



Dağılımlı Hareketli Yüke Maruz Kalmış Bir Elastik Yarı Düzlem İçin Sınır Değer Problemi

Boundary Value Problem for an Elastic Half Plane Subjected to Distributed Moving Load

Onur Şahin^{1*}, Gizem Kaya²

¹Giresun Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Giresun, Türkiye

²Giresun Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Giresun, Türkiye

Öz

Bu çalışmada Gaussian tip dağılıma sahip bir hareketli yüke maruz kalmış bir elastik yarı düzlem için bir sınır değer problemi incelenmektedir. Problem, önceki çalışmalarda geliştirilmiş olan asimptotik model yardımıyla dalga potansiyelinin eliptik ve hiperbolik denklemleri cinsinden formüle edilmektedir. Sınırdaki verilmiş hiperbolik denklemin çözümü, yükün hızı ile yüzey dalgasının hızının birbiri arasındaki ilişkisine göre üç farklı durum için ayrı ayrı hesaplanmaktadır. Sınırdaki boyuna yer değiştirmenin ifadesi, sınır boyunca elde edilen dalga potansiyeli yardımıyla elde edilmekte ve sonra da bu yer değiştirmenin sayısal sonuçları, dağılım parametresinin farklı değerleri için verilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Asimptotik model, elastik yarı düzlem, hareketli dağılımlı yük, sınır değer problemi.

Abstract

In this study, a boundary value problem for an elastic half-plane subjected to a moving load of Gaussian-type distribution is considered. The problem is formulated in terms of elliptic and hyperbolic equations of the wave potential with the help of the asymptotic model developed in previous studies. The solution of the hyperbolic equation given at the boundary is calculated separately for three different cases according to the relationship between the speed of the load and the speed of the surface wave. The expression of the longitudinal displacement at the boundary is obtained with the help of the wave potential obtained along the boundary, and then the numerical results of this displacement are presented for various values of the dispersion parameter.

Keywords: Asymptotic model, elastic half plane, distributed moving load, boundary value problem.

1. Giriş

Hareketli yük problemleri; uygulamalı bilimler, mühendislik ve günlük yaşamda karşılaşılan; köprüler ve taşıtlar arasındaki dinamik ilişki, yüksek hızlı trenler, çalışan vinçler, araç diskleri ve kampanalar gibi pek çok endüstriyel uygulamada sıklıkla yer bulduğundan önemli bir çalışma konusudur (Fryba 2013, Ouyang 2011). Hareketli yük problemleri ile ilgili pek çok yayın genellikle iki boyutlu düzlem şekil değiştirme problemlerine kısıtlanmış olsa da son yıllarda üç

boyutlu problemler için de yoğun çalışmalar yapılmaktadır (Cao vd. 2012, Çelebi 2006). Üç boyutlu problemler ile ilgili yapılan çalışmalar genellikle analitik çözümlerinin elde edilmesine değil, integral formda ifade edilen tam çözümlerin sayısal hesaplarının yapılmasına odaklanmıştır. Buna bir örnek olarak, Georgiadis ve Lykotrafitis (2001) çalışmasında Radon dönüşümü kullanılarak yapılan gelişmeler verilebilir. Ayrıca elastik yarı düzlemlerin farklı tip materyal altındaki temas problemleri de son yıllarda dikkat çeken ve sıklıkla çalışılan diğer bir çalışma alanıdır (Radi 2021, Çömez 2022, Çömez ve El-Borgi 2023).

Son yıllardaki çalışmalar, iki ve üç boyutlu yapılarda uygulanan hareketli yükün etkisi ile meydana gelen Rayleigh yüzey dalgasının dinamik tepkiye katkısını ortaya çıkarmak için asimptotik modeller geliştirmeye yöneliktir. Bu konu ile ilgili en önemli çalışmalardan biri elastik bir yarı düzlemde,

*Sorumlu yazarın e-posta adresi: onur.sahin@giresun.edu.tr

Onur Şahin orcid.org/0000-0001-5389-9855

Gizem Kaya orcid.org/0009-0003-4532-7605



Bu eser "Creative Commons Atıf-GayriTicari-4.0 Uluslararası Lisansı" ile lisanslanmıştır.

