Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi
Afyon Kocatepe University – Journal of Science and Engineering
https://dergipark.org.tr/tr/pub/akufemubid

Araştırma Makalesi / Research Article
e-ISSN: 2149-3367
DOI: https://doi.org/10.35414/akufemubid.1511776
AKÜ FEMÜBİD **25** (2025) 031301 (477-482)
AKU J. Sci. Eng. **25** (2025) 031301 (477-482)

Barnes-Mittag-Leffler Fonksiyonu ile İlişkili Spirallike Fonksiyonlar Sınıfının Sabordinasyon Özellikleri

***Makale Bilgisi / Article Info**
Alındı/Received: 10.07.2024
Kabul/Accepted: 05.12.2024
Yayımlandı/Published: 10.06.2025

Subordination Properties of the Class of Spirallike Functions Associated with the Barnes-Mittag-Leffler Function

Şahsene ALTINKAYA*

İstanbul Beykent Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, İstanbul, Türkiye

© 2025 The Author | Creative Commons Attribution-Noncommercial 4.0 (CC BY-NC) International License

Öz

Mittag-Leffler fonksiyonunun ve genelleştirmelerinin mühendislik, fizik, biyoloji ve diğer uygulamalı bilimlerdeki doğrudan kullanımları daha fazla tanınmasını sağlamıştır. Bunun yanı sıra bu fonksiyonun analitik özelliklerinin araştırılmasına yönelik de birçok araştırma mevcuttur. Bu çalışmada, Barnes-Mittag-Leffler fonksiyonu, Mittag-Leffler fonksiyonun bir genelleştirmesi, $E_{K,v}^{a}(z;s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(Kn+v)(n+a)^s}$ $(z,s\in\mathbb{C},a,v\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-$ ve $Re(K)>0)$ araştırılmıştır. Ayrıca, Barnes-Mittag-Leffler fonksiyonunu içeren spirallike fonksiyonlar sınıfının yeni bir alt sınıfı $S_{K,v}^{a}(A,\lambda)$ tanımlanmıştır. Tanımlanan $S_{K,v}^{a}(A,\lambda)$ sınıfı için sabordinasyon özellikleri incelenmiştir ve bu sınıfa ait fonksiyonlar için katsayı eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Spirallike fonksiyon; Sabordinasyon; Konvolüsyon; Barnes-Mittag-Leffler fonksiyonu*

Abstract

The applications of the Mittag-Leffler function and its generalizations in engineering, physics, biology, and other applied sciences have led to its increased recognition. In addition, numerous studies investigate the analytical properties of this function. In this study, we examine the Barnes-Mittag-Leffler function, a generalization of the Mittag-Leffler function, defined as $E_{K,v}^{a}(z;s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(Kn+v)(n+a)^s}$, where $z,s\in\mathbb{C},a,v\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-$ and $Re(K)>0$. Further, a new subclass $S_{K,v}^{a}(A,\lambda)$ of spirallike functions involving the Barnes-Mittag-Leffler function is defined. Subordination properties are investigated for the newly defined class, and coefficient inequalities are obtained for functions belonging to this class.

Keywords: *Spirallike function; Subordination; Convolution; Barnes-Mittag-Leffler function*

1. Giriş

$\mathbb{C}$ kompleks düzlem olmak üzere, açık birim disk

$$\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$$

şeklinde tanımlanır. Bir D bölgesinde $f:D\to\mathbb{C}$ dönüşümü birebir ise f fonksiyonuna yalınkat fonksiyon denir. Geometrik olarak, düzlemde görüntü bölgesinin katlı bölge olmaması şeklinde yorumlanır.

Sürekli bir $f:D\to\mathbb{C}$ dönüşümü için aralarında α açısı bulunan, $z_0\in D$ noktasından geçen herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin; $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrilerinin de $W_0=f(z_0)$ noktasında aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı varsa f fonksiyonuna z_0 noktasında bir konform dönüşüm denir. Her $z_0\in D$ noktası için konformluk sağlanıyor ise f fonksiyonuna D bölgesinde konform dönüşüm denir.

