MERSİN ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM FAKÜLTESİ DERGİSİ
ARAŞTIRMA MAKALESİ
DOI: 10.17860/mersinefd.1519869

MERSİN UNIVERSITY
JOURNAL OF THE FACULTY OF EDUCATION
RESEARCH ARTICLE
2024; 20(3): 546-564

İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Cebir ve Geometri Alanlarındaki İspat Özellikleri

Muhammet DORUK*
Fikret CİHAN**

Öz: Bu çalışmanın amacı ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının cebir ve geometri alanında yaptıkları ispatların özelliklerini ortaya çıkarmaktır. Bu bağlamda öğretmen adaylarının cebir ve geometri alanında yaptıkları ispatların; ispat yapılarına ve şemalarına odaklanılmıştır. Araştırmanın çalışma grubunu Türkiye'deki bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü dördüncü sınıfında öğrenim gören 29 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Araştırmanın verileri Cebir-Geometri İspat Formu aracılığı ile toplanmıştır. Formda öğretmen adaylarının cebir ve geometri alanından ispat yapmaları gereken iki açık uçlu soru yer almıştır. Bu ispatların çözümlenmesinde betimsel analiz kullanılmıştır. İspat yapılarının analiz sonuçları ilköğretim matematik öğretmen adaylarının hem cebir hem de geometri alanındaki ispatlarda çoğunlukla tümevarımsal ve yapısal-sezgisel yapıda ispat üretebildiklerini, her iki alanda da çok sınırlı sayıda tümdengelimsel yapıda geçerli ispat üretebildiklerini ortaya koymuştur. İspat şemalarının analizi öğretmen adaylarının cebir alanındaki ispatlarda çoğunlukla tümevarımsal ve referanssız-sembolik ispat şemalarını kullandıklarını, geometri alanındaki ispatlarda ise çoğunlukla tümevarımsal ve algısal ispat şemalarını kullandıklarını ortaya çıkarmıştır. Bu sonuçlar öğretmen adaylarının hem cebir hem de geometri alanında ispat yapmada başarısız olduklarını gözler önüne sermiştir. Cebir ve geometri alanlarındaki ispatlar arasındaki yapısal bütünlük durumları incelendiğinde bu iki alandaki ispatlar arasında yapısal sürekliliğin olmadığı, çoğunlukla yapısal mesafenin olduğu bunu da spantone sürekliliklerin takip ettiği belirlenmiştir.
Anahtar Kelimeler: Cebir, geometri, ilköğretim matematik öğretmen adayı, ispat, ispat özellikleri.

Proof Characteristics of Primary School Mathematics Teacher Candidates in The Algebra and Geometry Domains

Abstract: The aim of this study is to reveal the characteristics of the proofs made by primary school mathematics teacher candidates in the domains of algebra and geometry. In this context, the focus was on the proof structures and schemes of the proofs made by prospective teachers in the domains of algebra and geometry. The study group consists of 29 teacher candidates studying in the fourth grade of the primary mathematics teaching department of a state university in Türkiye. The research data were collected through the Algebra-Geometry Proof Form. The form included two open-ended questions that prospective teachers had to prove in the domains of algebra and geometry. These proofs were analyzed with the help of descriptive analysis. The analysis results of the proof structures revealed that teacher candidates were mostly able to produce inductive and structural-intuitive proofs in proofs in both algebra and geometry, and that they could produce valid proofs in a very limited number of deductive structures in both domains. The analysis of proof schemes revealed that pre-service teachers mostly used inductive and non-referential symbolic proof schemes in proofs in the domain of algebra, and that they mostly used inductive and perceptual proof schemes in proofs in the domain of geometry. These results revealed that prospective teachers were unsuccessful in making proofs in both algebra and geometry. When the structural unity situations between the proofs in the domains of algebra and geometry were examined, it was determined that there was no structural continuity between the proofs in these two domains, there was mostly structural distance, and this was followed by spontaneous continuity.
Keywords: Algebra, geometry, primary school mathematics teacher candidate, proof, proof characteristics.

*****Doç. Dr., Uşak Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Uşak-Türkiye, ORCID: 0000-0003-3085-1706, e-posta: mdoruk20@gmail.com
******Sorumlu Yazar, Öğr. Gör. Dr., Kırklareli Üniversitesi, Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu, Kırklareli-Türkiye, ORCID: 0000-0001-8783-4136, e-posta:fikret.cihan@klu.edu.tr