faz hızı ile yüzey dalga hızının birbirine çok yakın olduğu durumda tanımlanan küçük bir parametre sonucu uygulanan pertürbasyon yöntemi ile korunum ve sınır denklemlerini sırasıyla eliptik ve hiperbolik denklemler olarak veren (Kaplunov vd. 2006) çalışmasıdır. Bu çalışmada sunulan formülasyon ile lineer elastisitenin klasik denklemleri birbiri ile ilişkili olan iki dalga potansiyeli ile ifade edilebilmiştir. Bu çalışmada yalnızca başlı terimler dikkate alınarak geliştirilmiş olan asimptotik model daha sonra (Wootton vd. 2020) tarafından ikinci mertebeden terimlerin de hesaba katılması ile lineer elastik yarı düzlemlerde Rayleigh dalgaları için bir asimptotik modele genişletilmiştir. (Kaplunov vd. 2010) çalışmasında, (Kaplunov vd. 2006) çalışmasında geliştirilen modeli kullanılarak noktasal hareketli bir yüke maruz kalmış elastik bir yarı düzlem problemi incelenmiştir. Bu problemde elastik yarı düzlemin dinamik tepkisi yükün hızı ile Rayleigh dalga hızının ilişkisine göre meydana gelen farklı durumlar için ayrı ayrı sunulmuştur. (Kaplunov vd. 2010) makalesinde iki boyutlu elastik yarı düzlem için yapılan analizin üç boyutta elastik yarı uzaylara genişletilmesi (Kaplunov vd. 2013) çalışmasında gerçekleştirilmiştir. Bu makalede, yüzey üzerinde düz bir çizgi boyunca sabit bir hızda hareket eden noktasal bir kuvvet tarafından yüklenen elastik bir yarı uzayın üç boyutlu dinamik tepkisi ele alınmış ve (Kaplunov vd. 2006) makalesinde geliştirilen asimptotik hiperbolik-eliptik model çerçevesinde problem formüle edilmiştir. Yapılan analiz sonucunda üç boyutta yer değiştirme bileşenlerinin asimptotik ifadesi temel fonksiyonlar cinsinden sunulmuştur. Bahsi geçen çalışma daha sonra kaplamalı elastik yarı uzaylara (Erbaş vd. 2017) çalışmasında taşınmıştır.

Elastik yarı uzayların noktasal yük altındaki yukarıda bahsi geçen problemleri dışında farklı yük tipleri de literatürde sıklıkla çalışılmaktadır. Erbaş ve Şahin (2016) ve Ege vd. (2017) çalışmalarında elastik yarı uzayların hareketli dağılımlı yük altında dinamik tepkisi incelenmiştir. Ayrıca Erbaş ve Şahin (2016) çalışmasında, nedensellik ilkesinin yüzey boyunca uzunlamasına yayılan dalga potansiyeli için karakteristik bir özellik olduğu gösterilmiştir. Farklı yük tiplerine ait bir başka çalışma olarak ise diğer çalışmaların aksine teğetsel bir yükün incelendiği Ege vd. (2015) çalışması verilebilir.

Farklı materyal özelliklerine sahip elastik yarı uzayların hareketli yük altındaki dinamik tepkilerinin analizleri de ayrıca bu alan üzerine yapılan diğer bir araştırma konusu olarak sunulabilir (Şahin 2021, Liu vd. 2022, Zang vd. 2023). Bu

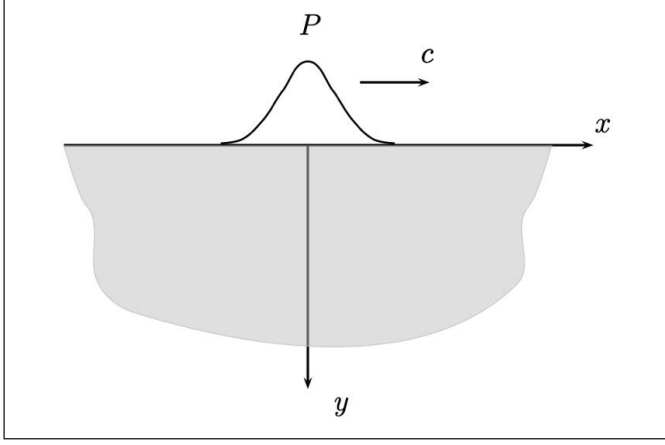
ve benzeri çalışmalar, iki elastik sabit bulunan lineer izotropik maddesel özelliklere sahip ortamların aksine ikiden fazla elastik sabit içeren farklı anizotropik maddesel özelliklere sahip ortamlardaki hareketli yük problemlerini incelemektedir.

Bu çalışmada, iki boyutlu elastik yarı düzlemin yüzeyine etki eden dağılımlı bir yükün düzlemin yüzeyi boyunca hareket emesi durumunda düzlemde meydana gelecek dinamik tepki incelenecektir. Yukarıda da bahsi geçen çalışmalarda da görüleceği üzere literatürde bu tarz problemler sıklıkla çalışılmış olmasına karşın elastik yarı düzlemlerin dağılımlı hareketli yük altındaki analizi mevcut değildir. Literatürde ilk olarak iki boyutta ele alınan daha sonra ise üç boyuta genişletilen noktasal yük altında hareketli yük problemlerinde noktasal yükü temsil eden Dirac delta fonksiyonu, sahip olduğu özellikten ötürü ilgili integrallerin hesabını oldukça kolaylaştırmaktadır. Fakat, ele alınan bu problemde ise yarı düzleme uygulanan dağılımlı yükü temsil eden fonksiyon, dalga potansiyellerini ifade eden integrallerin hesabını zorlaştırmaktadır. Bundan dolayı bu problemde, literatürde bahse geçen problemlere kıyasla yer değiştirmelerin açık ifadelerini elde etmek şu ana kadar incelenmiş olan problemlere kıyasla daha zordur. Üç boyutlu problemlerde yüzeyin ikinci ekseninin sıfıra yaklaşması durumunda problem incelemiş olduğumuz tek boyutlu sınıra sahip olan iki boyutlu elastik yarı düzlem problemi yapısına dönüşmektedir. Fakat, üç boyutlu elastik yarı uzaya uygulanan dağılımlı yük, limit durumunda incelenen problemdeki dağılımlı yüke indirgenmediğinden dolayı ele alınan problem, üç boyutta incelenmiş problemlerin özel bir durumu olarak yorumlanamaz.

