ISSN 2757-5543 GÜFFD 5. Cilt (2): 181-193 (2024)

Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi
https://dergipark.org.tr/tr/pub/guffd

GÜFFD GAZİ ÜNİVERSİTESİ FEN FAKÜLTESİ DERGİSİ

İki Değişkenli Kantorovich Tipi Chlodowsky-Sheffer Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

Şule Yüksel Güngör *

Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06500, Ankara, Türkiye

Öne Çıkanlar

- Bu makalede Kantorovich tipi iki değişkenli lineer pozitif operatör dizisi Sheffer polinomlarını içerecek biçimde tanımlanmıştır.
- Bu operatörlerin sürekli fonksiyonlara yaklaşımı tam ve kısmi süreklilik modülü yardımıyla elde edilmiştir.
- Lipschitz sınıfından fonksiyonlar için yaklaşım derecesi verilmiştir.
- Grafikler yardımıyla yaklaşım görsel olarak sunulmuştur.

Makale Bilgileri

Geliş: 19/07/2024
Kabul: 08/10/2024

Anahtar Kelimeler

Süreklilik modülü, Kantorovich operatörleri, Chlodowsky operatörleri, Sheffer polinomları, İki değişkenli operatörler.

Öz

Bu çalışmada Bernstein-Chlodowsky operatörleri ve Sheffer polinomlarını içeren genelleştirilmiş Szász operatörleri kullanılarak iki değişkenli lineer pozitif operatörlerin bir dizisi tanımlandı. Bu operatörlerin sürekli fonksiyonlara yaklaşım derecesi tam ve kısmi süreklilik modülü yardımıyla incelendi. Ayrıca Lipschitz sınıfından fonksiyonlar için yaklaşım derecesi elde edildi. Son olarak tanımı yapılan operatörlerin belirli fonksiyonlara yaklaşımı grafikler yardımıyla gösterildi.

Approximation Properties of Bivariate Kantorovich type Chlodowsky-Sheffer Operators

Highlights

- In this paper, a sequence of bivariate positive linear operators of Kantorovich type is defined to include Sheffer polynomials.
- The approximation of these operators to continuous functions is obtained with the help of the full and partial modulus of continuity.
- The degree of approximation is given for functions from the Lipschitz class.
- The convergence is presented visually with the help of graphics.

Article Info

Received: 19/07/2024
Accepted: 08/10/2024

Keywords

Modulus of continuity, Kantorovich operators, Chlodowsky operators, Sheffer polynomials, Bivariate operators.

Abstract

In this study, a sequence of bivariate positive linear operators is defined using Bernstein-Chlodowsky operators and generalized Szász operators including Sheffer polynomials. The degree of approximation of these operators to continuous functions is examined with the help of the full and partial modulus of continuity. Moreover, the degree of approximation is obtained for functions from the Lipschitz class. Finally, convergence of the defined operators to certain functions is shown with the help of graphs.

Araştırma Makalesi

* Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Şule Yüksel Güngör, sulegungor@gazi.edu.tr

1. GİRİŞ

1885 yılında Alman matematikçi Weierstrass, kapalı ve sınırlı bir aralık üzerinde, verilen bir sürekli fonksiyona düzgün yakınsayan bir polinom dizisinin varlığını kanıtlamıştır [1]. Teoremin çok çeşitli kanıtları arasında Bernstein'nın kanıtı, polinom dizisini açık bir formülle ifade ettiği için öne çıkmaktadır [2]. Bernstein'ın çalışmasının önemli bir genellemesi Bohman [3] ve Korovkin [4] tarafından verilmiştir. Bohman-Korovkin teoremleri, lineer pozitif operatörlerin bir dizisinin yakınsaklığının araştırılmasında, belirlenmiş sonlu fonksiyon kümelerinin incelenmesinin daha basit bir yolunu sunmaktadır (bkz. [5]). Yaklaşımın araştırılması gibi yaklaşımın derecesinin hesaplanması da bir diğer çalışma alanıdır. Yaklaşım derecesi problemlerinde bir fonksiyonun polinomlarla ne kadar iyi temsil edilebileceğini ve hatanın ne kadar azaltılabileceğini ölçmek için parametreler kulllanılır; bu çalışmada da kullanacağımız süreklilik modülü ve Lipschitz uzayları, derecenin belirlenmesinde sık kullanılan araçlardır.

$[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı integrallenebilir fonksiyonlara yaklaşımın incelenmesi amacıyla Kantorovich operatörleri

$$K_n(f;x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\,(1-x)^{n-k}\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(x)dx \tag{1}$$

şeklinde tanımlanmıştır [6].

Bernstein-Chlodowsky polinomları olarak bilinen Bernstein polinomlarının bir genellemesi 1937'de Chlodowsky tarafından

$$B_n(f;x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{a_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{a_n}\right)^{n-k} f\left(\frac{ka_n}{n}\right), & 0 \le x \le a_n\ ise \\ f(x), & x > a_n\ ise \end{cases} \tag{2}$$

şeklinde tanımlamıştır [7]. Burada (a_n), $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ve $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = 0$ olacak biçimde pozitif reel sayıların bir dizisi ve $f \in C[0,a_n]$ dir.

1950'de Szász tarafından, $x \in [0,\infty), f \in C[0,\infty)$ olmak üzere, Szász operatörleri,

$$S_n(f;x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{3}$$

şeklinde tanımlanmıştır [8].

