THE JOURNAL OF TURKISH EDUCATIONAL SCIENCES
TÜRK EĞİTİM BİLİMLERİ DERGİSİ

f ve f' Grafikleri Arasındaki Matematiksel Bağlantılar Üzerine Argümantasyonun Akılcı Sorgulama ile Desteklenmesi

Supporting Argumentation on the Mathematical Connections Between the Graphs of f and f' by Rational Questioning

Selin Urhan

Yazar Bilgileri

Selin Urhan
Doç. Dr., Hacettepe Üniversitesi, Matematik Eğitimi,
selin.urhan@hacettepe.edu.tr

ÖZ

Bu çalışmanın amacı, öğretmenin argümantasyon sürecini akılcı sorgulama destekli yürütmesinin öğrencilerin f ile f' grafikleri arasındaki matematiksel bağlantılar üzerine akıl yürütmesini nasıl etkilediğini araştırmaktır. Çalışma, Türkiye'de bir üniversitede matematik eğitimi programında son sınıfta öğrenim görmekte olan 13 öğretmen adayı ile yürütülmüştür. Öğrencilerden f' grafiğinin sunulduğu ve buradan f grafiğinin oluşturulmasının istendiği bir görev üzerinde bireysel çalışmaları ve ardından bireysel çalışma ürünleri üzerine tartışmaları istenmiştir. Dersi veren öğretim elemanı, argümantasyona akılcı sorgulama yaparak dahil olmuş ve öğrencilere akıl yürütme sürecindeki performanslarını akılcılık bağlamında denetleyici ve akılcı davranmaya teşvik edici sorular sormuştur. Argümantasyonun yapısı Toulmin modeli, öğretmenin öğrencileri sorgulaması süreci Öğretmenin Akılcı Sorgulama Çerçevesi ve öğrencilerin öğretmenin soruları karşısındaki söylemleri ve davranışları Habermas Akılcı Davranış Teorisi ile analiz edilmiştir. Öğretmenin akılcı sorgulaması sayesinde öğrencilerin f ve f' grafikleri arasındaki matematiksel bağlantıları kurmada daha akılcı davranabildiği görülmüştür. Öğretmenin akılcı sorgulama davranışı, öğrencileri birbirlerini akılcı sorgulamaya ve akılcı davranma konusunda desteklemeye yöneltmiştir. Elde edilen sonuçlar, öğretmenin matematik sınıflarında akılcı sorgulama destekli öğrenme ortamları oluşturmasının akılcı davranma kültürü oluşturabileceğine işaret etmektedir.

Makale Bilgileri

Anahtar Kelimeler
Argümantasyon
Matematiksel akıl yürütme
Akılcılık teorisi
Akılcı sorgulama

Keywords
Argumentation
Mathematical reasoning
Rationality theory
Rational questioning

Makale Geçmişi
Geliş: 10.07.2024
Kabul: 07.10.2024

ABSTRACT

The aim of this study is to investigate how teachers' rational questioning during argumentation influences students' reasoning about the mathematical connections between the graphs of f and f'. The study was conducted with 13 senior students in a mathematics education program at a university in Türkiye. Students were requested to individually work on a task involving the graph of f' and subsequently asked to derive the graph of f, followed by argumentation on their individual works. The teacher engaged in argumentation by asking rational questions, encouraging the students to behave rationally, and monitoring their performance within the context of rationality. The structure of argumentation was analyzed using Toulmin's model, the teacher's questioning by the Teacher Rational Questioning Framework, and students' behaviors using Habermas' Construct of Rationality. Through the teacher's rational questioning, it was observed that students were able to reason more rationally in constructing mathematical connections between the graphs of f and f'. The teacher's rational manner during argumentation directed students towards rational questioning of each other, supporting them to perform more rationally. The findings suggest that designing learning environments supported by rational questioning could foster a culture of rational behavior in mathematics classrooms.

Makale Türü Araştırma

Önerilen Atıf Urhan, S. (2024). f ve f' grafikleri arasındaki matematiksel bağlantılar üzerine argümantasyonun akılcı sorgulama ile desteklenmesi. *TEBD*, *22*(3), 1919-1953. https://doi.org/10.37217/tebd.1514191

Giriş

Matematiksel anlama hem “anlama” sürecini hem de bu sürecin sonunda edinilen “bilgi”yi temsil eder (Cai ve Ding, 2015). Matematiksel anlama öğrencinin zihninde gerçekleşir. Öğrencinin bir kavramı anlamasına aracılık eden önceki bilgileridir. Öğrenci ulaşabildiği kaynaklardan destek alarak yeni kavramı zihnindeki önceki anlamaları ile bütünleştirmeye ve yeni matematiksel kavramı anlamlandırmaya çalışır. Bu sürecin sonunda öğrencinin zihninde kavrama ilişkin inançlar oluşur (Kastberg, 2002). Bu bağlamda, öğrencinin bir matematiksel kavramı anlaması onun söz konusu kavramla ilgili kendine özel inanç sistemi oluşturmasıdır diyebiliriz.

Matematiksel bağlantı kurmak, öğrencinin iki veya daha fazla kavramı, tanımı, teoremi, ya da temsili birbirleriyle, diğer disiplinlerle veya gerçek hayatla ilişkilendirdiği bilişsel bir süreçtir (García-García ve Dolores-Flores, 2018). Öğrenci inanç sisteminin ürünü olarak zihninde matematiksel bağlantılar kurar (Kastberg, 2002). Öğrencinin inanç sistemi, matematik kültüründe söz konusu kavramla ilgili kabul edilmiş inançlarla uyumlu değil ise öğrenci yanlış bir anlamaya sahiptir ya da zihninde asıl kavrama alternatif kavramlar geliştirmiştir (García-García ve Dolores-Flores, 2018). Yanlış anlamalar ve alternatif kavramlar öğrencilerin doğru matematiksel bağlantılar kurmalarını engeller (Kastberg, 2002).

İnançlar, bireyin söylediklerinden ve yaptıklarından anlaşılır (Rokeach, 1968). İnançlara doğrudan ulaşmaya çalışmak yerine inançlar ortaya çıkarılmalıdır (Francisco, 2013). Matematiksel bağlantılar, öğrenciler matematiksel görevleri yerine getirirken ürettikleri yazılı veya sözlü argümanlarında ortaya çıkar. Çünkü öğrenci matematiksel etkinliklerde zihnindeki inançlarını, dolayısıyla matematiksel anlamalarını ve kurduğu matematiksel bağlantıları dışa vurarak hareket eder (García-García ve Dolores-Flores, 2021). Bu bağlamda, öğrencilerin matematiksel anlamalarını ve kurdukları matematiksel bağlantıları ortaya çıkarabilmek için matematiksel etkinliklerdeki davranışlarına bakmak gereklidir.

Öğrencilerden bir matematiksel görevi yerine getirirken akılcı davranması beklenir (Boero, 2006). Matematiksel etkinliklerde öğrencinin akılcı davranması, iddialarını güvenilir yollarla gerekçelendirebilmesini, görevi tamamlamak için amaca uygun araç seçebilmesini ve kullanabilmesini, diğerleri tarafından anlaşılır ve kabul edilebilir açıklamalar yapabilmesini gerektirir (Morselli ve Boero, 2009). Matematik sınıflarında bir etkinlik yürüten öğrenci, bu akılcılık kriterlerini sağlıyor ise bu öğrencinin matematiksel etkinlikteki kavramları gerçekten anladığı ve bildiği söylenir (Boero ve Morselli, 2009). Matematiksel anlamanın akılcılık perspektifinden yorumu, öğrencilerin zihnindeki matematiksel kavramlara ilişkin inanç sistemi ile birlikte düşünüldüğünde, öğrencilerin matematiksel etkinliklerde başarılı sayılabilmeleri için matematik kültüründe kabul görmüş inançlar ile tutarlı inançlara sahip olmaları, bu inançlar doğrultusunda doğru ve geçerli matematiksel bağlantılar kurmaları, matematiksel bağlantıları amaca uygun kullanmaları ve performanslarını içinde bulundukları sınıfın diğer üyeleri tarafından anlaşılır ve kabul edilebilir şekilde açıklamaları gerektiği anlaşılmaktadır.

Öğrencilerin matematiksel etkinliklerde akılcı davranmasını beklemek için önce onlara akılcılığı öğretmek ve akılcı davranma konusunda tecrübe kazandırmak (Douek, 2014), aynı zamanda da matematiksel etkinliklerdeki performanslarını analiz etmek ve akılcılık kriterlerini sağlamalarındaki gelişimi takip etmek gerekmektedir (Morselli ve Boero, 2009). Bunun için matematik sınıflarında etkinliklerde öğrencilerin iddialarını ve görevi yerine getirme stratejilerini paylaştığı ve tartıştığı argümantasyon sürecinin oluşmasına izin verilmesi ve öğrencilerin problem çözme veya kanıt yapma sürecine girmeden önce argümantasyona dâhil olmalarının sağlanması önemlidir (Urhan ve Bülbül, 2022, 2023a, 2023b). Argümantasyon sürecinde öğrenciler tartışırken matematiksel anlamalarını ve matematiksel bağlantılarını dışa vuracak (García-García ve Dolores-Flores, 2021) ve bu da öğrencilerin davranışlarını akılcılık bağlamında analiz etmeyi mümkün hale getirecektir. Diğer yandan argümantasyon sürecinin öğretmen tarafından nasıl yürütüldüğü argümantasyonun etkililiğini sağlamak ve kontrol etmek açısından önemlidir. Argümantasyon sürecinin öğretmen tarafından akılcı sorgulama destekli yürütülmesinin, öğrencileri iddia üretme, veri bulma, veri ve iddiayı güvenilir ve uygun gerekçeler ile ilişkilendirme bağlamında desteklediği belirtilmektedir (Zhuang ve Conner, 2022).

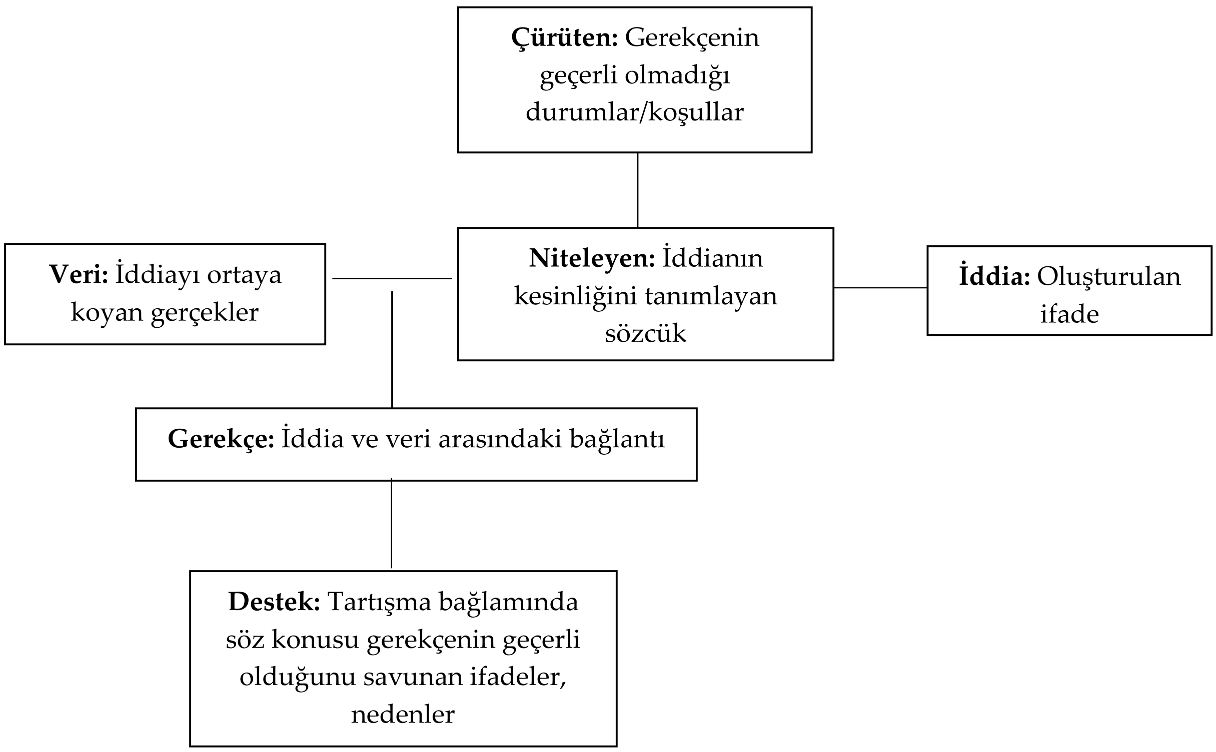
Bu çalışmada, akılcı sorgulamanın üniversite öğrencilerinin kalkülüs kavramlarını anlama ve kalkülüs kavramları arasında bağlantı kurma odaklı bir argümantasyondaki davranışlarına etkisi araştırılacaktır. Kalkülüs dersinde öğrencilerin bireysel akıl yürütme sürecindeki davranışlarını sınıf içinde akılcı sorgulama destekli argümantasyon süreci ile desteklemek ve öğrencilerin davranışlarındaki değişimleri gözlemlemek amaçlanmaktadır. Urhan ve Bülbül (2023a), öğrencilerin diferansiyel denklemler içeren bir problemi çözme sürecinde davranışlarını kâğıt üzerindeki ürünlerini analiz ederek değerlendirmişler, üniversite öğrencilerinin matematik derslerindeki problem çözme etkinliklerinde davranışlarını akılcı olma yönünde destekleyecek sınıf içi tartışmaların yapılmasını ve bu tartışmaların öğrencilerin bireysel problem çözme davranışları üzerindeki etkisinin araştırılmasını önermişlerdir. Üniversite öğrencilerinin geometri ve cebir alanında kanıt yapma süreçlerindeki davranışlarını akılcılık bağlamında analiz eden çalışmalarda da (Urhan ve Bülbül, 2022, 2023b) sınıf içi argümantasyon süreçlerinin öğrencilerin davranışları üzerindeki etkisinin akılcılık perspektifinden araştırılması önerilmiştir. Alanyazındaki bu öneriler dikkate alınarak, bu çalışmada üniversite öğrencilerin kalkülüs kavramlarını anlamayı ve bu kavramlar arasında bağlantı kurmayı gerektiren matematiksel bir görevdeki davranışlarına akılcı sorgulama destekli argümantasyonun etkisi araştırılacaktır.

Teorik Çerçeve

Argümantasyonun Yapısal Analizi: Toulmin Modeli

Argümantasyon bir bağlama ilişkin iddialar üretme, nedenler sunarak iddiaları destekleme, başkalarının iddialarına karşı çıkma ve sundukları nedenleri eleştirme, eleştirileri çürütme gibi eylemlerin bir birey ya da topluluk tarafından yürütüldüğü süreçtir (Toulmin vd., 1984). Argümantasyon bir ya da mantıksal olarak bağlantılı daha fazla sayıda argümandan oluşur. Argüman bir akıl yürütme zinciri olup, bireyin bir konuya ilişkin bir iddiayı savunmak ya da çürütmek için ürettiği neden ya da nedenlerdir (Boero vd., 2010). Bu bağlamda düşünüldüğünde, herhangi bir konuşma ya da söylev argümantasyon olarak kabul edilemez. Sebep bulmayı ve sunmayı, tümevarım yapmayı, sonuç çıkarmayı, tartışmayı, bir şeyi savunmayı ya da kanıt yapmayı içeren yazılı ya da sözlü argümanlardan oluşan süreç argümantasyon niteliğindedir.