Bu çalışma şu şekilde düzenlenmiştir. İkinci bölümde problemin geometrisi ve ifadesi sunulmuş, daha sonra problemin korunum denklemlerinin ve sınır koşullarının dalga potansiyelleri cinsinden ifadeleri verilmiştir. Üçüncü bölümde, matematik formülasyonu dalga potansiyelleri cinsinden yapılmış olan problem, temel çözüm kavramı ve konvolüsyon teoremi kullanılarak, uygulanan yükün hızı ve yüzey dalga hızının bir birlerine göre üç farklı durumu için ayrı ayrı çözülmüştür. Her üç durum için elde edilen dalga potansiyellerinin ifadeleri kullanılarak sınırda boyuna yer değiştirmelerin ifadeleri elde edilmiştir. Dördüncü bölümde, elde edilmiş yer değiştirmelerin, elastik sabitlerin bazı özel sayısal değerleri için, grafikleri çizilerek fiziksel yorumları yapılmıştır. Son bölümde ise çalışma boyunca elde edilen sonuçlar sunulmuştur.

2. Problemin İfadesi

$-\infty < x < \infty, 0 \leq y < \infty$, olmak üzere bir izotropik elastik yarı düzlem ele alalım, bkz. Şekil 1.



Şekil 1. Elastik yarı düzlem.

Bu düzleme

$$P = AP_0 \frac{a}{\pi[(x - ct)^2 + a^2]} \quad (1)$$

şeklinde verilmiş olan bir yük etki etsin. P'nin ifadesinden de görüleceği üzere yük, pozitif x eksenine boyunca sabit bir c hızıyla hareket etmekte ve yine x ekseninde a parametresi ile dağılım göstermektedir. Ayrıca (1) ifadesinde, P_0 yükün büyüklüğünü ifade etmekte ve A sabiti de Kaplunov vd. (2006) makalesinde verildiği üzere

$$A = \frac{-k_1 k_2 (1 + k_2^2)}{2\mu[k_2(1 - k_1^2) + k_1(1 - k_2^2) - k_1 k_2(1 - k_1^4)]} \quad (2)$$

şeklinde tanımlıdır. (2) ifadesinde; λ ve μ Lamé sabitleri,

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (3)$$

sırasıyla boyuna ve enine dalga hızları ve c_R Rayleigh dalga hızı olmak üzere k_i ;

$$k_i^2 = 1 - \frac{c_R^2}{c_i^2}, i = 1, 2 \quad (4)$$

şeklinde tanımlıdır.

Lineer elastisitenin hareket denklemleri;

$$\mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5)$$

şeklinde olup burada $u = (u_1, u_2)$ yer değiştirme vektörü ve

yoğunluktur, bkz. (Graff 2012). İncelenen problem için sınır koşulu σ_{ij} gerilme tensörü bileşeni olmak üzere

$$\sigma_{yy} = P \quad (6)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Bir vektörün Helmholtz ayrışımından, (Achenbach 2012), u_i yer değiştirme vektörü bileşeni, ϕ ve ψ dalga potansiyelleri olmak üzere

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7)$$

şeklinde yazılabilir. (7) eşitliklerinin, (5) ve (6) denklemlerinde yerine yazılması ile sırasıyla,

$\kappa = c_1/c_2$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

ve

$$(\kappa^2 - 2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \kappa^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{P}{\mu} \quad (9)$$

elde edilir. Yukarıda yazılan denklemlere Kaplunov vd. (2006) çalışmasında sunulan asimptotik hiperbolik-eliptik modelin uygulanması sonucunda elastik düzlemin içerisinde;

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k_1^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k_2^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (10)$$

eliptik denklemlerinden ve $y = 0$ sınırında

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = AP_0 \frac{a}{[\pi(x - ct)^2 + a^2]} \quad (11)$$

hiperbolik denklemden oluşan bir sınır değer problemi elde edilir. Burada ayrıca dalga potansiyelleri arasında

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{2}{1 + k_2^2} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2}{1 + k_2^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (12)$$

ilişkisi mevcuttur. (7) ile verilen yer değiştirmenin dalga potansiyelleri cinsinden ifadesi ve (12) dalga potansiyelleri arasındaki ilişkiden dolayı $y = 0$ sınırında u_1 boyuna yer değiştirmesinin ifadesi

$$u_1(x, 0) = \frac{c_R^2}{2c_2^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (13)$$

olarak yazılabilir.