$A(u) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u^k, (a_0 \neq 0), |u| < R, (R > 1)$ diskinde analitik bir fonksiyon ve $A(1) \neq 0$ olmak üzere p_k Appell polinomları

$$A(u)e^{ux} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)u^k \tag{4}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır [9]. Appell polinomları yardımıyla [10]'da Jakimovski ve Leviatan, Szász operatörlerinin bir genellemesini, $f \in E$, $E \coloneqq \{f: [0,\infty) \to \mathbb{R}: |f(x)| \le Me^{cx}, M, c \in \mathbb{R}, x \ge 0\}$ olmak üzere

$$P_n(f;x) = \frac{e^{-nx}}{A(1)}\sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx)f\left(\frac{k}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}, x \in [0,\infty) \tag{5}$$

ile tanımlamışlardır.

Appell polinomlarından daha genel olan p_j Sheffer polinomları ise,

$$A(t)e^{yH(t)} = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(y)t^j\,, |t| < R, \tag{6}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır [9].
Burada

$$A(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, t^j, a_0 \neq 0, \qquad H(t) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j\, t^j, h_1 \neq 0,$$

$|t| < R, (R > 1)$ diskinde analitik fonksiyonlardır.

$A(1) \neq 0, H'(1) = 1,\ a_k, h_k \in \mathbb{R}$ ve her $y \in [0, \infty), j \geq 0$ için $p_j(y) \geq 0$ koşulları altında, [11]'de Ismail, Sheffer polinomları yardımıyla (5) ile tanımlanan Jakimovski ve Leviatan operatörlerinin bir genellemesini

$$T_m(f; y) = \frac{e^{-mH(1)y}}{A(1)} \sum_{j=0}^{\infty} p_j(my) f\left(\frac{j}{m}\right) \tag{7}$$

şeklinde tanımlamış ve her $f \in E$ için, $[0, \infty)$ aralığının kompakt her alt aralığı üzerinde $T_m(f; .)$ operatörlerinin f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsadığını göstermiştir.

Ayrıca, Ismail (7) ile verilen T_m operatörlerinin Kantorovich varyantını da

$$T_m^*(f; y) = \frac{me^{-mH(1)y}}{A(1)} \sum_{j=0}^{\infty} p_j(my) \int_{\frac{j}{m}}^{\frac{j+1}{m}} f(s)ds \tag{8}$$

ile tanımlamıştır.

T_m ve T_m^* operatörlerinin yaklaşım oranı, süreklilik modülü yardımıyla [12]'de verilmiştir.

Yaklaşım teorisi alanında yukarıda bahsi geçen öncü çalışmalar esas alınarak genel veya belirli polinomları içeren operatörler tanımlanmakta ve yaklaşım özellikleri ve dereceleri incelenmektedir [13-19].

2. SHEFFER ÜRETEÇ POLİNOMLARI İLE $L_{n,m}$ OPERATÖRLERİNİN ELDE EDİLİŞİ

[20]'de Sheffer polinomlarını içeren genelleştirilmiş Szász operatörlerinin Kantorovich varyantı

$$K_m(f; y) = \frac{e^{-\gamma_m y H(1)/\beta_m}}{A(1)} \frac{\gamma_m}{\beta_m} \sum_{j=0}^{\infty} p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right) \int_{\frac{\beta_m j}{\gamma_m}}^{\frac{\beta_m (j+1)}{\gamma_m}} f(s)ds \tag{9}$$

biçiminde tanımlanmış ve süreklilik modülü, Lipschitz sınıfından fonksiyonlar ve Peetre-$\mathcal{K}$ fonksiyoneli yardımıyla yaklaşım hızı hesaplanmıştır. Aynı zamanda bu operatörler için asimptotik yaklaşım formülü Voronovskaja tip teorem ile verilmiştir. Burada $(\gamma_m), (\beta_m)$ pozitif reel sayıların sınırsız birer dizisi, $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{\beta_m}{\gamma_m} = 0$ ve $\beta_m/\gamma_m \leq 1$ dir ve $f \in C[0, \infty)$ dur.

Yukarıda bahsedilen çalışmalardan alınan ilhamla, Bernstein-Chlodowsky operatörlerini ve Sheffer polinomlarını içeren genelleştirilmiş Szász operatörlerinin Kantorovich varyantını kullanarak iki değişkenli Chlodowsky-Szász-Sheffer-Kantorovich operatörlerini, $I_1 = \left[\frac{\beta_m j}{\gamma_m}, \frac{\beta_m (j+1)}{\gamma_m}\right]$ ve $I_2 = \left[\frac{k a_n}{n}, \frac{(k+1)a_n}{n}\right]$ olmak üzere,

$$L_{n,m}(f;x,y)=\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\iint\limits_{I_1 I_2}f(t,s)dtds \tag{10}$$

biçiminde tanımlıyoruz. Burada $n,m\in\mathbb{N}$ için, $b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)=\binom{n}{k}\left(\frac{x}{a_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{a_n}\right)^{n-k}$, $A_{a_n}=\{(x,y):0\le x\le a_n,\ 0\le y<\infty\}$ ve $C(A_{a_n})=\{f:A_{a_n}\to\mathbb{R}\ \textit{sürekli}\}$ olup $f, C(A_{a_n})$ uzayına aittir. Ayrıca (a_n) ve (β_m), $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$ ve $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{\beta_m}{\gamma_m}=0$ olacak biçimde iki reel sayı dizisidir. $C(A_{a_n})$ uzayı $\|f\|_{C(A_{a_n})}=\sup\limits_{(t,s)\in A_{a_n}}|f(t,s)|$ normu ile donatılmıştır.

3. $L_{n,m}$ OPERATÖRLERİNİN DÜZGÜN YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde $e_{n,m}(t,s)=t^n s^m,(0\le n+m\le 2, n,m\in\{0,1,2\})$ test fonksiyonları olmak üzere, ilk olarak $L_{n,m}$ operatörlerinin test fonksiyonlarındaki değerleri ve ikinci merkezi momentleri hesaplanacak daha sonra bu değerler yardımı ile Volkov teoremi kullanılarak $L_{n,m}$ operatörlerinin düzgün yakınsaklığı incelenecektir.