Geliş tarihi: 21 Temmuz 2024 / Kabul tarihi: 08 Ekim 2024

Giriş

Cebir ve geometriye matematik dersi öğretim programlarında geniş bir yer verilmektedir. Literatürde sıklıkla "genelleştirilmiş aritmetik" olarak tanımlanan cebir (Kramarski, 2008, p.83); matematiğin dillerinden biridir (Grønmo, 2018). Ancak cebir yalnızca bir bilim dili değil aynı zamanda ileri matematiğe geçiş kapısıdır (Jupri vd., 2014). Cebir, somut aritmetikten cebrin sembolik diline geçişle birlikte öğrencilerin matematikte ilerlemeleri için gerekli olan soyut matematiksel bilişi geliştiren ve soyut akıl yürütmelerini teşvik eden okul matematiğindeki ilk alandır (Susac vd., 2014). Cebir; denklemleri çözmek, matematiksel temsillerin yapısını belirlemek ve fonksiyonel ilişkileri analiz etmek için sayı ve sembollerin kullanımıyla yakından ilgili olan bir matematik dalıdır (Chrysostomou vd., 2013). Aritmetik akıl yürütmenin doğal bir uzantısı olan (Kramarski, 2008) ve cebir problemlerinin çözümünde kullanılan bir akıl yürütme türü olan (Kaput ve Blanton, 2005) cebirsel akıl yürütme ise; sembolik ifadeler aracılığıyla genel ilişkileri belirlemede, karşılaştırmada ve yönetmede, bununla birlikte birçok sayısal değerlendirmeyi kolaylaştırmada önemli rol oynamaktadır (Smith ve Thompson, 2007). Öğrenciler cebirsel akıl yürütmeyi kullanabilmek için örüntüleri, ilişkileri ve fonksiyonları anlayabilmeli, matematiksel durumları ve yapıları; cebirsel semboller kullanarak temsil ve analiz edebilmeli, niceliksel ilişkileri temsil etmek ve anlamak için matematiksel modelleri kullanabilmeli ve çeşitli bağlamlarda değişimleri analiz edebilmelidirler (Friel vd., 2001). Bunun dışında cebirsel akıl yürütme matematiksel bilgilerin ve ilişkilerin temsilinde tabloların, şekillerin veya grafiklerin kullanımı da gerektirmektedir (Herbert ve Brown, 1997). Ayrıca cebir alanında üretilen ispatlardaki yapılandırılmış argümantasyonlar hem aritmetik hem de cebirsel akıl yürütme ile karakterize edilirler (Pedemonte, 2008). Bu yüzden cebirsel akıl yürütme, ispat için gerekli bir düşünme biçimidir.

Geometrinin odak noktası hem kavramsal hem de şekilsel özelliklere sahip olan ve geometrik figürler olarak adlandırılan zihinsel varlıklardır (Fischbein, 1993). Okul geometrisi, matematikleştirilmiş uzamsal nesneler, ilişkiler ve dönüşümler ile onları temsil etmek için oluşturulmuş aksiyomatik matematiksel sistemlerin incelenmesini içermektedir (Clements ve Battista, 1992). Bu yüzden, okul matematiğinin öğreniminde ihtiyaç duyulan akıl yürütme becerilerinden biri de geometrik akıl yürütme becerisidir (Ramlan ve Ramlan, 2017). Geometrik akıl yürütme süreçleri olarak ifade edilen bilişsel süreç ve kavramlar, öğrencilerin geometrik çıkarımlar yapabilmelerine, geometrik özellikler üzerinden uzamsal ve geometrik becerilerini, hayal güçlerini ve geometrik sezgilerini geliştirebilmelerine, geometrik modeller arasındaki dönüşümleri keşfedebilmelerine ve kavramlar arasında bağ kurabilmelerine önemli derecede katkılar sağlamaktadır (Bozkurt vd., 2022). Geometrik akıl yürütmenin ve düşünmenin gelişimini tanımlamak ve anlamak için farklı seviye ve süreçlerden oluşup yararlı çerçeveler sunan van Hiele Geometrik Düşünme Düzeyleri (van Hiele, 1986), Duval'in Bilişsel Modeli (Duval, 1998) ve Fischbein'in Şekilsel Kavram Modeli (Fischbein, 1993) gibi çeşitli teorik modeller bulunmaktadır (Jones, 1998). Bu modellerden biri olan ve beş düzeyden oluşan van Hiele geometrik düşünme düzeylerinden ilk üçünde (görsel düzey, betimsel düzey, basit çıkarım düzeyi) öğrenciler kendi başlarına ispat yapacak düzeyde değillerken, dördüncü düzey olan çıkarım düzeyinde öğrenciler herhangi bir aksiyomatik sistem içinde ispat yapabilirler ancak beşinci ve son düzey olan sistematik düşünme düzeyinde öğrenciler farklı aksiyomatik sistemlerde de ispat yapabilirler (Duatepe-Paksu, 2016; van Hiele 1986). Dolayısıyla geometrik akıl yürütme, geometri alandaki ispatlar için gerekli bir düşünme biçimidir. Öğrencilerin geometri alanındaki ispatları yapabilmeleri için geometrik akıl yürütme becerilerinin geliştirilmesi gerekmektedir (Evans, 2007).

Teorik Çerçeve

Argümantasyon süreci sonunda informel ya da formel gerekçelendirmelere ulaşılır ki yalnızca formel gerekçelendirmeler ispatı oluştururlar. Harel ve Sowder (1998) lisans öğrencileriyle yaptıkları çalışmalarında her biri matematiksel gelişimde bilişsel bir aşamayı temsil eden ve ispatlama sürecinin bilişsel karakteristiğini ortaya koyan ispat şemalarını gözlemleyip bir sınıflama ortaya koymuşlardır (Harel, 2008; Harel ve Sowder, 1998). İspat şeması bir bireyin kendini ve diğerlerini bir varsayımın doğruluğuna ya da yanlışlığına ikna etmeye çalıştığı gerekçe biçimleridir (Harel ve Sowder, 1998; Sowder ve Harel, 1998). Harel ve Sowder (1998) çalışmalarında öğrencilerin ispat şemalarını otoriter, ritüel ve sembolik alt ispat şemalarından oluşan dışsal, tümevarımsal ve algısal alt ispat şemalarından meydana gelen deneysel, dönüşümcü ve aksiyomatik alt ispat şemalarından ibaret olan analitik ana şemalarına ayırmıştır. Otoriter ispat şemasında öğrenciler ders kitabı ya da öğretmen gibi otoritelere ikna olmaktadırlar (Harel ve Sowder, 1998; Sowder ve Harel, 1998). Ritüel ispat şemalarında öğrenciler ispatın içeriğinden çok görüntüsüne ve şekline ikna olurlar (Harel, 2014; Harel ve Sowder, 1998). Sembolik ispat şemasında ise öğrenciler matematiksel referansı olmayan anlamsız sembol manipülasyonlarıyla ikna olma yoluna giderler (Sowder ve Harel, 1998; Harel, 2014). Algısal ispat şemasında öğrenciler ikna olmak için tam gelişmemiş zihinsel imgeleri kullanırlar ve kendi sezgilerine başvururlar (Harel, 2014; Harel ve Sowder, 1998). Tümevarımsal ispat şemasında öğrenciler bir varsayımın doğruluğuna; nicel deneme yaparak ikna olurlar (Harel ve Sowder, 1998; Sowder ve Harel, 1998). Dönüşümcü ispat şemasına sahip öğrenciler ikna için mantıksal çıkarım, işlemsel düşünme ve genellemeye ihtiyaç duymaktadırlar (Harel, 2007; Harel ve Sowder, 1998). En gelişmiş şema olan aksiyomatik şemada (Harel, 2001) ise mantıksal çıkarım, işlemsel düşünme ve genelleme bir aksiyomatik sistem üzerine inşa edilmektedir (Harel, 2007; Harel ve Sowder, 1998; Sowder ve Harel, 1998). Bu çalışmada ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının cebir ve geometri alanlarındaki ispatlarının özelliklerini bilişsel yönüyle incelemek için Harel ve Sowder'ın (1998) ispat şemaları sınıflaması kullanılmıştır.