3. Dağılımlı Yük İçin Sınır Çözümlerin Elde Edilmesi

Kısmi diferansiyel denklemler teorisinden bilinmektedir

ki homojen olmayan bir diferansiyel denklemin çözümü bu denklemin diferansiyel operatörünün temel çözümü ile denklemin sağ tarafındaki fonksiyonun konvolüsyonundan bulunabilir, bkz. Vladimirov (1976). (11) ile verilen dalga operatörünün temel çözümünün

$$F(x, t) = \frac{c_R}{2} [H(x - c_R t) - H(x + c_R t)] \quad (14)$$

olduğu bilinmektedir. Burada $H(x)$ Heaviside fonksiyonu olup;

$$H(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \quad (15)$$

şeklinde tanımlıdır. O halde (11) denkleminin çözümü, bu denklemin sağ tarafındaki fonksiyon ile (14) ifadesinin konvolüsyonundan

$$\phi(x, 0, t) = \frac{AP_0 c_R}{2\pi} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [H(x - \xi - c_R(t - \tau)) - H(x - \xi + c_R(t - \tau))] \frac{1}{(\xi - c\tau)^2 + a^2} d\xi d\tau$$

olarak yazılabilir. Bu integralde $k = \xi - c\tau$ değişimi yapılsa

$$\phi(x, 0, t) = B \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [H(x - k - c\tau - c_R(t - \tau)) - H(x - k - c\tau + c_R(t - \tau))] \frac{1}{k^2 + a^2} d\tau dk$$

elde edilip, burada

$$B = \frac{AP_0 c_R}{2\pi} \quad (16)$$

şeklinde tanımlıdır. Son integralde $s = x - c t$ ve $r = t - \tau$ değişimleri yapılsa

$$I(k, s) = \int_0^t [H(s - k - (c_R - c)r) - H(s - k + (c_R + c)r)] dr \quad (17)$$

olmak üzere $y = 0$ sınırında ϕ dalga potansiyelinin ifadesi

$$\phi(s, 0) = B \int_{-\infty}^{\infty} I(k, s) \frac{1}{k^2 + a^2} dk \quad (18)$$

integrali ile belirli olur. (17) ifadesinden açıktır ki bu integralin değeri c yükün hızı ile c_R Rayleigh dalga hızının birbiri arasındaki ilişkiye göre farklılık gösterebilir. Bu yüzden olası üç durumun ayrı ayrı incelenmesi gerekir.

3.1. Sub-Rayleigh Durumu

İlk olarak yükün hızının Rayleigh dalga hızından küçük olduğu, $c < c_R$, ve sub-Rayleigh olarak adlandırılan durumu ele alalım. Bu durumda Heaviside fonksiyonun özelliğinden dolayı

$$H(s - k - (c_R - c)r) = 1 - H((c_R - c)r - (s - k)) \quad (19)$$

ve

$$H((c_R - c)r - (s - k)) = H\left(r - \frac{s - k}{c_R - c}\right) \quad (20)$$

yazılabilir. Dolayısıyla (17) ile verilen integral

$$I(k, s) = \int_0^t \left[1 - H\left(r - \frac{s - k}{c_R - c}\right) - H\left(r + \frac{s - k}{c_R + c}\right) \right] dr \quad (21)$$

halini alır. Heaviside fonksiyonun tanımından dolayı (21) integralinin değeri s ve k 'nin birbiri arasındaki ilişkiye göre değişiklik gösterecektir. Mümkün olan tüm durumlar tek tek incelenirse bu integralin hesabı sonucunda

$$I(k, s) = \begin{cases} \frac{s - s_1 - k}{c_R - c}, 0 < s - k < s_1 \\ \frac{s - s_2 - k}{c_R + c}, s_2 < s - k < 0 \\ 0, Diğer durumlar \end{cases} \quad (22)$$

elde edilir. Burada

$$s_1 = (c_R - c)t, \quad s_2 = -(c_R + c)t \quad (23)$$

şeklinde tanımlıdır. (22) eşitliği k 'ye göre parçalı olarak yazılırsa

$$I(k, s) = \begin{cases} \frac{s - s_1 - k}{c_R - c}, s - s_1 < k < s \\ -\frac{s - s_2 - k}{c_R + c}, s < k < s - s_2 \\ 0, Diğer durumlar \end{cases} \quad (24)$$

olur. (24)'ün (18) denkleminde yerine yazılması sonucunda

$$\phi(s, 0) = B \left[\int_{s-s_1}^s \frac{s - s_1 - k}{c_R - c} \frac{1}{k^2 + a^2} dk - \int_s^{s-s_2} \frac{s - s_2 - k}{c_R + c} \frac{1}{k^2 + a^2} dk \right] \quad (25)$$

elde edilir. Bu integralin hesaplanması sonucu, $y = 0$ sınırında ϕ dalga potansiyelinin ifadesi

$$\begin{aligned} \phi(s, 0) = & \frac{B}{c_R - c} \left\{ \frac{s - s_1}{a} \left[\tan^{-1}\left(\frac{s}{a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{s - s_1}{a}\right) \right] \right. \\ & + \frac{1}{2} [\ln((s - s_1)^2 + a^2) - \ln(s^2 + a^2)] \Big\} \\ & + \frac{B}{c_R + c} \left\{ \frac{s - s_2}{a} \left[\tan^{-1}\left(\frac{s}{a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{s - s_2}{a}\right) \right] \right. \\ & + \frac{1}{2} [\ln((s - s_2)^2 + a^2) - \ln(s^2 + a^2)] \Big\} \end{aligned} \quad (26)$$

olarak bulunmuş olur.