Toulmin vd. (1984), argümantasyon sürecinin yapısını analiz etmek için bir çerçeve oluşturmuştur (Şekil 1).



Şekil 1. Toulmin modeli

Argümantasyonda yapılan çıkarım Toulmin modelinde iddia, bu çıkarımın dayandığı öncüller veri, verileri iddiaya bağlayan nedenler gerekçe olarak değerlendirilir. Krummheuer (1995), matematik eğitimi disiplinine Toulmin modelini tanıtan ve matematik sınıflarındaki tartışmaları, argümantasyon niteliği taşımaları nedeniyle, yapısal olarak Toulmin modeli ile analiz eden araştırmacıdır. Çalışmasında Toulmin modelini çekirdek yapısı (veri, iddia, gerekçe) ile kullanmayı tercih etmiştir.

Inglis vd. (2007) de matematik sınıflarındaki tartışmaları argümantasyon olarak ele almışlar ancak tartışmaların yapısının daha detaylı ve tam analizi için Toulmin'in tüm modelini kullanmışlardır. Toulmin modelinde (Şekil 1) niteleyen, iddiaya bir zarf olarak eklenir (kesinlikle, muhtemelen, büyük olasılıkla vb.) ve iddianın güvenilirliğini belirler. Destek, bir gerekçenin geçerli olduğunu gösteren ve gücünü arttıran tanımlar, kurallar veya teoremlerdir. Çürüten, iddianın doğru veya geçerli olmadığı durumları belirtir ve iddianın gücünü zayıflatma potansiyeline sahiptir.

Toulmin vd. (1984), bireylerin argümantasyona katılım biçimlerinin akılcı olup olmamasının önemli olduğunu belirtmektedir. Argümantasyona katılan bireyin bir iddiayı nasıl ileri sürdüğünü ya da bir iddiaya nasıl karşı çıktığını nedenleri ile açıklama performansı akılcılığını gösterir. Eğer biri argümantasyona akılcı katılım gösteriyor ise bir iddiayı nasıl ürettiğini ya da çürüttüğünü diğerleri için anlaşılır olacak şekilde nedenleri ile birlikte açıklar ve aynı zamanda diğerlerinin iddiaları için sunduğu gerekçeleri değerlendirir, bu gerekçelerin gücünü kabul eder ya da geçersiz bulduğu gerekçeleri eleştirir ve bu gerekçelerin dahil olduğu argümana karşı-argüman üretir. Diğer yandan, argümantasyona akılcı katılım göstermiyor ise iddia üretme, veri bulma ve kullanma, iddiaları gerekçelendirme konusunda bilinçli hareket etmez, diğerleri için anlaşılır argüman üretme ve sunma kaygısı taşımaz ve diğerlerinden iddialarını veya çürütenlerini güvenilir nedenlerle açıklamalarını beklemez. Argümantasyondaki ezbere veya üstü kapalı argümanları görmezden gelir, kendi iddialarına karşı üretilen çürütenleri göz ardı eder ve argümantasyona dogmatik yürütülen bir süreç olarak bakar.

Conner vd. (2014) matematiksel akıl yürütmenin sosyal boyutunu dikkate alarak tüm sınıf etkileşimlerini ortaklaşa argümantasyon niteliğinde değerlendirmekte ve matematiksel akıl yürütmeyi argümantasyon ile eşdeğer görmektedir. Benzer bakış açısı ile matematiksel akıl yürütmeyi argümantasyon ile eş değer gören araştırmacıların çalışmalarında sınıf etkileşimlerindeki akıl yürütmenin yapısını Toulmin modeli ile analiz ettiği görülmektedir (ör., Jeannotte ve Kieran, 2017). Bu bağlamda, matematiksel akıl yürütmenin yapısal boyutu Toulmin modelinin bileşenleri ile analiz edilmekte ve öğrencilerin akıl yürütürken iddia üretme, iddialarına ilişkin veriler bulma ve iddia ile veriler arasındaki ilişkiyi gerekçeler ile savunma performansı değerlendirilmektedir. Toulmin vd.'nin (1984) argümantasyon sürecine katılımda altını çizdiği akılcılık kavramı, matematik sınıflarında öğrencilerin akıl yürütme sürecinin yapısal boyutunda akılcı rol alması, dolayısıyla argümantasyona akılcı katılım göstermesi (Boero, 2006) şeklinde karşımıza çıkmaktadır. Ancak argümantasyonun yapısını ortaya koymayı ve analiz etmeyi sağlayan Toulmin modeli, öğrencilerin performansını akılcı olup olmaması bağlamında değerlendirmeyi sağlamaz. Öğrencilerin ve öğretmenin argümantasyonun yapısal boyutunda gösterdikleri performansın yani iddia üretme, bu iddiayı ortaya çıkaran verileri bulma, veri(ler) ve iddia arasındaki ilişkiyi gerekçelendirme, bir başkasının iddiası için destek ya da çürüten bulma ve sunma davranışlarının analizinin akılcılık bağlamında değerlendirilmesi için bir başka teorik araca ihtiyaç vardır. Matematik eğitimine adapte edilen (Morselli ve Boero, 2009) Habermas akılcı davranış teorisi, öğrencilerin ve öğretmenin argümantasyona katılım performanslarını akılcılık bağlamında analiz etmek için kullanılabilecek teorik bir araçtır.

Habermas Akılcı Davranış Teorisi

Habermas'ın (1998) akılcılık teorisi bir etkileşim teorisi olup sosyal etkileşim sırasında bireylerin davranışlarını akılcı olup olmamaları bağlamında analiz etmeye yarar. Habermas'a göre etkileşim sırasında birey söz konusu bağlam içinde geçerli kriterleri dikkate alarak, bu kriterleri doğru ve amacına uygun kullanarak hareket ediyorsa ve etkileşim kurduğu bireyler ile uzlaşıya varmayı hedefliyorsa akılcı davranıyor demektir. Teorinin üç ana bileşeni vardır: epistemik akılcılık, teleolojik akılcılık ve iletişim akılcılığı. Epistemik akılcılık bireyin diğerleri ile kurduğu etkileşimde ürettiği iddiaları güvenilir gerekçeler ile savunması ve ezbere bilgi kullanmamasıdır. Epistemik bağlamda akılcı davranan birey sezgisel hareket etmez, ezbere ya da üstü örtük adımlar atmaz, her adımını güvenilir nedenler ile gerekçelendirir. Teleolojik akılcılık bireyin etkileşim sırasında amacına uygun hareket edebilmesi ile ilgilidir. Bireyler etkileşim kurarken bir amaca yönelik iletişim kurarlar. Eğer etkileşim içindeki birey iletişimi ilgili amaca ulaştırmaya yönelik ilerletiyor ve söz konusu bağlamda amaca yönelik adımlar atıyor ise teleolojik açıdan akılcı davranıyor demektir. Teleolojik bağlamda akılcı davranan birey etkileşim boyunca neyi nasıl yaptığını açıklayabilir ve etkileşimde bulunduğu diğer bireylerin adımlarını ve söylemlerini amaca uygun olup olmaması bağlamında değerlendirebilir. İletişim akılcılığı, etkileşim kuran bireyin yazılı ürünlerinin ve sözlü performansının diğer bireyler tarafından anlaşılır ve kabul edilebilir olması ile ilgilidir. İletişim bağlamında akılcı davranan birey, adımlarının ve söylemlerinin başkaları tarafından kolay takip edilebilir olmasını ve onaylanmasını hedefler; etkileşim boyunca diğerleri ile söz konusu bağlamda uzlaşıya varma niyetli iletişim kurar.

Matematik sınıflarında öğrencilerin bir matematiksel etkinliği yazılı veya sözlü olarak yürütürken diğer öğrenciler ve öğretmen ile etkileşim içinde oldukları düşünüldüğünde Habermas akılcı davranış teorisinin öğrencilerin matematiksel etkinliklerde gösterdikleri davranışları akılcılık bağlamında analiz etmek ve değerlendirmek için kullanılabileceği sonucuna varılmıştır (Boero, 2006). Bu amaçla, Habermas akılcı davranış teorisi matematik eğitimine adapte edilmiş (Morselli ve Boero, 2009) ve matematiksel etkinliklerde öğrencilerin davranışlarını akılcılık bağlamında analiz etmek için kullanılmıştır (ör., Boero, 2006; Boero vd., 2010; Boero ve Morselli, 2009; Boero ve Planas, 2014; Habermas, 1998; Morselli ve Boero, 2009). Bu çalışmalarda Habermas akılcı davranış teorisinin akılcılık bileşenlerinin gerektirdiği davranışlar matematik disiplinine ve sınıflarına uygun şekilde tanımlanmıştır (Tablo 1).

Tablo 1. Akılcılık Bileşenlerinin Kriterleri

Akılcılık Bileşenleri	*Kriterler*
Epistemik akılcılık	➢ Her argümanın epistemik geçerliğini matematiksel tanımlara, aksiyomlara, teoremlere veya prensiplere dayandırmak ➢ Matematiksel etkinlik boyunca atılan her adımı, üretilen her iddiayı matematiksel bağlamda güvenilir gerekçeler ile doğrulamak ve savunmak
Teleolojik Akılcılık	➢ Görevdeki amacı anlamak ve bu amaca ulaşmayı sağlayacak matematiksel kavramları seçmek ve kullanmak ➢ Seçilen matematiksel kavramlar arasında görevdeki amaca ulaşmayı sağlayan matematiksel bağlantıları kurmak ➢ Görevde amaca ulaşmak için kullanılması gereken matematiksel çözüm yöntemini, kanıt yapma stratejisini, teoremleri, aksiyomları ve prensipleri seçmek ve kullanmak
İletişim Akılcılığı	➢ Her çıkarımı, iddiayı, adımı matematiksel olarak güvenilir gerekçeler ile açıklamak ➢ Matematiksel etkinliklerde ortaya konan ürünlerde (çözüm, kanıt, temsil gibi) matematiksel notasyonu ve dili doğru ve amaca uygun kullanmak ➢ Sınıftaki diğer öğrenciler ve öğretmen için anlaşılır ve matematiksel bağlamda onaylanabilir yazılı ve sözlü ürünler sunmak

Bir matematiksel etkinlikte etkileşim kuran bir öğrenci iddialarını ve attığı adımları matematiksel tanımlar, teoremler, aksiyomlar ve prensipler ile güvenilir şekilde gerekçelendiriyor ve savunuyor ise epistemik akılcılığın kriterlerini sağlıyor demektir. Eğer öğrenci bir matematiksel etkinlikte kendisine verilen görevi yerine getirmek ve görevi tamamlamak için amacına uygun matematiksel araçları seçebiliyor ve kullanabiliyorsa teleolojik akılcılık gerekliliklerini sağlıyor demektir. Örneğin problem çözme sürecinde öğrenci, problemi çözmesi için kendisine gereken matematiksel stratejiyi ya da teoremi, aracı ya da tanımı zihnindeki diğer tüm bilgiler ve stratejiler arasından ayırt ederek seçebiliyor ve problem çözme sürecinde amacına yönelik kullanabiliyorsa teleolojik bağlamda akılcı davranıyor demektir. İletişim akılcılığı bir matematiksel etkinliği yazılı veya sözlü olarak yürüten öğrencinin sınıftaki diğer öğrenciler ve öğretmen ile anlaşılır ve kabul edilebilir şekilde matematiksel iletişim kurma çabası ile ilgilidir. Eğer öğrenci, bir matematiksel görevi yerine getirirken, diğer öğrenciler ve öğretmen tarafından anlaşılır olmak, onaylanmak istiyorsa ve süreçte bunun için tüm adımlarını açıklıyor, hangi adımı neden ve nasıl attığını ifade ediyor ve kolay takip edilebilir ürünler ortaya koyuyor ise iletişim akılcılığı kriterlerini sağlıyor demektir. İletişim bağlamında akılcı davranan bir öğrenci matematiksel kanıt yaparken veya problem çözerken attığı her adımı kâğıt üzerindeki kanıtına veya çözümüne yansıtır, iddialarını açıklar, bir başkası kanıtını ya da çözümünü takip ederken süreci anlamakta zorlanmasın ister ve buna göre davranır. Habermas akılcı davranış teorisi, matematik eğitimi araştırmalarında farklı sınıf düzeylerinde ve farklı matematik konuları kapsamında öğrencilerin matematiksel etkinliklerdeki yazılı ve sözlü performanslarını akılcılık bileşenlerinin gereklilikleri bağlamında analiz etmek için kullanılmıştır (ör., Boero, 2006; Boero ve Morselli, 2009; Morselli ve Boero, 2009, 2011; Urhan ve Bülbül, 2022, 2023a, 2023b).

Matematik sınıfı, bilginin etkileşimli şekilde inşa edildiği ve argümantasyon kültürünün hâkim olduğu sosyal bir ortamdır (Boero ve Planas, 2014). Bu bağlamda, araştırmacılar öğretmenlere

Habermas'ın akılcılık teorisini dikkate alarak matematiksel etkinlikler planlamalarını (Boero vd., 2010), akılcı sorular entegre edilmiş matematiksel görevler hazırlamalarını ve bu yolla matematiksel etkinliklerde öğrencilerin akılcı davranışlarının gelişimini desteklemelerini (Douek, 2014) önermektedirler. Ancak öğretmenlerin argümantasyon sürecini iyi seçilmiş ve etkili sorular ile destekleyebilmesi için bir teorik çerçeveye ihtiyacı vardır (McCarthy vd., 2016). Zhuang ve Conner (2022), Habermas'ın akılcılık teorisini temel alarak öğretmenlerin öğrencileri argümantasyona akılcı katılım göstermeleri yönünde desteklemeleri için "Öğretmenin Akılcı Sorgulama Çerçevesi"ni oluşturmuşlardır. Bu çerçeveyi temel alarak bir matematiksel etkinliği tasarlayan ve yürüten öğretmen, etkinlikte akılcı sorular aracılığıyla öğrenciler ile etkileşim kurarak onları epistemik, teleolojik ve iletişim bağlamında akılcı davranmaları yönünde destekleyebilir.

