

Lise Öğrencilerinin Maksimum ve Minimum Problemlerine İlişkin Bilgi Oluşturma Süreçlerinin İncelenmesi*

Gözde Ayca ERTAN**
Serhan ULUSAN***

Öz: Bilgi oluşturma süreci, var olan kavramların ilişkilendirilerek yeniden yapılandırılması ile yeni kavramların oluşturulması olarak tanımlanabilir. Bu çalışmada 12. sınıf öğrencilerin türev anlayışları ile maksimum ve minimum problemlerine ilişkin bilgi oluşturma süreçlerini incelemek amaçlanmıştır. Araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması yöntemi kullanılmıştır. Araştırmanın katılımcıları 12. sınıfta öğrenim görmekte olan 4 öğrenciden oluşmaktadır. Çalışmanın veri toplama aracı olarak araştırmacılar tarafından hazırlanan ve 6 sorudan oluşan Türev Kavramsal Anlama Testi kullanılmıştır. Testin ilk 4 sorusu ile katılımcıların türev kavramı anlayışları, son 2 sorusu ile maksimum ve minimum problemlerine ilişkin bilgi oluşturma süreçlerini incelemek amaçlanmıştır. Araştırmanın veri toplama yöntemleri gözlem, görev temelli görüşme ve doküman analizinden oluşmaktadır. Elde edilen veriler APOS Teorisine dayalı olarak hazırlanmış olan türev kavramının genetik çözümlemesine göre içerik analizi yöntemiyle analiz edilmiştir. Verilerin analizi sonucunda, eylem aşamasında olan öğrencinin maksimum ve minimum problemlerine ilişkin çözüm üretirken dışarıdan uyarıcıya ihtiyaç duyduğu, nesne aşamasındaki öğrencinin hesaplamada yaptığı hata sebebiyle çözüme ulaşamadığı görülmüştür. Bazen süreç bazen de nesne anlayışı davranışı gösteren öğrencilerin bilgi oluşturma sürecini başarıyla tamamladıkları görülmüştür. Araştırma sonucuna göre APOS Teorisine göre ileri seviyede olan öğrencilerin maksimum ve minimum problemlerine ilişkin kendi çözümlerini gerçekleştirebildikleri belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: APOS teorisi, genetik çözümleme, bilgi oluşturma süreci, maksimum ve minimum problemleri.

Investigation of Knowledge Construction Processes Regarding Maximum and Minimum Problems of High School Students

Abstract: The knowledge construction process can be defined as the creation of new concepts by associating and restructuring existing concepts. This study was aimed to examine 12th grade students' understanding of derivatives and their knowledge construction processes regarding maximum and minimum problems. The case study method, one of the qualitative research methods, was used in the research. The participants of the research consist of 4 students studying in the 12th grade. Derivative Conceptual Comprehension Test, prepared by the researchers and consisting of 6 questions, was used as the data collection tool of the study. The first 4 questions of the test was aimed to examine the participants' understanding of the concept of derivative, and the last 2 questions aimed to examine their knowledge construction processes regarding maximum and minimum problems. The data collection methods of the research consist of observation, task-based interview and document analysis. The obtained data were analyzed by content analysis method according to the genetic decomposition of derivative prepared based on APOS Theory. As a result of the analysis of the data, it was seen that the student in the action stage needed support while producing solutions to the maximum and minimum problems, and the student in the object stage could not reach the solution due to the mistake which he made in the calculation. It has been observed that students who sometimes display process and sometimes object understanding behavior successfully complete the knowledge construction process. According to the results of the research, it was determined that students who were at an advanced level according to APOS Theory were able to realize their own solutions to maximum and minimum problems.

Keywords: APOS theory, genetic decomposition, knowledge construction process, maximum and minimum problems.

*Bu çalışma birinci yazarın ikinci yazar danışmanlığındaki yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

**Öğretmen, MEB, Aydın-Türkiye, ORCID: 0000-0002-3107-0373, e-posta: gozdeapala@gmail.com

***Sorumlu Yazar Dr. Öğr. Üyesi, Aydın Adnan Menderes Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Aydın-Türkiye, ORCID: 0000-0003-0116-2696, e-posta: serhan.ulusan@adu.edu.tr

Giriş

Türev hem günlük hayattaki yeri hem de içinde barındırdığı birçok temsil sistemi (anlık değişim hızı olarak fizik, polinomun türevi olarak cebirsel, bir eğriye bir noktada teğet olan doğrunun eğimi olarak geometrik boyutu) göz önüne alındığında, lise ve üniversite yıllarında öğrencilerin zorlandıkları, analizin temeli olan ileri düzey matematiksel bir kavramdır (Rachelli ve Bisognin, 2020; Ubuz, 1999). Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı (2018) incelendiğinde türev alt öğrenme alanının içerisinde, limit ve süreklilik, anlık değişim oranı ve türev ile ilgili uygulamalar konularının yer aldığı görülmektedir. Türev ile ilgili uygulamalar konusu içerisinde de maksimum ve minimum problemleri ile bu problemlere ilişkin çözüm süreçlerinden bahsedilir. Maksimum ve minimum problemleri, türevin grafik ile cebirsel temsillerin ilişkilendirildiği problemlerdir. Aynı zamanda günlük hayatta karşılaşılabilecek problemlerin çözümünde türevin nasıl kullanılacağını gösteren örneklerden olduğu söylenebilir. Öğrenciler, içselleştirdikleri temsil sistemlerini birbiriyle ilişkilendirerek maksimum ve minimum problemleri için çözüm süreçlerini oluştururlar (Tall, 1986). Ancak kavramsal anlamaya sahip olmayan bireylerin, bu tarz problemler için gerçekleştirilen çözüm süreçlerini ezberleyerek sonuca ulaştıkları söylenmiştir (Zandieh, 2000).

Türev kavramının soyut yapısı ve sembolik karakteri eğitim koşullarındaki eksiklerle bir araya geldiğinde öğrenmede zorluklara sebep olmaktadır (Orhun, 2012). Yapılan birçok araştırma, öğrencilerin türev konusunu zor bulduğunu göstermiştir (Batır, 2022; Borji vd., 2018; Çekmez ve Baki, 2019; Delos Santos ve Thomas, 2005; Erdoğan, 2017; Maharaj, 2013; Orhun, 2012; Pillay, 2008; Prihandhika vd., 2019; Urhan ve Dost, 2018; Zandieh, 2000). Bunun sebebi ise öğrencilerin türev konusunda kavramsal anlamaya sahip olmamasına bağlanmıştır (Pillay, 2008). Türev gibi soyut olan birçok matematiksel kavram, problem durumunda bireyin çözüm üretebilmesi ve kavramsal anlama gerçekleştirebilmesi için sağlam bir zemin üzerinde kurulmalıdır. Bu durum ise bilgi oluşturma sürecinin yani soyutlama sürecinin önemine işaret etmektedir. Soyutlama süreci daha önce oluşturulmuş olan matematiksel kavramların dikey bir şekilde yeniden yapılandırılarak yeni kavramın oluşturulmasıdır (Hershkowitz vd., 2001).

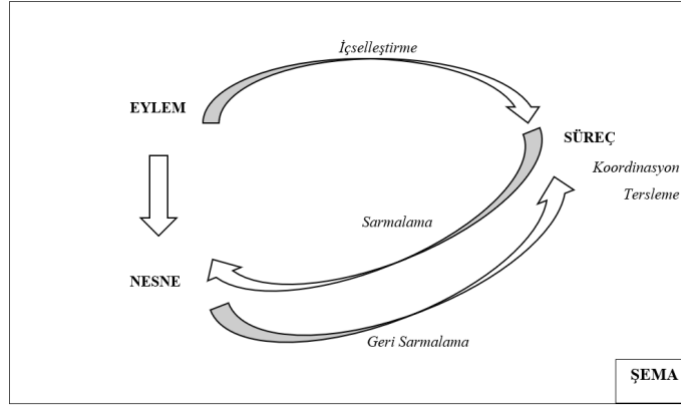
Soyutlama kavramının geçmiş zamanlardan günümüze kadar olan gelişiminin iki farklı bakış açısıyla şekillendiği görülmektedir. Bunlar bilişsel ve sosyokültürel soyutlamadır (Özmantar ve Monaghan, 2007). Sosyokültürel soyutlamaya göre öğrenme ortamı, öğrenenin yaşantısı ve çevresi bilgi oluşturma sürecini etkilemektedir (Dreyfus, 2007). Bilişsel soyutlamaya göre ise öğrenme bağlamdan bağımsız olarak bireyin zihninde gerçekleşmektedir (Özmantar ve Monaghan, 2007). Bilişsel kuramcılardan biri olan Dubinsky (1997), zihinsel nesneler ve üzerine uygulanan eylemler sonucu oluşan yeni nesneler ile yansıtıcı soyutlamaların gerçekleştiğini belirtmiştir. Ed Dubinsky, üniversite düzeyinde öğrenci anlamalarını inceleyip araştırmak için matematik araştırmacılarından oluşan RUMEC adlı bir topluluk kurmuştur. Bu araştırmacıların çalışmaları sayesinde APOS Teorisi ortaya çıkmıştır (Oktaç ve Çetin, 2016). Çalışma kapsamında kullanılmış olan APOS Teorisi kuramsal çerçeve başlığı altında verilmiştir.

Kuramsal Çerçeve

APOS Teorisi, bireyin matematiksel bilgisinin zihinsel eylem, süreç, nesne inşa ederek ve bunları anlamlandırarak problem çözmek için şemalarda organize etmesi hipotezi ile başlar (Dubinsky ve McDonald, 2001). Dolayısıyla teori zihinsel yapılardan ve zihinsel mekanizmalardan oluşmaktadır. Zihinsel yapılar, eylem (action), süreç (process), nesne (object) ve şema (schema) şeklindedir ve yapıların baş harfleri teorinin ismini oluşturmaktadır. Bu yapılar kavramsal anlama düzeyleri olarak geçmektedir ve yapıların oluşturulması yansıtıcı soyutlamalar ile gerçekleşmektedir (Oktaç ve Çetin, 2016). Zihinsel yapılar arasındaki geçişleri sağlayan zihinsel mekanizmalar ise içselleştirme, kapsülleme (sarmalama), geri kapsülleme (geri sarmalama), koordinasyon, tersleme ve temalaştırma şeklindedir. Zihinsel yapılar durağan iken zihinsel mekanizmalar dinamiktir (Şefik, 2017). Matematiksel bir kavramın öğrenilmesi zihinsel mekanizmalar aracılığıyla zihinsel yapılar inşa edildiğinde gerçekleşir (Oktaç vd., 2019). Matematiksel bir kavramı anlamak, oluşturulmuş olan nesnelerin üzerine eylemler uygulanması ile başlar. Daha sonra süreçler oluşturmak için eylemler içselleştirilir ve kapsülленerek nesne formuna kavuşur (Asiala vd., 1997). APOS Teorisinin yapıları ve mekanizmaları arasındaki ilişki Şekil 1’de gösterilmiştir (Çetin ve Dubinsky, 2017).

Şekil 1.