$y = 0$ sınırında u_1 boyuna yer değiştirme bileşeninin (13) denkleminde verilmiş olan ifadesini yeni değişkenler cinsinden yazarsak

$$u_1(s, 0) = \frac{c_R^2}{2c_2^2} \frac{\partial \phi}{\partial s} \quad (27)$$

bulunur. O halde (26) ile verilmiş ifadede gerekli türevler alınıp (27) eşitliğinde yerine yazılması ile sınırdaki boyuna yer değiştirme

$$u_1(s, 0) = B \frac{c_R^2}{2c_2^2} \left\{ \frac{1}{c_R - c} \left[\frac{1}{a} \left(\tan^{-1} \left(\frac{s}{a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{s-s_1}{a} \right) \right) + \frac{s-s_1}{a^2 + (s-s_1)^2} - \frac{s}{a^2 + s^2} + (s-s_1) \left(\frac{1}{a^2 + s^2} - \frac{1}{a^2 + (s-s_1)^2} \right) \right] + \frac{1}{c_R - c} \left[\frac{1}{a} \left(\tan^{-1} \left(\frac{s}{a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{s-s_2}{a} \right) \right) + \frac{s-s_2}{a^2 + (s-s_2)^2} - \frac{s}{a^2 + s^2} + (s-s_2) \left(\frac{1}{a^2 + s^2} - \frac{1}{a^2 + (s-s_2)^2} \right) \right] \right\} \quad (28)$$

şeklinde elde edilmiş olur.

3.2. Süper-Rayleigh Durumu

Şimdi yükün hızının Rayleigh dalga hızından büyük olduğu, $c > c_R$, ve süper-Rayleigh olarak adlandırılan durumu ele alalım. Bu durumda, önceki duruma benzer olarak (19) ve (20) denklemleri ile verilmiş olan Heaviside fonksiyonunun özelliğinden dolayı (17) ile verilen integral

$$I(k, s) = \int_0^t \left[H \left(r + \frac{s-k}{c-c_R} \right) - H \left(r + \frac{s-k}{c+c_R} \right) \right] dr \quad (29)$$

olarak yazılabilir. Buradaki Heaviside fonksiyonlarının kökleri sırasıyla

$$r_1 = -\frac{s-k}{c-c_R}, r_2 = -\frac{s-k}{c+c_R}$$

olmak üzere, (29) integralinin değeri; s, k, r_1 ve r_2 'nin bir birlerine göre durumlarına göre değişecektir. Olası tüm durumlar tek tek incelendiğinde, bu integralin hesaplanması sonucunda

$$I(k, s) = \begin{cases} \frac{s-s_1-k}{c-c_R} - \frac{s-s_2-k}{c+c_R}, & 0 < k < s-s_1 \\ -\frac{s-s_2-k}{c_R+c}, & s-s_1 < k < s-s_2 \\ 0, & \text{Diğer durumlar} \end{cases} \quad (30)$$

bulunur. (30) denkleminin, (18) integralinde yerine yazılarak gerekli hesaplamaların yapılması sonucunda

$$\phi(s, 0) = \frac{B}{c-C_R} \left\{ \frac{s-s_1}{a} \left[\tan^{-1} \left(\frac{s-s_1}{a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{s}{a} \right) \right] - \frac{1}{2} [\ln((s-s_1)^2 + a^2) - \ln(s^2 + a^2)] \right\} - \frac{B}{c_R+c} \left\{ \left[\tan^{-1} \left(\frac{s-s_2}{a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{s}{a} \right) \right] - \frac{1}{2} [\ln((s-s_2)^2 + a^2) - \ln(s^2 + a^2)] \right\} \quad (31)$$

elde edilir.

Yukarıda süper-Rayleigh için elde edilen $\phi(s, 0)$ sınır potansiyelinin ifadesi, (26) denkeminden görüldüğü üzere sub-Rayleigh durumunda elde edilen sınır dalga potansiyelinin ifadesi ile aynıdır. Benzer durum noktasal hareketli bir yüke maruz kalmış olan elastik yarı düzlem probleminin incelendiği makalesinde de meydana gelmektedir (Kaplunov vd. 2010). Dolayısıyla süper-Rayleigh durumu için $y = 0$ sınırında u_1 boyuna yer değiştirme bileşeninin ifadesi (28) denkleminde verildiği gibi olur.

3.3. Rezonant Durumu

Son olarak rezonant durumu olarak da adlandırılan yük hızı ile Rayleigh hızının eşit olduğu, $c = c_R$, durumu inceleyelim. Bu durumda (17) integrali

$$I(k, s) = \int_0^t \left[H(s-k) - H \left(r + \frac{s-k}{2c_R} \right) \right] dr$$

olup gerekli hesaplamalar sonucunda

$$I(k, s) = \begin{cases} -\frac{s-s_2-k}{2c_R}, & s < k < s-s_2 \\ 0, & \text{Diğer durumlar} \end{cases} \quad (32)$$

elde edilir. Böylece (18) integralinden, rezonant durumu için dalga potansiyelinin ifadesi

$$\phi(s, 0) = \frac{B}{2c_R} \left\{ \frac{s-s_2}{a} \left[\tan^{-1} \left(\frac{s}{a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{s-s_2}{a} \right) \right] + \frac{1}{2} [\ln((s-s_2)^2 + a^2) - \ln(s^2 + a^2)] \right\} \quad (33)$$

olur. Sonuç olarak boyuna yer değiştirme, (33) eşitliğinin (26) ifadesinde yerine yazılması ile

$$u_1(s, 0) = B \frac{c_R}{4c_2^2} \left\{ \frac{1}{a} \left[\tan^{-1} \left(\frac{s}{a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{s-s_2}{a} \right) \right] - \frac{s_2}{a^2 + s^2} \right\} \quad (34)$$

şeklinde bulunur.