Öğretmenin Akılcı Sorgulama Çerçevesi

Zhuang ve Conner (2022) alanyazında akılcı sorgulamanın argümantasyonu destekleme potansiyeli üzerine yapılan vurguları (Douek, 2014) dikkate almış ve öğretmenlerin öğrencilerin farklı akılcılık türleri kapsamında argümantasyona katılımını nasıl sağlayabileceğini anlamak için öğretmenin akılcı sorgulama çerçevesini geliştirmişlerdir. Bu çerçeveye göre öğretmenler, öğretim hedeflerine ulaşmak için didaktik araçlara ilişkin stratejik seçimleri yapabilen akılcı öğretim aracılarıdır. Akılcı soru, en az bir akılcılık bileşeni içeren ve tetikleyen soru olarak tanımlanmaktadır. Bir soru epistemik akılcılığı içeriyor ve tetikliyor ise bu soruya epistemik akılcılık sorusu denir. Bu türden bir soru öğrenciyi iddialarını ve adımlarını matematiksel bağlamda güvenilir gerekçeler ile savunmaya yöneltir. Bir soru teleolojik akılcılığı içeriyor ve tetikliyor ise bu soruya teleolojik akılcılık sorusu denir. Bu türden bir soru öğrencinin bir matematiksel etkinlikte nasıl performans gösterdiğini, problemi nasıl çözdüğünü, hangi stratejiyi nasıl kullandığını açığa çıkarmaya yöneliktir. Öğrencinin çözümünü ya da kanıtını gözden geçirmesine, olası hatalarını tespit etmesine veya bir başkasının problem çözme veya kanıt yapma sürecini inceleyerek kendisininki ile karşılaştırmasına yönelik sorular da öğrencinin amacına uygun hareket edip etmediğini denetlemeye yönelik olduğundan teleolojik akılcılık sorularıdır. Bir soru iletişim akılcılığını içeriyor ve tetikliyor ise bu soruya iletişim akılcılığı sorusu denir. İletişim akılcılığı sorusu öğrencinin yazılı veya sözlü ürünlerinde sınıftaki diğer öğrenciler ve öğretmeni tarafından anlaşılır bulunmasını sağlamaya yöneliktir. Bu türden sorular öğrencinin adımlarını yazılı veya sözlü açıklamasını; yazılı ürünlerinde matematiksel notasyon kullanımına, sözlü açıklamalarında matematiksel dil kullanımına özen göstermesini talep eder. Öğrenciyi stratejisini adımlarını atlamadan kullanmaya, kolay takip edilebilir nitelikte ürünler sunmaya, sınıf topluluğunun diğer üyeleri ile uzlaşıya varmaya teşvik eder.

Bir sorunun hangi akılcılığı desteklediğine veya tetiklediğine karar verirken soruya verilen cevabın içeriği de dikkate alınmalıdır. Örneğin epistemik akılcılığı desteklemek amaçlı sorulan "Neden

f fonksiyonunun grafiğinin parabol belirttiğini düşünüyorsun?" sorusuna öğrencinin verdiği cevap, epistemik akılcılığa ilişkin göstergeler içerdiği gibi farklı bir akılcılık türüne ilişkin göstergeler de barındırabilir. Öğrenci cevabında f' fonksiyonunun grafiğinin doğru belirttiğini, doğru fonksiyonunun birinci dereceden bir cebirsel ifadesi olduğunu ve integral alma yoluyla f fonksiyonunun cebirsel temsilini ikinci dereceden bir cebirsel ifade olarak elde edeceğini ve bu nedenle f fonksiyonunun grafiğinin parabol belirttiğini açıklıyor ise hem adımlarını gerekçelendiriyor hem de f fonksiyonunun grafiğini nasıl elde ettiğini açıklıyor demektir. Bu durum, öğrencinin cevabının hem epistemik ve hem de teleolojik akılcılığa ilişkin kanıtlar içerdiğini gösterir. Bu nedenle, söz konusu soru hem epistemik hem de teleolojik akılcılık sorusu niteliğindedir. Bu bağlamda, akılcı bir soru birden fazla akılcılığı aynı anda içerme ve tetikleme özelliğine sahip olabilir.

Akılcı bir soru verilen cevaptan bağımsız olarak doğası gereği birden fazla akılcılık bileşenini destekler veya tetikler nitelikte olabilir. Örneğin, akılcı bir soru, akıl yürütme sürecinde kullanılan araçların veya yöntemlerin etkililiğinin gerekçelendirilmesini bekleyen bir soru olup hem epistemik hem de teleolojik akılcılık bileşenini tetikleyen türde olabilir. Örneğin, "Neden burada f' fonksiyonunun kökünü ve işaretinin değiştiği aralıkları kontrol ettin?" sorusu öğrenciden hem davranışını gerekçelendirmesini talep etmekte (epistemik akılcılık) hem de f' fonksiyonunun kökünü ve işaretini kontrol ederken neye ulaşmayı hedeflediğini (teleolojik akılcılık) denetlemektedir. Bu bağlamda, bazı akılcı sorular doğası gereği iki veya üç akılcılık bileşenini içerebilir ve tetikleyebilir. Akılcı bir soru üç akılcılık bileşeninin tamamını içeriyorsa ve tetikliyorsa, bu soruya epistemik, teleolojik ve iletişim akılcılığı sorusu denir.

Matematik sınıflarında öğretmen birden fazla akılcılık bileşenini destekleyen ve tetikleyen türde sorular kullanarak öğrencilerin birden fazla akılcılık bileşeni kapsamında etkileşimde bulunmasını sağlayabilir. Zhuang ve Conner'ın (2022) Öğretmenin Akılcı Sorgulama Çerçevesi'nde yer verdiği akılcı soru türlerinin açıklamalarına ve örneklerine Tablo 2'de yer verilmektedir.

Tablo 2. Öğretmenin Akılcı Sorgulama Çerçevesi

	Epistemik Akılcılık Sorusu	*Teleolojik Akılcılık Sorusu*	*İletişim Akılcılığı Sorusu*
Özellik	• Öğrenci üstü kapalı, ezbere veya yanlış cevap verdiğinde ya da iddia ürettiğinde sorulur. • Argümanın ortak matematiksel önermelere, teoremlere, aksiyomlara veya prensiplere göre geçerliliğini denetler. • Argümanın hangi matematiksel önermeye, aksiyoma, teoreme veya prensibe dayandığının açıkça ifade edilmesini ve argümanın savunulmasını talep eder.	• Öğrencinin problemi nasıl çözdüğü belirsiz olduğunda, problem çözme stratejisini bilinçli yürütüp yürütmediğini anlamak için sorulur. • Argümanda amaca yönelik aracın kullanılıp kullanılmadığını ve bu aracın bilinçli seçilip seçilmediğini denetler. • Argümanın nasıl üretildiğini, bir çözüm yönteminin, teoremin, tanımın, prensibin çözümde veya kanıtta nasıl kullanıldığını denetler.	• Öğrenci çözüm sürecini ya da kanıtını anlaşılır biçimde üretmediğinde ve sınıf topluluğunun üyeleri tarafından anlaşılmadığında ve onaylanmadığında sorulur. • Öğrenciyi matematiksel dili doğru ve tam kullanmaya teşvik eder. • Öğrenciyi bir strateji kullanırken adımları atlamamaya, yazılı ve sözlü açıklamalar ile kolay anlaşılır olmaya yöneltir.

Örnek	• Neden bu aralıkta f fonksiyonunun grafiği artan? • Arkadaşına neden katılmadığını açıklar mısın?	• Türev fonksiyonunun eğimini nasıl buldun? • f' fonksiyonunun grafiğini nasıl çizdin?	• f fonksiyonunun konveksiliğinin değiştiği bu noktanın adı nedir? • f' fonksiyonun kökünü ve işaretlerini bir temsil ile gösterir misin?

Zhuang, Y. & Conner, A. (2022). Teachers' use of rational questioning strategies to promote student participation in collective argumentation. *Educational Studies in Mathematics, 111*(3), 345-365 çalışmasından uyarlanmıştır.

Zhuang ve Conner (2022) Öğretmenin Akılcı Sorgulama Çerçevesi'ni, diğer öğretmen soru sorma çerçevelerinden (ör., Hufferd-Ackles vd., 2004; Sahin ve Kulm, 2008), öğretmenin sorusunu akılcılık bileşenlerine göre kategorize etmesi yönüyle ayırmaktadır. Bu çerçeve, öğretmenlerin sorularını seviyesine, açık veya kapalı olmasına göre sınıflandırmak yerine, öğretmenlerin soruları ile öğrencilerin argümantasyon boyunca davranışlarını akılcılık bağlamında geliştirmeye yönelik bir sınıf ortamını nasıl tasarlayacaklarını ve yöneteceklerini anlamalarına olanak tanır. Uzman matematikçilerin tartışmalarında epistemik, teleolojik ve iletişim akılcılığı farkındalığı doğal olarak var olduğundan ve uzmanların tartışma sırasındaki davranışlarında bu farkındalık açıkça ortaya çıktığından akılcı sorgulama matematiksel etkinliklerdeki argümantasyon süreciyle doğası gereği uyumludur (Boero vd., 2010). Bu bağlamda, öğretmenin akılcı sorgulamasının matematik sınıflarında kanıt yapma, problem çözme, modelleme ve tartışma süreçlerinin doğası ile tutarlı olması beklenmektedir. Ek olarak alanyazında öğretmen rehberliğinde didaktik araçlar kullanılarak öğrencilere akılcı davranmanın ne demek olduğunun ve matematiksel etkinliklerde nasıl akılcı davranılacağının öğretilmesi gerektiğine ilişkin yapılan vurgular (Douek, 2014) dikkat çekmektedir. Tüm bunlar göz önüne alındığında, akılcı sorgulamanın öğrencilere akılcı davranmayı öğretme konusundaki ihtiyacı karşılayacak bir öğretim metodu olabileceği düşünülmektedir (Zhuang ve Conner, 2022).

Yöntem

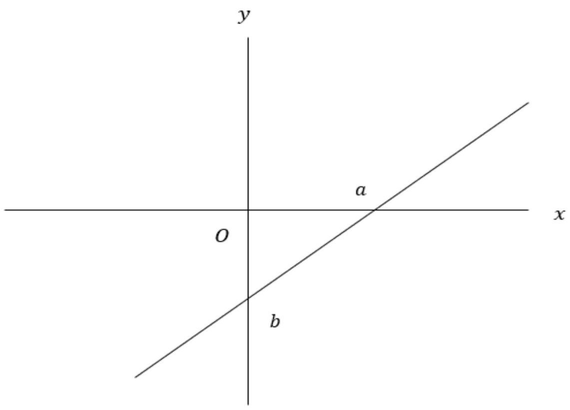
Bu araştırma nitel bir çalışmadır (Cohen vd., 2018) ve dört aşamada gerçekleştirilmiştir: (1) Katılımcılar seçilmiştir; (2) f ve f' fonksiyonlarının grafiklerine ilişkin matematiksel görevi yerine getirmek için öğrencilere bireysel çalışma fırsatı verilmiştir; (3) Öğrencilerin bireysel çalışma ürünlerini tartıştıkları ve öğretmenin akılcı sorgulama ile desteklediği argümantasyon süreci yürütülmüştür; (4) Argümantasyonun yapısı Toulmin modeli; öğretmenin argümantasyon boyunca yürüttüğü sorgulama süreci Öğretmenin Akılcı Sorgulama Çerçevesi; öğrencilerin argümantasyon boyunca öğretmene verdiği cevaplar Habermas Akılcı Davranış Teorisi ile analiz edilmiştir.

Çalışma Grubu

Çalışmada matematik eğitimi programında 4. sınıfta öğrenim görmekte olan ve çalışmaya gönüllü olarak katılan 13 üniversite öğrencisi ile çalışılmıştır. Öğrencilerin başarılı oldukları matematik derslerinin matematiksel kavramlar arasındaki bağlantıları kurma performanslarını etkileyeceği düşünülerek, matematik eğitimi programında 2023-2024 akademik yılı bahar dönemine kadar verilmiş olan tüm matematik derslerini almış ve başarıyla tamamlamış olmalarına dikkat edilmiştir. Söz konusu matematik derslerinin öğrenme çıktıları düşünüldüğünde, öğrencilerin temel kalkülüs kavramlarını, önermelerini ve teoremlerini bilmeleri, bu kavramları içeren görevlerde başarılı olmak için gerekli matematiksel bağlantıları kurabilmeleri ve bu süreçte matematiğin formel dilini doğru ve amaca uygun kullanabilmeleri beklenmektedir.

Veri Toplama Araçları

Öğrencilere f' fonksiyonunun grafiği sunularak f fonksiyonunun grafiğini çizmelerinin istendiği bir görev verilmiştir. Bu görevi yerine getirmek için türev fonksiyonunun kökleri ve işareti ile fonksiyonun ekstremum noktaları, ekstremum noktalarının türü ve fonksiyonun artan veya azalan olduğu aralıklar arasındaki bağlantıyı kurmak; fonksiyonun büküm noktalarını bulmak için ikinci türev fonksiyonunu kullanmak ve bunun için ikinci türev fonksiyonunun kökleri ve işareti ile birinci türev fonksiyonunun ekstremum noktaları, ekstremum noktalarının türü ve artan veya azalan olduğu aralıklar arasındaki bağlantıyı kurmak gereklidir. Genel olarak, görevin amacı öğrencilerin bir fonksiyonun grafiği ile türev fonksiyonun grafiği arasındaki matematiksel bağlantıları kurma performanslarını ortaya çıkarmaktır.



Yukarıda f' grafiği verilen f fonksiyonunun grafiğini çiziniz. İddialarınızı ve adımlarınızı açıklayınız.

Şekil 2. Matematiksel görev

Öğrencilere bu görevin verilmesinin nedeni f ve f' fonksiyonlarını içeren ve birinin grafiğinden diğerinin grafiğinin üretilmesini talep eden görevlerin öğrencilerin bu kavramlar arasında bağlantı kurmasına fırsat verir nitelikte olduğunun alanyazındaki çalışmalar (García-García ve Dolores-Flores, 2021; Rodriguez-Nieto vd., 2023) tarafından doğrulanmış olmasıdır.

Veri Toplama Süreci

Veri toplama sürecini çalışmanın yazarı olan araştırmacı yürütmüş ve veri toplama sürecine argümantasyonu akılcı sorgulama destekli yürüten öğretmen olarak dâhil olmuştur. Araştırmacı argümantasyonun yapısını Toulmin modeli ile analiz etme, öğrencilerin matematik etkinliklerindeki davranışlarını Habermas Akılcı Davranış Teorisi ile analiz etme ve Öğretmenin Akılcı Sorgulama

Çerçevesi'ni argümantasyonda öğrencilerin akıl yürütmesini desteklemek amacıyla kullanma konusunda bilgili ve tecrübelidir. Araştırmacı, 2023-2024 akademik yılı güz döneminde çalışma grubundaki öğrencilerin bazı matematik ve eğitim derslerinde ders sorumluluğu yapmıştır. Bu nedenle, çalışma grubundaki öğrenciler, araştırmacının öğretmen kimliğinin farkındadır ve yürüttüğü derslere öğrenci olarak katılmışlardır.

Veri toplama süreci, katılımcıların sessiz bir sınıf ortamında kendilerine verilen görev üzerinde bireysel olarak çalışmaları ile başlamıştır. Bu aşama yaklaşık 20 dakika sürmüştür. Ardından araştırmacı, öğretmen kimliği ile öğrencilerin bireysel çalışma ürünleri üzerine tartışmalarını istemiş ve argümantasyon sürecini başlatmıştır. Araştırmacının kendisi de akılcı sorgulama yaparak argümantasyona dâhil olmuştur. Bu aşama yaklaşık 90 dakika sürmüş ve video kayıt altına alınmıştır. Argümantasyonun sonunda öğrencilerden bireysel çalışma ürünleri toplanmıştır.