APOS Teorisi Zihinsel Yapıları ve Zihinsel Mekanizmaları Arasındaki İlişki



Teori içerisindeki bu işleyişte matematiksel bir kavramı tanımlamak, zihinsel yapı ve mekanizmalarını belirlemek için genetik çözümlemeler kullanılır (Şefik, 2017; Asiala vd., 1997). APOS teorisi, matematiksel yapıların soyutlanması ile yeni yapıların oluşturulduğu sarmal bir yapıya sahiptir (Şefik ve Dost, 2020). Daha ileri matematiksel kavramlar oluşturulurken önceden oluşturulmuş olan düşük seviyedeki yapılar kaybolmaz, karmaşıklaşan ve zenginleşen şemanın içinde kalır (Asiala vd., 1997). APOS Teorisinin zihinsel yapıları aşağıda kısa özetler halinde verilmiştir.

Eylem: Birey tarafından dışarıdan algılanan işlemin nasıl gerçekleştirileceğine ilişkin adım adım talimatlar gerektiren, bilişsel ya da fiziksel nesnelerin dönüştürülmesidir (Dubinsky ve McDonald, 2001). Birey dışarıdan ipuçları aldıkça adım adım ilerleyebilir. Adımları zihninde canlandıramaz dolayısıyla hiçbir adımı atlayamaz. Eylem aşaması basit görünse de aslında bir kavramı anlamının başlangıcını oluşturur (Asiala vd., 1997). Formülleri ezberleyen, ispatları taklit eden bireyler başarılı oluyor görünse de eylem aşamasındadır ve temel yapılar inşa edemediklerinden bir noktada başarısız olurlar (Oktaç vd., 2019). Kimi araştırmacılar, eylem aşamasındaki öğrencilerin hiçbir görevi yerine getiremeyecekleri yanılgısına düşmüşler ancak bu aşamada öğrenciler ezbere de olsa bazı görevleri gerçekleştirebilirler (Oktaç vd., 2019). Eylem aşaması ne kadar ilkel bir yapı gibi görünse de APOS Teorisinin temelini oluşturur ve diğer aşamaların gerçekleşebilmesi için eylem aşamasına gerek vardır.

Süreç: Bireyin eylemleri tekrar edildikçe içselleşerek sürece dönüşür (Asiala vd., 1997). Birey eylem üzerinde düşündüğünde bilinçli bir kontrol sağlayabilir yani bu dönüşüm kendi kontrolündedir (Cottrill vd., 1996). Birey süreci gerçekten yapmadan gerçekleştirmeyi düşünebilir ya da tersine çevirebilir (Dubinsky ve McDonald, 2001). Süreç aşamasına geçiş için gerekli olan içselleştirme zihinsel mekanizması, bireyin eylemleri farkında olmasını, düşünebilmesini ve diğer eylemleriyle bilinçli bir şekilde koordine edebilmesini sağlar (Dubinsky, 1991). Birey, bir kez süreç oluşturduktan sonra tersine çevirme ve koordine etme gibi mekanizmaları kullanarak başka süreçler oluşturabilir (Cottrill vd., 1996). Eylem ve süreç zihinsel yapıları arasındaki temel fark, eylemin dışsal sürecin ise içsel olması durumudur.

Nesne: APOS Teorisi bireyin zihninde var olan nesnelerin dönüştürülmesi ile başlamaktadır. Birey, sürece bütün olarak bakabildiğinde, dönüşümler yapabileceğini fark ettiğinde ve eylemlerinin süreçler üzerinde hareket edebileceğini anladığında süreci nesneleştirmeye başlamış olur (Asiala vd., 1997). Süreç dinamik bir yapı iken üzerine eylemler uygulandığında dönüştüğü yapı itibarıyla durağanlaşmış olur. Bu olay kapsülleme (sarmalama) zihinsel mekanizması aracılığıyla gerçekleşir. Birçok matematik probleminin çözümünde dönüşüm gerekmektedir. Bu dönüşümü yapabilmek için sürecin nesneye kapsüllenmiş olması gerekmektedir (Dubinsky vd., 2005).

Şema: Şema, bireyin bir matematiksel problem ile karşılaştığında çağırdığı eylem, süreç, nesne ve diğer şemaların oluşturduğu topluluktur (Clark, 1997). Şemalar dinamik yapıdadır ve sürekli kendilerini yenilerler. Bireyin şeması ne kadar zenginse matematiksel bir kavramın temsilleriyle anlamlı şekilde iletişim kurma yeteneği o kadar büyük olur. Şemalar ilerleyen dönemlerde bazı kavramlar için nesne halini alır böylece daha büyük matematiksel kavramların oluşumu sağlanabilir (Dubinsky, 1997). Bir kavramın şeması, içinde barındırdığı zihinsel yapı ve mekanizmalarla tutarlı olmalıdır çünkü bireyin matematiksel problemlerle başa çıkabilmesi oluşturduğu şemanın tutarlılığına bağlıdır (Şefik ve Dost, 2020).

Genetik Çözümleme (Ayrışım). Genetik çözümleme, matematiksel bir kavramın bireyin zihninde nasıl gelişeceğini tanımlayan yapılandırılmış zihinsel yapı ve mekanizmaların oluşturduğu bir sistemdir (Dubinsky, 1997). Genetik çözümlemenin kesin hatları yoktur bir varsayımdır. Varsayımsal bir model olduğu için de kavramın genetik çözümlemesi tek araştırma ile ortaya çıkmayabilir, birçok çalışma ile desteklenmesi gerekir (Asiala vd., 1997). Özetle genetik çözümlemenin öğrencilerin kavram anlayışları ile ilgili verileri anlamlandırmak için kullanılan bir araç olduğu söylenebilir (Cottrill vd., 1996). Genetik çözümlemenin oluşturulmasında ilk adım ise ön genetik çözümleme olarak düşünülebilir. Ön

genetik çözümleme, konu hakkında literatürde bulunan ve uzmanlar tarafından belirlenen tahmini kavram anlayışlarıdır. Ön genetik çözümleme belirlendikten sonra araştırma sonucunda veri analizi kısmında gerekli görülürse revize edilip çalışmanın genetik çözümlemesi oluşturulmuş olur (Şefik, 2017). Sonuç olarak genetik çözümleme, kavram öğretimi öncesinde araştırmacıya yol gösterebileceği gibi kavram öğretimi sonrasında değerlendirme aracı olarak da kullanılabilir.

Maksimum ve minimum problemleri, türev kavramının gerek cebirsel gerekse geometrik yorumunun bir arada kullanılarak bilgi oluşturma sürecinin gerçekleştirildiği problemlerdir. Delos Santos ve Thomas (2005), öğrencilerin maksimum ve minimum problemlerinin çözümünü ezberlediklerini ve altta yatan süreci bilmeden fonksiyonun türevini alıp sıfıra eşitlediklerini belirtmiştir. Literatürde türev ile maksimum ve minimum problemleri kavramlarının bu şekilde öğrenciler tarafından ezberlenerek öğrenildiğinin belirtilmesi, konuyu daha önce hiç öğrenmeyen öğrencilerin bilgi oluşturma süreçlerini analiz etme ihtiyacını doğurmuştur. Bu ihtiyaçtan yola çıkarak bu çalışma ile APOS teorisine göre öğrencilerin türev kavramına ilişkin anlayışlarının yeterli olması durumunda, maksimum ve minimum problemleri için geliştirdikleri çözüm yollarını ezberlemelerinin önüne geçerek aşamalı sorularla kendi çözümlerini oluşturabilecekleri düşünülmektedir. Ayrıca maksimum ve minimum problemlerine ilişkin yapılan çalışmalar incelendiğinde, katılımcıların daha çok mezun ve matematik öğretmeni adaylarından oluştuğu görülmektedir. Bu durum katılımcıların maksimum ve minimum problemlerine ilişkin bilgileri önceden öğrenmiş olduğunu göstermekte ve çalışmalar bireyde zaten mevcut olan bilgiler üzerinde yapılan uygulamalar ile sınırlı kalmaktadır.

Bu çalışmada öğrencilerin türev anlayışları ile maksimum ve minimum problemlerine ilişkin bilgi oluşturma süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Öncelikli olarak Türev Kavramsal Anlama Testi içerisindeki ilk 4 soru ile öğrencilerin türev anlayışları APOS Teorisine göre analiz edilecektir. Ardından maksimum ve minimum problemlerini içeren son 2 soru ile katılımcıların daha önce bu tip soruları görmedikleri göz önünde bulundurularak bilgi oluşturma süreçleri incelenecektir. Bu amaç doğrultusunda araştırmanın problem cümlesi “12. sınıf öğrencilerinin APOS Teorik çatısı altındaki türev anlayışları ve maksimum ve minimum problemlerine ilişkin bilgi oluşturma süreçleri nasıldır?” şeklindedir.

Yöntem

Araştırma Modeli

Nitel olarak desenlenen bu çalışmada, 12. sınıf öğrencilerinin türev anlayışları ve maksimum ve minimum problemlerine ilişkin çözüm süreçleri APOS Teorisine göre analiz edileceği için bilişsel süreçlere odaklanmak gerekmektedir. Araştırma konusu olan bilişsel süreçler doğal ortamında inceleneceğinden (Patton, 1987) gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi veri toplama yöntemlerinin kullanıldığı, derin ve ayrıntılı çalışmaya imkân tanıyan nitel araştırma yöntemlerinden durum (örnek olay) çalışması yöntemi kullanılmıştır. Bu çalışmada, birden fazla durum mevcut olduğundan ve her bir durum kendi içinde bütüncül olarak ele alınıp daha sonra birbiriyle karşılaştırılacağı için bütüncül çoklu durum deseni kullanılmıştır.

Katılımcılar

Araştırmanın katılımcıları; 2020-2021 eğitim öğretim yılında, Bursa'nın İnegöl ilçesinde bir devlet lisesinde 12. sınıfta öğrenim gören 4 erkek öğrenciden oluşmaktadır. Katılımcılar 4 sene boyunca aynı sınıfta öğrenim görmektedir ve lise öğrenimleri boyunca Destekleme ve Yetiştirme Kursu (DYK) dışında herhangi bir kursa gitmemiştir. Ayrıca Bilim ve Sanat Merkezi (BİLSEM) geçmişi olmadıkları da bilinmektedir. Katılımcılar seçilirken amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Bu çalışmada belirlenen ölçütler; katılımcıların matematik ders başarısının yüksek olması, maksimum ve minimum problemlerine ilişkin daha önce çözüm oluşturmamış olmaları ve ön öğrenmelerde eksiklik olmaması açısından türev ünitesi işlenirken devamsızlık yapmamış olmaları şeklindedir. Araştırmanın amacı gereği maksimum ve minimum problemleri konusunu daha önce öğrenmemiş olan öğrenciler seçilerek bilgi oluşturma süreçleri analiz edilmiştir. Öğrencilerin bu tarz problemleri daha önce öğrenmedikleri göz önüne alındığında türev gibi ileri düzey bir kavramın maksimum ve minimum problemlerine ilişkin bilgi oluşturma süreçleri inceleneceği için matematik başarıları yüksek öğrenciler seçilmiştir. Matematik başarıları yüksek olan öğrenciler ile zengin veri çeşitliliğine ulaşılabileceği düşünülmüştür. Matematik dersi genel not ortalamaları Tablo 1’de verilmiştir.

Tablo 1.