4. Sayısal Sonuçlar

Bir önceki kısımda, Kaplunov vd. (2006) çalışmasında geliştirilmiş asimptotik hiperbolik-eliptik model sayesinde dağılımlı hareketli bir yük uygulanan elastik yarı düzlem için elde edilmiş sınır değer probleminin çözümü, uygun yöntemler kullanılarak elde edildi. İlk olarak sınır boyunca dalga potansiyelinin ifadesi yük hızı ile Rayleigh dalga hızı arasındaki olası üç durum için ifade edilip daha bu dalga potansiyelleri yardımıyla yine sınırda, boyuna yer değiştirmenin ifadesi elde edildi.

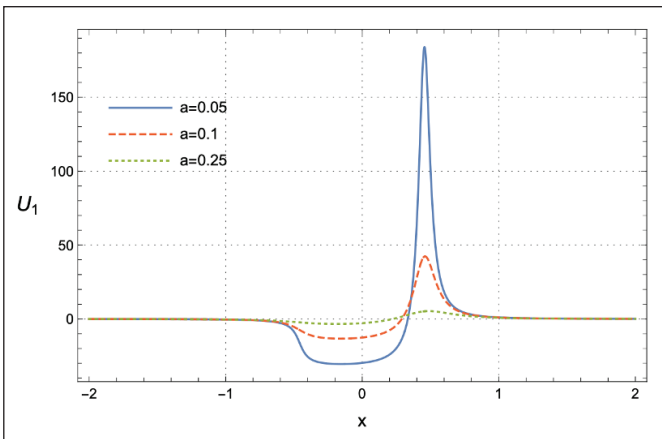
Bu kısımda amacımız elde edilen bu sonuçların grafiksel analizini yaparak yükün dağılımını temsil eden a parametresinin değişimine göre yükün yarı düzleme etkisini incelemektir. Açık ki, a parametresi küçüldükçe Gaussian profile sahip olan yük Dirac delta fonksiyonu profiline sahip olmaya başlayacak ve $a \rightarrow 0$ durumunda noktasal bir yük haline gelecektir. Bu durumda yükün uygulandığı nokta altında bir tekilliğin meydana gelmesi beklenmektedir. Yine a 'nın daha büyük değerlerinin ise daha düzgün bir yer değiştirme profili ortaya çıkarması olası sonuçlardır.

Aşağıda verilecek olan grafiklerde Poisson katsayısı $\nu = 0.25$ olarak alınmıştır ki bu da Rayleigh dalga hızı ve enine dalga hızı arasında $c_R = 0.91994 c_2$ eşitliğini verir. Ayrıca tüm grafikler

$$U_1 = \frac{2c_2^2}{Bc_R^2} u_1 \quad (35)$$

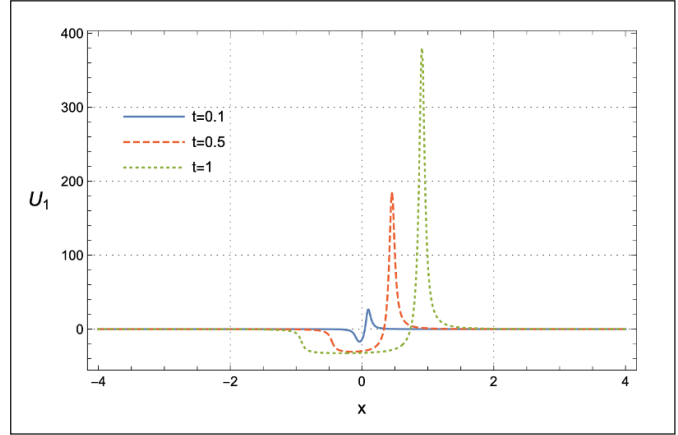
ölçeklendirilmiş yer değiştirmesi için verilecektir.

İlk olarak, Şekil 2 ve Şekil 3 ile verilmiş grafiklerde ölçeklendirilmiş U_1 sınırda boyuna yer değiştirmesinin x 'e göre değişimi sunulmuştur. Bu grafiklerde yükün hızı $c = 0.9 c_2$ olarak alınmıştır. Şekil 2'de U_1 yer değiştirmesinin yük dağılımını ifade eden a parametresine göre değişimi vurgulanmıştır. Yukarıda da bahsedildiği üzere a 'nın küçük değerleri noktasal bir yük profiline sahip bir sonuç ortaya çıkararak, yükün uygulandığı nokta altında tekil bir yer değiştirme yapısı meydana getirmiştir. Yine bu grafikten a 'nın büyük değerlerinin de daha küçük ve düzgün bir yer değiştirmeye neden olduğu gözlemlenebilir.