Geometrik Fonksiyonlar Teorisi (GFT), 1851 yılında Riemann'ın kompleks düzlemin basit bağlantılı bir öz alt kümesini birim diske konform olarak resmeden bir f analitik fonksiyonunun varlığını ispat eden; "Riemann Dönüşüm Teoremi" olarak bilinen teoremiyle ortaya çıkmıştır (Riemann 1851). Analitik yalınkat fonksiyon, sıfırdan farklı türev değerlerine sahip olduğunda, geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Bu durum, analitik yalınkat fonksiyonların, basit bağlantılı bölgeleri yine basit bağlantılı bölgelere dönüştürdüğü anlamına gelir. Dolayısıyla, Riemann Dönüşüm Teoremi gereği, yalınkat bir f fonksiyonunu herhangi bir basit bağlantılı bölgede incelemek yerine, $\mathbb{D}$ birim diskinde incelemek yeterlidir. Bu durumda $f(0)=0$ ve $f'(0)=1$ normalizasyon şartlarını sağlayan, $\mathbb{D}$ diskinde analitik f fonksiyonuna normalize edilmiş analitik fonksiyon denir. Normalize edilmiş analitik

*Sorumlu Yazar / Corresponding Author: Şahsene Altınkaya e-posta / email: sahsenealtinkaya@gmail.com

fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{A}$ ile gösterilir. Diğer yandan, her $f \in \mathcal{A}$ için

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (1)$$

şeklinde Taylor seri açılımı mevcuttur. Seri açılımındaki katsayıların fonksiyonun geometrik davranışı üzerinde etkili olması bu teoriyi önemli kılan en temel özelliklerinden biridir.

$\mathbb{D}$ diskinde normalize edilmiş yalınkat fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{S}$ ile gösterilir. Aynı zamanda $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ özelliği sağlanır. $\mathcal{S}$ sınıfına ait her analitik fonksiyon, kompleks düzlemde $\mathbb{D}$ diskini basit bağlantılı bir bölge üzerine konform ve birebir olarak dönüştürür. $\mathcal{S}$ sınıfının alt sınıflarının en önemlileri; yıldızıl, konveks, konvekse yakın, α-mertebeli yıldızıl, α-mertebeli konveks, spirallike fonksiyon sınıflarıdır.

$W_0 \neq 0$ karmaşık sayısı, $-\infty < p < \infty$ ve $\lambda \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ için logaritmik λ-spiral $\omega = W_0 exp(-e^{-i\lambda} p)$ şeklinde tanımlanan bir eğridir. Dolayısıyla $\omega = \omega(p)$ logaritmik λ-spiral ise $Im[e^{-i\lambda} log\omega(p)] = sabit$ olur. D orijini içeren bir bölge olmak üzere, her $\omega \neq 0$ için ω'dan çıkan λ-spiral yay orijinle birleşirse D bölgesine λ-spirallike bölge denir. Bu durumda, f fonksiyonu $\mathbb{D}$ diskinde yalınkat ve $f(\mathbb{D})$ λ-spirallike bölge olduğunda f fonksiyonu λ-spirallike olur. λ-spirallike fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{S}_\lambda$ ile gösterilir ve $\mathcal{S}_\lambda \subset \mathcal{S}$ özelliği sağlanır. Bu tanım analitik olarak "$f \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun $\mathcal{S}_\lambda$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart $Re\left(e^{i\lambda} \frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$ olmasıdır" şeklinde ifade edilir (Spacek 1933). A-mertebeli λ-spirallike fonksiyonlar ise $Re\left(e^{i\lambda} \frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > A\cos\lambda$ eşitsizliği ile tanımlanır ve bu fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{S}_\lambda(A)$ ile gösterilir (Libera 1967).