Katılımcıların Matematik Dersi Genel Not Ortalamaları

Katılımcılar	Matematik Dersi Genel Not Ortalamaları
Ö1	88
Ö2	84
Ö3	93
Ö4	95

Uygulamaya geçmeden önce araştırmanın Etik Kurul Onayı alınmış ve okul idaresine uygulama ile ilgili genel bilgiler verilerek gerekli destek sağlanmıştır. Katılımcılardan, hazırlanan Gönüllü Onam Formu, veli/vasilerinden ise Veli İzin Formu aracılığı ile yazılı izinler alınmıştır. Çalışma boyunca araştırmacı ismi A harfi ile öğrenciler ise Ö1, Ö2, Ö3 ve Ö4 gibi harflerle kısaltılmıştır.

Veri Toplama Araçları

Bu çalışmanın verilerini, Türev Kavramsal Anlama Testine öğrencilerin verdiği yanıtlar ve yapılan görüşmelerin ses kayıtları oluşturmaktadır. Araştırmada nitel veri toplama tekniklerinden gözlem, görev temelli görüşme ve doküman incelemesi birlikte kullanılmıştır. Görev temelli görüşmeler, matematik eğitimi üzerine gerçekleştirilen nitel araştırmalarda kullanılır. Katılımcıların akıl yürütme süreçleri, matematiksel kavramlarla ilgili anlayışları ve problem çözme süreçleri ile ilgili bilgi edinmek için kullanılır (Koichu, 2009). Bu sebeplerle öğrencilerin türev kavram şemalarını anlayabilmek ve maksimum ve minimum problemlerine ilişkin bilgi oluşturma süreçlerini analiz edebilmek adına görev temelli görüşmelerin faydalı olacağı düşünülmektedir. Yapılan görev temelli görüşmeler araştırmacının tahsis ettiği bir sınıfta birebir olarak gerçekleşmiştir. Katılımcı ve velilerden alınan izinler doğrultusunda ses kaydı alınmış olup görüşmeler ortalama 40 dakikalık sürelerde gerçekleşmiştir. Görüşmeler sırasında öğrenci davranışları hazırlanmış olan ön genetik çözümleme ile ilişkilendirilmiş ve gerekli notlar alınmıştır. Alınan ses kayıtları araştırmacı tarafından dijital ortama aktarılmış ve elde edilen veriler kodlanarak APOS Teorik çatısı altında analiz edilmiştir.

Doküman incelemesi, araştırılmak istenen durum hakkındaki bilgileri içeren yazılı materyallerin analizini kapsamaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Uygulanan Türev Kavramsal Anlama Testi bu araştırmanın dokümanlarını oluşturmaktadır. Bu test için 12. sınıf matematik dersi kazanımları göz önünde bulundurularak 7 adet açık uçlu soru hazırlanmıştır. Bu sorular için; 3 matematik öğretmen, 2 matematik alan uzmanı, 2 matematik eğitimi alan uzmanı ile 1 Türk dili ve edebiyatı öğretmeninden görüşler alınmış ve aynı sınıftan başka bir öğrenci üzerinde pilot uygulama gerçekleştirilmiştir. Alınan görüşler ve gerçekleştirilen pilot uygulamanın sonucunda anlaşılmayan 1 grafik sorusu düzenlenmiş ve anlık değişim oranının tekrara düştüğü 1 soru testten çıkarılmış, toplamda 6 soru ile Türev Kavramsal Anlama Testi hazır hale gelmiştir.

Verilerin Analizi

Bu çalışmada elde edilen veriler, türev kavramının genetik çözümlemesi göz önünde bulundurularak içerik analizi yöntemiyle analiz edilmiştir. İçerik analizinde temel amaç, araştırma verilerini açıklayabilecek kavramlara ulaşmaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Türev kavramının ön genetik çözümlemesi; yapılan pilot çalışmadan elde edilen öğrenci davranışları, kavramın yapısı, literatürde yer alan çalışmalar (Asiala vd., 1997; Borji vd., 2018; Çekmez, 2013; Çetinkaya vd., 2013; Delos Santos ve Thomas, 2005; Maharaj, 2013; Nogle vd., 2019; Pillay, 2008; Prihandhika vd., 2019; Rachelli, 2016; Urhan ve Dost, 2018; Zandieh, 2000), uzman görüşü ile araştırmacının deneyimine bağlı olarak hazırlanmıştır. APOS Teorik çatısı altında hazırlanan türevin ön genetik çözümlemesi Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 2.

Türev Kavramının Ön Genetik Çözümlemesi

Eylem	Süreç	Nesne
Türevin farklı temsillerini birbirinden kopuk olarak yorumlama	Türevin farklı temsilleri arasında ilişkiler kurma	Limit ile değişim oranının kapsüllenerek türev nesnesinin oluşturulması
Türevi ve türevin limit tanımını durağan yapılar olarak düşünme	Fonksiyonun bir noktasındaki türevinin o noktasındaki teğetinin eğimi olduğunu kavrama	Türevin limit tanımını bilişsel bir araç olarak kullanabilme
Uygulama süresince dışarıdan uyarıcıya ihtiyaç duyma	Anlık değişim hızını fizik veya geometri modeli üzerinden açıklama süreci	Farklı kavramlarla türev kavramı arasında ilişki kurabilme Türev sürecinin kapsüllenerek problem durumlarında kullanılması

Bireyde beklenen eylem yapısı davranışları; türevin farklı temsillerini birbirinden kopuk olarak yorumlaması, türevi ve türevin limit tanımını durağan yapılar olarak görmesi içerisindeki süreci fark etmemesi ve uygulama sürecinde

dışarıdan ipuçlarına ihtiyaç duyması şeklindedir. Aşağıda bu çalışmada katılımcılarla yapılan görev temelli görüşmelerin analizi sonucunda elde edilen bulgulardan eylem aşaması davranışına doğrudan örnek olacak bir diyalog verilmiştir.

- Peki ortalama hız ile anlık değişim hızı arasındaki fark neydi?
- Hatırlamıyorum. Bu soruyu geçeceğim. Formülü neydi hatırlamıyorum ki. Bunu burada mı koyuyorduk burada mı koyuyorduk anlamadım. Ortalama hızda mı anlık hızda mı koyuyorduk hatırlayamadım. (Öğrencinin ortalama hız ve anlık değişim hızı kavramlarını durağan formüller olarak görüp ezberlediği, ezberlediği formüllerle soruyu çözmeye çalıştığı, dışarıdan ipucuna ihtiyaç duyduğu görülmektedir.)

Bireyde beklenen süreç yapısı davranışları; türevin farklı temsilleri arasındaki ilişkileri kurması ve türevi içselleştirmesi, fonksiyonun bir noktasındaki türevinin o noktasındaki teğetin eğimi olduğunu kavraması ve anlık değişim hızını fizik veya geometri modeli üzerinden açıklaması şeklindedir. Aşağıda bu çalışmada katılımcılarla yapılan görev temelli görüşmelerin analizi sonucunda elde edilen bulgulardan süreç aşaması davranışına örnek verilmiştir.

Bir parabol ve parabol teğet olan doğrunun ve denkleminin verildiği ve bir noktadaki anlık değişim hızının sorulduğu soruda, öğrencinin doğru ile parabolün teğet olduğunu, teğet doğrusunun eğiminin o noktadaki türev değerine eşit olacağını bunun da o noktadaki anlık değişim hızı olduğunu belirtmesi durumu süreç aşaması davranışına örnektir. Bu açıklamaları yapan öğrencinin fonksiyonun bir noktasındaki türevinin o noktasındaki teğetin eğimi olma durumunu içselleştirerek sürece dönüştürdüğünü göstermektedir.

Bireyde beklenen nesne yapısı davranışları; değişim oranı sürecinin üzerine limit uygulayarak türev nesnesini oluşturması (kapsülleme), türevin limit tanımını problem durumlarında bilişsel bir araç olarak kullanabilmesi, farklı kavramlarla türev kavramı arasında ilişki kurabilmesi ve türev sürecini kapsülleyerek problem durumlarında kullanabilmesi şeklindedir. Aşağıda bu çalışmada katılımcılarla yapılan görev temelli görüşmelerin analizi sonucunda elde edilen bulgulardan nesne aşaması davranışına örnek verilmiştir.

Maksimum ve minimum problemlerinde, öğrencilerin oluşturdukları parabollerde tepe noktasındaki teğet doğrusunun eğiminin 0 olması durumunu türev ile koordine ederek çözmeleri türev kavramını nesneleştirdiklerini göstermektedir.

Yapılan uygulama sonucunda, türev kavramının ön genetik çözümlemesinde bulunmayan bazı davranışlar gözlenmiştir. Bir öğrencinin anlık değişim hızı ve değişim oranı kavramlarını karıştırdığı ve bu kavramları durağan formüller olarak gördüğü, diğer öğrencilerin ise bu kavramları içselleştirdiği görülmüştür. Ön genetik çözümlemede bulunmayan bu davranışlar da eylem ve süreç yapılarına eklenerek tablo revize edilmiş ve son halini almıştır.

Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği

Nitel araştırmalarda geçerlik ve güvenirlik çalışmaları nitel araştırmanın doğasına uygun olarak farklı stratejiler kullanılarak gerçekleştirilmektedir. Erlandson vd. (1993) ile Lincoln ve Guba'ya (1985) göre nitel araştırmalarda; iç geçerlik yerine inandırıcılık, dış geçerlik yerine aktarılabilirlik, iç güvenirlik yerine tutarlılık ve dış güvenirlik yerine teyit edilebilirlik kavramları kullanılmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2018).

Yapılan görev temelli görüşmeler ve doküman analizinden elde edilen bulguların birbirini desteklemesi ile araştırmanın inandırıcılığının arttığı düşünülmektedir. Dış geçerlik ise araştırmanın genellenebilirliği ile ilgili bir kavramdır ve nitel araştırmalarda genellenmenin uygun bir durum olmaması bu kavramın aktarılabilirlik olarak değişmesine sebep olmuştur (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Bu çalışmada katılımcıların amaçlı örnekleme yöntemi ile seçilmesinin aktarılabilirliğe katkı sağladığı söylenebilir. Teyit edilebilirlik, araştırmacının bulgularının ve analizlerinin tarafsızlık açısından değerlendirilmesidir. Bu çalışmada araştırma verileri, araştırmacı tarafından hazırlanan APOS Teorik çatısı altında oluşturulan genetik ayrışma göre analiz edilmiştir. Yıldırım ve Şimşek'e (2018) göre araştırmalarda toplanan verileri analiz ederken kullanılan teorik çerçeveler araştırmanın güvenirliğini arttırmaktadır. Teyit edilebilirliği sağlamak adına araştırmacı dışında başka bir araştırmacı dokümanları incelemiş, oluşturulan genetik ayrışma göre analiz etmiştir. Miles ve Huberman (1994) tarafından geliştirilen güvenirlik formülü ile güvenirlik hesaplaması yapılmıştır. Araştırmacılar verileri kodlayarak analiz etmiş ve kodlamalar arasındaki uyum %95 olarak hesaplanmıştır. Araştırmacılar yapılan kodlamaları kontrol etmek ve görüş ayrılığını gidermek amacıyla tekrar görüşmüştür. Kodlayıcılar arasındaki tam uyum sağlanmıştır.