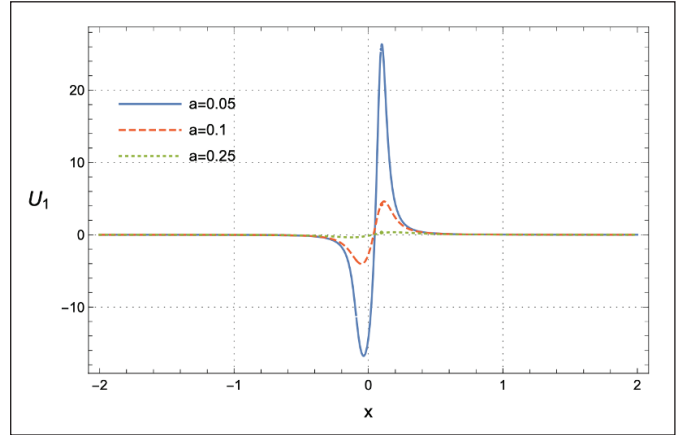
Şekil 2. Sub-Rayleigh durumunda U_1 yer değiştirmesinin $t = 0.5$ anında x 'e göre değişimi.

Şekil 3'de U_1 yer değiştirmesinin zamanla x 'e göre değişimi sunulmuştur. Bu grafikten, beklendiği gibi yer değiştirmenin başlangıçta küçük ve zamanla büyüdüğü görülmektedir.



Şekil 3. Sub-Rayleigh durumunda U_1 yer değiştirmesinin $a = 0.05$ için x 'e göre değişimi.

Şekil 4'de verilen grafikte, U_1 yer değiştirmesinin süper-Rayleigh durumunda x 'e göre farklı a değerleri için değişimi verilmiştir. Bu grafikte yük hızı $c = 0.95 c_2$ olarak alınmıştır. Bir önceki durumda a parametresinin değişiminin yer değişimi üzerine etkisi için yapılan yorumların bu durumda da geçerliği olduğu gözlemlenebilir.

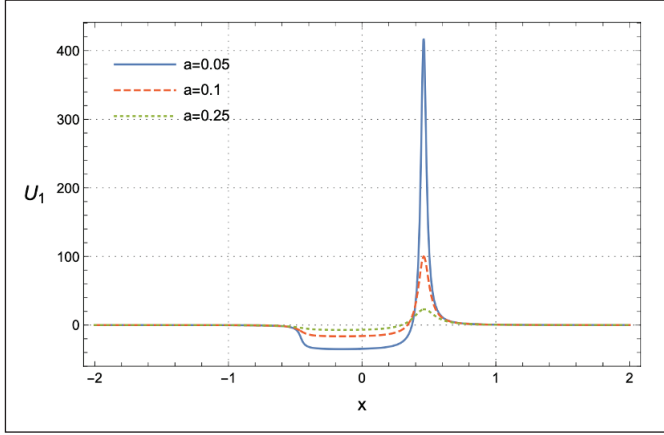


Şekil 4. Süper-Rayleigh durumunda U_1 yer değiştirmesinin $t = 0.1$ anında x 'e göre değişimi.

Son olarak Şekil 5'de rezonant durumunda U_1 'in grafiği verilmiştir. Bu grafikte U_1 yer değiştirmesinin beklendiği gibi yükün uygulandığı nokta altında diğer durumlara kıyasla daha büyük bir tepki verdiği görülmektedir.

3. Sonuçlar

Bu çalışmada Gaussian tip bir profil ile eksen boyunda dağılan ve eksenin pozitif yönünde sabit bir hızla hareket eden bir yük ile yüklenen elastik bir yarı düzlem için bir sınır değer problemi ele alınmıştır. Problem önceki çalışma-



Şekil 5. Rezonant durumda U_1 yer değiştirmesinin $t = 0.5$ anında x 'e göre değişimi.

larda geliştirilmiş hiperbolik-eliptik model ile dalga potansiyelleri cinsinden formüle edilmiştir. Dalga potansiyellerinin ifadesi temel çözüm kavramı yardımıyla, konvolüsyon teoreminden integral olarak verilmiş olup bu integral, yük hızı ile Rayleigh dalga hızının birbirine göre olası üç farklı durumu için hesaplanmıştır. Elde edilen dalga potansiyelleri yardımıyla sınır boyunca, boyuna yer değiştirmenin ifadesi bulunmuştur. Elde edilen bu çözümlerin grafiksel analizi, beklendiği üzere, dağılma parametresi küçüldükçe yer değiştirmenin tekil bir davranışa, dağılım parametresi büyüdükçe ise yer değiştirmenin daha düzgün bir profile sahip olduğunu göstermiştir. Grafiklerin, önceki çalışmalar ile göstermiş oldukları bu uyum, elde edilen sonuçları doğrulamaktadır, bkz. Erbaş ve Şahin (2016) ve Ege vd. (2017). Sonuç olarak bu çalışmada, literatürde sıklıkla çalışılan fakat bu güne kadar özel olarak incelenmemiş bir problem ele alınmış ve problemin çözümü için mevcut modeller ve çözüm metodları başarı ile uygulanmıştır.

Problem, her ne kadar sınır boyunca çözümlere yoğunlaşmış olsa da sınır boyunca elde edilen çözümlerin yarı düzlem için Poisson formülünde kullanılması ve literatürdeki mevcut çalışmalarda sunulmuş olan yöntemlerin takip edilmesi ile çözümlerin tüm düzleme genişletilmesi mümkündür. Ayrıca farklı dağılım profiline ve farklı hareket yönüne sahip yüklerin uygulandığı benzer yapılara ait sınır değer problemleri de incelenebilecek diğer problemlere örnek olarak verilebilir.