Lemma 3.1. (10) ile tanımlanan iki değişkenli $(L_{n,m})$ lineer pozitif operatör dizisinin test fonksiyonlarındaki değerleri şunlardır:

i. $L_{n,m}(1;x,y)=1,$

ii. $L_{n,m}(t;x,y)=x+\frac{a_n}{2n},$

iii. $L_{n,m}(s;x,y)=y+\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta_m}{\gamma_m},$

iv. $L_{n,m}(t^2;x,y)=\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+2\frac{a_n}{n}x+\frac{1}{3}\frac{a_n^2}{n^2},$

v. $L_{n,m}(s^2;x,y)=y^2+y\frac{\beta_m}{\gamma_m}\left(\frac{2A'(1)}{A(1)}+H''(1)+2\right)+\frac{\beta_m^2}{\gamma_m^2}\left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)}\right).$

İspat. (K_n) ve (B_n) sırası ile (1) ve (2) ile verilen operatör dizileri olmak üzere, bu operatör dizilerinin test fonksiyonlarındaki değerlerinin ve $(L_{n,m})$ operatör dizisinin lineelik özelliğinin kullanılmasıyla aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

i. $$L_{n,m}(1;x,y)=\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\iint_{I_1 I_2}dtds$$
$$=\sum_{k=0}^{n}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\beta_m}}}{A(1)}p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)$$
$$=1,$$

ii. $$L_{n,m}(t;x,y)=\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\iint_{I_1 I_2}tdtds$$
$$=\sum_{k=0}^{n}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{a_n}{n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\beta_m}}}{A(1)}p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)$$
$$=x+\frac{a_n}{2n},$$

$$iii.\ L_{n,m}(s;x,y)=\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\iint_{I_1I_2}s\,dtds$$
$$=\sum_{k=0}^{n}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\beta_m}}}{A(1)}p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta_m}{\gamma_m}$$
$$=y+\left(\frac{A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta_m}{\gamma_m},$$

$$iv.\ L_{n,m}(t^2;x,y)=\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\iint_{I_1I_2}t^2\,dtds$$
$$=\sum_{k=0}^{n}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)\left(k^2+k+\frac{1}{3}\right)\frac{a_n^2}{n^2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\beta_m}}}{A(1)}p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+2\frac{a_n}{n}x+\frac{1}{3}\frac{a_n^2}{n^2},$$

$$v.\ L_{n,m}(s^2;x,y)=\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\iint_{I_1I_2}s^2\,dtds$$
$$=\sum_{k=0}^{n}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\beta_m}}}{A(1)}p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\left(j^2+j+\frac{1}{3}\right)\frac{\beta_m^2}{\gamma_m^2}$$
$$=y^2+y\frac{\beta_m}{\gamma_m}\left(\frac{2A'(1)}{A(1)}+H''(1)+2\right)+\frac{\beta_m^2}{\gamma_m^2}\left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{3}\right).$$

Lemma 3.1’in bir sonucu olarak aşağıdaki ifadeleri verebiliriz:

Lemma 3.2. $(x,y)\in A_{a_n}, m,n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $L_{n,m}$ operatörleri için

$$i.\ L_{n,m}(t^2+s^2;x,y)=\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+2\frac{a_n}{n}x+\frac{1}{3}\frac{a_n^2}{n^2}$$
$$+y^2+y\frac{\beta_m}{\gamma_m}\left(\frac{2A'(1)}{A(1)}+H''(1)+2\right)+\frac{\beta_m^2}{\gamma_m^2}\left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{3}\right),$$
$$ii.\ L_{n,m}((t-x)^2;x,y)=\frac{x(a_n-x)}{n}+\frac{1}{3}\frac{a_n^2}{n^2},$$
ve
$$iii.\ L_{n,m}((s-y)^2;x,y)=\frac{\beta_m}{\gamma_m}(H''(1)+1)y+\frac{\beta_m^2}{\gamma_m^2}\left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{3}\right)$$
olur.

İspat. $(L_{n,m})$ operatör dizisinin lineerlik özelliği ve Lemma 3.1’den,

$$i.\ L_{n,m}(t^2+s^2;x,y)=\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\iint_{I_1I_2}(t^2+s^2)\,dtds$$
$$=\sum_{k=0}^{n}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)\left(k^2+k+\frac{1}{3}\right)\frac{a_n^2}{n^2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\beta_m}}}{A(1)}p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)$$
$$+\sum_{k=0}^{n}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\beta_m}}}{A(1)}p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\left(j^2+j+\frac{1}{3}\right)\frac{\beta_m^2}{\gamma_m^2}$$
$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+2\frac{a_n}{n}x+\frac{1}{3}\frac{a_n^2}{n^2}$$
$$+y^2+y\frac{\beta_m}{\gamma_m}\left(\frac{2A'(1)}{A(1)}+H''(1)+2\right)+\frac{\beta_m^2}{\gamma_m^2}\left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{3}\right),$$
ve
$$ii.\ L_{n,m}((t-x)^2;x,y)=L_{n,m}(t^2;x,y)-2xL_{n,m}(t;x,y)+x^2L_{n,m}(1;x,y)$$
$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+2\frac{a_n}{n}x+\frac{1}{3}\frac{a_n^2}{n^2}-2x\left(x+\frac{a_n}{2n}\right)+x^2$$

$$= \frac{x(a_n - x)}{n} + \frac{1}{3}\frac{a_n^2}{n^2} \text{ bulunur.}$$

iii. (ii) durumuna benzer şekilde istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.3. [21] $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt bir küme olmak üzere $C(K)$ uzayı üzerinde tanımlı, iki değişkenli lineer pozitif operatörlerin bir $(V_{n,m})$ dizisi için, K üzerinde,

