Bir başlangıç değeri oluşturulur $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ve $\theta^{(t)} = u$ olarak alınır.
3. Aşağıdaki algoritma tekrar edilir,

$$t = t + 1$$

$q(\theta|\theta^{(t-1)})$ 'den bir θ^* teklifi belirlenir,

$$\text{Kabul olasılığı } \alpha = \min \left(1, \frac{p(\theta^*)}{p(\theta^{(t-1)})} \frac{q(\theta^{(t-1)}|\theta^*)}{q(\theta^*|\theta^{(t-1)})} \right) \text{ hesaplanır,}$$

Düzgün (0,1) dağılımından bir u oluşturulur,

$u \leq \alpha$ ise teklif kabul edilir ve $\theta^{(t)} = \theta^*$ alınır, değilse $\theta^{(t)} = \theta^{(t-1)}$ olur.

4. $t=T$ olana kadar adımlar tekrar edilir (Steyvers, 2015).

II. Tekli Güncelleme (*Componentwise Updating*)

Gruplu güncelleme yaklaşımındaki olası bir sorun, uygun yüksek boyutlu teklif dağılımları bulmanın zor olabilmesidir. Diğer bir problem de, gruplu güncellemenin yüksek red oranları ile ilişkilendirilebilmesidir. Tüm bileşenleri aynı anda içeren θ için bir teklifi kabul etmek veya reddetmek yerine, θ 'nın ayrı ayrı bileşenleri için birer birer teklif yapmak daha kolaydır. Bu, bileşensel güncelleme yaklaşımına yol açar. Örneğin, iki değişkenli bir dağılım varsayalım, $\theta = (\theta_1, \theta_2)$. Öncelikle örneklem $\theta_1^{(1)}$ ve $\theta_2^{(1)}$ 'nin uygun değerleri ile başlatılır. Her bir t iterasyonunda, $\theta_1^{(t-1)}$ son durumuna bağlı olarak $\theta_1^{(*)}$ teklifi yapılır. Daha sonra, $(\theta_1^{(t-1)}, \theta_2^{(t-1)})$ 'e karşı $(\theta_1^{(*)}, \theta_2^{(t-1)})$ olasılığı karşılaştırılarak kabul oranı değerlendirilir. Bu teklifte, yalnızca birinci bileşen değiştirilir, ikinci bileşen sabit tutulur. Bir sonraki adımda, son $\theta_2^{(t-1)}$ durumuna bağlı olarak bir θ_2^* teklifi sunulur. Daha sonra, $(\theta_1^{(t-1)}, \theta_2^{(t-1)})$ 'e karşı $(\theta_1^{(t)}, \theta_2^*)$ olasılığı karşılaştırılarak kabul oranı değerlendirilir. Önemli olarak bu ikinci adımda, ilk bileşen sabit tutulur, ancak bu ilk adımdaki güncellenmiş değerdir. Bu nedenle, ikinci adımda olan şey, ilk adımda olanlara bağlıdır. İki değişkenli Tekli Metropolis-Hasting örnekleyicisinin adımlarının özeti aşağıdaki gibidir.

1. $t=1$ alınır.

2. Bir başlangıç değeri oluşturulur $u = (u_1, u_2)$ ve $\theta^{(t)} = u$ olarak alınır.

3. Aşağıdaki algoritma tekrar edilir,

$t = t + 1$,

$q(\theta_1 | \theta_1^{(t-1)})'$ den bir θ_1^* teklifi belirlenir ,

Kabul olasılığı, $\alpha = \min \left(1, \frac{p(\theta_1^*, \theta_2^{(t-1)})}{p(\theta_1^{(t-1)}, \theta_2^{(t-1)})} \frac{q(\theta_1^{(t-1)} | \theta_1^*)}{q(\theta_1^* | \theta_1^{(t-1)})} \right)$ hesaplanır,

Düzgün (0,1) dağılımından bir u sayısı üretilir,

$u \leq \alpha$ ise teklif kabul edilir ve $\theta_1^{(t)} = \theta_1^*$ olur, değilse $\theta_1^{(t)} = \theta_1^{(t-1)}$ olur,