Harel ve Sowder'in (1998) ispat şemaları sınıflamasından yararlanarak Inglis vd. (2007) lisansüstü öğrencilerin argümantasyon süreçlerini inceledikleri çalışmalarında, ortak özellikteki gerekçelerin kümelendiği gerekçe tiplerini tümdengelimsel (dedüktif), tümevarımsal (indüktif) ve yapısal-sezgisel olarak sınıflamışlardır. Tümdengelimsel gerekçe tipi; aksiyomlardan ulaşılan çıkarımların, cebirsel manipülasyonların veya karşıt örneklerin kullanıldığı resmi matematiksel gerekçelerdir (Inglis vd., 2007). Tümevarımsal (indüktif) gerekçe tipi önermelerin bir ya da birkaç özel örnekle ya da daha genel bir örnekle doğrulanmasıdır (Inglis vd., 2007). Yapısal-sezgisel gerekçe tipi; öğrencileri bir sonuca ikna eden görsel veya başka türdeki zihinsel yapı için onların yaptıkları deney ve gözlemlerdir (Inglis vd., 2007). Bu gerekçe tipleri ispat yapılarının tespitinde de kullanılmaktadır. (Pedemonte, 2008). Pedemonte (2007a) argümantasyon ile ispat arasındaki ilişkiyi yapısal olarak inceleyerek öğrencilerin ispat yapılarını dedüktif, abdüktif ve indüktif yapı olmak üzere üçe ayırmıştır. Bu çalışmada ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının cebir ve geometri alanlarındaki ispatlarının özelliklerini yapısal açıdan incelemek için Inglis vd. (2007) tarafından belirtilen yapı kullanılmıştır. Bu çalışmanın bir bulgusu olarak; bu çalışmadaki öğretmen adaylarının hem cebir hem de geometri alanında yaptıkları ispatlarda abdüktif ispat yapısı gözlemlenmediği için Pedemonte (2007a) yerine Inglis vd. (2007) tarafından belirtilen yapı dikkate alınmıştır. Bu çalışmadaki öğretmen adaylarının yaptıkları ispatların yapısı için Inglis vd.'nin (2007) sınıflaması daha uygun olduğu için böyle bir tercih yapılmıştır. Argümantasyon ile ispat arasındaki ilişkiyi dilsel unsurlardan oluşan içerik açısından karşılaştıran çalışmalar argümantasyon ve ispat arasındaki sürekliliği bilişsel bütünlük olarak adlandırmışlardır (Douek, 1999; Garuti vd., 1998; Mariotti vd., 1997). Pedemonte (2007a) içerik açısından yapılan bu karşılaştırmaların argümantasyon ve ispat arasındaki ilişkiyi ortaya koymada yetersiz kaldığını belirterek bu ilişkiyi yapısal açıdan analiz etmiş ve yukarıda bahsedilen üç yapıdan bahsetmiştir. İspatta kullanılan ifadeler arasındaki mantıksal bilişsel bağlantıların (Boero vd., 2010; Pedemonte, 2007a) incelendiği ve yapısal bütünlük olarak adlandırılan (Pedemonte, 2007a) bu analiz Toulmin (Toulmin, 1993) ve ck¢ (Balacheff ve Margolinas, 2005) modellerine dayanmaktadır. Pedemonte'nin (2007a) çalışmasındaki yapısal bütünlük incelemesi ispattan önce oluşan argümantasyon yapısı ile ispat yapısı arasındaki yapısal benzerliği dikkate almaktadır. Argümantasyon ile ispat aynı yapıda olup her ikisi de dedüktif yapıda (dedüktif argüman ve dedüktif ispat) ise yapısal süreklilik, dedüktif yapıda değillerse (abdüktif argüman ve abdüktif ispat, indüktif argüman ve indüktif ispat) spontane süreklilik bulunmaktadır (Pedemonte, 2007a, 2008). Argümantasyon ile ispat farklı yapılarda (örneğin indüktif argüman ve abdüktif ispat veya abdüktif argüman ve dedüktif ispat) ise yapısal mesafe vardır (Pedemonte, 2007a; 2008). Bu çalışmada amaç Pedemonte'den (2007a) farklı olarak ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat yapılarının, ispatın yapıldığı alana bağlı olarak değişip değişmediğini Inglis vd. (2007) tarafından belirtilen yapı ile sınamaktır.