Bulgular

Katılımcıların maksimum ve minimum problemlerine ilişkin bilgi oluşturma süreçleri incelenirken araştırma için önemli görülen öğrenci davranışlarına yer verilmiştir.

Türev testinin ilk sorusunda, öğrencilerden türev kavramının zihinlerinde çağrıştırdığı düşünceleri belirtmeleri istenmiştir. Araştırmacı bu soru ile katılımcıların mevcut türev şemalarında bulunan türevle ilişkili diğer kavramları ortaya çıkarmayı hedeflemektedir. Öğrencilerin uygulamanın birinci sorusuna ilişkin verdiği yanıtlar Tablo 3'te belirtilmiştir.

Tablo 3.**Öğrencilerin Birinci Soruya İlişkin Cevapları**

Öğrenciler	Öğrenci Cevapları
Ö1	Eğim
Ö2	Eğim, tanjant
Ö3	Eğim, tanjant, limitin fonksiyonlanmış hali
Ö4	Eğim, tanjant, anlık değişim hızı

Soruya verilen yanıtlar incelendiğinde; tüm öğrencilerin türevi eğim kavramı ile ilişkilendirdiği görülmektedir. 3 öğrencinin tanjant ile 1 öğrencinin limitin fonksiyonlanmış hali diyerek türevin limit tanımıyla ve 1 öğrencinin de anlık değişim hızı kavramı ile ilişkilendirdiği söylenebilir. Elde edilen bulgular ezbere cevaplar olabileceğinden tek başına bir anlam içermemektedir. Diğer sorularla birlikte yorumlandığı zaman anlamlı olacağı düşünülmektedir.

Uygulamanın ikinci sorusunda, öğrencinin anlık değişim hızını fizik modeli üzerinden açıklaması hedeflenmiştir.

A: İlk 5. saatte ortalama hızı sorduğunda türevini mi aldın?

Ö1: Evet.

A: Peki ortalama hız ile anlık değişim hızı arasındaki fark neydi?

Ö1: Hatırlamıyorum. Bu soruyu geçeceğim. (Öğrenci diğer sorularla uğraştıktan sonra tekrar bu soruya dönmektedir.)

Ö1: Formülü neydi hatırlamıyorum ki. Bunu burada mı koyuyorduk burada mı koyuyorduk anlamadım. Ortalama hızda mı anlık hızda mı koyuyorduk hatırlayamadım.

A: İlk 4 saatteki hız derken hangi saatler arasındaki ortalama hızı soruyor?

Ö1: 0 ve 4. saatler arasındakini soruyor. Nasıl buluyorduk? 0 - 4 gibi bir şey yazıyorduk üstünden de şunun (fonksiyonu gösteriyor) türevini alıyorduk bir şey koyuyorduk ona sanki. Fonksiyonu onun yerine mi koyuyorduk? Yoksa türevini alıp mı koyuyorduk? Bir dakika (düşünüyor), hatırlamıyorum olmayacak. Yazayım yine de ben yanına.

Ö1 adlı öğrencinin anlık değişim hızı ile değişim oranı kavramlarını karıştırdığı, hangisinde türev alması gerektiğini bilmediği görülmektedir. Bu durum göz önüne alındığında öğrencinin kavramları durağan formül olarak gördüğü ve içselleştirmede olduğu söylenebilir. Buna rağmen ezberlediği formülleri kullanarak uygulamanın bu sorusunu doğru bir şekilde çözdüğü görülmektedir.

Ö2 ve Ö3 adlı öğrencilerin bu soruyu *dışarıdan uyarıcıya ihtiyaç duymadan*, anlık değişim hızı ile türev kavramlarını koordine ederek çözdüğü görülmüştür. Öğrencilerin birinci soruda türev ile ilişkili olan kavramlar arasında anlık değişim hızından bahsetmemelerine rağmen bu soruda ilişkilendirebildikleri görülmüştür. Ö4 adlı öğrencinin ise diğer öğrencilerden farklı olarak türevin limit tanımını kullandığı çözüm süreci aşağıda diyaloglarla birlikte Şekil 1 ve Şekil 2’de verilmiştir.

Ö4: 5. saatteki anlık değişim hızı derken 5. saatteki türevini bulun demek istiyor. O zaman t yerine 5 mi yazıyoruz? Pardon bir dakika $f(x) - f(a)$ bölü $x - a$ limit 5’e yaklaşıırken, o zaman bir dakika limit x, 5’e yaklaşıırken $f(x)$ ’imiz $f(5)$ mi yazmalıyım $f(t)$ mi kafam karıştı. Neyse bu formülü yazayım da. Burada $f(x)$ ’in yerine değil de a ’nın yerine yazıyorduk galiba. Burada t vermişsiniz ya o yüzden kafam karıştı.

A: Peki fark var mı?

Ö4: Yok. $f(t)$ yazıyorum buraya. $f(5)$ oluyor. Ama $f(5)$ ’i vermemiş ki. Vermesi gerekiyor muydu? Bir dakika.

Şekil 1.**Ö4’ün İkinci Soruya İlişkin Yanıtı**

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\frac{f(5) - f(a)}{5 - a} \quad \frac{2b - f(a)}{5 - a} \quad \lim_{t \rightarrow 5}$$

Ö4: Bunları buldum ama devamını getiremiyorum. Böyle hatırlıyorum yanlış hatırlıyor da olabilirim. İlk işlediğimiz için bunu unutmuş olabilirim. Burada kaldım şimdi. Bir dakika ben a yerine mi yazacaktım acaba? $f(x)$ burada. Bir a yerine yazıp öyle deneyeyim.

Şekil 2.

Ö4'ün İkinci Soruya İlişkin Yanıtı

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 26$$

$$f'(x) = 4x - 5$$

$$f'(1) = 4(1) - 5 = -1$$

$$f(1) = 2(1)^2 - 5(1) + 26 = 23$$

$$y = -x + 24$$

Ö4 adlı öğrencinin çözüm süreci incelendiğinde türevin limit tanımını kullanması dikkat çekmektedir. Bu süreçte öğrencinin türev kavramını anlık değişim hızı ile ilişkilendirdiği, değişim oranı sürecinin üzerine limit uygulayarak kapsülleme mekanizması aracılığıyla türev nesnesini oluşturduğu görülmektedir. Öğrencinin türev nesnesini bu şekilde oluşturması altta yatan sürecin farkında olduğunu ve ihtiyaç durumunda nesneleştirebildiğini göstermektedir.

Uygulamanın üçüncü sorusu ile, öğrencilerin anlık değişim hızını geometrik model üzerinden açıklaması ve türev kavramını geometrik temsil ile ilişkilendirmesi hedeflenmiştir.

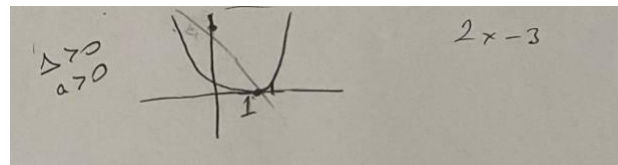
Ö1, Ö2 ve Ö4 adlı öğrencilerin anlık değişim hızı denilince türev aldıkları ancak türev alma sürecinde doğru denkleminin türevini niçin aldıklarını belirtmedikleri görülmüştür. Ö3 adlı öğrenci ise türev kavramıyla anlık değişim hızını ilişkilendirmiştir ancak diğer öğrencilerden farklı olarak $x=1$ noktasında doğru ile parabolün teğet olduğunu belirtmiştir. Dolayısıyla bu noktadaki teğet doğrusunun eğiminin o noktadaki türev değerine eşit olacağını bunun da 1. saniyedeki anlık değişim hızı olduğunu belirtmiştir. Ö3 adlı öğrencinin türevi anlık değişim hızıyla koordine etmesinin yanı sıra geometrik model üzerinden açıklayabildiği görülmüştür. Teğetin eğimi ile türev kavramı arasında anlamlı bağ kurduğu ve türev kavramını içselleştirdiği görülmektedir.

Uygulamanın dördüncü sorusu ile, öğrencilerin verilen bir fonksiyonun bir noktadaki türev değeri ile o noktadaki teğetin eğimi arasındaki ilişkiyi açıklamaları hedeflenmiştir.

Ö1 adlı öğrencinin diskriminant kavramını yanlış yorumladığı ve x eksenine teğet olan bir parabol çizdiği durum Şekil 3'te verilmiştir.

Şekil 3.

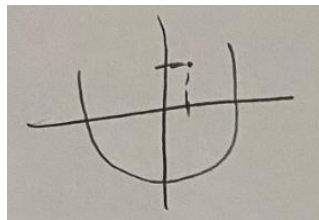
Ö1'in Soruya İlişkin Yanıtı



Ö2 adlı öğrenci diskriminantı kontrol etmediği için x eksenini kesen bir parabol çizmektedir. Şekil 4'te görüldüğü üzere parabole teğet olması gereken noktayı parabolün iç bölgesinde aldığı görülmektedir.

Şekil 4.

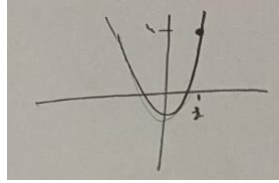
Ö2'nin Soruya İlişkin Yanıtı



Ö3 adlı öğrenci diskriminant kavramını bilmesine rağmen parabolün konumunu yanlış çizmektedir. (1,4) noktasını parabolün üzerinde çizmesine rağmen o noktadan geçen bir doğru çizmediği durum Şekil 5'te görülmektedir.

Şekil 5.

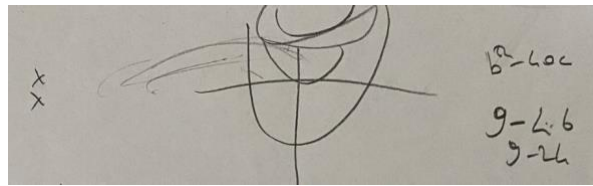
Ö3'ün Soruya İlişkin Yanıtı



Ö4 adlı öğrenci ise diskriminant değerleri için parabolün konumunu doğru bir şekilde belirtmiştir. Ancak parabole teğet olacak bir doğru çizemediği durum Şekil 6'da görülmektedir.

Şekil 6.

Ö4'ün Soruya İlişkin Yanıtı



Öğrencilerin uygulamanın dördüncü sorusuna ilişkin verdiği yanıtlara bakılacak olursa, tüm katılımcıların cebirsel temsili grafiksel temsile çeviremediği görülmektedir. Bu soruda verilen cebirsel fonksiyonu zihinlerinde canlandıramadıkları ve fonksiyona bir noktadan teğet olacak doğruyu çizemedikleri görülmüştür. Aynı zamanda öğrencilerin parabol çizimi konusundaki ön öğrenmelerinde eksiklikler olduğu görülmüştür. Bir öğrencinin parabolü kesen bir doğru çizdiği, diğerinin parabolün üzerinde olması gereken noktayı iç bölgesinde aldığı ve diğer iki öğrencinin de diskriminant kavramını bilmelerine rağmen çizim konusunda sıkıntı yaşadıkları için türev kavramına geçemedikleri görülmüştür.

Uygulamanın beşinci sorusu ile, öğrencilerin maksimum ve minimum problemleri için bir çözüm modeli oluşturması hedeflenmektedir. Bu problem içerisinde öğrencilerin bilgi oluşturma sürecine yardımcı olacak ve onları çözüme adım adım götürecek alt sorular da mevcuttur. Böylece öğrencilerin, var olan zihinsel şemalarını kullanarak kavramlar, stratejiler ve modeller oluşturmaları hedeflenmektedir.