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\|V_{n,m}(e_{0,0}) - e_{0,0}\right\|_{C(K)} = 0,$$
$$\lim_{n,m\to\infty} \left\|V_{n,m}(e_{1,0}) - e_{1,0}\right\|_{C(K)} = 0,$$
$$\lim_{n,m\to\infty} \left\|V_{n,m}(e_{0,1}) - e_{0,1}\right\|_{C(K)} = 0,$$
$$\lim_{n,m\to\infty} \left\|V_{n,m}(e_{2,0} + e_{0,2}) - (e_{2,0} + e_{0,2})\right\|_{C(K)} = 0$$

düzgün yaklaşımları gerçeklenir ise her bir $f \in C(K)$ için $\lim\limits_{n,m\to\infty} \left\|L_{n,m}(f) - f\right\|_{C(K)} = 0$ düzgün yaklaşımı gerçeklenir.

Şimdi, Volkov'un teoremine [21] dayanarak, (10) denkleminde tanımlanan $L_{n,m}$ operatörlerinin f fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğu gösterilecektir:

Teorem 3.4. $I_{cd} \coloneqq [0,c] \times [0,d] \subset A_{a_n}$ olsun. (10) ile tanımlanan iki değişkenli $(L_{n,m})$ lineer pozitif operatör dizisi için $n,m \to \infty$ iken her $f \in C(I_{cd})$ için $\lim\limits_{n,m\to\infty} \left\|L_{n,m}(f) - f\right\|_{C(I_{cd})} = 0$ sağlanır.

İspat. Lemma 3.1 ve Lemma 3.2'den Teorem 3.3'ün koşullarının sağlandığı görülür. Dolayısıyla her bir $f \in C(I_{cd})$ için $L_{n,m}(f;x,y)$, $f(x,y)$ fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar.

4. $L_{n,m}$ OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM DERECESİ

Bu bölümde $L_{n,m}$ operatörlerinin kompakt $I_{cd} \coloneqq [0,c] \times [0,d] \subset A_{a_n}$ kümesi üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayındaki yaklaşım derecesi elde edilecektir.

Tanım 3.5. [22] $f \in C(I_{cd})$ için, iki değişkenli operatörler için tam süreklilik modülü her $(t,s),(x,y) \in I_{cd}$ için

$$\omega(f;\delta) = sup\{|f(t,s) - f(x,y)| : \sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \le \delta\}$$

ile, x ve y ye göre kısmi süreklilik modülleri

$$\omega^1(f;\delta) = sup\{\,|f(x_1,y) - f(x_2,y)| : y \in [0,d]\ ve\ |x_1 - x_2| \le \delta$$

ve

$$\omega^2(f;\delta) = \sup\{|f(x,y_1) - f(x,y_2)| : x \in [\,0,c]\ ve\ |y_1 - y_2| \le \delta\}$$

olarak tanımlıdır.

Teorem 3.6. $f \in C(I_{cd})$ olsun. Her $(x,y) \in I_{cd}$ için,

i. $|L_{n,m}(f;x,y) - f(x,y)| \le 2\omega(f;\delta_{n,m})$ olup

burada $\delta_{n,m} = \left(\frac{x(a_n - x)}{n} + \frac{1}{3}\frac{a_n^2}{n^2} + \frac{\beta_m}{\gamma_m}(H''(1) + 1)y + \frac{\beta_m^2}{\gamma_m^2}\left(\frac{A''(1) + 2A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{3}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$ dir.

ii. $|L_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)| \leq 2\left(\omega^1\left(f;\delta_n(x)\right)+\omega^2\left(f;\delta_m(y)\right)\right)$ olup

burada $\delta_n(x)=\left(\frac{x(a_n-x)}{n}+\frac{1}{3}\frac{a_n^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ve $\delta_m(y)=\left(\frac{\beta_m}{\gamma_m}(H''(1)+1)y+\frac{\beta_m^2}{\gamma_m^2}\left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{3}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$ dir.

İspat. (10) ile verilen $L_{n,m}$ operatörleri lineerdir. Ayrıca $L_{n,m}(1;x,y)=1$ olması ve Lemma 3.2 dikkate alınırsa,

$$
\begin{aligned}
&i.\ |L_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)| \\
&=\left|\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\iint_{I_1I_2}f(t,s)dtds-f(x,y)\right| \\
&\leq\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\iint_{I_1I_2}|f(t,s)-f(x,y)|dtds \\
&\leq\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\iint_{I_1I_2}\left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{(t-x)^2+(s-y)^2}\right)\omega(f;\delta)dtds \\
&\leq\omega(f;\delta)\left[\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\iint_{I_1I_2}dtds+\right. \\
&\qquad\left.\frac{1}{\delta}\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\iint_{I_1I_2}\sqrt{(t-x)^2+(s-y)^2}dtds\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi, önce eşitsizliğin sağ tarafındaki integral üzerine, daha sonra toplam üzerine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
&L_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)| \\
&\leq\omega(f;\delta)\left[1+\frac{1}{\delta}\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\left(\iint_{I_1I_2}(t-x)^2+(s-y)^2dtds\right)^{\frac{1}{2}}\right. \\
&\qquad\left.\times\left(\iint_{I_1I_2}dtds\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leq\omega(f;\delta)\left[1+\frac{1}{\delta}\left(\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\iint_{I_1I_2}((t-x)^2+(s-y)^2)dtds\right)^{\frac{1}{2}}\right. \\
&\qquad\left.\times\left(\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\iint_{I_1I_2}dtds\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&=\omega(f;\delta)\left(1+\frac{1}{\delta}\left(L_{n,m}((t-x)^2;x,y)+L_{n,m}((s-y)^2;x,y)\right)^{\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\delta=\delta_{n,m}=\left(\frac{x(a_n-x)}{n}+\frac{1}{3}\frac{a_n^2}{n^2}+\frac{\beta_m}{\gamma_m}(H''(1)+1)y+\frac{\beta_m^2}{\gamma_m^2}\left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{3}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$ olarak seçilirse istenilen sonuca ulaşılır.