$q(\theta_2 | \theta_2^{(t-1)})'$ den bir θ_2^* teklifi belirlenir,

Kabul olasılığı $\alpha = \min \left(1, \frac{p(\theta_1^{(t)}, \theta_2^*)}{p(\theta_1^{(t)}, \theta_2^{(t-1)})} \frac{q(\theta_2^{(t-1)} | \theta_2^*)}{q(\theta_2^* | \theta_2^{(t-1)})} \right)$ hesaplanır,

Düzgün (0,1) dağılımından bir u sayısı üretilir,

$u \leq \alpha$ ise teklif kabul edilir ve $\theta_2^{(t)} = \theta_2^*$ olur, değilse $\theta_2^{(t)} = \theta_2^{(t-1)}$ alınır.

4. $t = T$ olana kadar tekrar edilir (Steyvers, 2015).

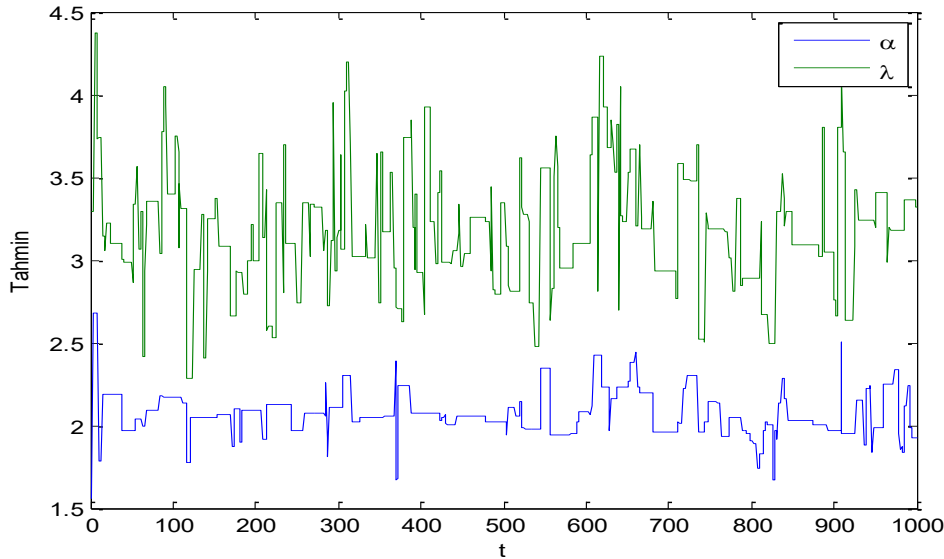
3. Simülasyon Çalışması

Bu kısımda, simülasyon ile Ters Weibull dağılımından üretilen gözlem değerleri kullanılarak dağılıma ilişkin parametre tahminleri yapılmıştır. Bayesci yöntemle elde edilen sonuçlarla klasik yöntemlerle elde edilen sonuçları karşılaştırmak amacıyla, ilk olarak Ters Weibull dağılımının parametreleri en çok olabilirlik ve en küçük kareler yöntemleri kullanılarak tahmin edilmiştir. Bayesci sonuç çıkarımı için ise öncelikle Lindley yaklaşımı kullanılmış ve parametre tahminleri elde edilmiştir. Daha sonra, MZMC yöntemlerinden çok değişkenli Metropolis-Hasting algoritması uygulanmış ve parametre tahminleri bir de bu yöntemle elde edilmiştir. Bu yöntem uygulanırken iterasyon sayısı 1000 olarak alınmış ve buna göre sonsal dağılımdan örneklem çekilmiştir. Elde edilen örneklem değerlerinin ortalaması Bayes tahminlerini vermiştir.