Ö1: Kümesin alanını tek bilinmeyen cinsinden yazabilir misiniz? Yazarız. Şuraya y desek, şuraya da y diyelim. 16 metreydi.

A: Uzun kenarı ne buldun?

Ö1: 16 — 2y buldum. (daha sonra kümesin alanını cebirsel ifade olarak yazmıştır.)

Ö1: Ne belirtir? İkinci dereceden denkleme benziyor.

A: Yani analitik düzlemde ne belirtir?

Ö1: İkinci dereceden denklem, o da parabol olur.

A: Tahmini şekli nasıl olur?

Ö1: Kolları aşağı bakar çünkü a' sı negatiftir. Deltasına bir şey söyleyebilir miyim bilmiyorum.

A: b şıkında neyin grafiğini buldun?

Ö1: Alanın grafiğini buldum.

A: Peki sana maksimum alanı soruyordu.

Ö1: Şurada tepe noktası.

A: Peki o nokta ile türev arasında nasıl bir ilişki var?

Ö1: Türev burada 0'dır.

Öğrencinin bu soru tipini ilk kez gördüğü halde soru içerisindeki alt sorularla çözüme gidebildiği görülmektedir. Maksimum alan ile parabolün tepe noktasının ilişkilendirilmesinin ardından tepe noktasında türevin sıfır olması gerektiğini belirttiği ancak tepe noktasındaki türevin neden sıfır olması gerektiğini belirtmediği görülmüştür. Ö1 adlı öğrencinin diğer sorularda türev kavramını tam olarak içselleştiremediği, dışarıdan uyarıcıya ihtiyaç duyduğu ve kavramsal anlamadan ziyade işlemsel anlama gerçekleştirdiği görülmüştür. Bu soruda ise öğrencinin ezberlediği gerçekleri kullanarak ve aşamalı problemin adımlarını takip ederek bilgi oluşturma sürecini gerçekleştirebildiği görülmektedir.

Ö2 adlı öğrencinin uygulamanın beşinci sorusu için verdiği yanıt aşağıda Şekil 7 ve Şekil 8'de verilmiştir.

Ö2: Kısa kenara x diyelim. O zaman uzun kenara da $16 - 2x$ kalır. O zaman alanı da $16 - 2x$ çarpı $2x$ olur. Yanlış yaptım $16 - 2x$ çarpı x olur. (Şekil 7)

A: Bu form ne belirtir analitik düzlemde?

Ö2: Eğim yok parabol belirtir. x 'in önünde artı var kollar yukarı bakacak. Him... (düşünüyor) x^2 'nin önüne bakıyorduk. Eksi var o zaman kollar aşağı bakacak. Maksimum alan en tepe noktasıdır. (Şekil 8)

A: Tepe noktası ile türev arasında nasıl bir ilişki var?

Ö2: Orada eğim 1 miydi? Hayır 0'dı. O zaman a şıkında bulduğumuz sonucun türevini alıp 0'a eşitleyeceğiz. Burada x , 4 geliyor.

Şekil 7.

Ö2'nin 5. Sorunun a Şıkına İlişkin Çözümü

a) İnşa edeceğimiz kümesin alanını tek bilinmeyen cinsinden yazabilir misiniz?

$$16 - 2x \cdot (2x)$$

$$(16 - 2x)(x) = 16x - 2x^2$$

Şekil 8.

Ö2'nin 5. Sorunun b Şıkına İlişkin Çözümü

b) Yazdığınız bu matematiksel form analitik düzlemde ne belirtir? Şeklini çizebilir misiniz?



Öğrencinin türev kavramı ile bir noktadaki teğetin eğimini ilişkilendirdiği ve türev kavramını içselleştirdiği görülmektedir. Türev şemasında kurduğu anlamlı bağlar sayesinde bilgi oluşturma sürecini gerçekleştirebildiği ve türev sürecini nesneleştirerek problem durumunda kullanabildiği görülmektedir.

Ö3 adlı öğrenci, beşinci sorunun a şıkında verilen problem durumunu tek değişkenli fonksiyon haline getirebilmiş, b şıkında ise yazdığı alan fonksiyonunun analitik düzlemde kolları aşağı bir parabol olduğunu belirtmiştir. Ardından c şıkına çözüm ürettiği esnada araştırmacı ile arasında geçen diyalog aşağıda verilmiştir.

Ö3: Maksimum alan olması için en tepe noktası olması lazım herhalde. O yüzden ama türevle alakalı, burada en tepe noktasında türev 0 oluyordu benim bildiğim. O yüzden arasındaki ilişki bence böyle yani.

A: O noktayı bulabilir misin?

Ö3: 0 koyacağız x yerine. O zaman denklemin türevini alacağız $16 - 4x$ olur. Maksimum noktasında türev 0 olduğu için 0'a eşitleyeceğiz. $16 = 4x$ olur $x = 4$ gelir.

Ö3 adlı öğrenci maksimum alanı bulabilmek için parabolün "en tepe" noktasına bakması gerektiğini söylemiştir. Tepe noktası ile türev arasındaki ilişkinin ise türevin bu noktada sıfır olması ile alakalı olduğunu belirtmiştir. Ardından fonksiyonun türevini alarak sıfıra eşitlemiş ve kısa kenarı bularak oradan da alanı 32 olarak bulmuştur. Öğrencinin grafiğin bir noktasındaki teğetin eğiminin 0 olması durumunda o noktadaki türevinin de 0 olması gerektiğini belirttiği görülmüştür. Bu durum ise öğrencinin bir noktadaki teğetin eğimini o noktanın türevi ile koordine ettiğini ve oluşan süreci içselleştirebildiğini göstermektedir. Ayrıca içselleştirdiği türev sürecini problem durumlarında çözüm üretebilmek için kapsüllediği ve nesne yapısını oluşturduğu görülmektedir.

Ö4 adlı öğrencinin uygulamanın beşinci sorusu için verdiği yanıt aşağıda verilmiştir.

A: Senden maksimum alanı istiyor.

Ö4: Maksimum alan da şurası olur. (Parabolün tepe noktasını göstermektedir.) Maksimum noktası.

A: Şimdi soruda diyor ki maksimum nokta ile türev arasında bir ilişki kurabilir misin?

Ö4: Maksimum noktası türevin 0 olduğu noktadır. Çünkü bu noktada eğim 0'dır. Yani en en tam eksi ile artı noktasının birleşimi olduğu için. (Öğrenci eksi ile artı noktasının birleşimi derken tepe noktasından geçen teğet doğrusunun yatay eksen ile yaptığı pozitif-negatif açı durumlarını kastetmektedir.)

Ö4, maksimum alanı bulmak için türevin sıfır olması gerektiğini söylemiştir. Araştırmacı neden sıfır olmalı diye sorduğunda ise bu noktada eğimin sıfır olduğunu belirtmiştir. Bu durumu "en en tam eksi ile artı noktasının birleşimi" şeklinde ifade etmesinin aslında türev kavramını anlık değişim hızı ile ilişkilendirdiğini göstermektedir. Aynı zamanda eksi ile artının birleşimi derken ise x eksenini ile yaptığı açının sıfır derece olması ile yani tanjant kavramı ile ilişkilendirdiği görülmektedir. Öğrencinin verdiği cevapların ezbere cevaplar olmadığı, türev şemasının içerisindeki kavramaların birbiriyle anlamlı bağlar kurduğu düşünülmektedir. Karşısına çıkan problem durumunda anlamlı bağları koordine ederek yeni ve doğru yorumlarda bulunabildiği görülmektedir. Problem durumuyla başa çıkabilmesi ve doğru yorumlarda

bulunabilmesi türev şemasının *tutarlı* olduğunu göstermektedir. Fonksiyonun türevini alarak kısa kenarı bulmakta ve oradan da kümesin maksimum alanına ulaştığı görülmektedir. Öğrencinin teğetin eğimi kavramı ile türev kavramını ilişkilendirerek bir süreç oluşturduğu ve bu süreci problem durumlarında kullanarak türev *nesnesini* oluşturabildiği görülmüştür.

Türev Kavramsal Anlama Testinin beşinci sorusuna verilen yanıtlara genel olarak bakılacak olursa öğrencilerin hepsinin problemi çözebildiği görülmüştür. Ancak diğer sorulara verilen yanıtlar ile birlikte incelendiğinde bir öğrencinin ezberlenmiş gerçeklerle çözdüğü, diğer öğrencilerin ise tutarlı türev şemaları sayesinde çözüme ulaşabildikleri görülmüştür.

Uygulamanın altıncı sorusu ile, türev ve maksimum ve minimum problemleri arasında ilişki kurabilmek, strateji geliştirip bu tarz problemlerin çözümünde kullanabilecekleri bir model oluşturmaları hedeflenmiştir. Beşinci sorudan farklı olarak öğrencilere probleme dair aşamalar verilmemiştir. Öğrencilerin bir önceki soruda oluşturdıkları stratejilerle problemi çözmeleri hedeflenmektedir.

A: Kare prizma nasıl bir geometrik cisimdir?

Ö1: Biliyorum da nasıl olduğunu size nasıl tarif edeceğim onu düşünüyorum şu an.

A: Peki hacim formülünü hatırlıyor musun?

Ö1: Alt tabanı, yan tabanı bir de üstünü çarpıyorduk galiba. Kare prizmada her taraf aynı mıydı hatırlayamadım. Şeklini çizmeye çalışayım.

A: Birim kare maliyet derken neyi kastediyor?

Ö1: Yani şöyle küçük küçük yerleri istiyor. Bizim bu soruda bir fonksiyon çıkarmamız lazım. Bir şey çıkarmamız lazım.

Ö1 ile araştırmacı arasında geçen diyalog incelendiğinde öğrencinin cebirsel olarak bir fonksiyon yazma sezgisinin olduğu görülmektedir. Öğrenci, kare prizmayı çizdikten sonra prizmanın kenarlarına değişkenleri verip hacmi $x^2 \cdot y$ olarak ifade etmiştir. Testteki diğer sorular türev sorusu olduğu için bu sorunun da türev sorusu olduğunun farkında olduğu ancak türevi nasıl kullanacağını kestiremediği görülmüştür. Ö1 adlı öğrencinin fonksiyon grafiği çizmek istediği ancak iki değişkenli fonksiyon olduğu için bunu yapamadığı görülmektedir. Öğrenci, maliyetin az olmasının fonksiyonun minimum noktası ile alakalı olabileceğini belirtirken bir önceki sorudan öğrendiği bilgileri kullandığı düşünülmektedir. Ancak öğrenci iki değişkenli fonksiyonun türevini alamadığı için herhangi bir eylem gerçekleştirmemiştir. Fonksiyonu tek değişkenli hale çevirmesine rağmen Şekil 9'da görüldüğü üzere üslü ifadenin türevini yanlış almıştır.

Şekil 9.