Verilerin Analizi

Veri analizinde şu adımlar takip edilmiştir:

1. Argümantasyon süreci transkript edilmiştir. Öğrenciler Ö1, Ö2, …, Ö13; araştırmacı A ile kodlanmıştır. Argümantasyondaki her bir satır A_1, Ö1_2, A_3, … şeklinde numaralandırılmıştır.
2. Öğrencilerin ve öğretmenin argümanlarında iddiaların altı çizilmiş, ardından söz konusu iddia ile ilgili veri ve gerekçe tanımlanmıştır.
3. Toulmin modelinin (Şekil 1) bileşenleri (veri, iddia ve gerekçe) ile argümanın temel yapısı oluşturulduktan sonra argümantasyonda Toulmin modelinin yardımcı bileşenlerinin (niteleyen, çürüten ve destek) olup olmadığı tespit edilmiş ve yardımcı bileşen(ler) var ise argümanın yapısına eklenmiştir.
4. Argümantasyonda öğretmenin soruları Öğretmenin Akılcı Sorgulama Çerçevesi (Tablo 2) temel alınarak analiz edilmiştir.
5. Öğrencilerin öğretmenin akılcı sorgulaması karşısında verdikleri cevaplar ve gösterdikleri davranışlar Habermas akılcı davranış teorisi bileşenlerine göre (Tablo 1) analiz edilmiştir.

Veriler, matematik eğitimi alanında çalışan ve argümantasyonun Toulmin modeli ile yapısal analizinde, öğrencilerin matematiksel etkinliklerdeki davranışlarını Habermas akılcı davranış teorisi ile analiz etmede bilgili ve tecrübeli bir uzmana gönderilmiştir. Uzmana çalışmanın amacı açıklanarak kendisinden verileri analiz etmesi istenmiştir. Çalışmanın yazarı olan araştırmacı ve uzman verileri bireysel olarak analiz etmiştir. Analizler tamamlandığında, çalışmanın yazarı ve uzman bir araya gelerek analiz sonuçlarını karşılaştırmışlar, farklı sonuçlar üzerinde uzlaşıya varıncaya kadar tartışmışlardır.

Bulgular

Öğrenciler bireysel çalışmalarını tamamladıktan sonra öğretmen argümantasyonu başlatmıştır.

A_1: *Problemi tahtada çözmek isteyen var mı?*

(Ö1 parmak kaldırır ve tahtaya çıkar.)

Ö1_2: *Türev fonksiyonunun grafiğine baktım ve eğimini düşündüm. Türev fonksiyonunun eğimi pozitif. Bu nedenle fonksiyon artan olmalı diye düşünüyorum.*

Ö1, f' fonksiyonunun eğiminin pozitif olmasının f fonksiyonun artan olacağı anlamına geldiğini iddia etmektedir. Argümantasyonun yapısal analizi aşağıda verilmektedir.

İddia: Fonksiyon artandır.

Veri: Türev fonksiyonunun grafiğine göre türev fonksiyonunun eğimi pozitif.

Gerekçe: Türev fonksiyonunun eğiminin pozitif olması, fonksiyonun artan olması anlamına gelir.

Ö1'in kullandığı gerekçe üstü kapalı bir bilgi niteliğindedir ve matematiksel bağlamda doğru ve geçerli değildir. Öğrenci iddiasını matematiksel bağlamda güvenilir yollarla doğrulayamamış; öğrencinin sunduğu gerekçe, iddia ile veri arasında güvenilir matematiksel bir bağlantı kuramamıştır. Bu durum, öğrencinin akıl yürütmesinde epistemik bağlamda akılcı davranamadığını göstermektedir.

A_3: *Türev fonksiyonunun eğimini nasıl buldun?*

Ö1_4: *Doğru sağa doğru yatık, bu nedenle eğimi pozitif.*

Öğretmen Ö1'e türev fonksiyonunun eğimini nasıl bulduğunu sorarak teleolojik akılcılığı destekleyici bir soru sormuştur. Ö1, bu soruya verdiği yanıt ile türev fonksiyonunun eğimini bulurken üstü kapalı bir bilgi kullandığını, matematiksel bağlamda güvenilir bir yol kullanmadığını göstermektedir. Öğretmenin Ö1'e iddiasına nasıl ulaştığını denetlemeye yönelik sorduğu soru, Ö1'in türev fonksiyonunun eğimine ilişkin iddiasını matematiksel bağlamda güvenilir bir şekilde doğrulayamadığını belirlememize fırsat tanıdığından öğrencinin epistemik akılcılık performansı ile ilgili tespit yapmamızı da sağlamıştır.

A_5: *Türev fonksiyonunun eğimi bize neyi verir?*

Ö1_6: *Türev fonksiyonunun eğimi bize asıl fonksiyonun artan mı azalan mı olduğunu gösterir.*

Öğretmen Ö1'e türev fonksiyonunun matematiksel işlevine yönelik bir soru sormuş ve öğrenciden türev fonksiyonunun bağlantılı olduğu kavramları seçmesini ve bu kavramları kullanarak türev fonksiyonunun eğimini açıklamasını istemiştir. Bu bağlamda, öğretmenin sorusu türev ve eğim kavramları arasındaki ilişkiyi bilmeyi gerektirmesi açısından epistemik akılcılığı, bu ilişkiyi açıklamayı gerektirmesi açısından iletişim akılcılığını; türev fonksiyonunun bağlantılı olduğu matematiksel kavramları seçmeyi ve kullanmayı gerektirmesi bakımından ise teleolojik akılcılığı tetikleyici bir sorudur. Bu durumda, öğretmenin sorusunun her üç akılcılığı destekleyici nitelikte olduğu söylenebilir. Ö1'in cevabında türev fonksiyonunun eğimini, fonksiyonun artan/azalan olması durumu ile ilişkilendirdiği görülmektedir. Öğrenci matematiksel bağlamda kabul edilebilir nitelikte bir açıklama yapamadığından iletişim akılcılığı, bir fonksiyonun artan/azalan olması durumunun ilişkili olduğu matematiksel kavramları seçemediğinden ve kullanamadığından teleolojik akılcılık; matematiksel kavramlar arasında doğru ve geçerli matematiksel bağlantılar kuramadığından epistemik akılcılık gerekliliklerini sağlayamamıştır.

A _7: *Peki, siz ne düşünüyorsunuz, Ö1'e katılıyor musunuz? (diyerek sınıfa döner)*

Ö2_8: *Ben katılmıyorum.*

A_9: *Neden?*

Öğretmen sınıfın Ö1'e katılıp katılmadığını denetlediği soru ile öğrencilerin Ö1'in iddiası üzerine düşünerek onun başarılı ya da başarısız olma durumuna ilişkin bir yargıda bulunmalarını beklediğinden teleolojik akılcılık kapsamında bir soru sormuştur. Ardından öğretmen "Neden?" sorusu ile Ö2'den iddiasını gerekçelendirmesini ve savunmasını istemiş; böylece Ö2'nin epistemik akılcılığını desteklemeyi amaçlamıştır.

Ö2_10: *Çünkü türev fonksiyonunun eğimi artanlık azalanlık bilgisi vermez. Asıl fonksiyonunun yani f(x)'in artan azalan olduğunu türev fonksiyonunun işareti söyler.*

(Sınıftan bazıları Ö2'yi onaylar.)

Ö2'nin yaptığı açıklamada Ö1'in gerekçesine çürüten sunduğu görülmektedir. Diğer yandan, Ö2'nin Ö1'in gerekçesinin neden yanlış ve geçersiz olduğunu açıklamadığı ve kendi çürütenini gerekçelendirmediği, çürütenini üstü kapalı bir bilgi olarak sunduğu görülmektedir.

İddia: Fonksiyon artandır.

Veri: Türev fonksiyonunun eğimi pozitif.

Gerekçe: Türev fonksiyonunun eğiminin pozitif olması, fonksiyonun artan olması anlamına gelir.

Çürüten: Fonksiyonun artan azalan olduğunu türev fonksiyonunun işareti söyler.

Öğretmen bu noktada Ö2'ye çürütenini açıklaması ve savunması talebinde bulunarak iletişim akılcılığını destekleyici bir soru sormuştur.

A_11: *Ö2 biraz daha ayrıntılı açıklayabilir misin ne demek istediğini? Problemde verilenleri kullanarak açıklayabilirsin.*

Ö2_12: *Problemde türev fonksiyonunun x eksenini a noktasında kestiğini görüyoruz. Öncelikle bu nokta $f(x)$ in tepe noktası olmalı.*

A_13: *Neden?*

Ö2'nin sunduğu çürüteni açıklamak yerine f fonksiyonunun grafiğinin nasıl çizileceğini anlatmaya başladığı görülmektedir. Burada Ö2'nin çürütenini matematiksel açıdan güvenilir yollarla açıklamaması epistemik bağlamda akılcı davranma eğiliminde olmadığını göstermektedir. Öğretmenin Ö2'nin kullandığı stratejik adıma "Neden?" sorusu ile yaklaşması (A_13), öğrencinin iddialarını gerekçelendirmesini ve dolayısıyla epistemik anlamda akılcı davranmasını istediğini göstermektedir.

Ö2_14: *Çünkü o noktada birinci türev* 0 *olmuş. Birinci türevi* 0 *yapan* x *değerleri asıl fonksiyonun maksimum ya da minimum noktası olur.*

A_15: *Neden?*

Ö2_16: *Yani öyle görmüştük derste.*

Ö2'nin iddialarını savunmak ve matematiksel bağlamda güvenilir yollarla gerekçelendirmek yerine, üstü kapalı bilgi olarak sunması epistemik anlamda akılcı davranmadığını göstermektedir.

Ö2_17: *Türev fonksiyonunun grafiğine baktığımda* a*'nın sağında pozitif, a'nın solunda ise negatif. Bu demektir ki f(x) fonksiyonu a'nın sağında artan; a'nın solunda azalan olmalı.*

A_18: *Bunun nedenini açıklayabilir misin?*

Ö2_19: *Yani yine derste öyle görmüştük diye hatırlıyorum. Tanım öyle. Yani biraz düşüneyim. Eğim ile ilgili. Fonksiyonun eğimi türev demek. Türevin işareti de eğimin işaretini veriyor. Türev pozitif ve giderek artan değerler alıyor a'nın sağında. Çünkü doğru yukarı doğru çıkıyor. O zaman f(x) in eğimi pozitif ve artan değerlere sahip. Bu eğri giderek dikleşecek anlamına geliyor. O zaman a'nın sağında bir eğri olmalı ve artan olmalı. Üstelik giderek daha hızlı şekilde artan bir eğri olmalı.*

Öğretmen Ö2'den iddiasının nedenini açıklamasını istemiştir. Bu bağlamda, öğretmenin Ö2'den iddiasını savunmasını (epistemik akılcılık) ve bunu yaparken sınıftaki diğer öğrenciler tarafından anlaşılır ve kabul edilebilir olmasını (iletişim akılcılığı) talep etmektedir. Bu durum, öğretmenin bu sorusunun epistemik akılcılığı ve iletişim akılcılığını tetiklemeye yönelik olduğunu göstermektedir. Ö2, öğretmenin bu talebini öncelikle "tanım öyle" şeklinde üstü kapalı bir ifade ile cevaplamış ancak sonrasında eğim, türev ve fonksiyonun artanlığı/azalanlığı kavramları arasında doğru ve geçerli matematiksel bağlantılar kurmuş ve bu bağlantıları anlaşılır ve kabul edilebilir şekilde açıklamaya çalışmıştır. Bu durum, Ö2'nin bu süreçte epistemik ve iletişim akılcılığının gerekliliklerini karşılama eğiliminde olduğunu göstermektedir.

A_20: *Peki, Ö2'ye katılıyor musunuz?*

Ö3_21: *Evet, ben de Ö2 gibi düşünerek yaptım.*

Ö1_22: *Doğru ben de şimdi hatırladım. Karıştırmışım ben. Birinci türevin işareti asıl fonksiyonun artan veya azalan olduğunu gösteriyordu.*

A_23: *Peki sen bu durumun nedenini nasıl açıklarsın Ö1?*

Öğretmen Ö1'in fikrini bilinçli olarak değiştirip değiştirmediğini belirlemek istemektedir. Bu amaçla Ö1'den iddiasının nedenini açıklamasını isteyerek öğrenciyi hem epistemik hem de iletişim akılcılığı bağlamında akılcı davranmaya yönlendirmeye çalışmaktadır.

Ö1_24: *Ö2'ye katılıyorum. Türev demek eğim demektir. Problemde verilen grafik aslında f(x)'in eğiminin grafiği. a'nın sağında eğim pozitif ve artan değerler alıyor. Eğim artıyor yani. Bu demektir ki o aralıkta f(x) artan olmalı. a'nın solunda da tam tersi. Eğim azalıyor git gide. Bu da fonksiyonun o aralıkta azalan olması demek.*

Ö1'in ilk cevabının aksine bu kez türev, eğim, fonksiyonun artanlığı/azalanlığı kavramları arasında doğru ve geçerli matematiksel bağlantılar kurduğu, bu bağlantıları gerekçelendirdiği ve savunabildiği görülmektedir. Öğrencinin açıklamaları sınıftaki diğer öğrenciler ve öğretmen tarafından anlaşılır ve kabul edilebilir niteliktedir. Bu bağlamda, Ö1'in epistemik ve iletişim akılcılığının gerekliliklerini sağlama eğiliminde olduğu görülmektedir. Öğrencilerin akıl yürütmesinin yapısının analizine aşağıda yer verilmektedir.

İddia: a'nın solunda fonksiyon azalan a'nın sağında fonksiyon artan olacak.

Veri: Problemde verilen grafik f(x)'in eğiminin grafiği. a'nın sağında eğim pozitif ve artan değerler alıyor. a'nın solunda da tam tersi.

Gerekçe 1: Türev demek fonksiyonun eğimi demektir.

Gerekçe 2: Fonksiyonun artanlığı/azalanlığı, fonksiyonun eğiminin yani fonksiyonun türevinin işaretine bağlıdır.

Argümantasyon aşağıda verildiği gibi devam etmiştir.

Ö3_25: *Ö1, işaret tablosu yap bence. Daha net görülür.*

Ö1_26: *Doğru, yapayım.*

(Ö1, f' fonksiyonunun işaret tablosunu tahtada doğru yapar ve açıklar. Ardından f fonksiyonunun grafiğini doğru çizer ve açıklar.)

Ö1_27: *Bu durumda, a'nın solunda fonksiyon azalan a'nın sağında fonksiyon artan olacak. a'da ise minimum değerini alacak bu fonksiyon.*

Ö3, Ö1'e türev fonksiyonunun işaret tablosunu yapmayı önermektedir. Ö3'ün bu önerisi çözüm sürecini diğerleri için daha anlaşılır hale getirmeye yönelik olduğundan iletişim akılcılığını destekleyici türde bir öneridir. Ek olarak Ö3'ün önerisi, Ö1'e çözüm süreci için alternatif bir yol sunduğundan, Ö1'i teleolojik yönden de destekleyici niteliktedir.