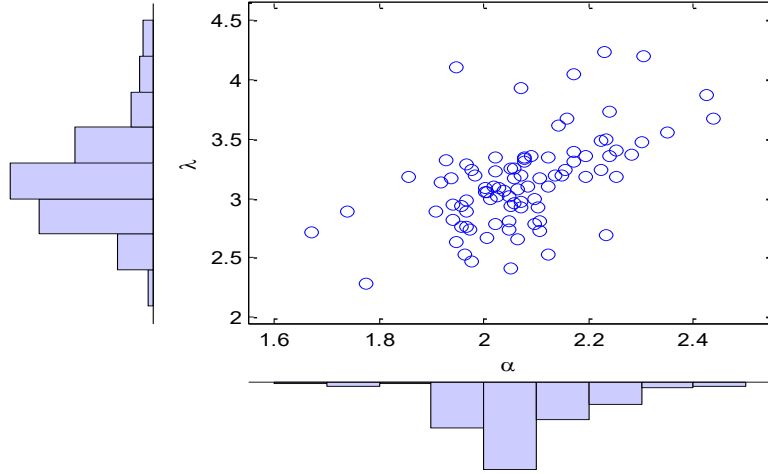
İlk olarak tek deneme için Matlab programı çalıştırılmış ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Tablo 2. $\alpha=2$, $\lambda=3$ için parametre tahmin sonuçları

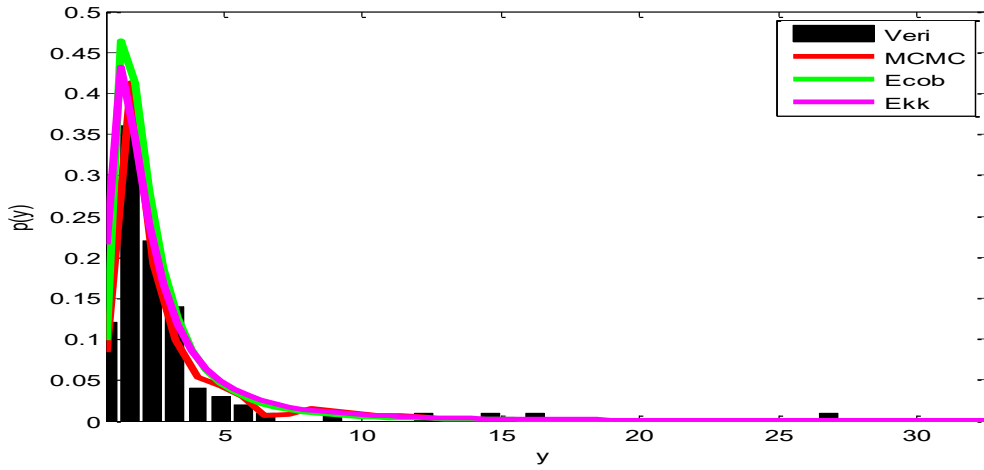
	MZMC(Metropolis-Hasting)				EÇOB		EKK		Lindley	
	Kabul olasılığı		Ortalama							
	α	λ	α	λ	α	λ	α	λ	α	λ
n=100 $\alpha = 2$ $\lambda = 3$	0.120	0.205	1.876	3.055	1.871	3.008	1.877891	3.035305	1.718935	2.68179



Şekil 3. MZMC yöntemi ile 1000 iterasyonda elde edilen α ve λ değerleri



Şekil 4. MZMC yöntemi ile 1000 iterasyonda elde edilen α ve λ değerleri için histogramlar ve saçılım grafikleri



Şekil 5. Elde edilen tahminler ile veri uyumu

Şekil 5’den görüldüğü gibi klasik yöntemlerle elde edilen sonuçlarla Bayesci yöntemlerle elde edilen sonuçlar birbirine oldukça yakındır. MZMC yönteminin Lindley’e göre daha iyi sonuç verdiği görülmektedir. Tahminlerin etkinliklerini karşılaştırmak amacıyla simülasyon programı 500 kez çalıştırılmış ve her bir yöntem için hata kareler ortalaması,

$$HKO_{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{500} (\lambda_i - \hat{\lambda}_i)^2}{500}, HKO_{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{500} (\alpha_i - \hat{\alpha}_i)^2}{500}$$