Bazı özel fonksiyonlarla ilişkili analitik fonksiyon sınıflarının geometrik özelliklerinin incelenmesi, matematiksel araştırmalar için önemli bir alandır. Özellikle Mittag-Leffler fonksiyonu bu alanda geniş çapta incelenmiş ve birçok araştırmacının ilgisini çekmiştir. Daha sonra yapılan çalışmalarda Mittag-Leffler fonksiyonu ve genelleştirmeleri kesirli mertebeden diferansiyel denklemler veya kesirli mertebeden integral denklemlerin çözümünde ortaya çıkmıştır (Gorenflo *et al*. 2018). Bu alandaki en bilinen sonuç 1930 yılında Hille ve Tamarkin tarafından kanıtlanan, Mittag-Leffler fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli integralini çözen açık bir formülüdür. Dolayısıyla, bu fonksiyon uygulamalı matematik ve mühendislik bilimlerinin çeşitli dallarında etkin rol oynar (Gorenflo and Mainardi 1997, Kilbas and Saigo 1996, Mehrez *et al*. 2023, Srivastava and Tomovski 2009).

Mittag-Leffler fonksiyonunun Geometrik Fonksiyonlar Teorisi'nde kullanımı 2016 yılına dayanmaktadır. Fonksiyon, Bansal ve Prajabat tarafından normalize edilerek $\mathbb{D}$ diskinde yalınkatlık, yıldızıllık ve konvekslik gibi bazı geometrik özellikleri incelenmiştir (Bansal ve Prajabat 2016). Daha sonra, Mittag-Leffler fonksiyonunu içeren yalınkat fonksiyon sınıfları tanımlanmıştır. Bu sınıflara ait fonksiyonlar için sabordinasyon ve konvolüsyon koşulları, katsayı tahminleri gibi problemler incelenmiştir.

Barnes-Mittag-Leffler fonksiyonu, Mittag-Leffler fonksiyonu ile yakından ilişkilidir ve bu fonksiyonlar kesirli analiz, yaklaşım teorisi ile bilimin ve mühendisliğin çeşitli dallarında kritik bir rol oynar. Giriş bölümünde, ilgili literatürde bu konunun önemi, Mittag-Leffler fonksiyonununn matematiksel ve uygulamalı alanlardaki rolü ifade edilmiştir. Materyal ve Metot bölümünde, Barnes-Mittag-Leffler fonksiyonu, çalışmada kullanılan yöntemler, ihtiyaç duyulan lemmalar detaylı bir şekilde açıklanmıştır. Ayrıca Barnes-Mittag-Leffler fonksiyonunu içeren $\mathcal{E}_{K,v}^{a} f$ operatörü yardımıyla spirallike fonksiyonların yeni bir alt sınıfı $S_{K,v}^{a}(A,\lambda)$ tanımlanmıştır. Bulgular bölümünde, $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun $S_{K,v}^{a}(A,\lambda)$ sınıfına ait olma şartları, katsayı eşitsizlikleri ve bu sınıf için sabordinasyon özellikleri verilmiştir. Sonuçlar ve Tartışma bölümünde ise, elde edilen bulgular literatürdeki mevcut bilgilerle karşılaştırılmıştır. Bulguların uygulamaları ve gelecekteki çalışmalar için matematiksel öneriler sunulmuştur.

2. Materyal ve Metot

Bu bölümde, normalize edilmiş Barnes-Mittag-Leffler fonksiyonunun tanımı verilecek ve bu fonksiyonun özelliklerini incelemek için kullanılan matematiksel yöntemler ayrıntılı olarak sunulacaktır.

Tanım 2.1 $\mathbb{D}$ diskinde analitik ve $\forall z \in \mathbb{D}$ için $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1$ şartlarını sağlayan w fonksiyonuna Schwarz fonksiyonu denir (Goodman 1984).

Schwarz fonksiyonlarının sınıfı Ω ile gösterilir.

Tanım 2.2 $\mathbb{D}$ diskinde analitik f_1 ve f_2 fonksiyonları için

$$f_1(z) = f_2(w(z)), \quad (z \in \mathbb{D})$$

eşitliğini sağlayan bir $w \in \Omega$ fonksiyonu varsa f_1, f_2 fonksiyonuna sabordinedir denir (Goodman 1984).

Bu sabordinasyon işlemi $f_1 \prec f_2$ ile gösterilir.