A_28: *Peki minimum noktasının x koordinatını a ile gösterdik ama y koordinatı ile ilgili ne düşünüyorsunuz?*

Ö1_29: *Hocam, onu bilmiyorum açıkçası.*

A_30: *Fikri olan var mı? (diyerek sınıfa döner)*

Ö4_31: *Hocam ben buldum y koordinatını, gösterebilirim nasıl yaptığımı.*

(Ö1 yerine oturur. Ö4 tahtaya gelir ve çözüm sürecini tahtaya yazar ve açıklar ancak çözüm sürecinin sonunda amacına ulaşamadığını fark eder.)

Ö4_32: *Ama bir saniye buradan b'ler sadeleşti. Olmadı. Ben sanki buradan parabolün tepe noktasını b cinsinden bir şey bulmuştum. Sonra da f(x) için bulduğum ifade de x yerine b koyarak bir şey bulmuştum.*

Ö5_33: *Ama c'yi bilmeden f(x)'in sonucunun ne çıktığını tam olarak nasıl bileceğiz ki?*

Ö4_34: *Şuradaki c değil mi? (diyerek f(x)'in cebirsel ifadesinde yer alan c'yi işaret eder.) Evet, doğru, haklısın. c sabit bir sayı ve değerini bilmiyoruz. Ama zaten olmuyormuş, sanırım kağıdımda işlem hatası yapmışım.*

Ö4, seçtiği yolun amacına uygun olmadığını tahtada fark etmiştir. Bu durum, öğrencinin çözüm sürecini tekrar gözden geçirdiğinde amacına uygun bir seçim yapamadığını yani teleolojik anlamda akılcı davranmadığını fark etmesini sağlamıştır.

A_35: *Peki, buradan devam edelim Ö4. Sen Ö1'den farklı bir yol tercih ettin. Türev fonksiyonunun işaret tablosunu yapmak yerine türev fonksiyonunun cebirsel ifadesini kullanarak f fonksiyonunun cebirsel ifadesine geçtin.*

Ö4_36: *Evet. Parabolün tepe noktasının x koordinatı a olacak.*

A_37: *f fonksiyonunun grafiğinin parabol olduğunu nereden anladın?*

Ö4_38: *Çünkü integral alınca f(x) fonksiyonunun cebirsel ifadesi ikinci dereceden bir ifade çıktı. Bir de parabolün kollarının aşağı mı yukarı mı olduğunu anlamak için x^2 nin işaretine bakıyorduk. Burada x^2 nin işareti $\frac{-b}{2a}$. Yine türev fonksiyonunun grafiğinden görüyorum ki b negatif bir sayı. Bu durumda $\frac{-b}{2a}$ pozitif olur, çünkü $-b$ ve a pozitif. Bu durumda, parabolün kolları yukarı doğru olacak (diyerek f(x) fonksiyonunun grafiğini tahtaya çizer).*

Argümantasyonun yapısal analizine aşağıda yer verilmektedir.

İddia: Parabolün tepe noktasının x koordinatı a olacak. f fonksiyonunun grafiği bir parabol olacak.

Veri: f fonksiyonunun cebirsel ifadesi. x^2 nin işareti $\frac{-b}{2a}$. a türev fonksiyonunun grafiğinde görüldüğü gibi pozitif bir sayı. Türev fonksiyonunun grafiğinden görüldüğü gibi b negatif bir sayı. Bu durumda $\frac{-b}{2a}$ pozitif olur, çünkü $-b$ ve a pozitif.

Gerekçe: İntegral alınca f fonksiyonunun cebirsel ifadesi ikinci dereceden bir ifade çıktı. Parabolün kollarının aşağı mı yukarı mı olduğunu anlamak için x^2 nin işaretine bakılır.

Öğretmen Ö4'ün çözüm sürecini bilinçli yönetip yönetmediğini yani öğrencinin epistemik anlamda akılcı davranıp davranmadığını tespit etmek istemektedir (A_37). Ö4, fonksiyonun grafiğinin neden parabol olduğunu gerekçelendirebilmiş ve bu bağlamda epistemik akılcılığın gerekliliklerini sağlayabilmiştir. Ardından Ö4 parabol grafiğini nasıl çizdiğini açıklamaya başlamıştır. Bu bağlamda, öğretmenin sorusunun (A_37), öğrencinin teleolojik akılcılık performansını denetlemeye yaradığı da görülmektedir. Öğrencinin f fonksiyonunun cebirsel ifadesini ve f' fonksiyonunun grafiğini f fonksiyonunun grafiğini çizmek için amaca uygun kullanabildiği yani teleolojik akılcılığın gerekliliklerini karşılayabildiği görülmüştür. Diğer yandan, Ö4 f fonksiyonunun grafiğini çizerken bu fonksiyonun cebirsel ifadesini dogmatik bir yaklaşımla kullanmıştır (*"Bir de parabolün kollarının aşağı mı yukarı mı olduğunu anlamak için x^2 nin işaretine bakıyorduk"*). Öğrenci bu aşamada epistemik akılcılığın gerekliliklerini karşılayamazken; parabol grafiğini çizmek için attığı diğer adımlarda f' fonksiyonunun grafiğini nasıl kullandığını gerekçeleri ile açıklayarak bilinçli hareket ettiğini yani epistemik akılcılığın gerekliliklerini sağlayabildiğini göstermiştir.

A_39: *Peki, Ö4'ün çözüm süreci hakkında ne düşünüyorsunuz?*

Öğretmen, öğrencilerden Ö4'ün çözüm sürecini incelemelerini ve çözüm süreci hakkında ne düşündüklerini söylemelerini istemiştir. Öğretmenin bu sorusu öğrencilerden bir başkasının ürününü incelemeyi ve kendi ürünleri ile karşılaştırmayı talep ettiğinden teleolojik akılcılığı denetleyici türde bir sorudur. Öğretmen bu sayede öğrencilerin kendilerinin veya bir başkasının başarısı veya başarısızlığı konusunda bilinçli olarak yorum yapıp yapamadıklarını, bu konularda bilinçli karar alıp alamadıklarını belirlemeyi amaçlamaktadır. Ancak öğretmen öğrencilerden detaylı bir cevap alamamıştır.

A_40: *Peki, parabolün minimum noktasının y koordinatı hakkında fikri olan var mı?*

Ö3_41: *Hocam bence verilenler minimum noktasının y koordinatını bulmak için yeterli değil. Bu durumda ancak yaklaşık olarak çizebiliriz f(x)'in grafiğini.*

A_42: *Tam olarak ne demek istiyorsun?*

Ö3_43: *Yani parabol biraz daha yukarıda ya da biraz daha aşağıda olabilir. Çünkü minimum noktanın y koordinatını bilmiyoruz, emin olamıyoruz ama emin olduğumuz şey minimum noktasının x koordinatının a olduğu ve a'nın da pozitif olduğu. Dolayısıyla x ekseninin sağında herhangi bir yerde parabolü çizebilirim.*

Öğretmen, öğrencileri iddialarını daha anlaşılır ifade etme konusunda desteklemektedir (A_42). Bu durum, öğretmenin öğrencileri iletişim kurma bağlamında akılcı davranmaya yönlendirmeye çalıştığını göstermektedir. Öğretmen aynı zamanda öğrencilerin adımlarını bilinçli atıp atmadıklarını denetleyerek onları epistemik anlamda daha akılcı davranmaya yönlendirmektedir. Öğrenciler f fonksiyonunun minimum noktasının y koordinatı hakkında doğru cevap vererek ve cevaplarını gerekçelendirerek grafiğin minimum noktasının koordinat düzlemindeki yeri konusunda epistemik bağlamda akılcı davrandıklarını göstermişlerdir.

A_44: *Ö3'ün söyledikleri hakkında ne düşünüyorsunuz? (Sınıftaki öğrencilerden çoğu aynı anda Ö3'e katıldıklarını belirtmişlerdir.)*

Ö6_45: *Hocam, ben grafikle ilgili bir şey sormak istiyorum. Daha doğrusu aklımda bir alternatif grafik daha var ve doğru olur mu diye sormak istiyorum.*

A_46: *Tabi, gelip tahtada çizebilir misin?*

(Ö6 tahtaya çıkar ve $(-\infty, a)$ aralığında azalan ve konveks; (a, ∞) aralığında artan ve konkav bir fonksiyon grafiği çizer.)

Ö6_47: *f(x)'in grafiği böyle de olamaz mı? Sonuçta biraz önce konuştuklarımızı sağlıyor. Yani a'nın solunda azalan ve a'nın sağında artan.*

A_48: *Ö6'nın sorusu hakkında ne düşünüyorsunuz? f(x)'in grafiği böyle de olabilir mi?*

(Sınıfta uğultular olur ancak öğrenciler öğretmene net bir cevap veremezler.)

Ö6 sorusu ile hem öğretmeninden hem de diğer öğrencilerden ürününün doğruluğu konusunda fikir almak istemektedir. Bu durum, Ö6'nın ürününün doğruluğu ve geçerliği konusunda epistemik akılcılık; amaca uygun bir araç seçip seçmediği konusunda teleolojik akılcılık kapsamında sınıftan destek almak istediğini göstermektedir. Öğretmen öğrencileri, bir başkasının ürününü değerlendirme ve bir başkasının neden başarılı veya başarısız olduğunu açıklama bağlamında teleolojik akılcılık kapsamında desteklemeye çalışmaktadır. Öğrencilerden cevap alamayınca öğretmen sorusunu grafikleri karşılaştırma bağlamında özelleştirmiştir. İki fonksiyon grafiği arasındaki farkı öğrencilerin bulmasını isteyen öğretmen aslında öğrencilere amaca uygun araç seçme konusunda ipucu vermeye çalışmakta ve öğrencileri teleolojik akılcılık bağlamında desteklemektedir.

A_49: *Peki, bizim biraz önce çizdiğimiz grafik ile bunun arasında fark var mı sizce?*

Ö6_50: *Hocam yani görüntü olarak tabi fark var ama artanlık ve azalanlık olarak bizim konuştuklarımızı sağlıyor. Yani türev fonksiyonunun grafiğine uygun. Sadece a'nın sağında direkt kolunu yukarı çıkarmadım da daha yavaş arttırdım fonksiyonun değerlerini.*

A_51: *Siz ne düşünüyorsunuz? (öğretmen sınıfa sorar)*

Ö3_52: *Yani türev fonksiyonu bir doğru olarak verilmiş. Her seferinde eğim aynı miktarda artıyor demek oluyor bu. Ö6'nın grafiğinde eğim aynı miktarda artmamış olacak. Evet artacak yine ama zamanla artış miktarı azalacak. Çünkü eğri birden aşağı doğru bükülmüş.*

A_53: *O birden dediğin yer tam olarak neresi? Gelip gösterebilir misin?*

(Ö3 tahtaya gelerek orijini grafik üzerinde işaretler.)

Öğretmenin sorusuna Ö3 doğru ve geçerli cevabı verebilmiştir. Bu bağlamda, öğretmenin teleolojik akılcılığı desteklemek amacıyla sorduğu sorunun (A_51), öğrencinin epistemik akılcılığı ile ilgili fikir edinmemizi sağladığını söylemek mümkündür. Öğretmen sonraki sorusu ile (A_53) Ö3'ü daha anlaşılır konuşma konusunda teşvik etmeye çalışmakta ve öğrenciyi iletişim akılcılığı bağlamında desteklemektedir. Aynı zamanda öğretmen öğrenciden grafik temsil üzerinde söz konusu kritik noktayı işaretlemesini talep ederek, öğrencinin iddiasını grafik temsil üzerinde savunmasını beklediğinden, temsilleri bilinçli kurma ve kullanma bağlamında öğrencinin epistemik akılcılığını denetlemeye çalışmaktadır. Ö3, öğretmenin sorusunda doğru ve geçerli cevap vererek kritik noktayı grafik üzerinde gösterebilmiştir.

Ö3_54: *Bu noktaya kadar yukarı doğru bakarken bu noktadan sonra aşağıya bakmaya başlıyor eğri. Bizim biraz önce çizdiğimiz grafik a'nın sağında hep yukarı bakıyordu.*

Ö7_55: *Bu noktanın bir adı vardı ya. Dönüm noktası!*

Ö8_56: *Yok dönüm değil ya. Büküm noktası.*

Ö9_57: *Evet, evet büküm noktası. Fonksiyonun ikinci türevini 0 yapar.*

Ö3_58: *Evet, doğru!*

Ö3'ün açıklaması (Ö3_54), akıl yürütme sürecinde, öğretmenin öğrencileri getirmek istediği noktada olduğunu göstermekte ve Ö3'ün amaca uygun hareket ettiğine işaret etmektedir. Ö3'ün amaca uygun hareket etmesi teleolojik akılcılık, doğru ve geçerli gerekçeler ile iddiasını savunması ise epistemik akılcılık bağlamında akılcı davranma eğiliminde olduğunu göstermektedir. Aynı zamanda Ö3'ün sınıftaki diğer öğrenciler ve öğretmen tarafından anlaşılması ve onaylanması iletişim akılcılığının gerekliliklerini sağladığına işaret etmektedir. Bu bağlamda, öğretmenin sorusunun (A_53) argümantasyonda öğrencileri her üç akılcılık bileşeni kapsamında desteklediği söylenebilir. Bu süreçte, diğer öğrencilerin Ö3'ün bahsettiği noktanın adını kullanmaya yönelik eğilimi, matematiksel dili kullanmaya yönelik bir çabaları olduğunu göstermektedir. Bu durum, argümantasyon sürecinde öğrencilerin birbirlerini daha akılcı iletişim kurma bağlamında desteklediğine işaret etmektedir.

Argümantasyonun yapısal analizinin son haline aşağıda yer verilmektedir.

İddia: a'nın sağında f fonksiyonunun değerlerini daha yavaş arttırarak da f fonksiyonunun grafiğini çizebiliriz.

Veri: f' fonksiyonu a nın solunda negatif değerler alıyor. f' fonksiyonu a nın sağında pozitif değerler alıyor.

Gerekçe: f fonksiyonunun bu grafiği de artanlık ve azalanlık olarak türev fonksiyonunun grafiğine uygun.

Çürüten: Türev fonksiyonu bir doğru olarak verilmiş. Her seferinde eğim aynı miktarda artıyor demek oluyor bu.

A_59: *O zaman Ö6 sorusu ile bizi önemli bir noktaya getirmiş. Bu sunduğu alternatif bizim biraz önceki verilerimiz ile eşleşiyor ama farkı büküm noktasına sahip olması. O zaman düşünelim. Sizce Ö6 haklı mı? Burada çizdiği gibi f fonksiyonun grafiğinde büküm noktası olmalı mı yoksa biraz önce çizdiğimiz grafikteki gibi büküm noktası olmamalı mı?*

(Sınıftakiler konuşmaya başlar ve uğultu olur.)

A_60: *Bunu tespit etmek için neye bakmalıyız?*

Öğretmen öğrencilerden Ö6'nın ürünü hakkında düşünmelerini ve onun başarılı ya da başarısız olmasına ilişkin bir saptama yapmalarını istemektedir. Bu durum, öğretmenin öğrencileri teleolojik bağlamda daha akılcı davranma konusunda destekler nitelikte soru sorduğunu göstermektedir.