$$
\begin{aligned}
&ii.\ |L_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)| \\
&\leq\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\iint_{I_1I_2}|f(t,s)-f(x,y)|dtds \\
&=\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\iint_{I_1I_2}|f(t,s)-f(x,s)+f(x,s)-f(x,y)|dtds
\end{aligned}
$$

$$\leq \frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\beta_m}}}{A(1)} \frac{n}{a_n} \frac{\gamma_m}{\beta_m} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right) p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right) \iint_{I_1 I_2} \left(1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{(t-x)^2}\right) \omega^1(f;\delta_n) dtds$$
$$+ \frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\beta_m}}}{A(1)} \frac{n}{a_n} \frac{\gamma_m}{\beta_m} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right) p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right) \iint_{I_1 I_2} \left(1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{(s-y)^2}\right) \omega^2(f;\delta_m) dtds$$
$$\leq \omega^1(f;\delta_n) \left[\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\beta_m}}}{A(1)} \frac{n}{a_n} \frac{\gamma_m}{\beta_m} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right) p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right) \iint_{I_1 I_2} dtds \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\delta_n} \frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\beta_m}}}{A(1)} \frac{n}{a_n} \frac{\gamma_m}{\beta_m} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right) p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right) \iint_{I_1 I_2} \sqrt{(t-x)^2} dtds \right]$$

$$+\omega^2(f;\delta_m) \left[\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\beta_m}}}{A(1)} \frac{n}{a_n} \frac{\gamma_m}{\beta_m} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right) p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right) \iint_{I_1 I_2} dtds \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\delta_m} \frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\beta_m}}}{A(1)} \frac{n}{a_n} \frac{\gamma_m}{\beta_m} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right) p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right) \iint_{I_1 I_2} \sqrt{(s-y)^2} dtds \right]$$

$$=\omega^1(f;\delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} \frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\beta_m}}}{A(1)} \frac{n}{a_n} \frac{\gamma_m}{\beta_m} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right) p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right) \iint_{I_1 I_2} (t-x) dtds \right]$$
$$+\omega^2(f;\delta_m) \left[1 + \frac{1}{\delta_m} \frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\beta_m}}}{A(1)} \frac{n}{a_n} \frac{\gamma_m}{\beta_m} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right) p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right) \iint_{I_1 I_2} (s-y) dtds \right]$$

elde edilir. Önce eşitsizliğin sağ tarafındaki integraller üzerine, daha sonra toplamlar üzerine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$|L_{n,m}(f;x,y) - f(x,y)|$$
$$\leq \omega^1(f;\delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} \left(\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\beta_m}}}{A(1)} \frac{n}{a_n} \frac{\gamma_m}{\beta_m} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right) p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right) \iint_{I_1 I_2} (t-x)^2 dtds \right)^{\frac{1}{2}} \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\beta_m}}}{A(1)} \frac{n}{a_n} \frac{\gamma_m}{\beta_m} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right) p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right) \iint_{I_1 I_2} dtds \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$
$$+\omega^2(f;\delta_m) \left[1 + \frac{1}{\delta_m} \left(\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\beta_m}}}{A(1)} \frac{n}{a_n} \frac{\gamma_m}{\beta_m} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right) p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right) \iint_{I_1 I_2} (s-y)^2 dtds \right)^{\frac{1}{2}} \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\beta_m}}}{A(1)} \frac{n}{a_n} \frac{\gamma_m}{\beta_m} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right) p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right) \iint_{I_1 I_2} dtds \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$
$$= \omega^1(f;\delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} L_n((t-x)^2;x)^{\frac{1}{2}} \right] + \omega^2(f;\delta_m) \left[1 + \frac{1}{\delta_m} L_m((s-y)^2;y)^{\frac{1}{2}} \right]$$

bulunur. $\delta_n(x) = \left(\frac{x(a_n - x)}{n} + \frac{1}{3}\frac{a_n^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ve $\delta_m(y) = \left(\frac{\beta_m^2}{\gamma_m^2}\left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)} + \frac{1}{3}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$ olarak seçilirse istenilen sonuç elde edilir.

Bu kısımda, iki değişkenli fonksiyonlar sınıfı için Lipschitz sınıfı kavramı verilecek ve Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar için yaklaşım derecesi incelenecektir.

Tanım 3.7. [22] f fonksiyonu $[0,c]\times[0,d]$ bölgesinde tanımlı ve (x_1,y) ve (x_2,y) bu bölgenin keyfi noktaları olmak üzere, $|f(x_1,y)-f(x_2,y)|\le C|x_1-x_2|^{\mu}, 0<\mu\le 1$ koşulunu sağlarsa, o zaman f fonksiyonu D bölgesinde x değişkenine göre Lipschitz koşulunu sağlar veya x değişkenine göre $Lip\mu$ sınıfındandır denir ve bu $f\in Lip_x$ biçiminde gösterilir.