Tanım 2.3 f_1 fonksiyonu (1) formunda ve $f_2(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \in \mathcal{A}$ olmak üzere

$$f_1(z) * f_2(z) = (f_1 * f_2)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n z^n$$

ifadesine Hadamard çarpımı (konvolüsyon) denir.

Tanım 2.4 $D \subset \mathbb{C}$ olmak üzere her $z_1, z_2 \in D$ için z_1 noktasını z_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen D kümesi içinde kalıyorsa D kümesine konveks küme denir. $\mathbb{D}$ diskini konveks bir kümeye resmeden fonksiyona konveks fonksiyon denir (Pommerenke 1975).

Konveks fonksiyonlar sınıfı C ile gösterilir.

Teorem 2.5 $f_2 \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda

$$f_2(z) \in C \Leftrightarrow Re\left(1 + \frac{zf_2''(z)}{f_2'(z)}\right) > 0$$

dir (Pommerenke 1975).

Tanım 2.6 Kompleks sayıların bir $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine, eğer f_2 fonksiyonu $f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$, $(b_1 = 1)$ şeklinde verilmişse ve $\mathbb{D}$ diskinde analitik, yalınkat ve konveks ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n t_n z^n \prec f(z),$$

koşulunu sağlayan bir sabordine faktör dizisi denir (Wilf 1961).

Lemma 2.7 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin bir sabordine faktör dizisi olması için gerek ve yeter şart

$$Re\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} t_n z^n\right) > 0$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Wilf 1961).

Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(Kn+1)}, \quad (z, K \in \mathbb{C}; K \geq 0)$$

şeklinde tanımlanır (Mittag Leffler 1903). Üstel fonksiyonun McLaurin seri açılımı göz önünde bulundurulduğunda, $E_K(z)$ üstel fonksiyonun bir genellemesidir. Dolayısıyla, $K = 1$ için üstel fonksiyon elde edilir. Ayrıca $E_K(z)$ bir parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu olarak da adlandırılır. İki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu, Wiman tarafından $z, K, v \in \mathbb{C}, Re(K) > 0$ ve $Re(v) > 0$ olmak üzere

$$E_{K,v}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(Kn+v)}$$

olarak tanımlanmıştır (Wiman 1905). Yıllar içinde Mittag-Leffler fonksiyonu farklı şekillerde genelleştirilmiştir (Dorrego and Cerutti 2012, Garg *et al*. 2013, Gehlot 2018, Prabhakar 1997, Shukla and Prajapati 2007). $z, s \in \mathbb{C}$, $a, v \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}_0^-$ ve $Re(K) > 0$ olmak üzere, Mittag-Leffler fonksiyonunun en önemli genelleştirmelerden biri

$$E_{K,v}^a(z;s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(Kn+v)(n+a)^s}$$

olarak tanımlanan Barnes-Mittag-Leffler fonksiyonudur (Barnes 1906).

Bu fonksiyonların aralarındaki ilişki $E_{K,v}^a(z;0) = E_{K,v}(z)$, $E_{K,1}(z) = E_K(z)$ ve $E_1(z) = e^z$ eşitlikleri ile ifade edilir.

Barnes-Mittag-Leffler fonksiyonu $E_{K,v}^a(z;s)$, $\mathcal{A}$ sınıfına ait olmadığından

$$\mathbb{E}_{K,v}^a(z;s) = a^s \Gamma(v) z E_{K,v}^a(z;s)$$
$$= z + \sum_{n=2}^{\infty} h_n^a(K,v,s) z^n$$

şeklinde normalize edilir (Alenazi and Mehrez 2023). Burada

$$h_n^a(K,v,s) = \frac{a^s \Gamma(v)}{\Gamma(Kn+v-K)(n+a-1)^s}$$

dir ve $\Gamma(.)$ notasyonu Gama fonksiyonunu belirtir. Böylece $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu için $\mathcal{E}_{K,v}^a f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ operatörü

$$\mathcal{E}_{K,v}^a f(z;s) = \mathbb{E}_{K,v}^a(z;s) * f(z)$$
$$= z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^s \Gamma(v)}{\Gamma(Kn+v-K)(n+a-1)^s} a_n z^n \tag{2}$$

elde edilir.