Ö10_61: *İkinci türeve bakmalıyız.*

A_62: *Neden?*

Öğretmen öğrencinin seçtiği ve kullanmak istediği aracı bilinçli olarak seçip seçmediğini denetlemektedir. Öğrencinin seçimini bilinçli olarak yapıp yapmadığını denetlemeye yönelik olan bu soru teleolojik anlamda daha akılcı davranmaya teşvik eder nitelikte bir sorudur.

Ö10_63: *Çünkü büküm noktası varsa o nokta ikinci türevi 0 yapar.*

A_64: *Peki ikinci türeve nasıl geçeceğiz bu problemde?*

Öğretmen öğrencilerden amaca uygun bir araç seçmelerini ve kullanmalarını talep etmekte ve öğrencileri teleolojik akılcılık bağlamında desteklemeye çalışmaktadır.

Ö11_65: *Birinci türev fonksiyonunun grafiği elimizde. Onu kullanalım.*

A_66: *Nasıl?*

Ö8_67: *Birinci türevin bir kere daha türevini alırsak ikinci türevi buluruz.*

Ö9_68: *Ama elimizde türev alacak cebirsel bir ifade yok.*

Ö2_69: *Grafiğinden yola çıkarak ikinci türev fonksiyonunun grafiğini çizebiliriz.*

A_70: *Nasıl?*

Ö12_71: *Hocam doğru grafiğinin cebirsel ifadesini düşünsek. Ö8'in dediği gibi yani. Birinci dereceden bir ifade olacak. Onun da türevini alınca sabit bir sayı çıkacak.*

A_72: *Peki bu ne demek?*

Öğretmen "nasıl?" soruları ile öğrencileri seçtikleri ve kullanmaya çalıştıkları stratejileri açıklama konusunda yani teleolojik akılcılık bağlamında desteklemiştir. Öğretmen "Peki bu ne demek?" sorusu ile öğrencileri bir fonksiyonun ikinci türevinin sabit bir sayı çıkmasının neye işaret ettiğini açıklamalarını istemektedir. Öğretmen bu sorusu ile öğrencileri daha anlaşılır olma yönünde teşvik ettiğinden iletişim akılcılığı bağlamında onları desteklemeye çalışmaktadır. Öğretmenin bu sorusu aynı zamanda öğrencileri bir fonksiyon ile ikinci türev fonksiyonu arasında doğru bağlantılar kurmaya ve bu bağlantıları açıklarken gerekçelendirmeye teşvik ettiğinden epistemik; amaca uygun bağlantılar kurma bağlamında öğrencilerin performansını denetlemek niyeti taşıdığından teleolojik akılcılık sorusu niteliğindedir.

Ö12_73: *Yani ikinci türev bir sayı demek.* $f''(x) = 2$ *gibi.*

A_74: *Tam 2 mi çıkar?*

Ö12_75: *Yok, örnek olarak söyledim.*

A_76: *Yaklaşık bir şey söyleyebilir miyiz türev fonksiyonunun grafiğinden yola çıkarak?*

Öğretmen, öğrencileri veri toplama ve görevde verilenleri amaca uygun kullanarak iddia oluşturma bağlamında desteklemektedir. Bu ise öğretmenin öğrencileri teleolojik akılcılık bağlamında akılcı davranmaya yönlendirmeye çalıştığını göstermektedir.

Ö13_77: *Söyleriz. Doğru sağa yatık ve eğimi pozitif. Eğim demek bu fonksiyonun türevi demek. Dolayısıyla bu birinci türev fonksiyonunun türevi, yani ikinci türev fonksiyonu, pozitif bir sayı olarak çıkacak.*

(Sınıftakiler Ö13'ü onaylar.)

A_78: *Peki grafiği nasıl karşımıza çıkar ikinci türev fonksiyonunun?*

(Sınıftaki pek çok kişi aynı anda ikinci türev fonksiyonunun grafiğinin yatay bir doğru olarak çizilmesi gerektiğini söyler ve Ö6 birinci türev fonksiyonunun çizildiği koordinat düzlemine x ekseninin üzerindeki bölgede yatay bir doğru çizer.)

A_79: *Peki bu ne demek?*

Ö6_80: *Bu f(x) fonksiyonunun büküm noktası yok demek!*

Öğretmen sorusu ile öğrencileri amaca uygun araçları seçme ve kullanma konusunda yönlendirmiş ve teleolojik akılcılık kapsamında davranışlarını desteklemiştir. Öğretmen "Peki bu ne demek?" sorusunda öğrencilerin ulaştıkları iddialarını gerekçelendirmelerini, savunmalarını istemekte ve epistemik akılcılık kapsamında bir soru sormaktadır. Bu sorusu ile öğretmen öğrencilerin fonksiyonların grafik temsilleri arasında amaca uygun bağlantılar kurmalarını ve dolayısıyla teleolojik anlamda daha akılcı davranmalarını sağlamaya çalışmaktadır.

A_81: *Neden?*

Ö6_82: *Çünkü bu yatay doğrunun kökü yok.*

A_83: *Nereden anladın?*

Öğretmen "Neden?" sorusu ile öğrencinin iddiasını gerekçelendirmesini beklemekte ve epistemik anlamda akılcı davranmasını desteklemektedir. "Nereden anladın?" sorusunda ise öğrenciden iddiasına nasıl ulaştığını açıklamasını yani teleolojik akılcılık kapsamında amaca uygun araç seçimini bilinçli yapıp yapmadığını göstermesini beklemektedir.

Ö6_84: *Çünkü yatay doğru x eksenini kesmiyor. Dolayısıyla ikinci türev fonksiyonunun sonucunu* 0 *yapan bir x değeri yok.*

A_85: *Peki bunu f fonksiyonunun büküm noktasına nasıl bağladın?*

Ö6_86: *Az önce Ö9'un da dediği gibi büküm noktası olsaydı ikinci türevi 0 yapardı.*

Öğretmen öğrencinin kurduğu matematiksel bağlantıları bilinçli kurup kurmadığını belirlemek istemekte ve öğrenciye teleolojik akılcılığı destekleyici soru sormaya devam etmektedir (A_85). Öğrencinin verdiği cevaplardan iddialarını gerekçelendirdiği dolayısıyla epistemik anlamda akılcı davrandığı (Ö6_80, Ö6_82) ve süreci bilinçli yürüttüğü dolayısıyla teleolojik anlamda akılcı davrandığı (Ö6_84, Ö6_86) görülmektedir.

A_87: *Son durumda grafiğimiz nasıl olmalı? Ö6'nın çizdiği grafiği alternatif olarak kabul edelim mi?*

(Sınıftakiler hep birlikte "Hayır!" derler.)

Ö8_88: *Olmaz, kabul edemeyiz. Ö6'nın çizdiğinde büküm noktası var ama bizim fonksiyonun ikinci türevinin kökü yok. Dolayısıyla f(x) fonksiyonunun da büküm noktası yok.*

Ö6_89: *Evet, tamamdır anladım.*

Argümantasyonun yapısal analizinin son hali aşağıdaki gibidir.

İddia: a'nın sağında f fonksiyonunun değerlerini daha yavaş arttırarak f fonksiyonunun grafiğini çizebiliriz.

Veri: f' fonksiyonu a nın solunda negatif değerler alıyor. f' fonksiyonu a nın sağında pozitif değerler alıyor.

Gerekçe: f fonksiyonunun bu grafiği de artanlık ve azalanlık olarak türev fonksiyonunun grafiğine uygun.

Çürüten 1: Türev fonksiyonu bir doğru grafiği ile temsil edilmiş. Her seferinde eğim aynı miktarda artıyor.

Çürüten 2: f'' fonksiyonunun kökü yoktur. Bu ise f fonksiyonunun büküm noktası olmadığı anlamına gelir.

Argümantasyon sonunda Ö6 sunduğu grafiğin, f fonksiyonunun grafik temsili için doğru ve geçerli bir alternatif olmadığını anlamış ve iddiasından vazgeçmiştir.

Tartışma

Matematik sınıflarında argümantasyon sürecinde öğrencilerin davranışlarını desteklemede öğretmenin akılcı sorgulama yapmasının rolü büyüktür (Zhuang ve Conner, 2022). Öğretmen akılcı soruları ile öğrencilerin iddia üretmesine, veri bulmasına, doğru ve amaca uygun matematiksel bağlantılar kurarak verileri iddiaya bağlayan gerekçeler kullanmasına destek olabilir (Boero ve Planas, 2014). Bu çalışmada, akılcı sorgulama, argümantasyon sürecinde öğrencilerin bireysel çalışmalarında yaşadıkları sorunların ortaya çıkmasını sağlamış ve öğretmenin öğrencilerin yaşadıkları bu sorunları akılcılık bileşenleri kapsamında değerlendirebilmesini mümkün hale getirmiştir. Çalışmanın sonuçları, Zhuang ve Conner'ın (2022) çalışmasındaki sonuçlara paralel olarak, Boero vd.'nin (2010) Habermas'ın akılcı davranış teorisini Toulmin modeli ile entegre etme fikrini desteklemek bağlamında deneysel kanıtlar sunmaktadır. Çalışma, Habermas akılcı davranış teorisi temelli akılcı sorgulama çerçevesinin, matematik sınıflarında öğretmenler tarafından argümantasyon süreçlerinde akılcı davranışı değerlendirmek ve desteklemek amacıyla kullanılabilecek analitik bir araç olduğuna dair öngörüleri (Zhuang ve Conner, 2022) desteklemektedir.

Çalışmada öğrencilerin argümantasyon boyunca öğretmenin akılcı sorgulamasından ilham alarak birbirlerini daha akılcı tartışma bağlamında destekler nitelikte davranışlar gösterdiği görülmüştür (Ö3_25, Ö6_45, Ö6_47, Ö7_55, Ö8_56, Ö9_57). Akılcı sorgulama destekli argümantasyonda öğrenciler birbirlerini iletişim akılcılığı (Ö7_55, Ö8_56, Ö9_57, Ö3_58), epistemik akılcılık (Ö2_10, Ö2_17, Ö2_19, Ö1_22, Ö1_24) ve teleolojik akılcılık (Ö3_25, Ö6_45, Ö6_47) bağlamında desteklemişlerdir. Bu durum, matematik sınıflarında akılcı sorgulamanın, öğrencilerde sınıftaki tüm üyelerin akıl yürütme sürecinde akılcı davranması gerektiğine yönelik bir beklenti oluşturduğunu göstermektedir. Bu sonuç, akılcı sorgulama destekli argümantasyon süreçlerinin matematik sınıflarında akılcı davranma kültürü oluşmasına temel oluşturacağına işaret etmektedir. Matematiksel etkinliklerde amaca ulaşmak ve başarılı olmak için öğrencinin akılcı davranması gerektiği düşünüldüğünde (Boero, 2006), böyle bir matematik kültürünün oluşması, öğrencileri matematiksel akıl yürütme sürecinde akılcı davranma yönünde destekleyecek ve öğrencilerin matematiksel etkinliklerde kendilerinden beklenen davranışları göstermelerini tetikleyecektir.

Öğretmenin teleolojik akılcılığı tetikleyici türden soruları (A_49, A_53, A_59, A_60, A_64, A_66, A_70, A_76, A_85), öğrencileri grafik temsillerde kritik noktaları tespit etme, grafik temsiller arasında amaca uygun bağlantılar kurma, f fonksiyonunun grafiğini tam ve doğru çizmek için f'' fonksiyonunun davranışını dikkate alma bağlamında desteklemiştir (Ö6_50, Ö3_52, Ö3_54, Ö7_55, Ö9_57, Ö10_61, Ö11_65, Ö8_67, Ö12_71, Ö13_77). Öğretmenin öğrencilerin birbirlerinin iddiaları üzerine düşünmelerini ve birbirlerine katılıp katılmadıklarını nedenleri ile birlikte ifade etmelerini istediği sorular da öğrencileri teleolojik akılcılık bağlamında desteklemiştir (A_7, A_20, A_39, A_48, A_51, A_59, A_60). Bu durum, akılcı sorgulama sürecinde öğretmenin, aslında öğrencilerin akıl yürütme sürecinde kilit rol oynayan ve öğretmenin mutlaka denetlemesi gereken ancak geleneksel matematik sınıflarında genellikle göz ardı edilen teleolojik akılcılığı (Boero, 2006) odağa aldığını ve öğrencileri bu akılcılık bağlamında desteklemeye çalıştığını göstermektedir. Öğretmenin bu çabası öğrencilerin bireysel ürünlerini ortaya koyarken seçtikleri ve kullandıkları araçları tartışmaya açmalarına (Ö4_31, Ö6_45, Ö6_47), bu araçlar konusunda birbirlerinden fikir almalarına, bazı durumlarda amaca uygun araç kullanmadıklarını fark etmelerine (Ö4_32, Ö4_34) ve argümantasyon sürecinde amaca uygun araçları seçmelerine (Ö10_61, Ö2_69, Ö13_77, Ö6_80, Ö8_88) yaramıştır. Öğrenciler öğretmenin bu türden sorularına cevap vermeye çalışırken bazı durumlarda birbirlerinin iddialarına çürüten sunmuşlar, epistemik akılcılık bağlamında birbirlerini desteklemişler (Ö2_10) ve argümantasyon sürecine üretken bir katılım göstermişlerdir.

Öğretmenin teleolojik akılcılığı destekleyici bazı soruları (A_3, A_51, A_85) öğrencilerin iddialarını doğru ve geçerli yollarla gerekçelendirip gerekçelendirmediğini anlamayı sağlamıştır. Böylece teleolojik akılcılığı destekleyici bazı soruların öğrencilerin teleolojik bağlamda akılcı davranıp davranmadığını anlamayı sağlamasının yanı sıra epistemik bağlamda da performanslarını değerlendirmeye fırsat verdiğini söylemek mümkündür (Ö1_4, Ö3_52, Ö6_86, Ö8_88). Bu sonuç, alanyazında epistemik akılcılık ile teleolojik akılcılığın güçlü bir etkileşim içinde olduğuna ve öğrencilerin bu akılcılık türlerinden birindeki davranışlarının diğer akılcılık türündeki davranışlarını doğrudan etkilediğine ilişkin saptamaları (Urhan ve Bülbül, 2022, 2023a, 2023b) akılcı soru ve bu soru karşılığında alınan cevap arasındaki ilişki bağlamında da doğrular niteliktedir.

Öğretmenin her üç akılcılık bileşenini destekleyici türden soruları (A_5, A_53, A_72) öğrencilerin iddialarını doğru ve güvenilir yollarla destekleme, amaca uygun aracı bilinçli seçme ve kullanma, iddialarını ve/veya çözüm stratejilerini sınıftaki diğer öğrenciler ve öğretmen için anlaşılır ve kabul edilebilir şekilde açıklama performansına ilişkin saptamalar yapmayı sağlamıştır (Ö1_6, Ö3_54, Ö9_57). Bu sorulara verilen cevapların bazılarına göre öğrencilerin yanlış veya ezbere bilgiler kullanarak hareket ettiği (Ö1_6) tespit edilmiş; bazıları ise öğrencilerin akılcı davrandıklarına ilişkin kanıtlar sunmuştur (Ö3_54, Ö12_73, Ö13_77).