Benzer şekilde (x,y_1) ve (x,y_2) D bölgesinin keyfi noktaları olmak üzere, $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le C|y_1-y_2|^{\mu}, 0<\mu\le 1$ koşulunu sağlarsa, o zaman f fonksiyonu D bölgesinde y değişkenine göre Lipschitz koşulunu sağlar veya y değişkenine göre $Lip\mu$ sınıfındandır denir ve bu $f\in Lip_y$ biçiminde gösterilir.

f, D bölgesinde tanımlı bir fonksiyon, $x=(x_1,x_2)$, $t=(t_1,t_2)\in D$ ve $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ olmak üzere $|f(x_1,x_2)-f(t_1,t_2)|\le C|x-t|^{\mu}, 0<\mu\le 1$ ise f, D bölgesinde C sabitine göre μ. mertebeden Lipschitz sınıfındandır denir ve $f\in Lip_C$ biçiminde gösterilir.

Teorem 3.8. $(L_{n,m})$, (10) ile tanımlanan iki değişkenli lineer pozitif operatör dizisi olsun. Bu durumda,

i. $f\in Lip_x\mu\cap Lip_y\eta$ için

$$\left|L_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right|\le C_1(\delta_n)^{\frac{\mu}{2}}+C_2(\delta_m)^{\frac{\eta}{2}}, 0<\mu,\eta\le 1$$

ii. $f\in Lip_C$ için

$$\left|L_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right|\le C(\delta_n+\delta_m)^{\frac{\mu}{2}}, 0<\mu\le 1$$

olup burada, $\delta_n(x)=\frac{x(a_n-x)}{n}+\frac{1}{3}\frac{a_n^2}{n^2}$ ve $\delta_m(y)=\frac{\beta_m}{\gamma_m}(H''(1)+1)y+\frac{\beta_m^2}{\gamma_m^2}\left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{3}\right)$ dir.

İspat. $f\in Lip_x\mu\cap Lip_y\eta$ olsun. $L_{n,m}$ operatörlerinin lineerlik özelliği, $L_{n,m}(1;x,y)=1$ olması, Lemma 3.2 ve Tanım 3.7 dikkate alınırsa,

i. $\left|L_{n,m}f(x,y)-f(x,y)\right|$

$$\le\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\iint_{I_1I_2}|f(t,s)-f(x,y)|dtds$$

$$=\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\iint_{I_1I_2}|f(t,s)-f(x,s)+f(x,s)-f(x,y)|dtds$$

$$\le\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\iint_{I_1I_2}|f(t,s)-f(x,s)|dtds$$

$$+\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\iint_{I_1I_2}|f(x,s)-f(x,y)|dtds$$

$$\le\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\iint_{I_1I_2}C_1|t-x|^{\mu}dtds$$

$$+\frac{e^{\frac{-\gamma_m yH(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\iint_{I_1I_2}C_2|s-y|^{\eta}dtds$$

elde edilir. Burada sırasıyla $p=\frac{2}{\mu}$ ve $q=\frac{2}{2-\mu}$ ve $p=\frac{2}{\eta}$ ve $q=\frac{2}{2-\eta}$ seçilerek önce eşitsizliğin sağ tarafındaki integrallere, sonra toplamlara Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|L_{n,m}f(x,y)-f(x,y)\right|$$
$$\leq C_1\left[\left(\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}\left(b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)\right)^{\frac{2}{\mu}}\left(p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\right)^{\frac{2}{\mu}}\iint_{I_1 I_2}(x-t)^2 dtds\right)^{\frac{\mu}{2}}\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}\left(b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)\right)^{\frac{2}{2-\mu}}\left(p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\right)^{\frac{2}{2-\mu}}\iint_{I_1 I_2} dtds\right)^{\frac{2-\mu}{2}}\right]$$
$$+C_2\left[\left(\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}\left(b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)\right)^{\frac{2}{\eta}}\left(p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\right)^{\frac{2}{\eta}}\iint_{I_1 I_2}(y-s)^2 dtds\right)^{\frac{\eta}{2}}\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}\left(b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)\right)^{\frac{2}{2-\eta}}\left(p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\right)^{\frac{2}{2-\eta}}\iint_{I_1 I_2} dtds\right)^{\frac{2-\eta}{2}}\right]$$
$$=C_1(L_n(t-x)^2;x)^{\frac{\mu}{2}}+C_2(L_m(s-y)^2;y)^{\frac{\eta}{2}}$$
$$=C_1\left(\frac{x(a_n-x)}{n}+\frac{1}{3}\frac{a_n^2}{n^2}\right)^{\frac{\mu}{2}}+C_2\left(\frac{\beta_m}{\gamma_m}(H''(1)+1)y+\frac{\beta_m^2}{\gamma_m^2}\left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{3}\right)\right)^{\frac{\eta}{2}} \text{ bulunur.}$$

$\delta_n(x)=\left(\frac{x(a_n-x)}{n}+\frac{1}{3}\frac{a_n^2}{n^2}\right)^{\frac{\mu}{2}}$ ve $\delta_m(y)=\left(\frac{\beta_m}{\gamma_m}(H''(1)+1)y+\frac{\beta_m^2}{\gamma_m^2}\left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)}+\frac{1}{3}\right)\right)^{\frac{\eta}{2}}$ olarak seçilirse istenilen sonuç elde edilir.