Bu çalışmada pozitif reel değerli a, K, s, v parametreleri ve $z \in \mathbb{D}$ koşulları ele alınmıştır. Bu bağlamda, $\mathcal{E}_{K,v}^a f$ operatörü ile spirallike fonksiyonların yeni bir alt sınıfı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.8 $0 \leq A < 1$ ve $|\lambda| < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere

$$Re\left(e^{i\lambda} \frac{z(\mathcal{E}_{K,v}^a f(z;s))'}{\mathcal{E}_{K,v}^a f(z;s)}\right) > A cos\lambda$$

eşitsizliği sağlanırsa $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna $S_{K,v}^a(A,\lambda)$ sınıfına ait denir.

3. Bulgular

Bu bölümde bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun $S_{K,v}^a(A,\lambda)$ sınıfına ait olma koşulları, katsayı eşitsizlikleri ve bu sınıf için sabordinasyon özellikleri verilecektir.

Lemma 3.1 $f \in \mathcal{A}$, $0 \leq A < 1$, $|\lambda| < \frac{\pi}{2}$ ve $0 \leq \beta < 1$ şartını sağlayan bir β reel sayısı için

$$\left|\frac{z\left(\mathcal{E}_{K,v}^{a} f(z;s)\right)'}{\mathcal{E}_{K,v}^{a} f(z;s)} - 1\right| \leq 1 - \beta, \quad (z \in \mathbb{D}) \tag{3}$$

olsun. Bu durumda

$$|\lambda| \leq \cos^{-1}\left(\frac{1-\beta}{1-A}\right)$$

ise $f \in S_{K,v}^{a}(A,\lambda)$ dir.

İspat. Pozitif reel değerli a, K, s, v parametreleri, $0 \leq \beta < 1$ ve $z \in \mathbb{D}$ için (3) eşitsizliğinden

$$\frac{z(\mathcal{E}_{K,v}^{a} f(z;s))'}{\mathcal{E}_{K,v}^{a} f(z;s)} = 1 + (1-\beta)w(z)$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı $e^{i\lambda}$ ile çarpılıp reel kısmı alınırsa

$$Re\left(e^{i\lambda}\frac{z\left(\mathcal{E}_{K,v}^{a} f(z;s)\right)'}{\mathcal{E}_{K,v}^{a} f(z;s)}\right) = Re\{e^{i\lambda}[1+(1-\beta)w(z)]\}$$
$$= cos\lambda + (1-\beta)Re\{e^{i\lambda}w(z)\}$$

bulunur. Tanım 2.1 kullanılarak

$$\geq cos\lambda - (1-\beta)\left|e^{i\lambda}w(z)\right|$$
$$> cos\lambda - (1-\beta)$$

eşitsizliği elde edilir. Tanım 2.8 göz önünde bulundurulduğunda eşitsizliğin sağ tarafından $cos\lambda - (1-\beta) = Acos\lambda$ elde edilir. Dolayısıyla, $|\lambda| \leq \cos^{-1}\left(\frac{1-\beta}{1-A}\right)$ sonucuna ulaşılır.

Lemma 3.2 $\left|\frac{z\left(\mathcal{E}_{K,v}^{a} f(z;s)\right)'}{\mathcal{E}_{K,v}^{a} f(z;s)} - 1\right| \leq (1-A)cos\lambda$ eşitsizliği sağlanırsa $f \in S_{K,v}^{a}(A,\lambda)$ dir.

İspat. Lemma 3.1'de $\beta = 1-(1-A)cos\lambda$ olarak alınırsa ispat tamamlanır.

Teorem 3.3 $f \in \mathcal{A}$, $0 \leq A < 1$ ve $|\lambda| < \frac{\pi}{2}$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{n-1}{1-A}\sec\lambda\right)h_n^a(K,v,s)|a_n| \leq 1 \tag{4}$$

ise f fonksiyonu $S_{K,v}^{a}(A,\lambda)$ sınıfındadır.