Literatür Taraması

Cebir öğretimi ile ilgili yapılan literatürdeki çalışmaların genelinde öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerinin ve cebirsel düşünme yapılarının temelini oluşturan cebirsel akıl yürütme becerilerinin ve cebirsel işlem yürütme becerilerinin yetersiz olduğu saptanmıştır (Kaya ve Keşan, 2014). Özellikle eğitimin her seviyesindeki öğrenciler cebirsel ispat yapmada güçlükler yaşamaktadırlar (Chin ve Lin, 2009; Healy ve Hoyles, 2000; Reyhani, Hamidi ve Kolahdouz, 2012). Öğrenciler ispatları cebir kullanmadan günlük dilde sunma ve cebirsel ispat yerine deneysel argümanlar sunma gibi güçlükler yaşamaktadırlar (Chin ve Lin, 2009; Cusi ve Malara, 2007; Healy ve Hoyles, 2000; Reyhani vd., 2012). Öğretmen adayları da cebirsel ispat yapmada benzer bazı güçlükler yaşamaktadırlar (Öztürk ve Kaplan, 2019; Yeşilyurt-Çetin ve Dikici, 2020). Örneğin Yeşilyurt-Çetin ve Dikici (2020) matematik öğretmeni adaylarının cebirsel ispat yapabilme durumlarını incelemişler ve araştırmanın sonuçlarına göre öğretmen adayları cebirsel ispat yaparken ispata başlayamama, ispata yönelik önceki bilgilerdeki eksiklikler, var olan bilgileri ispatta kullanamama ve ayrıca dil ve notasyon kullanımı gibi güçlükler yaşamaktadırlar.

Cebirsel ispatlar gibi geometrik ispatlarda da okul öğrencileri (Clements ve Battista, 1992; McCrone ve Martin, 2004), öğretmen adayları ve öğretmenler (Karpuz ve Atasoy, 2020; Öztürk ve Kaplan, 2022; Şen ve Güler, 2022) bazı güçlüklere sahiptirler. Örneğin Karpuz ve Atasoy (2020) ortaöğretim matematik öğretmenlerinin geometrik ispatın mantıksal yapısına ilişkin alan bilgilerini incelemişler ve araştırmanın sonuçları öğretmenlerin geometrik ispatlarda şekil-kavram etkileşimlerinden kaynaklanan ispat hatalarının üstesinden gelebilecek alan bilgisine sahip olmadıklarını ortaya koymuştur.

İspatın yapıldığı alan fark etmeksizin; ispatları bazı karakteristik özelliklerine göre sınıflayan çalışmalar içerisinde, teorik çerçevede sunulan Harel ve Sowder'in (1998) ispat şemaları sınıflaması literatürde en sık kullanılan ve en kabul görmüş olanlardan biridir. Üniversite öğrencilerinin (Cusi ve Malara, 2007; Stylianou vd., 2006) ve öğretmen adaylarının ispat şemalarını saptayan çalışmalara (Cihan ve Akkoç, 2023; Çontay ve Duatepe-Paksu, 2019; İskenderoğlu vd., 2010; Sears, 2019; Sarı vd., 2007; Şengül ve Güner, 2013; Weber vd., 2020) literatürde sıkça rastlanmaktadır. Bu çalışmalarda üniversite öğrencileri ve öğretmen adaylarının, ispatlama süreci sonunda bir ürün olarak ortaya koydukları ispatların özellikleri incelenmiş ve bu ispatlar ortak özelliklerine göre sınıflandırılmıştır. Stylianou vd. (2006) matematik bölümü öğrencilerinin ve İskenderoğlu vd. (2010) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispatlarında çoğunlukla tümevarımsal (deneysel) ispat şemalarını kullandıklarını buna karşın Çontay ve Duatepe-Paksu (2019) öğretmen adaylarının çoğunlukla dışsal ispat şemalarına yönelik tepkiler verdiklerini tespit etmişlerdir. Şengül ve Güner (2013) ise birinci sınıf ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının çoğunlukla tümevarımsal, son sınıf adayların ise çoğunlukla analitik ispat şemasını kullandıklarını ortaya koymuşlardır. Weber vd. (2020) ise hem matematik öğretmeni adaylarının hem de matematik öğretmenlerinin matematiksel ifadelerde kesinlik elde etmek için deneysel gerekçelendirmelerle yetindiklerini belirlemişlerdir.

Buna karşın cebir ve geometri alanlarında argümantasyon süreci ile ispat arasındaki ilişkiye odaklanan literatürde sınırlı sayıda çalışma (Bülbül ve Urhan, 2016; Martinez ve Pedemonte, 2014; Pedemonte, 2007a; Pedemonte, 2008; Pedemonte ve Reid, 2011) bulunmaktadır. Bunlar dışında Pedemonte ve Buchbinder (2011) sayılar teorisi ve Doruk (2016) analiz alanındaki ispatlamalarda bu ilişkiye odaklanmışlardır. Bu çalışmalarda argümantasyon süreci ve ispat arasındaki ilişkiler yapısal bütünlük durumları açısından incelenmiş ve yapısal süreklilik, spontane süreklilik ve yapısal mesafe gibi durumların ispatı başarıyla tamamlama ya da ispatta güçlük yaşama üzerine etkileri açığa çıkarılmıştır.