Öğretmen öğrencilerin iletişim akılcılığını desteklemeye çalıştığı bazı soruları ile öğrencileri iddialarını ve/veya çürütenlerini açıklarken daha anlaşılır olmaları adına görevde verilenleri kullanmaya ve böylece iddialarını ve/veya çürütenlerini veri ile ilişkilendirmeye yönlendirmiştir (A_11, A_42, A_53). Öğretmenin bu talebi öğrencilerin iddialarını veri ile ilişkilendirerek açıklamalarını sağlamıştır (Ö2_12, Ö3_43, Ö3_54). Öğretmenin öğrencilerin iletişim akılcılığını desteklemeye çalıştığı bazı sorularında öğrencilerin davranışlarını epistemik akılcılık bağlamında da tetiklediği belirlenmiştir (A_42, Ö3_54). Öğrenciler iddialarını ve/veya kurdukları grafik temsilleri açıklamada doğru ve güvenilir veri ve gerekçe bulmak için f ve f' fonksiyonlarının grafiklerine odaklanmışlardır. Bu sayede, f' fonksiyonunun kökü ve işareti ile f fonksiyonun minimum noktası arasında bağlantı kurarak f fonksiyonunun grafiğinin koordinat düzlemindeki konumunu açıklayabilmişlerdir (Ö3_43). Bu sonuç, alanyazında iletişim akılcılığı ile epistemik akılcılık arasında tespit edilen güçlü etkileşimin (Urhan ve Bübül, 2022, 2023a, 2023b) sınıf içi argümantasyon sürecinde akılcı sorgulama bağlamında da ortaya çıktığını göstermektedir.

Öğretmenin epistemik akılcılığı denetlemeye yönelik soruları (A_13, A_15, A_23, A_37, A_62, A_78, A_79, A_81, A_83) öğrencilerin f ve f' fonksiyonlarının grafikleri arasında kurdukları bağlantıları (Ö2_14, Ö1_22, Ö4_36, Ö4_38, Ö10_63, Ö6_80) ezbere mi yoksa bilinçli olarak mı kurduklarını ortaya çıkarmada işe yaramıştır. Öğrencilerden bazılarının f' fonksiyonunun kökünün f fonksiyonun grafiğindeki rolünü belirlemede bilinçli hareket edemediği, bu ilişkiyi ezbere bir bilgi olarak kullandığı ve sunduğu belirlenmiştir (Ö2_16). Öğrencilerden bazılarının ise f fonksiyonunun grafiğinin bir parabol belirttiğini ve bu parabolün davranışlarını gerekçeleri ile savunabildiği (Ö4_38), f'' fonksiyonun kökünü bulma ve f fonksiyonunun grafiğini çizerken f'' fonksiyonun kökünden yararlanma konusunda bilinçli hareket ettiği anlaşılmıştır (Ö6_80, Ö6_82, Ö6_84). Bu sonuçlar, sınıf içinde argümantasyon sürecinde öğretmenin akılcı sorgulamasının ve öğrencilerin bu sorgulama karşısında gösterdikleri davranışların akılcılık perspektifinden analiz edilmesinin, öğrencilerin epistemik akılcılık performanslarına ilişkin önemli kanıtlar ortaya çıkardığını göstermektedir. Diğer yandan öğrencilerin yalnızca kendilerine sunulan matematiksel görevdeki türev fonksiyonunu dikkate alarak, birinci ve ikinci mertebeden türevlenebilen fonksiyonların büküm noktasının ikinci türev fonksiyonunun kökü olmasına ilişkin teoremi temel alarak hareket ettiği görülmüştür (Ö9_57, Ö10_63, Ö6_80). Bu durum, öğrencilerin argümanlarını birinci ve ikinci mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar özelinde ürettiklerini; büküm noktası olan ancak bu noktada ikinci mertebeden türevlenemeyen fonksiyonları göz önüne almadıklarını göstermektedir. Öğrencilerin bu davranışı, büküm noktasını problem çözme sürecinde kullanırken epistemik akılcılık gerekliliklerini karşılamada sorun yaşadıkları şeklinde yorumlanabileceği gibi, yalnızca kendilerine sunulan fonksiyon bağlamında akıl yürütmelerinden dolayı iletişim akılcılığında sınırlı performans gösterdikleri şeklinde de yorumlanabilir. Öğrencilerin bu davranışının ardındaki asıl nedeni ortaya çıkarmak için gelecek çalışmalarda öğrencilere büküm noktasına sahip olan ancak bu noktada ikinci mertebeden türevlenemeyen fonksiyonlara ilişkin grafik temsiller sunulmalı, öğrencilere bu türden fonksiyonların büküm noktası ile ikinci türev fonksiyonu arasındaki bağlantı üzerine akıl yürütmeleri için fırsat verilmeli; öğretmenin bu türden bir argümantasyon sürecine akılcı sorgulama ile dâhil olmasının, öğrencilerin akıl yürütmelerini nasıl etkileyeceği araştırılmalıdır.

Alanyazında matematik eğitimi programında öğrenim görmekte olan üniversite öğrencilerinin matematiksel etkinliklerdeki bireysel performanslarının akılcılık bileşenleri kapsamında analizinde öğrencilerin yazılı ürünlerinin ve görüşmelerdeki bireysel söylemlerinin dikkate alındığı görülmüştür (ör., Urhan ve Bülbül, 2022, 2023a, 2023b; Urhan ve Yüksel, 2019). García-García ve Dolores-Flores (2021) öğrencilerin matematiksel kavramlar ve bu kavramlar arasındaki bağlantılara yönelik inançlar oluşturduğunu ve bu inançların yansımalarının öğrencilerin yazılı ürünlerinden ve söylemlerinden anlaşılacağını belirtmektedir. Bu çalışmada öğrencilerin bir matematiksel görevi yerine getirirken gösterdikleri davranışları analiz etmek için kullanılan akılcılık teorisi bir etkileşim teorisi olduğundan sınıf içi etkileşimi önemser (Boero ve Planas, 2014). Araştırmacılar, öğrencilerin birbirleri ve öğretmenleri ile girdikleri etkileşim sayesinde öğrendiğini, matematiksel etkinliklerdeki performanslarının bu etkileşimler sırasında daha net ortaya çıkabileceğini ve davranışlarının akılcı olma yönünde etkileşimli ortamlarda gelişebileceğini savunur (ör., Douek, 2014). Akılcılık teorisinin doğası ve prensipleri dikkate alınarak, alanyazında, öğrencilerin davranışlarının sınıf içi argümantasyon süreçlerinde analiz edilmesi ve bu ortamlardaki etkileşimler sonucunda öğrencilerin davranışlarının daha akılcı olma yönündeki gelişiminin gözlemlenmesi gerektiği belirtilmektedir (ör., Urhan ve Bülbül, 2022, 2023a, 2023b). Bu bağlamda, bu çalışma, öğrencilerin davranışlarının hem birbirleri ile hem de öğretmenleri ile etkileşime girdikleri argümantasyon sürecinde analiz edilmesi ve bu süreçte öğretmenin akılcı sorgulamasının öğrencilerin akıl yürütme sürecini nasıl değiştirdiğinin incelenmesi bağlamında alanyazındaki beklentiyi karşılar niteliktedir. Çalışma hem akılcılık teorisinin prensiplerine uygun nitelikte bir araştırma ortamı oluşturulması hem de yazılı ürün ve bireysel görüşme analizlerinin ötesinde etkileşimli bir sınıf ortamında öğrencilerin davranışlarının değişiminin değerlendirilmesi bakımından önemlidir.

Öğretmenin akılcı sorgulamasının öğrencilerin f ve f' fonksiyonlarının grafikleri arasında matematiksel bağlantılar kurmada farklı temsiller kullanmasını tetiklediği görülmüştür (Ö3_25, Ö1_26, Ö6_45, A_46, A_53, Ö6_47, Ö3_54). Duval (2006, 2017), öğrencilerin kavramsal anlamasını, o kavramın temsillerini kurması ve aynı temsil sistemi içinde ya da temsil sistemleri arasında dönüşüm yapması ile açıklamaktadır. Bu bağlamda, çalışmada elde edilen sonuçların akılcı sorgulama destekli argümantasyon sürecinin öğrencilerin kavramsal anlamasına destek verebileceğine işaret ettiğini söylemek mümkündür.

Matematiksel kavram, bir soyut nesneye odaklanan matematikçilerin uzlaşı sağlayarak bu soyut nesneye ilişkin ortaya koyduğu tanımdır (McDonald vd., 2000). Bir matematiksel kavramın bireyde uyandırdığı çağrışımlar ve bireyin bu kavrama ilişkin zihninde oluşturduğu temsiller sistemi ise bireyin kavrayışıdır (Sfard, 1991). Kavramsal anlama, matematiksel kavram ile bireyin kavrayışının kesişmesi durumudur (Dubinsky vd., 2005). Bu çalışmada, akılcı sorgulamanın öğrencilerin kavrayışlarına ilişkin yansımaların ortaya çıkmasını sağladığı ve öğrencilerin kavramsal anlamasına ilişkin ipuçları sunduğu görülmüştür. Öğretmenin argümantasyon sürecini akılcı sorgulama ile yürütmesi, öğrencilerin kavramlara ve kavramlar arasındaki bağlantılara ilişkin zihnindeki çağrışımları ve temsilleri açık hale getirdiği görülmektedir. McDonald vd.'nin (2000) tanımını akılcılık perspektifinden yorumlayacak olursak matematiksel kavram, bir soyut nesnenin matematikçiler tarafından doğru ve gerekli bilgiler, prensipler, teoremler temel alınarak inşası sonucunda diğer matematikçiler tarafından anlaşılır ve kabul edilebilir şekilde, diğer bilinen gerçeklerle çelişmeyecek şekilde ifade edilen tanımıdır. Matematik camiasından bu tanımı okuyan bir matematikçi tanıma itiraz etmez çünkü içerdiği bilgiler önceden bildikleri ile uyumlu halde anlaşılır ve içinde bulunduğu sistem ile tutarlı şekilde ifade edilmiştir. Bu durumda bu tanım üzerinde matematikçilerin uzlaşması kaçınılmazdır. Ancak matematik sınıflarında durum aynı değildir. Öğrenci ve öğretmenin uzlaşıya varması zordur çünkü aralarında akılcı olma ve davranma bağlamında sahip oldukları matematik kültürü, bilgi ve tecrübe bağlamında fark vardır. Uzlaşının anlık olarak sağlanamaması öğretim sürecine ket vurmamalı, aksine argümantasyonu beraberinde getirmelidir (Boero ve Planas, 2014). Argümantasyon sürecinin akılcı sorgulamaya dayalı yürütülmemesi öğretmenin kurumsal bir otorite, öğrencinin ise durumu kabullenmek zorunda olan bir uygulayıcı olarak rol aldığı bir öğrenme ortamı oluşmasına yol açar (Douek, 2014). Bu durumda kavram üzerinde öğretmen ve öğrenci uzlaşmaz; öğrenci sadece anlatılanları kabullenir. Durum böyle olduğunda öğrencinin kavrayışları yani zihninde kavramla ilgili oluşan çağrışımlar ve içsel temsiller ezbere, gerekçesiz bir temelde oluşur. Zaman içinde öğrencinin kavrama ilişkin kavrayışı ile matematiksel kavramın çakıştığı bölgenin inşası ve bu bölgede öğrencinin bilinçli olarak kurduğu, gerektiğinde gerekçelendirebileceği ve savunabileceği yapıların varlığı garanti edilemez. Bu çalışmanın sonuçları temel alındığında görülmektedir ki, öğretmenin matematik sınıflarında akılcı sorgulamaya dayalı argümantasyon yürütmesi, öğrencilerin kavramsal anlamalarını bilinçli inşa etmesini, bu bölgedeki yapıların farkında olmasını ve gerektiğinde bu yapıları bilinçli şekilde kullanmasını ve matematiksel etkinliklerde akılcı performans sergilemesini desteklemeye fırsat vermektedir.

Akılcı sorgulamanın argümantasyonu desteklemedeki kullanımı hem öğretim ortamlarını tasarlama ve yürütme hem de öğretmen eğitimi açısından önem taşır (Zhuang ve Conner, 2022). İlkokuldan üniversite düzeyine her seviyede matematik sınıflarında öğretmenler öğrencilerine epistemik, teleolojik ve iletişim akılcılığının gerekliliklerini sağlayarak hareket etmenin önemini anlatmalı, akılcı davranmayı öğrencilerine tanıtmalı, kavram öğretimini akılcılık bileşenlerini temel alarak yapmalı ve kanıt yapma, modelleme, problem çözme gibi matematiksel etkinliklerde öğrencilerinden akılcı davranmalarını beklemeli, bu etkinlikleri öğrencilerinin akılcı davranmasını destekleyici nitelikte hazırlamalı ve etkinlikleri akılcı sorgulama destekli yürütmelidir. Bu bağlamda, akılcı sorgulama hem bir öğretim metodu hem de öğretmenlerin sahip olması beklenen bir pedagojik yaklaşımdır (Boero ve Planas, 2014; Douek, 2014; Zhuang ve Conner, 2022). Ancak öğretmenlerin akılcı sorgulama konusunda desteğe ihtiyacı olduğu bilinen bir gerçektir (McCarthy vd., 2016). Öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının akılcı sorgulamanın teorik çerçevesi ve sınıf içinde yürütülmesine ilişkin örnek uygulamalara ihtiyacı vardır. Bu bağlamda, bu çalışma öğretmenler ve öğretmen adayları için üniversite düzeyinde bir derste kalkülüs kavramları arasında bağlantı kurmayı gerektiren bir görev kapsamında akılcı sorgulamanın nasıl yapılacağının örneklendirilmesi açısından önemlidir.

Sonuç

Bu çalışmada öğrencilere f ve f' fonksiyonlarının grafikleri arasında doğru ve amaca uygun matematiksel bağlantılar kurmayı ve bu bağlantıları sınıfta argümantasyon sürecinde anlaşılır ve kabul edilebilir şekilde açıklamayı gerektiren bir görev verilmiştir. Öğrencilerin bireysel çalışmasının ardından sınıf içinde bir argümantasyon süreci başlatılmış ve öğrencilerden iddialarını tartışmaları istenmiştir. Bu süreçte öğrencilerin f ve f' fonksiyonlarının grafikleri arasında matematiksel bağlantılar kurarken ortaya koydukları performansta epistemik, teleolojik ve iletişim akılcılığı bağlamında sorun yaşadıkları açığa çıkmıştır. Öğretmenin akılcı sorgulama ile iddia üretme, veri bulma, gerekçeleri doğru ve amaca uygun seçme ve kullanma bağlamında öğrencilere destek olabildiği görülmüştür. Öğretmenin öğrencileri daha akılcı davranma yönünde tetiklemek için sorduğu sorular amacına ulaşmış ve öğrencilerin düşüncelerini matematiksel bağlamda doğru ve güvenilir yollarla gerekçelendirmelerine ve savunmalarına (epistemik akılcılık), amaçlarına ulaşmak için gerekli matematiksel araçları seçmelerine, kullanmalarına ve gerekli matematiksel bağlantıları kurmalarına (teleolojik akılcılık), iddialarını ya da çözüm stratejilerini sınıftaki diğer öğrencilere ve öğretmene matematiksel bağlamda anlaşılır ve kabul edilebilir şekilde açıklamalarına (iletişim akılcılığı) fırsat vermiştir.