ii. $f\in Lip_C$ olsun. $L_{n,m}$ operatörlerinin lineerliği, $L_{n,m}(1;x,y)=1$ olduğu ve Tanım 3.7 göz önüne alınırsa,

$$\left|L_{n,m}f(x,y)-f(x,y)\right|$$
$$\leq\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\iint_{I_1 I_2}|f(t,s)-f(x,y)|dtds$$
$$\leq\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\iint_{I_1 I_2}C((x-t)^2+(y-s)^2)^{\frac{\mu}{2}}dtds$$

elde edilir. Burada $p=\frac{2}{\mu}$ ve $q=\frac{2}{2-\mu}$ seçilerek önce eşitsizliğin sağ tarafındaki integrale, sonra toplama Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|L_{n,m}f(x,y)-f(x,y)\right|$$
$$\leq C\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\left(\iint_{I_1 I_2}((x-t)^2+(y-s)^2)dtds\right)^{\frac{\mu}{2}}\left(\iint_{I_1 I_2}dtds\right)^{\frac{2-\mu}{2}}$$

$$\leq C\left[\left(\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}\left(b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)\right)^{\frac{2}{\mu}}\left(p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\right)^{\frac{2}{\mu}}\iint_{I_1 I_2}((x-t)^2+(y-s)^2)dtds\right)^{\frac{\mu}{2}}\right.$$

$$\times\left(\frac{e^{\frac{-\gamma_m y H(1)}{\beta_m}}}{A(1)}\frac{n}{a_n}\frac{\gamma_m}{\beta_m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}\left(b_{n,k}\left(\frac{x}{a_n}\right)\right)^{\frac{2}{2-\mu}}\left(p_j\left(\frac{\gamma_m y}{\beta_m}\right)\right)^{\frac{2}{2-\mu}}\iint_{I_1 I_2} dtds\right)^{\frac{2-\mu}{2}}\Bigg]$$

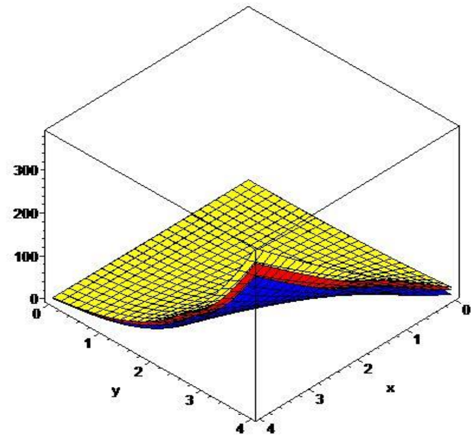
$\leq C\left((L_n(t-x)^2;x)+(L_m(s-y)^2;y)\right)^{\frac{\mu}{2}}$ elde edilir.

$\delta_n(x)=\frac{x(a_n-x)}{n}+\frac{1}{3}\frac{a_n^2}{n^2}$ ve $\delta_m(y)=\frac{\beta_m}{\gamma_m}(H''(1)+1)y+\frac{\beta_m^2}{\gamma_m^2}\left(\frac{A''(1)+2A'(1)}{A(1)}\right)$ seçimleri ile istenilen sonuç elde edilir.

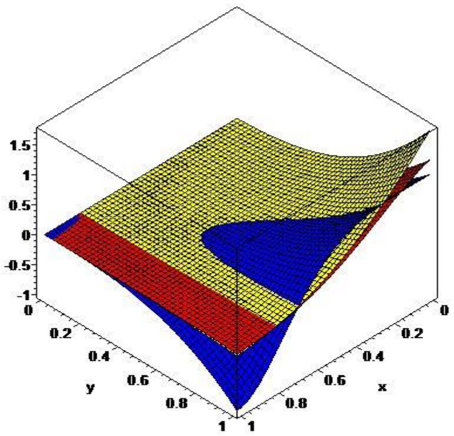
5. GRAFİK SONUÇLAR

Bu bölümde grafikler yardımı ile $L_{m,n}$ operatörlerinin belirli $f(x,y)$ fonksiyonlarına yaklaşımı gösterilecektir. f,A,H fonksiyonları ve a_n,β_m ve γ_m dizilerinin seçimleri ile algoritma oluşturulup grafikler çizilmiştir.

Örnek 4.1. $A(t)=e^t$, $H(t)=t$ ve $a_n=\sqrt{n}$, $\beta_m=\sqrt{m}$, $\gamma_m=m^2$ olsun. $n=m=5$ (11ari) ve $n=m=10$ (kırmızı) için, $L_{m,n}$ operatörlerinin $f(x,y)=xy^3+x^2y$ (mavi) ve $f(x,y)=y^3cos(\pi x^2)$ (mavi) fonksiyonlarına yaklaşım oranları sırasıyla Şekil 1 ve Şekil 2'de gösterilmiştir. Grafiklerden görüldüğü gibi $L_{m,n}$ operatörlerinin farklı fonksiyonlara yaklaşımı incelenmiştir ve bu yaklaşım n ve m değerlerinin artmasıyla iyileşmektedir.

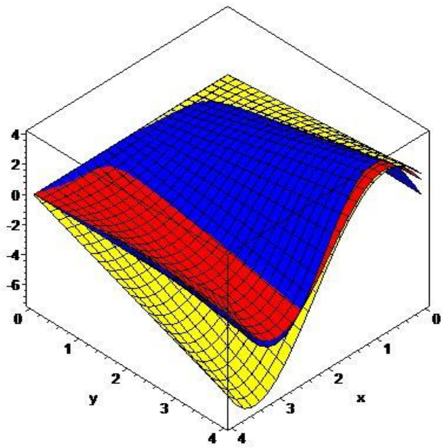


Şekil 1



Şekil 2

Örnek 4.2. $A(t) = t, H(t) = t$ ve $a_n = \sqrt{n},\ \beta_m = \sqrt{m}, \gamma_m = m^2$ olsun. $n = m = 5$ (12ari) ve $n = m = 10$ (kırmızı) için, $L_{m,n}$ operatörlerinin $f(x,y) = ysin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$ (mavi) fonksiyonuna yaklaşım oranları Şekil 3'te gösterilmiştir. Bu örnekte farklı bir A fonksiyonu seçimi için belirli bir $f(x,y)$ fonksiyonuna yaklaşım incelenmiştir.