Araştırmanın Gerekçesi ve Amacı

Bu çalışmanın amacı ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının cebir ve geometri alanlarındaki ispat özelliklerinin incelenmesidir. Dolayısıyla birbirinden farklı beceriler gerektiren bu iki alandaki ispat özelliklerinin bir arada ortaya konması öğretmen eğitiminde cebir ve geometri eğitimi açısından ihtiyaçları ortaya koyabilir. Öğretmen adaylarının ispat özelliklerinin ise hem ispat yapıları hem de ispat şemaları bağlamında incelenmesi de farklı sınıflamaların kendine has özelliklerini yansıtması açısından değerli olabilir. Bu çalışmanın diğer bir amacı da ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının cebir ve geometri alanındaki ispat yapıları arasındaki yapısal bütünlük durumlarının incelenmesidir. Yapısal bütünlük durumlarının yapısal süreklilik, spantone süreklilik ve yapısal mesafe bağlamında incelenmesi amaçlanmıştır. Başka bir ifade ile amaç; yapısal bütünlük hipotezini farklı alanlardaki ispatlarda test etmektir. Öğretmen adaylarının ispat alanları değişince sahip oldukları ispat yapılarının değişip değişmediği, yapısal sürekliliğin veya spantone sürekliliğin korunup korunmadığı ve varsa yapısal mesafelerin incelenmesi bu çalışmaya orijinallik katan amaçlar arasındadır. Bu çalışmanın araştırma soruları aşağıda sıralanmıştır.

- Öğretmen adaylarının cebir alanında yaptıkları ispatlar hangi özelliktedir?
- Öğretmen adaylarının geometri alanında yaptıkları ispatlar hangi özelliktedir?
- Öğretmen adaylarının cebir ve geometri alanındaki ispatları arasındaki yapısal bütünlük durumları nasıldır?

Yöntem

Bu bölümde araştırma modeline, araştırma grubuna, veri toplama aracına, veri analizine ve geçerlik-güvenirlik çalışmalarına yer verilmiştir.

Araştırma Modeli

Nitel araştırma deseninde tasarlanan bu araştırma bir durum çalışmasıdır. Durum çalışmaları tek bir bireyin, birimin, grup ya da topluluğun yoğun ve sistematik araştırmasıdır (Woods ve Calanzaro, 1980). Bu çalışma ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören bir sınıftaki öğretmen adaylarının hem cebir hem de geometrik alandaki ispat özelliklerini derinlemesine ortaya çıkarmayı amaçladığından ve bu alanlardaki ispat özellikleri arasındaki ilişkiye odaklandığından dolayı durum çalışması olarak yürütülmüştür.

Araştırma Grubu

Bu çalışmada araştırma grubu, 2023-2024 eğitim-öğretim yılı bahar döneminde Türkiye'deki bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü dördüncü sınıfında öğrenimlerine devam eden 29 gönüllü öğretmen adayıdır. Araştırma grubu ölçüt örnekleme tekniği ile seçilmiştir. İlköğretim matematik öğretmenliği bölümü yedinci yarıyıl ders planında yer alan Mantıksal Akıl Yürütme dersine kayıtlı olmak ölçüt olarak belirlenmiştir. Çünkü bu ders kapsamında hem cebir hem de geometri alanında tümdengelimsel yapıda ve aksiyomatik şemada ispatlara yer verilmiştir. Araştırmaya katılmaya gönüllü bu öğretmen adayları ÖA1, ÖA2, ÖA3, …, ÖA29 kodlarıyla kodlanmıştır.

Veri Toplama Aracı ve Süreci

Araştırmanın verileri 2023-2024 eğitim-öğretim yılı bahar döneminde Cebir-Geometri İspat Formu (CGİF) aracılığı ile toplanmıştır. CGİF'de öğretmen adaylarının cebir ve geometri alanında ispat yapmaları gereken iki açık uçlu soru yer almıştır. İlk soru cebir alanında, ikinci soru ise geometri alanında yaptıkları ispatların özelliklerini ortaya çıkarabilmek adına sorulmuştur. CGİF'deki ilk soru cebir alanında "Bir doğal sayının karesi tek ise bu sayı tek midir? Çift midir? Bir karara vararak verdiğiniz kararın doğruluğunu ispatlayınız” sorusudur. İkinci soru geometri alanında “Pisagor teoremini ifade ve ispat ediniz” sorusudur. CGİF ile araştırmanın verileri ilk yazar tarafından araştırma grubuna tek seferde ve 25 dakikalık süre içerisinde uygulanarak toplanılmıştır. Veri toplamadan önce araştırma hakkında bilgiler ve katılımcı hakları öğretmen adaylarına aktarılmış ve gönüllü öğretmen adaylarından imzalı onam formu alınmıştır.

Veri Analizi

29 öğretmen adayının CGİF’deki iki soruya verdiği yanıtlar betimsel analiz ile çözümlenmiştir. İspat şemalarının analizinde Harel ve Sowder’ın (1988) ispat şemaları sınıflaması kullanılmıştır. Cebir ve geometri alanında yaptıkları ispatlar ayrı ayrı otoriter, ritüel, referanssız-sembolik, algısal, tümevarımsal, dönüşümcü veya aksiyomatik şema olarak kodlanmıştır. Bu çalışma kapsamında erişilen her bir kod için örneğe bulgular kısmında verilmiştir.

Öğretmen adaylarının gerekçe tiplerinin dolayısıyla ispat yapılarının analizinde Inglis vd.’nin (2007) sınıflamasından yararlanılmıştır. Öğretmen adaylarının cebir ve geometri alanda yaptıkları ispatlar yine ayrı ayrı tümdengelimsel (dedüktif), tümevarımsal (indüktif) ve yapısal-sezgisel yapı olarak kodlanmıştır. Her bir kod için örneğe bulgular kısmında yer verilmiştir.