Öğretmenin akılcı sorgulamasının yarattığı öğrenme ortamı, öğrencileri birbirlerini akılcı sorgulamaya teşvik etmiştir. Öğrencilerin sezgisel düzeyde ya da üstü kapalı iddia veya çürüten üretenleri sorguladığı ve bu öğrencilerden iddialarını ve/veya çürütenlerini matematiksel bağlamda güvenilir yollarla gerekçelendirmelerini istedikleri görülmüştür. Kimi zaman öğrencilerin birbirlerini görevi tamamlamak adına alternatif yollar bulma konusunda sorguladığı, bu alternatif yolun nasıl yürütüleceği konusunda açıklama istedikleri, birbirlerini daha anlaşılır olma yönünde destekledikleri görülmüştür. Bu durum, öğretmenin akılcı sorgulama ile yürüttüğü argümantasyon sürecinin doğasının öğrencilerin akıl yürütme ve birlikte tartışma sürecindeki tavırlarına ilham kaynağı olduğu ve onların da argümantasyon sürecine akılcı dâhil olmalarını hatta akılcı sorgulama yapma eğilimine girmelerini sağladığı görülmüştür.

Bu çalışma, kalkülüs kavramlarını içeren ve kavramlar arasında matematiksel bağlantı kurmayı gerektiren bir görev sunularak üniversite düzeyindeki öğrenciler ile yürütülmüştür. Çalışmada öğretmenin akılcı sorgulamasının öğrencilerin matematiksel kavramların temsillerini kullanmasını desteklediğini gösteren sonuçlar, akılcı sorgulamanın temsil kurma ve kullanma bağlamında öğrencilerin kavramsal anlamasına nasıl etki ettiğinin araştırılabileceğine işaret etmektedir. Farklı matematik konularına yönelik olarak hazırlanacak görevler odağında öğrencilerin bireysel çalışma ve sınıf içi argümantasyon süreçlerinin akılcı sorgulama ile desteklenmesine yönelik deneysel çalışmalar yapılması, akılcı sorgulamanın matematik derslerinin işlenişinde öğrencilerin akıl yürütmesini desteklediğine dair sonuçların genellenebilmesi bağlamında önemlidir. Akılcı sorgulama destekli argümantasyonun öğrencilerin bireysel öğrenmeleri üzerindeki etkisini daha doğru ve net ortaya koyabilmek adına argümantasyon sonrasında öğrencilerin bir kez daha aynı veya benzer bir görev üzerinde çalışması ve öğrencilerin ilk ve son bireysel çalışma ürünlerinin karşılaştırılması önerilmektedir.

Kaynaklar

Boero, P. (2006). Habermas' theory of rationality as a comprehensive frame for conjecturing and proving in school. J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Ed.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* içinde (c. 2, s. 185-192). Prague, Czech Republic: PME. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED496932.pdf sayfasından erişilmiştir.

Boero, P., Douek, N., Morselli, F., & Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. M. M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Ed.), *Proceedings of the 34th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* içinde (c. 1, s. 179-205). Belo Horizonte: PME. https://www.igpme.org/publications/current-proceedings/ sayfasından erişilmiştir.

Boero, P. & Planas, N. (2014). Habermas' construct of rational behavior in mathematics education: New advances and research questions. P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, & D. Allan (Ed.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the*

36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education içinde (c. 1, s. 205-235). Vancouver, Canada: PME. https://www.igpme.org/publications/current-proceedings/ sayfasından erişilmiştir.

Boero, P. & Morselli, F. (2009). The use of algebraic language in mathematical modelling and proving in the perspektive of Habermas' theory of rationality. V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Ed.) *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* içinde (s. 964-973). Lyon, France. http://erme.site/wp-content/uploads/2021/06/cerme6_proceedings.pdf sayfasından erişilmiştir.

Cai, J. & Ding, M. (2015). On mathematical understanding: Perspectives of experienced Chinese mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*(5), 1-25.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research methods in education.* Routledge.

Conner, A. M., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Identifying kinds of reasoning in collective argumentation. *Mathematical Thinking and Learning, 16*(3), 181-200.

Douek, N. (2014). Pragmatic potential and critical issues. P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, & D. Allan (Ed.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* içinde (c. 1, s. 209-213). Vancouver, Canada: PME. https://www.igpme.org/publications/current-proceedings/ sayfasından erişilmiştir.

Dubinsky, E., Weller, K., Mcdonald, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An apos-based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics, 58,* 335–359.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking – the registers of semiotic representations.* Springer.

Francisco, J. M. (2013). The mathematical beliefs and behavior of high school students: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behavior, 32*, 481-493.

García-García, J. & Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing calculus tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49*(2), 227-252.

García-García, J. & Dolores-Flores, C. (2021). Pre-university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. *Mathematics Education Research Journal, 33,* 1-22.

Habermas, J. (1998). *On the pragmatics of communication.* The MIT.

Hufferd-Ackles, K., Fuson, K. C., & Sherin, M. G. (2004). Describing levels and components of a math-talk learning community. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(2), 81-116.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modeling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 3-21.

Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(1), 1-16.

Kastberg, S. E. (2002). *Understanding mathematical concepts: the case of the logarithmic function.* Unpublished dissertation. University of Georgia. United States of America.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. P. Cobb & H. Bauersfeld (Ed.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* içinde (s. 229–269). Erlbaum.

McCarthy, P., Sithole, A., McCarthy, P., Cho, J. P., & Gyan, E. (2016). Teacher questioning strategies in mathematical classroom discourse: A case study of two grade eight teachers in Tennessee, USA. *Journal of Education and Practice, 7*(21), 80–89.

McDonald, M. A., Mathews, D., & Strobel, K. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. *Research in Collegiate Mathematics Education, 4*(8), 77-102.

Morselli, F. & Boero, P. (2009). Habermas' construct of rational behaviour as a comprehensive frame for research on the teaching and learning of proof. F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Ed.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* içinde (c. 2, s. 100-105). Taipei: Normal University. https://link.springer.com/book/10.1007/978-94-007-2129-6 sayfasından erişilmiştir.

Morselli, F. & Boero, P. (2011). Using Habermas' theory of rationality to gain insight into students' understanding ofalgebraic language. J. Cai & E. Knuth (Ed.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* içinde (s. 453–481). Springer.

Rodriguez-Nieto, C. A., Rodriguez-Vasquez, F. M., & Font-Moll, V. (2023). Combined use of the extended theory of connections and the onto-semiotic approach to analyze mathematical connections by relating the graphs of f and *f'*. *Educational Studies in Mathematics, 114,* 63-88.

Rokeach, M. (1968). *Beliefs, attitudes and values: a theory of organization and change.* Jossey-Bass.

Sahin, A. & Kulm, G. (2008). Sixth grade mathematics teachers' intentions and use of probing, guiding, and factual questions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(3), 221-241.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1–36.

Toulmin, S., Rieke, R., & Janik, A. (1984). *An introduction to reasoning.* Macmillan.

Urhan, S. & Bülbül, A. (2022). The analysis of the algebraic proving process based on Habermas' construct of rationality. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 37*(3), 1154-1175.

Urhan, S. & Bülbül, A. (2023a). Habermas' construct of rationality in the analysis of the mathematical problem-solving process. *Educational Studies in Mathematics, 112*(7), 175-197.

Urhan, S. & Bülbül, A. (2023b) Analysis of mathematical proving in geometry based on Habermas' construct of rationality. *Mathematics Education Research Journal, 35*(6), 929–959.

Urhan, S. & Yüksel, N. S. (2019). The analysis of problem solving process of pre-service physics teachers by Habermas' theory of rationality. B. Akkus, R. B. Cakiril-Mutlu, E. Gudekli, B. Kinaci, F. Guzelcimen, G. Susoy-Dogan, F. Ozturk, & A. Ertoprak (Ed.), *Proceedings of ATP Conference* içinde (*2178*(1), s. 030065). AIP Publishing LLC. https://doi.org/10.1063/1.5135463 sayfasından erişilmiştir.

Zhuang, Y. & Conner, A. (2022). Teachers' use of rational questioning strategies to promote student participation in collective argumentation. *Educational Studies in Mathematics, 111*(3), 345-365.

Extended Summary

Argumentation is a fundamental activity for all mathematical tasks, representing the process through which students reason. In this process, students are expected to produce claims towards fulfilling a given mathematical task, find data supporting these claims, and use mathematical warrants that connect the data to the claim (Krummheuer, 1995). Rational behavior is expected from students during argumentation to successfully complete the mathematical task (Boero, 2006). This entails justifying and defending their claims with accurate and valid mathematical connections, selecting, and using the necessary mathematical tools, and explaining the tools, strategies, and solution paths in an understandable, and acceptable manner for others in the mathematics classroom. A student demonstrating such performance can be considered to behave rational during the argumentation (Morselli and Boero, 2009).

In mathematics classrooms, evaluating students' behavior during the argumentation in terms of rationality is crucial for fostering habits of rational behavior and establishing a culture of rationality in the classroom. In this context, a theoretical framework is necessary for assessing students' performance in argumentation from the perspective of rationality (Boero, 2006). Habermas construct of rationality is a theoretical tool which is rooted in interaction theory (Habermas, 1998) and was adapted by Morselli and Boero (2009) into mathematics education. Rationality theory consists of three fundamental components (Habermas, 1998) and their requirements were adapted considering the nature of mathematical reasoning (Morselli and Boero, 2009). Epistemic rationality involves the students' ability to justify their claims in a mathematical context with accurate and valid warrants, engage argumentation using reliable mathematical tools and methods, and refrain from relying on memorization or implicit methods. Teleological rationality pertains to the students' capability to select and utilize appropriate mathematical tools to achieve their goals in completing the mathematical task. Communicative rationality focuses on the students' ability to communicate in a manner that other students and the teacher can understand and approve. Students are expected to demonstrate their behaviors in argumentation to meet the requirements of these rationality components (Boero, 2006). Furthermore, it is essential for teachers to instruct students in rational behavior and to trigger and support their behaviors in this context during mathematical activities (Douek, 2014).

During the argumentation, the teacher's rational questioning can support the students' behaviors in rationality. For this aim, the Teacher Rational Questioning Framework developed based on Habermas construct of rationality (Zhuang and Conner, 2022), includes questions prepared by the teacher that consider the requirements of rationality components. This framework aims to guide students towards behaving rational during mathematical activities. In this study, it was investigated how the teacher's rational questioning during the argumentation supports students in making connections between calculus concepts at university level.

The study involved senior students enrolled in a mathematics education program. These students had completed all mathematics courses in their program successfully and had prior experience in argumentation involving calculus concepts. The author of the study assumed the role of a teacher supporting argumentation through rational questioning. Students were given a mathematical task aimed at constructing connections between the graphs of f and f'. The task was presented to students in a silent classroom environment, and they were asked to work individually on paper for approximately 20 minutes. After completing their individual work, the teacher initiated an argumentation supported by rational questioning and asked students to discuss their individual work products. The argumentation, lasting approximately 90 minutes, was recorded on video and transcribed for data analysis. Toulmin's model was used to analyze the structural dimension of argumentation. Teacher Rational Questioning Framework was employed to examine which components of rationality were triggered in students' behavior by the teacher's questions during the argumentation. Students' responses and behaviors towards the teacher's rational questions were analyzed using Habermas construct of rationality.

The results indicate that teacher's rational questioning supports students' performance in the structural dimension of reasoning within the context of rationality. Teacher's rational questions supported the students' behaviors in defending their claims in a mathematical context with reliable warrants (e.g., justifying intervals where f is increasing/decreasing and the locus of its extremum point using the root(s) of f' and intervals where f' changes sign and the absence of inflection points of the graph of f by justifying the absence of roots of f'' function and explaining the absence of roots of f''

function by the fact that f'' is a constant function that takes a positive value for all $x \in IR$). Thus, students could behave more rational in the epistemic context. Teacher's rational questions enabled the students to draw the graph of f by appropriately using data from the graph of f' (e.g., focusing on roots and signs of f' function rather than the interval in which f' graph is increasing to draw the graph of f, finding extremum point(s) and intervals in which f is incerasing/decreasing using roots and signs of f' rather than obtaining algebraic expression of f by integrating the algebraic expression of f' derived from its graph, determining whether there are roots of f'' function from the graph of f' and searching inflection points of f). Thus, students could behave more rational in the teleological context. Theacher's rational questions also supported students' behaviors in attempting to develop their individual work products for being understandable and acceptable in a mathematical context (e.g., making a sign table for function f' after drawing the graph of f by following behaviors of the graph of f' and showing intervals where f is increasing/decreasing on sign table and explaining why the root of f' is the minimum point of the graph of f). Thus, students could behave more rational in the communicative context.

In mathematics classrooms, reaching consensus during the argumentation between teachers and students is possible when they adhere to rationality principles defined by mathematicians, regarding the use of mathematical concepts and making connections between them. This can only happen if students understand what it means to behave rational in a mathematical context and accept behaving rational as a habit. Developing such a habit among students depends on providing continuous support for the students in mathematics classrooms to behave rational. In this study, it was observed that the teacher's rational questioning during argumentation inspired students, who eventually started rational questioning themselves. As students endeavored to construct connections between f and f' graphs, the teacher's rational questioning led them to view rational behavior as a necessity and requirement, and they began to expect rational behavior from their peers with whom they interacted. This suggests that teacher's rational questioning can serve as both a teaching tool to support students in behaving rational and as a mediator to instill a need for rational questioning. Consequently, rational questioning can lay the foundation for a culture of rational behavior in mathematics classrooms.

This study focused on supporting students' reasoning in the context of rationality components during calculus-related argumentation at university level. Future research should examine how rational questioning affects students' behaviors during argumentation on different mathematical concepts across various grade levels, and how the findings can be effectively used to foster a culture of rational behavior in mathematics classrooms.

Araştırmacıların Katkı Oranı Beyanı

Bu araştırmanın planlanması, yürütülmesi ve yazılı hale getirilmesinde sadece tek bir araştırmacı yer almıştır.

Destek ve Teşekkür Beyanı

Bu araştırmada herhangi bir kurum, kuruluş ya da kişiden destek alınmamıştır.

Çatışma Beyanı

Araştırmacının araştırma ile ilgili diğer kişi ve kurumlarla herhangi bir kişisel ve finansal çıkar çatışması yoktur.

Etik Kurul Beyanı

Bu araştırma, Hacettepe Üniversitesi Sosyal ve Beşeri Bilimsel Araştırma Etik Kurulunun 12.12.2023 tarih ve E-66777842-300-00003258797 sayılı onayı ile yürütülmüştür.