Ö1'in 6. Soruya İlişkin Çözümü

$$\begin{aligned}
 3x^2 + 4(x-y) &= 36 \\
 4(x-y) &= 36 - 3x^2 \\
 x-y &= \frac{36-3x^2}{4} \\
 y &= \frac{36-3x^2}{4} + x \\
 V &= x^2 \cdot y = x^2 \cdot \left(\frac{36-3x^2}{4} + x \right) \\
 &= \frac{36x^2 - 3x^4}{4} + x^3 \\
 &= 9x^2 - 0.75x^4 + x^3 \\
 &= 6x - 36x^{-3/4}
 \end{aligned}$$

Öğrencinin ifadeyi sadeleştirmeye çalışırken sık sık soru sorduğu yaptıklarından emin olmadığı ve araştırmacıdan *ipucu beklediği* gözlenmiştir. Daha sonra öğrenci soruyu çözemeyeceğini belirtmiştir ve uygulama sonlandırılmıştır. Uygulamanın altıncı sorusu incelendiğinde öğrencinin sık sık *dışarıdan uyarıcılara ihtiyaç duyduğu* ve türev kavramını *içselleştiremediği* görülmektedir. Aynı zamanda fonksiyonun türevini yanlış bir şekilde aldığı için soruyu çözemediği görülmüştür.

Ö2 adlı öğrencinin kare prizmayı doğru özelliklerle tanımladığı ve hacim formülünü belirlediği değişkenlerle rahatça oluşturabildiği görülmüştür. Aynı zamanda tabanın yüzey alanı ve yan yüzeylerin alanını kullanarak toplam maliyet fonksiyonunu oluşturmuştur. İki değişkenli fonksiyonu hacim denklemini kullanarak tek değişkenli fonksiyon haline çevirmiştir. Tek değişkenli hale çevirdikten sonra minimum maliyet ile türev kavramı arasındaki ilişkiyi aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

A: İstenen şeyin maksimum ya da minimum olmasının türev ile ilişkisi nedir?

Ö2: Eğimi, türevi sıfır. y' 'yi bulmak için yalnız bırakacağız. x^2 karşıya bölme olarak geçer. Diğerinde yerine yazarız.

Şekil 10.

Ö2'nin 6. Soruya İlişkin Çözümleri

The image shows three panels of handwritten mathematical work. The first panel shows the initial function $4xy + 3x^2$ and its derivative $4x \cdot \frac{36}{x^2} + 3x^2$, which simplifies to $4 \cdot \frac{36}{x} + 3x^2$. The second panel shows the derivative set to zero: $384x^{-2} + 3x^2 = 0$, which simplifies to $-384x^{-2} + 6x = 0$. The third panel shows the final steps: $\frac{-384}{x^2} + \frac{6x}{(x^2)} = 0$, which simplifies to $-384 + 6x^3 = 0$, then $6x^3 = 384$, $x^3 = 64$, and finally $x = 4$.

Öğrencinin içselleştirdiği türev kavramını maksimum ve minimum problemleriyle ilişkilendirebildiği görülmüştür. Aynı zamanda türev sürecini nesneleştirerek problem durumlarında kullanabildiği görülmüştür.

Ö3 adlı öğrenci, kare prizmanın özelliklerini doğru bir şekilde yorumlayarak hacim, yan yüzey alanları ve taban yüzey alanı için x ve y cinsinden denklemleri oluşturmuştur. Ardından toplam maliyet için birim fiyatlarla alanları çarparak fonksiyonu oluşturmuştur. Ancak bulduğu bu fonksiyonun iki değişkenli olması sebebiyle kısa süreli ne yapacağını bilememiştir. Ardından hacim denklemini kullanarak maliyet fonksiyonunu tek değişkenli hale çevirebilmiştir. Maliyetin en az olması için türev alması gerektiğini belirtmiştir. Bu noktada beşinci soruda maksimum alan için oluşturduğu türev bilgisini kullandığı düşünülmektedir. Öğrencinin 6. soruya ilişkin çözümü Şekil 11'de verilmiştir.

Şekil 11.

Ö3'ün 6. Soruya İlişkin Çözümü

The image shows a single panel of handwritten mathematical work. It starts with the function $6x + 4 \cdot 36 \cdot x^{-2}$, which simplifies to $6x + -4 \cdot 36 \cdot x^{-2}$. The derivative is set to zero: $6x - \frac{384}{x^2} = 0$. This is then multiplied by x^2 to get $x^2 \cdot 6x - 384 = 0$, which simplifies to $6x^3 - 384 = 0$. The final steps are $6x^3 = 384$, $x^3 = 64$, and $x = 4$.

Öğrencinin bu soruda genel olarak zorlanmadığı söylenebilir. İçselleştirdiği türev sürecini problem durumlarında kullanarak nesneleştirdiği görülmüştür. Öğrencinin maksimum ve minimum problemlerine ilişkin bilgi oluşturma sürecini gerçekleştirmiş olması türev şemasının içerisindeki zihinsel yapı ve mekanizmaların birbiriyle koordineli çalıştığını göstermiştir. Bu durum ise türev şemasının tutarlı bir yapıya sahip olduğunu göstermektedir.

Ö4 adlı öğrencinin, kare prizma için hacim denklemini oluşturduğu ancak birim kare maliyeti fiyatını kenarlar yerine koyduğu görülmüştür. Araştırmacının birim kare maliyeti kavramını açıklaması üzerine öğrenci taban yüzeyi ve yan yüzey maliyetini doğru olacak şekilde düzeltmiştir. Ancak öğrencinin yan yüzey sayısını 4 olarak değil 1 olarak aldığı için toplam maliyet fonksiyonunu hatalı olarak yazdığı görülmüştür. Elde ettiği hatalı maliyet fonksiyonunu parabol benzetmesi için kolların yukarı bakması gerektiğini söylemiştir ancak fonksiyonda iki değişken olduğu için öğrencinin kafa karışıklığı yaşadığı görülmüştür. Hacim denklemini kullanarak x' 'i yalnız bırakıp maliyet fonksiyonunda yerine yazınca tek değişkenli fonksiyon olarak düzeltmiştir. Türevini alıp sıfıra eşitlemesi gerektiğini belirtmiştir. Öğrencinin altıncı soruya ilişkin çözümleri Şekil 12'de verilmiştir.

Şekil 12.

Ö4'ün 6. Soruya İlişkin Çözümleri

$$\begin{aligned}
 3y^2 + 8y &= 96 \\
 x &= \frac{96}{y^2} \\
 3y^2 + 8y &= 96 \\
 3y^2 + \frac{96}{y^2} \cdot y &= 96 \\
 3y^2 + \frac{96}{y} &= 96 \\
 3y^2 + 96y^{-1} &= 96 \\
 6y - 96y^{-2} &= 0 \\
 6y - \frac{96}{y^2} &= 0 \\
 \frac{96}{y^2} - 6y &= 0 \\
 \frac{96}{y^2} - 6y &= 0
 \end{aligned}$$

Öğrencinin minimum noktayı bulmak için türevin sıfır olduğu noktayı bulması gerektiğini belirtmesi ve bir parabol çizip tepe noktasında hayali bir doğru çizmesi araştırmanın önemli bulgularındandır. Bu durum öğrencinin türev şemasındaki cebirsel ve geometrik temsiller arası geçişleri yapabildiğini göstermektedir. Aynı zamanda kavramı içselleştirdiğini ve problem durumlarında kapsüllediği türev nesnesini kullanabildiğini göstermektedir. Ancak hatalı olarak oluşturduğu toplam maliyet fonksiyonu üzerinde eylemlerini gerçekleştirdiği için sonuca ulaşamamıştır ve bir süre sonra deneme yanılma yöntemiyle x ve y 'yi bulmaya çalışmıştır. Öğrenci sonucu sıfırlayacak değerleri bulamadığından ve sorunun cevabının çıkmadığını belirterek uygulamayı sonlandırmıştır. Ö4 adlı öğrencinin aslında türev kavramını içselleştirdiği ve minimum nokta için türevin sıfır olması gerektiğinin farkında olduğu görülmektedir. Ö4, mevcut türev şeması içerisinde anlamlı bağlar kurmasına rağmen kare prizmanın yanal yüzey sayısına dikkat etmediği için fonksiyonu yanlış bir şekilde oluşturmuştur ve bu yüzden soruyu çözememiştir.

Araştırmanın bulguları incelendiğinde, değişim oranı ve anlık değişim hızı kavramlarının birbiriyle karıştırılması veya içselleştirilmesi durumunun da öğrenci davranışlarında mevcut olduğu görülmüştür. Bu sebeple genetik çözümlemeye bu davranışlar da eklenerek revize edilmiştir. Gerçekleştirilen uygulama sonucunda; öğrencide gözlenen davranışlar “Var”, gözlenmeyen davranışlar “Yok” ve bazı sorularda gözlenip bazı sorularda gözlenmeyen davranışlar ise “Kısmen” ile kodlanmıştır. Katılımcıların verdiği cevapların genetik çözümlemedeki karşılıkları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4.*Öğrenci Davranışlarının Genetik Çözümlemedeki Karşılığı*

	Öğrenci Davranışları	Ö1	Ö2	Ö3	Ö4
Eylem	Türevin farklı temsillerini birbirinden kopuk yorumlama	Var	Yok	Yok	Yok
Eylem	Türevi ve türevin limit tanımını durağan formüller olarak görme	Var	Yok	Yok	Yok
Eylem	Uygulama sürecinde dışarıdan uyarıcıya ihtiyaç duyma	Var	Yok	Yok	Yok
Eylem	Anlık değişim hızı ve değişim oranı kavramlarını durağan yapılar olarak düşünme	Var	Yok	Yok	Yok
Süreç	Türevin farklı temsilleri arasında ilişki kurma	Yok	Var	Var	Var
Süreç	Fonksiyonun bir noktadaki türevinin o noktadaki teğetinin eğimi olduğunu kavrama	Yok	Var	Var	Var
Süreç	Anlık değişim hızını fizik veya geometri modeli üzerinden açıklama	Yok	Var	Var	Var
Süreç	Anlık değişim hızı ve değişim oranı kavramlarını içselleştirme	Yok	Var	Var	Var
Nesne	Limit ile değişim oranının kapsüllenecek türev nesnesinin oluşturulması	Yok	Yok	Yok	Var
Nesne	Türevin limit tanımını bilişsel bir araç olarak kullanabilme	Yok	Yok	Yok	Var
Nesne	Farklı kavramlarla türev kavramı arasında ilişki kurabilme	Yok	Var	Var	Var
Nesne	Türev sürecinin kapsüllenecek problem	Kısmen	Var	Var	Var

durumlarında kullanılabilirliği

Türev kavramının yapısı, uzman görüşü, pilot çalışma ve literatürdeki çalışmalara bağlı olarak hazırlanmış olan genetik çözümlemeye göre öğrenci cevaplarının karşılıkları yukarıdaki tabloda belirtilmiştir. Tabloya bakıldığında APOS Teorisine göre, Ö1 adlı öğrenci *eylem* aşaması, Ö2 ve Ö3 adlı öğrenciler bazen *süreç* bazen *nesne* aşaması, Ö4 adlı öğrenci ise *nesne* aşaması davranışı gösterdiği görülmektedir.