Öğretmen adaylarının cebir alanındaki ispatları ile geometri alanındaki ispatları arasında yapısal bütünlük durumlarının analizinde Pedemonte’nun (2007a) yapısal bütünlük hipotezinden faydalanılmıştır. Cebir ve geometri alanında yaptıkları ispatların yapısı, çapraz tabloya yansıtılmış ve çapraz tablodan yararlanılarak bu iki alanda yapılan ispatlar arasında yapısal süreklilik, spontane süreklilik ve yapısal mesafe durumları ayrıntılı analiz edilmiştir.

Geçerlik ve Güvenirlik Çalışmaları

CGİF’nin geçerlik ve güvenirlik çalışmaları doğrultusunda öğretmen adaylarının cebir ve geometri alanlarındaki ispatlarının hangi özellikte olup olmadığı hakkında genel bir kanıya varmak ve uygulanacak süre konusunda hem fikir olmak adına veri toplama aracı uzman görüşüne (Hair vd., 2014; Yıldırım ve Şimşek, 2016) sunulmuştur. Matematik eğitimi alanında uzman biri Prof. Dr. biri de Doç. Dr. olmak üzere iki akademisyenden görüş alınmıştır. Uzman görüşleri sonrasında formun uygulama süresi 30 dakikadan 25 dakikaya düşürülmüştür.

Yazarlardan biri tarafından, her iki soruya verilen yanıtlar için yapılan 29’ar kodlama (toplamda 58 kodlama) diğer yazar tarafından kontrol edilmiş ve uyum yüzdesi Miles ve Huberman’a (1994) ait güvenirlik formülünden (58-4)/58≈93 olarak hesaplanmıştır ve bu uyum yüzdesi veri analizinin güvenirliği için yeterli görülmektedir (s. 64). Fakat uyumsuzluk yaşanan toplamda dört kod yazarların tekrar kontrolü ve birlikte değerlendirmesi sonucu uzlaşmaya varılarak kod tablolarına yansıtılmıştır. Uyumsuzluk yaşanan üç kodun cebir alanındaki, bir kodun da geometri alanındaki yanıtlarda yaşandığı tespit edilmiştir. Bu uyumsuzlukların, dört öğrencinin aynı ispat sorusunda birden fazla gerekçe sunmasından kaynaklandığı tespit edilmiştir. Harel ve Sowder’a (1998) göre öğrenciler aynı anda birden fazla ispat şemasına ait tepkiler ortaya koyabilir ve birden fazla ispat şeması kullanabilirler. Öğretmen adaylarının aynı soruda verdikleri ilk yanıta ikna olmadıkları için ikinci yanıta ihtiyaç duydukları düşünüldüğünden, bu öğretmen adaylarının ikinci yanıtlarındaki ispat yapıları ve şemaları dikkate alınarak uyuşmazlıklar ortadan kaldırılmıştır. Böylece cebir alanındaki kodlar Tablo 1’e, geometri alanındaki kodlar Tablo 2’ye son haliyle yansıtılmıştır. Yine çapraz tablodaki bu uyumsuzluklar giderilip çapraz tabloya yansıtılarak son hali Tablo 3’te sunulmuştur.

Son olarak inandırıcılığı arttırmak için bulgularda ham verilere yer verilmiştir (Guba ve Lincoln, 1981; Yıldırım ve Şimşek, 2016). Hem cebir alanından hem de geometri alanından her ispat yapısı ve her ispat şemasına ait birebir alıntılar ham halde sunulmuş ve teorik çerçeve ışığında yorumlanmıştır.

Bulgular

Bu kısımda önce öğretmen adaylarının cebir alanındaki ispatlarının, sonra da geometri alanındaki ispatlarının özelliklerine ait bulgular sunulmuştur. En son olarak da öğretmen adaylarının cebir ve geometri alanlarındaki ispatları arasındaki yapısal bütünlük durumlarına ait bulgular sunulmuştur.

İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Cebir Alanındaki İspat Özellikleri

Öğretmen adaylarının cebir alanındaki ispat özellikleri; kullandıkları ispat yapıları (Inglis vd., 2007) ve ispat şemalarına (Harel ve Sowder, 1998) göre değerlendirildiğinde onların ispatları üç yapı ve dört şema altında toplanmış ve Tablo 1’e yansıtılmıştır.

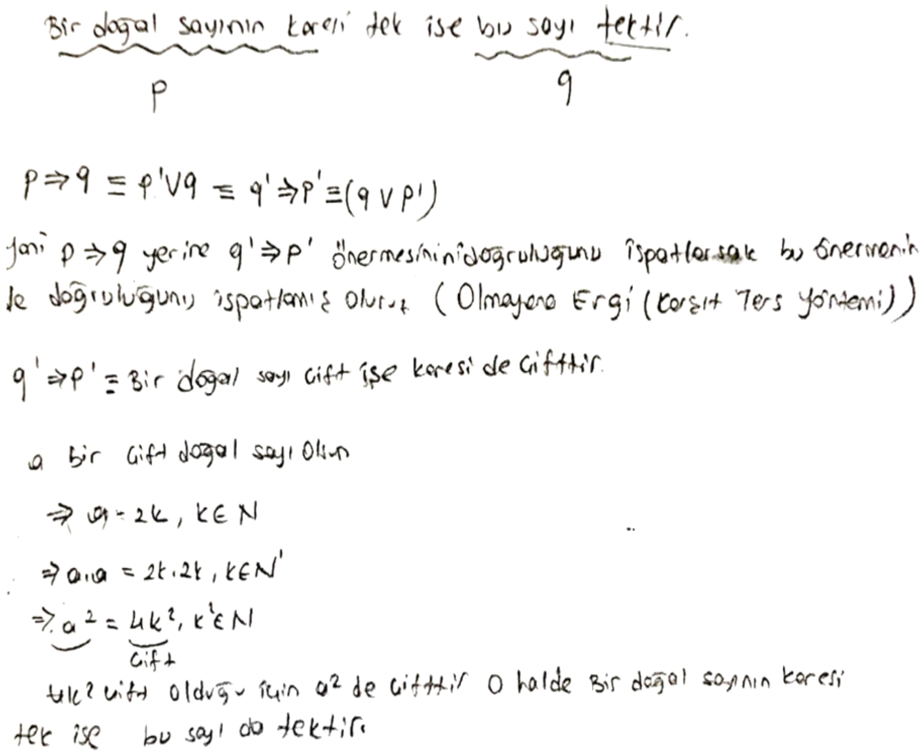
Tablo 1.
Öğretmen Adaylarının Cebir Alanındaki İspat Yapıları ve Şemaları