kök hata kareler ortalaması,

$$KHKO_{\lambda} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{500} (\lambda_i - \hat{\lambda}_i)^2}{500}}, KHKO_{\alpha} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{500} (\alpha_i - \hat{\alpha}_i)^2}{500}}$$

ortalama mutlak hata,

$$OMH_{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{500} |\lambda_i - \hat{\lambda}_i|}{500}, OMH_{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{500} |\alpha_i - \hat{\alpha}_i|}{500}$$

biçiminde hesaplanarak karşılaştırma kriterleri olarak alınmıştır. $\alpha = 2, \lambda = 3$; $\alpha = 2, \lambda = 4$; $\alpha = 3, \lambda = 4$; $\alpha = 4, \lambda = 4$ olarak alınmış ve $n = 30, 50, 100$ birim için simülasyonlar tekrarlanmıştır. Buna göre elde edilen sonuçlar Tablo 3’de özetlenmiştir.

Tablo 3. Farklı α ve λ değerleri için elde edilen simülasyon sonuçları

														Bayes Yöntemi			
Para metre Değ eri	n	EKK				EÇOB				MZMC(Metropolis-Hasting)				Lindley			
		$\hat{\alpha}$	HKO KHKO OMH	$\hat{\lambda}$	HKO KHKO OMH	$\hat{\alpha}$	HKO KHKO OMH	$\hat{\lambda}$	HKO KHKO OMH	$\hat{\alpha}$	HKO KHKO OMH	$\hat{\lambda}$	HKO KHKO OMH	$\hat{\alpha}$	HKO KHKO OMH	$\hat{\lambda}$	HKO KHKO OMH
$\alpha=2$ $\lambda=3$	30	1.8130	0.1603 0.4003 0.3253	2.6994	0.5510 0.7423 0.6144	2.0901	0.1167 0.3417 0.2563	3.2475	0.6946 0.8334 0.5804	2.0422	0.0924 0.3039 0.2336	3.2081	0.5071 0.7121 0.5219	2.1142	0.1203 0.3468 0.2582	3.3398	0.7555 0.8692 0.6024
	50	1.8514	0.0921 0.3034 0.2482	2.7400	0.3560 0.5967 0.4897	2.0536	0.0553 0.2352 0.1814	3.1383	0.3045 0.5518 0.4150	2.0277	0.0495 0.2225 0.1737	3.1267	0.2749 0.5243 0.3971	2.0683	0.0567 0.2381 0.1836	3.1932	0.3229 0.5682 0.4235
	100	1.8894	0.0517 0.2273 0.1796	2.7898	0.2193 0.4683 0.3855	2.0302	0.0246 0.1568 0.1239	3.0652	0.1349 0.3673 0.2911	2.0179	0.0231 0.1519 0.1199	3.0639	0.1298 0.3602 0.2867	2.0376	0.0245 0.1581 0.1250	3.0924	0.1391 0.3729 0.2926
$\alpha=2$ $\lambda=4$	30	1.8260	0.1625 0.4031 0.3300	3.5768	1.4482 1.2034 0.9643	2.1012	0.1326 0.3641 0.2755	4.4815	2.7865 1.6693 0.9720	2.0244	0.0891 0.2986 0.2342	4.2194	1.0498 1.0246 0.7366	2.1098	0.1308 0.3617 0.2737	4.5870	3.0511 1.7468 0.9993
	50	1.8709	0.0977 0.3126 0.2538	3.6660	0.8608 0.9278 0.7479	2.0640	0.0646 0.2542 0.1971	4.2705	0.7730 0.8792 0.6347	2.0275	0.0538 0.2320 0.1827	4.1824	0.5789 0.7609 0.5649	2.0695	0.0645 0.2540 0.1965	4.3296	0.8195 0.9052 0.6508
	100	1.8961	0.0518 0.2277 0.1830	3.6977	0.5047 0.7104 0.5725	2.0302	0.0261 0.1617 0.1273	4.1173	0.3218 0.5673 0.4284	2.0143	0.0248 0.1574 0.1252	4.0860	0.2920 0.5404 0.4139	2.0331	0.0261 0.1616 0.1271	4.1460	0.3312 0.5755 0.4327
$\alpha=3$ $\lambda=4$	30	2.7328	0.3135 0.5599 0.4612	3.4889	1.3515 1.1625 0.9230	3.1822	0.2742 0.5236 0.3903	4.4546	2.1026 1.4500 0.9291	3.0131	0.1678 0.4096 0.3258	4.1498	0.9187 0.9585 0.7086	3.1985	0.2736 0.5231 0.3903	4.5537	2.2732 1.5077 0.9581
	50	2.7901	0.2191 0.4680 0.3835	3.6078	0.9417 0.9704 0.7747	3.0914	0.1385 0.3721 0.2901	4.2257	0.8008 0.8949 0.6276	2.9938	0.1077 0.3281 0.2646	4.0748	0.5301 0.7281 0.5417	3.1016	0.1384 0.3721 0.2895	4.2821	0.8406 0.9168 0.6379
	100	2.8599	0.1153 0.3396 0.2727	3.7357	0.4778 0.6912 0.5645	3.0523	0.0657 0.2563 0.2032	4.1396	0.3179 0.5638 0.4261	3.0077	0.0580 0.2408 0.1955	4.0803	0.2690 0.5187 0.4002	3.0574	0.0658 0.2566 0.2032	4.1673	0.3281 0.5728 0.4311
$\alpha=4$ $\lambda=4$	30	3.7023	0.6154 0.7845 0.6493	3.6163	1.6027 1.2660 1.0349	4.2583	0.5094 0.7137 0.5411	4.4846	2.0995 1.4490 0.9691	3.9517	0.2921 0.5404 0.4318	4.0915	0.9180 0.9581 0.7229	4.2841	0.5121 0.7156 0.5415	4.5800	2.2611 1.5037 0.9960
	50	3.7361	0.3856 0.6210 0.5016	3.6029	0.9042 0.9509 0.7919	4.1404	0.2428 0.4928 0.3832	4.2121	0.6752 0.8217 0.6025	3.9674	0.1813 0.4258 0.3438	4.0318	0.4514 0.6718 0.5213	4.1566	0.2451 0.4950 0.3840	4.2660	0.7085 0.8417 0.6118
	100	3.8138	0.1904 0.4363 0.3526	3.7467	0.4295 0.6553 0.5313	4.0634	0.1032 0.3213 0.2483	4.1439	0.2872 0.5360 0.4105	3.9797	0.0903 0.3005 0.2341	4.0569	0.2336 0.4833 0.3790	4.0713	0.1037 0.3220 0.2486	4.1705	0.2968 0.5448 0.4153