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada 12. sınıf öğrencilerin türev anlayışları ve maksimum ve minimum problemlerine ilişkin bilgi oluşturma süreçleri APOS Teorisine göre analiz edilmiştir. Elde edilen sonuçların genel değerlendirmesi yapılacak olursa, APOS Teorisine göre eylem aşamasında olan öğrencinin türev kavramı için oluşturduğu şema içerisinde birbirinden kopuk ve anlamlarının tam olarak bilinmediği birbiriyle ilişkilendirilemeyen temsil sistemleri bulunmaktadır. Duru'ya (2006) göre çoklu gösterimler arasındaki ilişkilerin anlaşılmadığı bu durum, öğrencilerin türev konusunda yaşadığı zorlukların sebeplerinden biridir. Uygulama sürecinde çoğu zaman dışarıdan uyarıcıya ihtiyaç duyduğu ve kendinden emin olamadığı görülmüştür. Ayrıca değişim oranı ve anlık değişim hızı kavramında da eksikliklerinin olduğu görülmüştür. Bu durum Açıkıldız ve Gökçek'in (2015) bir çalışmasında, katılımcıların değişim oranı kavramının türev ile ilişkilendirilmesinde güçlük yaşadıkları sonucuyla örtüşmektedir. Bu konuyla ilgili yapılan çalışmaların sonucunun benzer olmasının sebebinin, bireylerin türev anlayışlarının işlemsel anlamaya sahip olması, sürecin tam olarak içselleştirilmemesi ve içselleştirilmediği için de değişim oranı gibi dinamik bir kavramın durağan formül olarak görülmesi ve altta yatan sürecin farkında olunmamasından kaynaklandığı söylenebilir. Bu sonuç, Pillay'ın (2008) gerçekleştirdiği bir uygulamada öğrencilerin değişim oranı kavramını formülleştirdikleri ve değişim oranı kavramına götüren işlem ve süreçlerden ayrıldıkları sonucuyla örtüşmektedir. Maksimum ve minimum problemlerini içeren soruların birinde öğrencinin ezberlediği gerçeklerle bilgi oluşturma sürecini gerçekleştirdiği görülmekteyken, diğerinde üslû ifadelerin türevini doğru bir şekilde alamadığı için sonuca ulaşamadığı görülmektedir. Bu sonuç Gür ve Barak'ın (2007) bir çalışmasındaki, türev konusunda yapılan hatalar içerisinde üslû sayılarda yapılan işlem hatalarının da mevcut olduğu sonucunu destekler niteliktedir.

Bir öğrencinin türev için "limitin fonksiyonlanmış hali" demesi dikkat çekmektedir. Burada öğrencinin türevin limit tanımını anlatmaya çalıştığı ve limit ile fonksiyon süreçlerini ilişkilendirdiği görülmektedir. Türev/teğet/anlık değişim hızı kavramları arasında anlamlı bağlar kurduğu ve temsil sistemleri arasındaki geçişleri açıklayabildiği görülmektedir. Maksimum ve minimum problemlerinde mevcut türev şemasını nesneleştirerek problem için çözüm üretebildiği görülmektedir. Bu durum Maharaj'ın (2013) yaptığı bir uygulamada, türevin algısal temsillerinin anlaşılmasının türevi nesneleştirmeye yardımcı olduğu sonucuyla örtüşmektedir. Problem durumunda türev sürecini kapsülleyerek nesne boyutuna ulaştırdığı ve bu nesneyi kullanarak maksimum ve minimum problemlere ilişkin bilgi oluşturma sürecini gerçekleştirdiği görülmektedir. Bazı sorularda süreç bazı sorularda ise nesne aşaması davranışı gösteren öğrencilerin dışarıdan bir uyarıcıya ihtiyaç duymadan ilerleyebildiği görülmüştür. APOS Teorisine göre bireyler problem durumlarında her zaman aynı zihinsel yapının davranışlarını göstermeyebilir. Oktaç ve Çetin (2016), bireylerin bazı sorularda süreç aşaması davranışı gösterirken bazı sorularda da nesne aşaması davranışı gösterebildiğini belirtmiştir.

Nesne aşamasındaki öğrencinin anlık değişim hızının türev ile ilişkili olduğunu belirtmesinin ardından türevin limit tanımından yararlanması dikkat çekmektedir. Türevi anlık değişim hızı ile ilişkilendirdiği, limit süreci ile değişim oranı sürecini koordine ederek türev nesnesini oluşturduğu görülmektedir. Diğer öğrencilerden farklı olarak türev nesnesini bu şekilde oluşturması, nesneye ulaşmaya çalışırken geçirilen sürecin farkında olduğunu göstermektedir. Yaptığı işlemleri açıklaması istendiğinde ise türev nesnesini geri kapsülleyerek içerisindeki süreçlere geri dönüp onları açıklayabildiği görülmektedir. Son soruda yan yüzey sayısını yanlış hesaplamasından kaynaklı hatalı fonksiyon oluşturduğu ve bu sebeple türev almaya çalışırken sonuca ulaşamadığı görülmüştür. Bu durum, öğrencinin türev kavramı ile ilgili hatasından kaynaklanmadığı için APOS Teorisine göre türev anlayışı yorumlanırken göz önüne alınmamıştır. Öğrencinin tüm sorulara verdiği yanıtlar genel olarak değerlendirildiğinde türev anlayışının nesne düzeyinde olduğu düşünülmektedir. Ayrıca diğer öğrencilerden farklı olarak limiti değişim oranı kavramı ile koordine edip türev nesnesini oluşturması ve bu nesneyi problem durumlarında kullanabilmesi öğrencinin APOS Teorik çatısına göre nesne anlayışında olduğunu destekler niteliktedir.

Uygulama sürecinde dördüncü soruyu çözebilen öğrenci bulunmamaktadır. Sorunun genel yapısına bakıldığında, cebirsel form üzerinden grafiksel formun çizilmesinin soruyu kolaylaştıracağı söylenebilir. Ancak öğrencilerden hiçbiri bu durumu başarıyla gerçekleştirememiştir. Bu durum Çekmez (2013) tarafından uygulanan cebirsel olarak verilen bir fonksiyonun bir noktasındaki teğetin denklemini hesaplama etkinliklerinde, öğrencilerin gerekli grafiksel çıkarımı yapamamaları sebebiyle problem durumlarında ilerleyemedikleri sonucuyla paralellik göstermektedir. Öğrencilerin temsil sistemleri arasında geçiş yaparken hata yaptığı ve güçlük yaşadığı bu durum, yapılan birçok çalışmanın sonucunda

da vurgulanmıştır (Baker vd., 2000; Duru, 2006; Tall ve Vinner, 1981; Vinner ve Dreyfus, 1989). Dreyfus ve Halevi'ye (1990) göre grafiksel ve cebirsel temsiller arasındaki ilişkiyi sağlamlaştırmak, bireylerin oluşturdıkları bilginin gücünün sağlam bir zemine oturması açısından önemlidir. Orhun'a (2012) göre, türevin grafiksel olarak yorumlanması durumu düşünme becerisi gerektirmekte ve problem durumunun çözüm sürecinin kolaylaştırılmasını sağlamaktadır. Aynı zamanda türevin süreç-nesne düzeyindeki zihinsel yapılarının gelişimini de kolaylaştırmaktadır (Maharaj, 2013). Dolayısıyla türev kavramı işlenirken derslerde geometrik temsil üzerinden yapılacak olan etkinlikler sayesinde temsil sistemleri arasında geçişlerin kolaylaşacağı söylenebilir. Bu durum ise öğrencilerin muhakeme yeteneklerinin gelişmesine katkı sağlayabilir.

Öğrencilerin türev anlayışının APOS Teorisine göre eylem düzeyinde olması ile maksimum ve minimum problemleri için bilgi oluşturmamış olmasının ilişkili olduğu düşünülmektedir. Bu sonuç Maharaj'ın (2013) yaptığı bir çalışmada, öğrencilerin birçoğunun türev konusunda güçlük yaşadığı ve bu durumun öğrencilerin APOS Teorisine göre uygun süreç-nesne zihinsel yapılarına sahip olmamalarından kaynaklandığı sonucuyla paralellik göstermektedir. Aynı şekilde öğrencilerin süreç-nesne düzeyinde davranışlar göstermesi durumu ile bu problemler için bilgi oluşturma sürecini gerçekleştirmiş olmaları bağlantılı görülmektedir. Pillay (2008) yaptığı çalışmada, öğrencilerin maksimum ve minimum problemlerinde zorlandıkları sonucuna ulaşmıştır. Ancak bu çalışmada, öğrenci anlayışlarının APOS Teorisine göre ileri seviyede olması durumunda bilgi oluşturma süreçlerini gerçekleştirebildikleri görülmüştür. Türev kavramını içselleştiremeyen öğrencinin maksimum ve minimum problemlerini zor bulmasının normal olduğu düşünülmektedir. Çünkü içselleştirilmeyen kavramlar, ezberlenmesi gereken kurallar olarak kalmaktadır.

Öğrenci anlayışının APOS Teorisine göre ileri düzeyde olması durumunda bu tarz problemlerle başa çıkabilmelerinin öğretim ortamlarına örnek olma niteliğinde olduğu düşünülmektedir. Derslerde maksimum ve minimum problemlerine ilişkin çözüm stratejisini öğrencilere direkt olarak vermek yerine aşamalı matematiksel sorularla stratejiyi kendilerinin oluşturabilecekleri bir öğretim ortamı tasarlanabilir. Bu durum ise matematiğin kurallarla dolu bir ders olarak görülmesinin önüne geçecektir. Her yeni kavramın önceki öğrenilenlerle ilişkili olduğunun ve matematiğin sarmal olarak ilerlediğinin fark edilmesini sağlayacaktır.

Bu araştırmada, APOS Teorisine göre hazırlanmış olan genetik çözümleme kullanılarak öğrenci türev anlayışları belirlenmiş ardından bilgi oluşturma süreçleri incelenmiştir. Hazırlanan genetik çözümleme ile öğrencilerin zihinsel yapıları gözlemlenebilir hale gelmektedir. Dolayısıyla bu genetik çözümlemelerin derslerde kullanılmasının öğrenci anlayışlarını fark edebilmek ve etkinlikleri buna göre tasarlamak açısından öğrenme ortamlarına katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Bu araştırmada hazırlanmış olan genetik çözümlemenin başka araştırmalarda çeşitli seviyelerden katılımcılar üzerinde uygulanabileceği düşünülmektedir. Ayrıca başka matematiksel kavramlarla ilgili APOS Teorik çatısı altında hazırlanacak olan genetik çözümlemelerin alana katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Katkıda Bulunanlar

Bu çalışmaya katkısı olan kişi, kurum veya kuruluş yoktur.

Etik Kurul Onay Bilgileri

Bu çalışmada, Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Eğitim Araştırmaları Etik Kurulu'nun 04.10.2021 tarihli 23 oturum sayısı ve 1 karar numarası ile etik kurul onayı alınmıştır.

Çıkar Çatışması

Yazarlar tarafından çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Finansal Destek

Bu çalışma için herhangi bir finansal destek alınmamıştır.

Yazar Katkıları

Bu çalışma birinci yazarın yüksek lisans tez çalışmasından üretilmiştir. Çalışmanın uygulama, veri toplama, raporlama ve analiz süreci ilk yazar tarafından yapılmıştır. Tezin planlama, uygulama ve yazım süreci ise yazar ve danışman iş birliğinde yürütülmüştür.