İspat Yapısı	İspat şemaları	Frekans (f)
Tümdengelimsel yapı	Dönüşümsel ispat şeması	3
Tümevarımsal yapı	Tümevarımsal ispat şeması	12
Yapısal-sezgisel yapı	Algısal ispat şeması	2
	Referanssız-sembolik ispat şeması	12
Toplam		29

Tablo 1'deki bulgular genel olarak değerlendirildiğinde öğretmen adaylarının çoğunun ispatlarının tümevarımsal ve yapısal-sezgisel yapıda oldukları, sadece üç öğretmen adayının (ÖA1, ÖA17, ÖA21) tümdengelimsel yapıda ispat ürettikleri ortaya çıkmıştır. İspat yapıları ile paralel şekilde sadece üç öğretmen adayının geçerli ispatı yansıtan dönüşümsel ispat şemasında olduğu görülmüştür. Buradan cebir alanında ispat yapma becerilerinin düşük olduğu söylenebilir. Çoğunluğunun tümevarımsal ve referanssız-sembolik ispat şemasında olduğu ortaya çıkmıştır. Buradan öğretmen adaylarının çoğunun bir veya birkaç örnekle yapılan doğrulamayı ispat kabul ettikleri, ispatlarında matematiksel-mantıksal referansı olmayan argümanları kullandıkları sonucuna ulaşılabilir. İki öğretmen adayının algısal ispat şemasında olduğu belirlenmiştir. Bu öğretmen adayları da ispatlarında yetersiz zihinsel gösterimler kullanmışlardır. Yani geçerli düşüncelerini matematiksel olarak doğru bir şekilde ifade etmede güçlük yaşamışlardır.

Tablo 1 detaylı incelendiğinde, tümdengelimsel ispat yapısına ve dönüşümsel ispat şemasına sahip olan öğretmen adayları (ÖA1, ÖA17, ÖA21) ispat için en uygun yöntem olan olmayana ergi yöntemini seçmişler ve bunu doğru bir şekilde uygulayabilmişlerdir. Öğretmen adayları yaptıkları ispatlarda bir hata ve boşluk bırakmayıp mantıksal akıl yürütme ile geçerli bir ispata ulaşabilmişlerdir. Bu üç öğretmen adayından biri olan ÖA17 kodlu öğretmen adayının yanıtı Şekil 1'de verilmiştir.

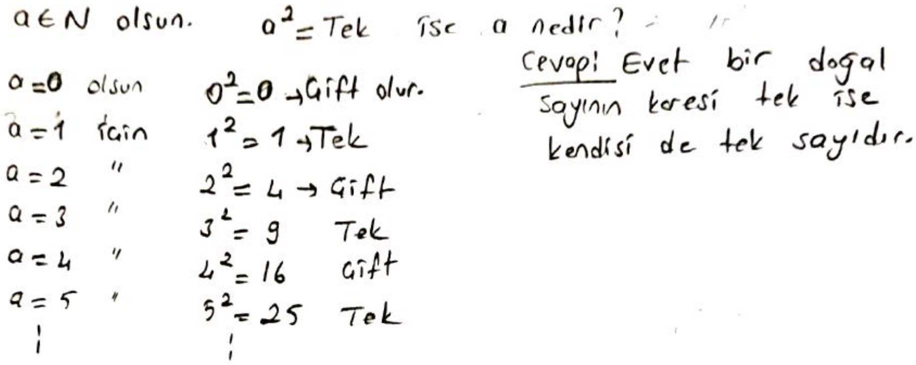
Şekil 1.
Tümdengelimsel Yapıdaki ÖA17'nin Dönüşümsel İspat Şemasındaki Geçerli İspatı



Tümevarımsal yapı ve şemadaki öğretmen adayları, önermeyi ispatlamayıp sadece bir veya birkaç değer için doğrulamışlardır. Bu yüzden bu öğretmen adaylarının yanıtları tümevarımsal ispat yapısı ve tümevarımsal ispat şemasında toplanmıştır. Öğretmen adayları ikna olmaya veya ikna etmeye yetecek sayıda örnek verdiklerine inana dek değer vermeyi sürdürmüşlerdir. Bu öğretmen adaylarının cebir alanındaki ispat sorusunda doğrulamayı ispat sanma güçlüğü yaşadığı söylenebilir. Örneğin ÖA2'nin yanıtı Şekil 2'de verilmiştir.

Şekil 2.

Tümevarımsal Yapıdaki ÖA2'nin Tümevarımsal İspat Şemasındaki İspatı



$a \in N$ olsun. $a^2 =$ Tek ise a nedir?

Cevap: Evet bir doğal sayının karesi tek ise kendisi de tek sayıdır.

$a = 0$ olsun $0^2 = 0 \rightarrow$ Çift olur.