Örneklem sayısı artıkça hata kareler ortalaması, kök hata kareler ortalaması ve ortalama mutlak hata değerleri her yöntem için düşerken tahmin sonuçlarının gerçek değerlere oldukça yakın olduğu gözükmemektedir. Küçük örneklem durumunda yani $n = 30$ olduğunda λ parametresi için en küçük kareler yöntemi ile elde edilen tahminler için hesaplanan tüm karşılaştırma kriterlerinin değerleri en çok olabilirlik yöntemine göre elde edilenlerden daha düşük çıkmıştır. Bu durumda bile en iyi sonuçları Bayes yöntemlerinden Metropolis-Hasting yöntemi vermiştir.

Bayesci yöntemlerden, Metropolis-Hasting algoritmasının Lindley yaklaşımına göre daha iyi sonuç verdiği gözlenmektedir. Lindley yöntemi ile parametre tahminleri hesaplanırken en çok olabilirlik tahminleri kullanıldığı için elde edilen sonuçlar en çok olabilirlik tahminlerine yakın elde edilmektedir.

Tüm durumlarda Metropolis-Hasting algoritması için elde edilen kriter değerleri en küçüktür.

4. Sonuç ve Tartışma

Yaşam süresi verilerini analiz etmek için uygun bir model olan Ters Weibull dağılımı, faydalı ömür ve yıpranma periyotları gibi çeşitli özellikleri modellemek için kullanılabilir. Ters Weibull dağılımının parametrelerini tahmin etmek için genellikle; en küçük kareler, en çok olabilirlik, momentler ve Bayes tahmin yöntemleri kullanılmaktadır. Farklı birçok alanda uygulama olanağına sahip olması nedeniyle, Ters Weibull dağılım parametrelerinin etkin bir şekilde tahmin edilmesi önemlidir.

Bu çalışmada, Ters Weibull dağılımının parametrelerini tahmin etmek için kullanılan yöntemler incelenmiş ve yapılan simülasyon çalışması ile bu yöntemler karşılaştırılmıştır. Tahmin yöntemlerini karşılaştırmak için hata kareler ortalaması, kök hata kareler ortalaması ve ortalama mutlak hata değerleri ölçüt olarak kullanılmıştır.

Yapılan simülasyon çalışması sonucunda, beklenildiği gibi örneklem sayısı artıkça hesaplanan tüm kriter değerlerinin tüm yöntemler için düştüğü ve tahmin sonuçlarının gerçek değerlere oldukça yakın olduğu gözlenmiştir. Bayesci yöntemde, tüm durumlarda Metropolis-Hasting algoritmasının hesaplanan ölçüt değerlerinin en küçük olduğu ve Metropolis-Hasting algoritmasının Lindley yaklaşımına göre daha iyi sonuç verdiği görülmüştür.

Çalışma sonucunda, Bayesci yöntemler uygulanarak elde edilen tahmin değerlerinin klasik yöntemlerle elde edilen değerlere benzerlik gösterdiği, hatta birçok durumda Bayesci yöntemle elde edilen sonuçların daha iyi olduğu söylenebilir. Bayesci sonuç çıkarımı için Lindley yaklaşımı kullanıldığında, hesaplamalar en çok olabilirlik tahminleri kullanılarak yapıldığı için özellikle küçük örneklem durumunda sonuçlar en çok olabilirlik tahminlerine yakın çıkmıştır. Bayesci yöntemlerde

klasik yöntemlerden farklı olarak işin içine parametreler ile ilgili önsel bilgiler dahil edilir ve parametreler sanki birer rasgele değişken gibi alınır. Yapılan simülasyon çalışmalarından elde edilen sonuçlara göre, bu bilgilerin kullanılması ile tahminlerin iyileştiği söylenebilir.

Özet olarak, Ters Weibull dağılımı için Bayesci yöntemler kullanılarak elde edilen tahmin sonuçlarının klasik yöntemlerle elde edilenler kadar iyi olduğu, yani tahmin sürecinde Bayesci yöntemlerin klasik yöntemlere iyi bir alternatif olarak kullanılabileceği söylenebilir.

Yazarların Katkısı

Bu çalışma Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı'nda İdil Büşra KUTLU'nun Doç. Dr. Esin KÖKSAL BABACAN danışmanlığında 2019 yılında tamamladığı “Ters Weibull Dağılım Parametrelerinin Bayesci Yöntemle Tahmini” adlı yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarlar arasında herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Araştırma ve Yayın Etiği Beyanı

Yapılan çalışmada araştırma ve yayın etiğine uyulmuştur.