Kaynakça

- Asiala, M., Cottrill, J. & Dubinsky, E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 399-431. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(97\)90015-8](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90015-8)
- Baker, B., Cooley, L. & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(5), 557-578. <https://doi.org/10.2307/749887>
- Batır, O. (2022). APOS Teorisinin maksimum minimum problemlerini anlamada bir çerçeve olarak kullanılması başarı ve tutuma etkisi. (Tez No: 753296). [Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi].
- Borji, V., Alamolhodaei, H. & Radmehr, F. (2018). Application of the APOS-ACE Theory to improve students' graphical understanding of derivative. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology*, 14(7), 2947-2967. <https://doi.org/10.29333/ejmste/91451>
- Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., John, D. & Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: the case of the chain rule? *The Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 345-364.
- Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior*, 15(2), 167-192.
- Çekmez, E. (2013). *Dinamik matematik yazılımı kullanımının öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamalarına etkisi*. (Tez No: 344508). [Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi].
- Çetin, İ. & Dubinsky, E. (2017). Reflective abstraction in computational thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, 47, 70-80. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.06.004>
- Çetinkaya, B., Erbaş, A.K. & Alacacı, C. (2013). Değişim oranı olarak türev ve tarihsel gelişimi. İ. Ö. Zembat, M. F. Özmentar, E. Bingölbalı, H. Şandır, A. Delice (Eds.) *Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar* (s. 529-555). Pegem Akademi.
- Delos Santos, A. G. & Thomas, M. O. (2005). The growth of schematic thinking about derivative. A. Roche (Ed.), *Building Connections: Theory, research and practice* (pp. 377-384). Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Dreyfus, T. (2007). *Processes of abstraction in context the nested epistemic actions model*. <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=d1900be9d6a043ac815c81344caa8c2713d4cc329>
- Dreyfus, T. & Halevi, T. (1990). Quad fun--a case study of pupil computer interaction. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 10(2), 43-48.
- Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. In L. P. Steffe (Ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experience* (pp. 160-202). Springer-Verlag NY. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4612-3178-3_9
- Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level. D. Carlson, C. Jhonson, D. Porter, A. Watkins, D. Lay, W. Watkins (Eds.), *Resources for Teaching Linear Algebra* (v. 42, pp. 85-106). Mathematical Association of America. <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=1f4edf083683c384596a9a9c6632f885e7e547c7>
- Dubinsky, E. & McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergrad mathematics education. D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: an ICMI study* (pp. 273-280). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer. <https://people.math.wisc.edu/~rwilson/Courses/Math903/ICMIPAPE.PDF>
- Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A. & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 335-359. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-005-2531-z>
- Duru, A. (2006). *Bir fonksiyon ve onun türevi arasındaki ilişkiyi anlamada karşılaşılan zorluklar*. (Tez No: 181514). [Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi].
- Erlandson, D. A., Harris, E. L., Skipper, B. L. & Allen, S. T. (1993). *Doing naturalistic inquiry: a guide to methods*. Beverly Hills, CA: Sage.
- Gür, H. & Barak, B. (2007). The erroneous derivative examples of eleventh grade students. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 7(1), 473-480. https://www.researchgate.net/profile/Huelya-Guer/publication/234730224_The_Erroneous_Derivative_Examples_of_Eleventh_Grade_Students/links/5abe4620a6fdccda659f33e/The-Erroneous-Derivative-Examples-of-Eleventh-Grade-Students.pdf
- Hershkowitz, R., Schwarz, B. & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in contexts: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 195-222. <https://doi.org/10.2307/749673>
- Koichu, B. (2009). What can pre-service teachers learn from interviewing high school students on proof and proving? In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 9-15). National Taiwan Normal University.
- Lincoln, Y. S. & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills, CA: Sage.

- Maharaj, A. (2013). An APOS analysis of natural science students' understanding of derivative. *South African Journal of Education*, 33(1), 1-19. <https://hdl.handle.net/10520/EJC130323>
- Miles, B. M. & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: an expanded sourcebook* (2nd ed.) Newbury Park, CA: Sage.
- Millî Eğitim Bakanlığı (2018). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı*. <https://mufredat.meb.gov.tr/ProgramDetay.aspx?PID=343>
- Nogle, C., Martinez-Planell, R. & Moore-Russo, D. (2019). Using APOS Theory as a framework for considering slope understanding. *The Journal of Mathematical Behavior*, 54, 100684. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.12.003>
- Oktaç, A. & Çetin, İ. (2016). APOS Teorisi ve matematiksel kavramların öğrenimi. E. Bingölbalı, S. Arslan, İ. Ö. Zembat (Eds.), *Matematik Eğitiminde Teoriler* (1. bs., ss. 163-182). Pegem Akademi.
- Oktaç, A., Triguerras, M. & Romo, A. (2019). APOS theory: connecting research and teaching. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 33-37. <https://film-journal.org/Articles/7183C55AFA4AE90DD92299C47722.pdf>
- Orhun, N. (2012). Graphical understanding in mathematics education: Derivative function and students' difficulties. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 55, 679-684. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.09.551>
- Özmantar, M. F. & Monaghan, J. (2007). A Dialectical Approach to the Formation of Mathematical Abstractions. *Mathematics Education Research Journal*, 19(2), 89-112. <https://link.springer.com/article/10.1007/BF03217457>
- Pillay, E. (2008). *Grade twelve learners' understanding of the concept of derivative*. [Doctoral Dissertation, University of KwaZulu-Natal, KwaZulu-Natal]. https://www.researchgate.net/publication/277056819_Grade_twelve_learners%27_understanding_of_the_concept_of_derivative
- Prihandhika, A., Prabawanto, S., Turmudi, T. & Suryadi, D. (2019). Epistemological obstacles: an overview of thinking process on derivative concepts by APOS Theory and clinical interview. *Journal of Physics: Conference Series*, 1521. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1521/3/032028/pdf>
- Rachelli, J. (2016). Compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca: análise segundo o modelo cognitivo APOS. *XX EBRAPEM, Brasil*.
- Rachelli, J. & Bisognin, V. (2020). Peer instruction: uma experiência no ensino de cálculo com base em metodologias ativas de aprendizagem. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 15(1), 1-21. <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2020.e66341/43211>
- Şefik, Ö. (2017). *Öğrencilerin iki değişkenli fonksiyon kavramını anlamalarının apos teorisi ile analizi* (Tez No: 484096). [Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi].
- Şefik, Ö. & Dost, Ş. (2020). The analysis of the understanding of the three-dimensional (Euclidian) space and the two-variable function concept by university students. *The Journal of Mathematical Behavior*, 57, 100697. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.03.004>
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169. https://wrap.warwick.ac.uk/id/eprint/507/1/WRAP_Tall_dot1981a-concept-image.pdf
- Ubuz, B. (1999). Genel matematikte calculus öğrenci hataları. *Matematik Dünyası*, 8, 9-11. <https://hdl.handle.net/11511/77634>
- Urhan, S. & Dost, Ş. (2018). *The analysis of pre-service math teachers' level of understanding the derivative concept within the context of APOS Theory* [SHS Web of Conferences]. ERPA International Congresses on Education, Istanbul, Turkey. <https://doi.org/10.1051/shsconf/20184801064>
- Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions fort the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356-366. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.20.4.0356>
- Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2018). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (11.baskı). Seçkin Yayıncılık.
- Zandieh, M. J. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. C. Kessel, M. Keynes (Eds), *Research in Collegiate Mathematics Education IV* (v. 8, pp. 103-127). CBMS Issues in Mathematics Education.

Extended Abstract

Introduction

Derivative, which is a part of departments such as engineering, physics, economics and mathematics in daily life, is an advanced mathematical concept that is the basis of analysis (Rachelli and Bisognin, 2020; Ubuz, 1999). Many studies have shown that students find the subject of derivatives difficult and attribute this to the fact that students do not have a conceptual understanding of derivatives (Pillay, 2008). It can be said that maximum and minimum problems are examples of how graphics and algebraic representations are associated and also show how derivatives can be used to solve problems that may be encountered in daily life. Many abstract mathematical concepts such as derivatives must be established on a solid basis so that the individual can produce solutions in case of a problem, and this points to the importance of the knowledge construction process, that is, the abstraction process. The abstraction process is the creation of a new concept by vertically restructuring previously created mathematical concepts (Hershkowitz et al., 2001). In the literature, it is seen that RBC+C and APOS Theory are used more frequently than the others among the abstraction theories. RBC+C Theory consists of epistemic actions, and APOS Theory consists of mental actions. Therefore, it is thought that RBC+C Theory will be useful for analyzing concrete concepts, while APOS Theory will be more useful for analyzing abstract and advanced concepts. Considering that APOS Theory emerged as a result of studies carried out to analyze abstract concepts at the university level, it was thought that APOS Theory would be appropriate since this study will examine the understanding of an abstract concept such as derivative in the student's mind and the process of creating knowledge about maximum and minimum problems.

APOS Theory focuses on the development process of mathematical concepts in the student's mind. It can be said that students go through the stages of APOS Theory in the process of learning concepts. APOS Theory takes its name from the initials of the four structures it contains. These stages are action, process, object and schema (Asiala et al., 1997). In APOS theory, action is a transformation from mathematical objects that the individual carries out through step-by-step procedures and operations. The process can be thought of as creating an internal mental structure when an action is repeated and the individual reflects on the action. An object is constructed from a process in which the individual becomes aware of that process as a whole and can transform upon it. Schema is the collection of actions, processes, objects and other schemas that an individual calls upon when faced with a mathematical problem (Clark, 1997).

This research was conducted to analyze 12th grade students' understanding of derivatives with the APOS Theoretical framework and to examine their knowledge construction processes regarding maximum and minimum problems.

Method

The case study method was used in this research. The participants consist of four students studying in the 12th grade at a public high school in Bursa. During the task-based interviews with the participants, a 6-question Derivative Conceptual Comprehension Test was applied, from which expert opinion was obtained. The first 4 questions aimed to reveal students' current derivative schemes, and the last 2 questions aimed to examine their knowledge construction processes regarding maximum and minimum problems. The data collection methods of the research consist of observation, task-based interview and document analysis. The obtained data were analyzed by content analysis method according to the preliminary genetic analysis prepared based on the APOS Theory.

Findings

In line with the analysis, it is seen that 1 student has an action understanding, 2 students sometimes have a process understanding and sometimes an object understanding, and 1 student has an object understanding. According to APOS Theory, it is seen that the student in the action stage needed support while producing solutions to the maximum and minimum problems, the student with object understanding could not reach the solution due to the mistake he made in the number of lateral surfaces, and the other 2 students were able to successfully carry out the knowledge creation process.

Results and Discussion

When we look at the students' generalization of their understanding of derivatives to maximum and minimum problems, it is seen that Ö1 was able to solve the question in the 5th question but could not generalize the derivative

scheme in the 6th question. Ö4 could not reach the solution in the last question due to the mistake he made in the number of lateral surfaces. It was observed that other students were able to produce solutions to problems thanks to the consistency of their derivative schemes.

This research shows that students can create knowledge themselves if their understanding of derivatives is at an advanced level compared to APOS Theory and there are no deficiencies in prior learning.

It is thought that transitions between representation systems will be easier and students' reasoning abilities will be improved, thanks to the activities to be carried out on geometric representation in lessons while teaching the concept of derivative.