İspat. (4) ile verilen katsayı eşitsizliğini göstermek için Lemma 3.2 kullanılarak

$$\left|\frac{z\left(\mathcal{E}_{K,v}^{a} f(z;s)\right)'}{\mathcal{E}_{K,v}^{a} f(z;s)} - 1\right| = \left|\frac{z\left(\mathcal{E}_{K,v}^{a} f(z;s)\right)' - \mathcal{E}_{K,v}^{a} f(z;s)}{\mathcal{E}_{K,v}^{a} f(z;s)}\right|$$

eşitliği yazılır. (2) ile verilen $\mathcal{E}_{K,v}^{a} f(z;s)$ operatörü yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\left|\frac{z\left(\mathcal{E}_{K,v}^{a} f(z;s)\right)' - \mathcal{E}_{K,v}^{a} f(z;s)}{\mathcal{E}_{K,v}^{a} f(z;s)}\right|$$

$$= \left|\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)h_n^a(K,v,s)a_n z^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty}h_n^a(K,v,s)a_n z^{n-1}}\right|$$

$$< \frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)h_n^a(K,v,s)|a_n||z|^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty}h_n^a(K,v,s)|a_n||z|^{n-1}}$$

$$< \frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)h_n^a(K,v,s)|a_n|}{1-\sum_{n=2}^{\infty}h_n^a(K,v,s)|a_n|}$$

elde edilir. Lemma 3.2 yardımıyla, bu eşitsizlik

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)h_n^a(K,v,s)|a_n|$$
$$\leq (1-A)cos\lambda\left\{1-\sum_{n=2}^{\infty}h_n^a(K,v,s)|a_n|\right\}$$

olarak yazılır ve buradan

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{n-1}{1-A}\sec\lambda\right)h_n^a(K,v,s)|a_n| \leq 1$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.4 $f \in S_{K,v}^{a}(A,\lambda)$ olsun. Bu takdirde $H_n = [1-A+(n-1)\sec\lambda]h_n^a(K,v,s)$ olmak üzere

$$|a_n| \leq \frac{1-A}{H_n}, \quad (n \geq 2)$$

dir. $f(z) = z + \frac{1-A}{H_n}z^n$ fonksiyonu için eşitlik sağlanır.

Teorem 3.5 $f \in S_{K,v}^{a}(A,\lambda)$ ve $f_2 \in C$ olsun. Bu durumda

$H_2 = [1-A+\sec\lambda]h_2^a(K,v,s)$ olmak üzere

$$Re(f(z)) > -\frac{1-A+H_2}{H_2} \tag{5}$$

ve

$$\frac{H_2}{2(1-A+H_2)}(f*f_2)(z) \prec f_2(z) \tag{6}$$

dir.

İspat. $a_1 = 1$ olmak üzere Tanım 2.6 yardımıyla

$$\left\{\frac{H_2}{2(1-A+H_2)}a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

dizisi ele alınsın. Bu dizi bir sabordine faktör dizisi ise denklem (6) sağlanır. Dolayısıyla Lemma 2.7 kullanılarak

$$Re\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_2}{2(1-A+H_2)}a_n z^n\right) > 0$$

eşitsizliğini ispat etmek gereklidir. $|z| = r < 1$ için

$$Re\left(1+\frac{H_2}{1-A+H_2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n\right)$$

$$= Re\left\{1+\frac{H_2}{1-A+H_2}z+\frac{1}{1-A+H_2}\sum_{n=2}^{\infty}H_2 a_n z^n\right\}$$

$$\geq 1-\frac{H_2}{1-A+H_2}r$$

$$-\frac{1-A}{1-A+H_2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{n-1}{1-A}\sec\lambda\right)h_n^a(K,v,s)|a_n|\,r^n$$

bulunur. Şimdi, denklem (4) yardımıyla

$$= 1-\frac{1-A+H_2}{1-A+H_2}r > 0$$

elde edilir. Böylece (6) denklemi sağlanır. Diğer yandan (6) denkleminde, özel olarak