Kaynaklar

- Ahmad, K.; Ahmad, S.; Ahmed, A. (2015). Classical and Bayesian Approach in Estimation of Scale Parameter of Inverse Weibull Distribution. *Mathematical Theory and Modeling*, 5(13), 2224-5804.
- Algarni, S., Afify, A. Z., Elbatal, I., Elgarhy, M. (2020). The Extended Inverse Weibull Distribution: Properties and Applications, *Complexity*, 3297693, 11 pages, <https://doi.org/10.1155/2020/3297693>
- Algarni, A., Elgarhy, M., Almarashi, A. M., Fayomi, A. and El-Saeed, A., E. (2021) .Classical and Bayesian Estimation of the Inverse Weibull Distribution: Using Progressive Type-I Censoring Scheme, *Hindawi Advances in Civil Engineering*, Article ID 5701529, 15 pages <https://doi.org/10.1155/2021/5701529>
- Calabria, R., Pulcini, G. (1990). On the Maximum Likelihood and Least Squares Estimation in the Inverse Weibull Distribution. *Statistics Applicata*, 2, 53-66.
- Calabria, R., Pulcini, G. (1994). Bayes 2-Sample Prediction for the Inverse Weibull Distribution. *Communications in Statistics-Theory&Methods*, 23, 1811-1824.
- Carriere, J. (1992). Parametric Models for Life Tables. *Transactions of society Actuaries*, 44, 77-100.
- Cengiz, M. A., Terzi, E., Şenel, T., Murat, N. (2012). Lojistik Regresyonda Parametre Tahmininde Bayesci Bir Yaklaşım. *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi* (12), 15-22.
- Chen, M.H., Shao, Q.M. and Ibrahim, J.G. (2000). Monte Carlo Methods in Bayesian Computation, New York: Springer-Verlag.
- Chiodo, E., Mazzanti, G., Karimian, M. (2015). Bayes estimation of Inverse Weibull distribution for extreme wind speed prediction. *2015 International Conference on Clean Electrical Power (ICCEP)*, 639-646.

- Congdon, P. (2001). Bayesian Statistical Modeling, John Wiley & Sons Ltd., West Sussex.
- Congdon, P. (2003). Applied Bayesian Modeling, John Wiley & Sons Ltd., West Sussex.
- Congdon, P. (2005). Bayesian Models for Categorical Data, John Wiley & Sons Ltd., West Sussex.
- Ellah, A. H. (2012). Bayesian and Non-Bayesian Estimation of the Inverse Weibull Model Based on Generalized Order Statistics. *Intelligent Information Management*, 4, 23-31.
- Elshahat, M.; Ismail, A. (2014). Quasi-Bayesian Estimation for Inverse Weibull Distribution. *International Journal of Mathematics and Statistics Studies*, 2(2), 64-75.
- Erto, P. (1986). Properties and Identification of the Inverse Weibull: Unknown or Just forgotten. *Quality and Reliability Engineering International*, 9, 383-385.
- Gelman, A., Carlin, J., Stern, H. and Rubin, D. (2004). Bayesian Data Analysis, Second Edition, London: Chapman & Hall.
- Gilks, W.R., Richardson, S. and Spiegelhalter, D.J. (1996). Markov Chain Monte Carlo in Practice, London: Chapman & Hall.
- Gül, H. H. (2023). Unit- Weibull Distribution: Different Method of Estimations. *Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi*, 13(2), 547-560.
- Johnson, N.; Kotz, S.; Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions* (Vol 1. b.). New York: John Wiley and Sons.
- Keller, A.; Kamath, A. (1982). Alternative Reliability Models for Mechanical Systems. *Proceeding of the 3rd International Conference on Reliability and Maintainability*, 411-415.