Şekil 3

6. SONUÇ VE TARTIŞMA

Sürekli ya da integrallenebilen fonksiyonlara yaklaşım amacıyla lineer pozitif operatör dizileri inşa edilirken kullanılan araçlardan biri de ortogonal polinomlardır. Bu çalışmada $\mathbb{R}^2$ uzayının kompakt bir alt kümesi üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlara yaklaşım için Sheffer polinomlarını içeren genelleştirilmiş Szász operatörleri ve Bernstein-Chlodowsky operatörleri kullanılarak Kantorovich-tipi bir genelleme ele alınmıştır. Yaklaşımın varlığı Volkov teoremi yardımıyla, yaklaşımın derecesi ise tam ve kısmi süreklilik modülü ile verilmiştir.

Farklı çalışmalarda özel polinomlar kullanılarak benzer şekilde iki değişkenli operatörler ve bu operatörlerin King tipi gibi genellemeleri tanımlanıp yaklaşım özellikleri incelenebilir.

TEŞEKKÜR

Yapıcı geri bildirimleri ve titiz okumaları için hakemlere teşekkür ederiz.

ÇIKAR ÇATIŞMASI BEYANI

Yazarın bu makalenin içeriğiyle ilgili olarak beyan edeceği hiçbir çıkar çatışması yoktur.

YAZAR KATKI ORANI

Şule Yüksel Güngör: Kavramlaştırma, Metodoloji, Araştırma, Makalenin yazımı-Orijinal taslak, İçerik analizi, Makalenin yazımı- İnceleme ve Düzenleme, Makalelin doğruluğunun kontrolü.

KAYNAKLAR

[1] Weierstrass, K. (1885). Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 633-639 and 789-805.

[2] Bernstein, S. N. (1912). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. *Communications de la Société Mathématique de Kharkov 2 Series XIII*, 1.

[3] Bohman, H. (1952). On approximation of continuous and analytic functions, *Arkiv for Matematik*, 2, 43-56.
[4] Korovkin, P. P. (1953). On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 90, 961-964.
[5] Altomare, F. and Campiti, M. (1994). *Korovkin type Approximation Theory and its Application*, Walter de Gruyter, Berlin: Walter de Gruyter Studies in Math. vol. 17.
[6] Kantorovich, L. V. (1930). Sur certain dévelopments suivant les polynômes de la forme de S. Bernstein, I, II. *C. Russian Academy of Sciences URSS*, 563-568 and 595-600.
[7] Chlodowsky, I. (1937). Sur le développement des fonctions définies dans un intervalle infini en séries de polynomes de M. S. Bernstein. *Compositio Mathematica*, 4, 380–393.
[8] Szász, O. (1950). Generalization of S. Bernstein's Polynomials to the infinite interval. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 45, 239-245.
[9] Roman, S. (1984). *The Umbral Calculus* (Pure and Applied Mathematics, Vol. 111), Academic Press Inc.
[10] Jakimovski, A. and Leviatan, D. (1969). Generalized Szász operators fort he approximation in the infinite interval. *Mathematica (Cluj)*, 11(34), 97-103.
[11] Ismail, M. E. H. (1974). On a generalization of Szász operators. *Mathematica (Cluj)*, 39, 259-267.
[12] Sucu, S. and İbikli, E. (2013). Rate of convergence for Szász type operators including Sheffer polynomials. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, 58(1), 55-63.
[13] Sucu, S. and Büyükyazıcı, İ. (2012). Integral operators containing Sheffer polynomials. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 4(4), 56-66.
[14] Yılmaz, M. M. (2022). Approximation by Szász type operators involving Apostol-Genocchi polynomials. *Computer Modeling in Engineering & Sciences,* 130(1), 287-297. https://doi.org/10.32604/cmes.2022.017385
[15] Menekşe, Y. M. (2023). Rate of convergence by Kantorovich type operators involving adjoint Bernoulli polynomials. *Publications de l'Institut Mathematique,* 114(128), 51-62.
[16] Ağyüz, E. (2023). Convergence properties of a Kantorovich type of Szász operators involving negative order Genocchi polynomials. *Gazi University Journal of Science Part A: Engineering and Innovation,* 10(2), 196-205. https://doi.org/10.54287/gujsa.1282992
[17] Ağyüz, E. (2024). Identities derived from a particular class of generating functions for Frobenius-Euler type Simsek numbers and polynomials. *Filomat,* 38(5), 1531-1545.
[18] Dalmanoğlu, Ö. (2024). Approximation by an integral type Apostol-Genocchi operators. *Journal of Mathematical Analysis,* 15(3).
[19] Karateke, S., Zontul, M., Mishra, V. N. and Gairola, A. R. (2024). On the Approximation by Stancu-Type Bivariate Jakimovski–Leviatan–Durrmeyer Operators. *La Matematica*, 3(1), 211-233.
[20] Koç, T. (2020). *King Tip Genelleştirilmiş Szász-Sheffer Operatörleri ile Yaklaşım*. Yüksek Lisans Tezi. Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Ankara. 94.
[21] Volkov, V. I. (1957). On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of two variables, *Doklady Akademii Nauk Russian Academy of Sciences*, 115(1), 7-19.
[22] Gal, S. G. and Anastassiou, G. A. (2000). *Approximation Theory: Moduli of Continuity and Global Smoothness Preservation*, (First edition) New York: Birkhäuser, 80-466.