$$f_2(z) = \frac{z}{1-z} = z+\sum_{n=2}^{\infty}z^n$$

konveks fonksiyonu alınırsa (5) eşitsizliği elde edilir. Yani,

$$\frac{H_2}{2(1-A+H_2)}f(z) \prec f_2(\mathrm{z})$$

$$\frac{H_2}{2(1-A+H_2)}Re\big(f(z)\big) > Re(f_2(\mathrm{z}))$$

$$\frac{H_2}{2(1-A+H_2)}Re\big(f(z)\big) > -\frac{1}{2}.$$

Şimdi, eşitlik için

$$F(z) = z-\frac{1-A}{1-A+H_2}z^2$$

fonksiyonu göz önüne alındığında, (6) denklemi yardımıyla

$$\frac{H_2}{2(1-A+H_2)}F(z) \prec \frac{z}{1-z}, \qquad (z \in \mathbb{D})$$

sabordinasyonu elde edilir. Buradan

$$\min_{|z|\leq r}\left[Re\left(\frac{H_2}{2(1-A+H_2)}F(z)\right)\right] = -\frac{1}{2}$$

dir.

4. Sonuçlar ve Tartışma

Bu çalışmada, Barnes-Mittag-Leffler fonksiyonunu içeren $\mathcal{E}_{K,v}^{a}f$ operatörü yardımıyla spirallike fonksiyonların yeni bir alt sınıfı $S_{K,v}^{a}(A,\lambda)$ tanımlanmıştır. Daha sonra $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun bu yeni sınıfa ait olma şartları ve katsayı eşitsizlikleri incelenmiştir. Ayrıca, bu sınıf için sabordinasyon özellikleri de sunulmuştur.

Elde edilen sonuçlar, mevcut literatürdeki bulgularla karşılaştırıldığında önemli bir katkı sağlamaktadır. Literatürdeki çalışmalar (Alenazi and Mehrez 2023, Mehrez *et al*. 2023) $\mathbb{D}$ diskinde Barnes-Mittag-Leffler fonksiyonunun yıldızıllık, düzgün yıllızıllık, güçlü yıldızıllık, konvekslik ve konvekslığe yakınlık gibi geometrik özelliklerini incelemiştir. Bu çalışmada ise mevcut olan literatüre ek olarak $\mathcal{S}$ sınıfının bir alt sınıfı olan Barnes-Mittag-Leffler fonksiyonunu içeren spirallike fonksiyonlar sınıfı tanımlanmış ve bu sınıfın çeşitli özellikleri incelenmiştir. Literatürde, Barnes-Mittag-Leffler fonksiyonunu içeren $\mathcal{S}$ sınıfının herhangi bir alt sınıfı tanımlanmamıştır. Bu çalışma, bu alanda öncü bir niteliğe sahiptir.

Diğer yandan, a, s, K, v, A ve λ parametreleri için belirli özel değerler seçilerek, Mittag-Leffler fonksiyonu ve genelleştirmeleri için benzer sonuçlar elde edilebilir. Gelecekteki araştırmalar için $S_{K,v}^{a}(A,\lambda)$ sınıfına ait fonksiyonlar için Fekete-Szegö eşitsizlikleri ve Hankel determinantı çalışılabilir. Ayrıca, Barnes-Mittag-Leffler fonksiyonunu içeren daha geniş alt sınıflar tanımlanabilir ve incelenebilir.

Sonuç olarak, bu çalışma, matematiksel analiz ve özellikle Geometrik Fonksiyonlar Teorisi (GFT)'nin gelişimine katkı sunmaktadır. Gelecek çalışmalarda, bu bulguların daha da geliştirilerek yeni uygulama alanları oluşturması beklenmektedir.

Etik Standartlar Bildirgesi
Yazarlar tüm etik standartlara uyduklarını beyan ederler.

Yazarlık Katkı Beyanı
Yazar 1: Kaynaklar, Araştırma, Deney, Yazma – orijinal taslak Görselleştirme, Yazma – orijinal taslak

Çıkar Çatışması Beyanı
Makalenin içeriğiyle ilgili olarak beyan edilecek hiçbir çıkar çatışması yoktur.