- Khan, S. M., Pasha, G. R., Pasha, A. H. (2008). Theoretical Analysis of Inverse Weibull Distribution. *Wseas Transactions On Mathematics*, 7 (2), Pages 30 – 38.
- Köksal Babacan, E. (2024). Bayesian Estimation of Inverse Weibull Distribution Scale Parameter Under The Different Loss Functions. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences* , vol.42, no.4, 1108-1115.
- Kundu, D.; Howlader, H. (2010). Bayesian Inference and Prediction of the Inverse Weibull Distribution for Type-II Censored Data. *Computational Statistics&Data Analysis*, 54(6), 1547-1558.
- Kundu, D.; Sultan, K.; Alsadat, N. (2013). Bayesian and maximum likelihood estimations of the inverse Weibull parameters under progressive type-II censoring. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 84(10), 2248-2265.
- Lindley, D.V. (1980) Approximate Bayesian methods. *Trabajos de Estadística Y de Investigación Operativa* 31, 223–245. <https://doi.org/10.1007/BF02888353>
- Link ,W. A., Barker, R. J. (2010). Bayesian Inference With Ecological Applications, Academic Press, Boston, United States.
- Loganathan, A.; Uma, M. (2017). Comparison of Estimation Methods for Inverse Weibull distribution. *Global and Stochastic Analysis*, 4(1), 83-93.
- Mudasir, S.; Ahmed, A.; Ahmad, S. (2015). A Note on Bayesian Estimation of Inverse Weibull Distribution under LINEX and Quadratic Loss Functions. *International Journal of Modern Mathematical Sciences*, 13(2), 170-177.
- Murthy, D.N. P; Bulmer, M.; Eccleston, J. A. (2004). Weibull model selection for reliability modelling, *Reliability Engineering & System Safety*, Volume 86, Issue 3, Pages 257-267,
- Nelson, W. (1982). *Applied Life Data Analysis*. New York: Wiley.
- Öztürk, Z.; Cengiz, M. A. (2017). Bayesci Genelleştirilmiş Lineer Karma Modellerde Önsel Seçimleri ve Karşılaştırılması. *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 21(3), 999-1010.
- Robert, C. P. and Casella, G. (2004). Monte Carlo Statistical Methods, 2nd edition. New York: SpringerVerlag.
- [Shuaib Khan](#), M., [Pasha](#), G. R. , [Hesham Pasha](#), A. (2008). Theoretical analysis of inverse weibull distribution [WSEAS Transactions on Mathematics, Volume 7, Issue 2](#), Pages 30-38.
- Singh, S. K.; Singh, U.; Sharma, V. K. (2013). Bayesian analysis for Type-II hybrid censored sample from inverse Weibull distribution. *Int J Syst Assur Eng Manag*, 4(3), 241–248.
- Singh, S. K.; Singh, U.; Sharma, V. K. (2013). Bayesian Prediction of Future Observations from Inverse Weibull Distribution Based on Type-II Hybrid Censored Sample. *International Journal of Advanced Statistics and Probability*, 1(2), 32-43.
- Steyvers, M. (2015). *Advanced Matlab:Exploratory Data Analysis and Computational Statistics*.
- Sultan, K. S. (2008). Bayesian Estimates Based on Record Values from the Inverse Weibull Lifetime Model. *Model Quality Technology & Quantitative Management*, 5(4), 363-374.
- Sultan, K. S. (2010). Record Values from the Inverse Weibull Lifetime Model:Different Methods of Estimation. *Intelligent Information Management*, 2, 631-636.