Yazar katkısı: Onur Şahin çalışmayı planlamış, tasarlamış ve yazmıştır. Gizem Kaya çalışmayı analiz etmiş, çözümleri elde etmiş ve yazmıştır.

4. Kaynaklar

- Achenbach, J. 2012. Wave propagation in elastic solids. Elsevier.
- Cao, Y., Xia, H., Li, Z. 2012. A semi-analytical/FEM model for predicting ground vibrations induced by high-speed train through continuous girder bridge. Journal of Mechanical Science and Technology, 26: 2485-2496. Doi: 10.1007/s12206-012-0630-1
- Çelebi, E. 2006. Three-dimensional modelling of train-track and sub-soil analysis for surface vibrations due to moving loads. Applied Mathematics and Computation, 179(1): 209-230. Doi: 10.1016/j.amc.2005.11.095
- Çömez, İ. 2022. Dynamic contact problem for a viscoelastic orthotropic coated isotropic half plane. Acta Mechanica, 233(12): 5241-5253. Doi: 10.1007/s00707-022-03366-5
- Çömez, İ., El-Borgi, S. 2023. Frictional contact problem of a coated half plane pressed by a rigid punch with coupled stress elasticity. Archive of Applied Mechanics, 93(9): 3533-3552. Doi: 10.1007/s00419-023-02452-x
- Ege, N., Erbaş, B., Prikazchikov, DA. 2015. On the 3D Rayleigh wave field on an elastic half-space subject to tangential surface loads. ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 95(12): 1558-1565. Doi: 10.1002/zamm.201400211
- Ege, N., Şahin, O., Erbaş, B. 2017. Response of a 3D elastic half-space to a distributed moving load. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 46(5): 817-828. Doi: 10.15672 / HJMS.2017.434
- Erbaş, B., Şahin, O. 2016. On the causality of the Rayleigh wave. Journal of mechanics of materials and structures, 11(4): 449-461. Doi: 10.2140/jomms.2016.11.449
- Erbaş, B., Kaplunov, J., Prikazchikov, DA., Şahin, O. 2017. The near-resonant regimes of a moving load in a three-dimensional problem for a coated elastic half-space. Mathematics and Mechanics of Solids, 22(1): 89-100. Doi: 10.1177/1081286514555
- Fryba, L. 2013. Vibration of solids and structures under moving loads (Vol. 1). Springer science & business media.
- Georgiadis, HG., Lykotrafitis, G. 2001. A method based on the Radon transform for three-dimensional elastodynamic problems of moving loads. Journal of elasticity and the physical science of solids, 65: 87-129. Doi: 10.1023/A:1016135605598
- Graff, KF. 2012. Wave motion in elastic solids. Courier Corporation.
- Kaplunov, J., Zakharov, A., Prikazchikov, D. 2006. Explicit models for elastic and piezoelectric surface waves. IMA journal of applied mathematics, 71(5): 768-782. Doi: 10.1093/imamat/hxl012

- Kaplunov, J., Nolde, E., Prikazchikov, DA. 2010.** A revisit to the moving load problem using an asymptotic model for the Rayleigh wave. *Wave motion* 47, no. 7: 440-451. Doi: 10.1016/j.wavemoti.2010.01.005
- Kaplunov, J., Prikazchikov, DA., Erbaş, B., Şahin, O. 2013.** On a 3D moving load problem for an elastic half space. *Wave motion*, 50(8): 1229-1238. Doi: 10.1016/j.wavemoti.2012.12.008
- Liu, K., Zhang, Z., Pan, E. 2022.** Dynamic response of a transversely isotropic and multilayered poroelastic medium subjected to a moving load. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 155: 107154. Doi: 10.1016/j.soildyn.2022.107154
- Ouyang, H. 2011.** Moving-load dynamic problems: A tutorial (with a brief overview). *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(6): 2039-2060. Doi: 10.1016/j.ymssp.2010.12.010
- Radi, E. 2021.** A loaded beam in full frictionless contact with a couple stress elastic half-plane: effects of non-standard contact conditions. *International Journal of Solids and Structures*, 232: 111175. Doi: 10.1016/j.ijsolstr.2021.111175
- Şahin, O. 2021.** Mixed boundary value problems for Rayleigh wave in a half-plane with cubic anisotropy. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 101(8): e202000171. Doi: 10.1002/zamm.202000171
- Vladimirov, VS. 1976.** Equations of mathematical physics. Moscow Izdatel Nauka.
- Wootton, PT., Kaplunov, J., Prikazchikov, D. 2020.** A second-order asymptotic model for Rayleigh waves on a linearly elastic half plane. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 85(1): 113-131. Doi: 10.1093/imamat/hxz037
- Zhang, Z., Liu, S., Pan, E., Wang, Q. 2023.** Dynamic loading in a transversely isotropic and layered elastic half-space. *International Journal of Mechanical Sciences*, 260: 108626. Doi: 10.1016/j.ijmecsci.2023.108626