Verilerin Kullanılabilirliği
Bu çalışma sırasında oluşturulan veya analiz edilen tüm veriler, yayınlanan bu makaleye dahil edilmiştir.

5. Kaynaklar

Alenazi, A. and Mehrez, K., 2023. Further Geometric Properties of the Barnes-Mittag-Leffler Function. *Axioms*, **13**(1), 1-14. https://doi.org/10.3390/axioms13010012

Bansal, D. and Prajapat, J.K., 2016. Certain geometric properties of the Mittag-Leffler functions. *Complex Variables and Elliptic Equations*, **61**(3), 338-350. https://doi.org/10.1080/17476933.2015.1079628

Barnes, E.W., 1906. The asymptotic expansion of integral functions defined by Taylor's series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A,* **206**(402-412), 249-297. https://doi.org/10.1098/rsta.1906.0019

Dorrego, G.A. and Cerutti, R.A., 2012. The k-Mittag-Leffler function. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, ***7***(15), 705-716.

Garg, M., Manohar, P. and Kalla, S.L., 2013. A Mittag-Leffler-type function of two variables. *Integral Transforms and Special Functions*, **24**(11), 934-944. https://doi.org/10.1080/10652469.2013.789872

Gehlot, K.S., 2018. The p-k Mittag-Leffler function. *Palestine Journal of Mathematics*, **7**(2), 628-632.

Goodman, A.W., 1984. Univalent functions, Volume I and Volume II. Mariner Pub. Co. Inc. Tampa Florida.

Gorenflo, R., Kilbas, A.A., Mainardi, F. and Rogosin, S.V., 2020. Mittag-Leffler functions, related topics and applications, Berlin: Springer, 540 pages. https://doi.org/10.1007/978-3-662-61550-8

Gorenflo, R. and Mainardi, F., 1997. Fractional calculus: Integral and differential equations of fractional order, In: A. Carpinteri, F. Mainardi (Eds), Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, International Centre for Mechanical Sciences, Springer, Vienna, **378**, 223–276.

Kilbaş, A.A. and Saigo, M., 1996. On Mittag-Leffler type function, fractional calculas operators and solutions of integral equations. *Integral Transforms and Special Functions*, **4**, 355–370.

Libera, R. J., 1967. Univalent α-spiral functions. *Canadian Journal of Mathematics*, **19**, 449-456.

Mehrez, K., Das, S. And Kumar, A., 2023. Monotonicity properties and functional inequalities for the Barnes Mittag-Leffler function. *Miskolc Mathematical Notes*, **24**(2), 893-907. https://doi.org/10.18514/MMN.2023.3997

Mittag-Leffler, G.M., 1903. Sur la nouvelle fonction $E_a(x)$. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **137**(2), 554-558.

Pommerenke, C. 1975. Univalent functions. *Vandenhoeck and Ruprecht*.

Riemann, B. 1851. Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veranderlichen complexen Grösse. PhD Thesis, University of Göttingen, Germany.

Prabhakar, T.R., 1971. A singular integral equation with a generalized Mittag Leffler function in the kernel. *Yokohama Mathematical Journal, **19***(1), 7-15.

Shukla, A.K. and Prajapati, J.C., 2007. On a generalization of Mittag-Leffler function and its properties. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **336**(2), 797-811. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.03.018

Spacek, L., 1933. Contribution a la theorie fonctions univalentes. *Casopis Pro Pestovani Matematiky*, **62**, 12-19.

Srivastava, H.M. and Tomovski, Z., 2009. Fractional calculus with an integral operator containing a generalized Mittag-Leffler function in the kernel. *Applied Mathematics and Computation*, **211**, 198-210. https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.01.055

Wilf, H.S., 1961. Subordinating factor sequence for convex maps of the unit circle, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **12**, 689-693.

Wiman, A., 1905. Über den Fundamentalsatz in der Theorie der Functionen $E_a(x)$. *Acta Mathematica,* **29**, 191–201.