- Tanner, M.A. (1993). Tools for Statistical Inference: Methods for the Exploration of Posterior Distributions and Likelihood Functions, New York: Springer-Verlag.
- Tasnim H.K. Al-Baldawi, Huda A. Rasheed, Nadia J. Al-Obedy. (2014). Bayes Estimators of the Scale Parameter of an Inverse Weibull Distribution under two different Loss Functions. *Journal of Advances in Mathematics*, 8(2), 1571-1577.
- Vishwakarma, P. K., Kaushik, A., Pandey, A., Singh, U., Singh, S. K. (2018). Bayesian Estimation for Inverse Weibull Distribution Under Progressive Type-II Censored Data With Beta-Binomial Removals. *Austrian Journal of Statistics*, 47(1), 77–94. <https://doi.org/10.17713/ajs.v47i1.578>
- Weibull, W. (1951). A Statistical Distribution Function of Wide Applicability. *Journal of Applied Mechanics*, 18, 293-297.
- Walsh, B. (2004). Markov Chain Monte Carlo <http://nitro.biosci.arizona.edu/courses/EEB519A-2007/>
- Yao, W. Y.; Song, B. W.; Mao, Z. Y.; Le, H. Y. (2011). Parameter Estimations of Inverse Weibull Distribution. *Advanced Materials Research*, 199-200, 564-568.
- Yahgmaei, F.; Babanezhad, M.; Moghadam, O. S. (2013). Bayesian Estimation of the Scale Parameter of Inverse Weibull Distribution under the Asymmetric Loss Functions. *Journal of Probability and Statistics*, Vol.2013, Article ID 890914, 8 pages.