$a = 1$ için $1^2 = 1 \rightarrow$ Tek

$a = 2$ " $2^2 = 4 \rightarrow$ Çift

$a = 3$ " $3^2 = 9$ Tek

$a = 4$ " $4^2 = 16$ Çift

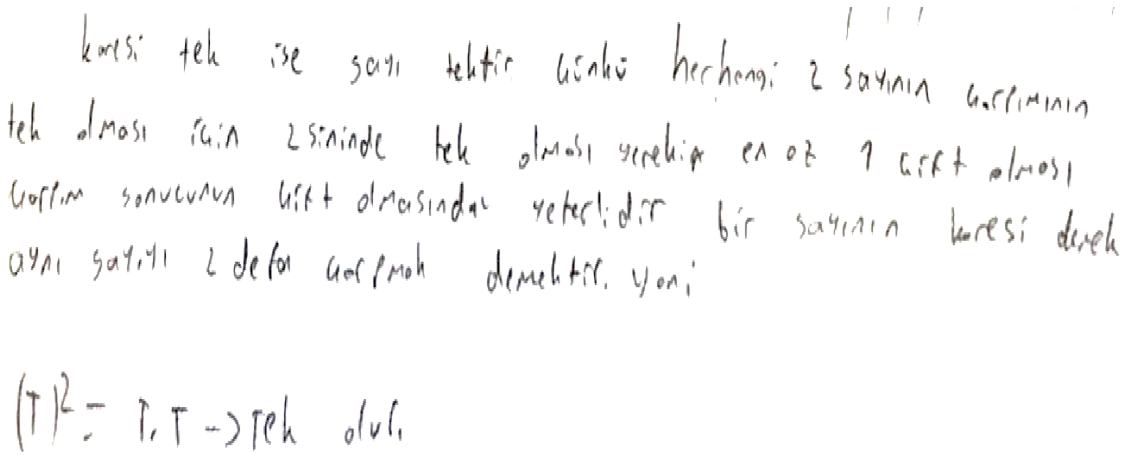
$a = 5$ " $5^2 = 25$ Tek

$\vdots$ $\vdots$

Cebir alanındaki ispatı yapısal-sezgisel yapıda tamamlayan öğretmen adaylarının yanıtları algısal ispat ve referanssız-sembolik ispat şeması olmak üzere iki kategoride toplanmıştır. İki öğretmen adayının yanıtı algısal ispat şeması, 12 öğretmen adayının yanıtı da referanssız-sembolik ispat şemasında toplanmıştır. Algısal ispat şemasına örnek olarak ÖA11'in yanıtı Şekil 3'te, referanssız-sembolik ispat şemasına örnek olarak ÖA7'nin yanıtı Şekil 4'te sunulmuştur.

Şekil 3.

Yapısal-sezgisel Yapıdaki ÖA11'in Algısal İspat Şemasındaki İspatı



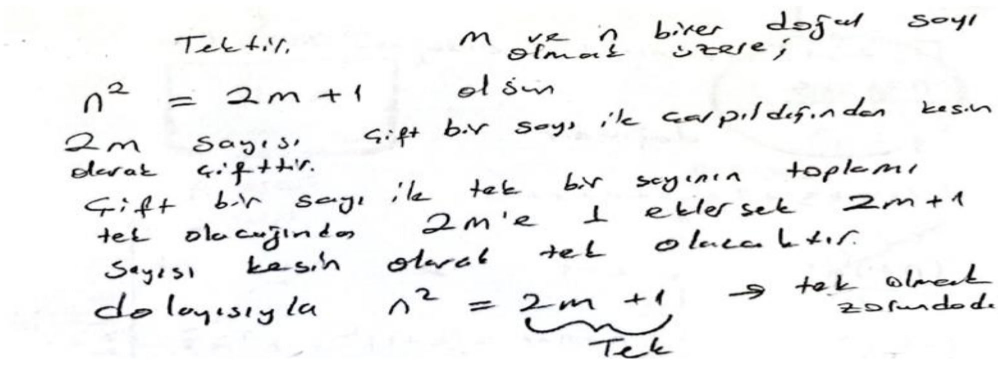
karesi tek ise sayı tektir çünkü herhangi 2 sayının çarpımının tek olması için 2sininde tek olması gerekir en az 1 çift olması çarpım sonucunun çift olmasında yeterlidir bir sayının karesi demek aynı sayıyla 2 defa çarpmak demektir. yani

$(T)^2 = T.T \rightarrow$ Tek olur.

Şekil 3'te görüldüğü üzere, ÖA11'in gerekçesi doğru olmakla birlikte açıklama ve gösterimleri yetersizdir. Bu şemadaki öğretmen adayları herhangi bir ispat yöntemi seçmeden ispata başlamışlar ve tümevarımsal akıl yürütmeyi gerektiği gibi kullanmamışlardır. Genellikle matematiksel notasyonlar kullanmadan önermenin neden doğru olduğuna dair açıklamalar yapmaya odaklanmışlardır. ÖA7'nin ise gerekçesi yanlıştır. Bu şemadaki öğretmen adayları yanlış gerekçelendirmeden hareket ettikleri için ispatı tamamlayamamışlardır.

Şekil 4.

Yapısal-sezgisel Yapıdaki ÖA7'nin Referanssız-Sembolik İspatı



Tektir. m ve n birer doğal sayı olmak üzere;

$n^2 = 2m+1$ olsun

$2m$ sayısı çift bir sayı ile çarpıldığından kesin olarak çifttir. Çift bir sayı ile tek bir sayının toplamı tek olacağından $2m$'e 1 eklersek $2m+1$ sayısı kesin olarak tek olacaktır.

dolayısıyla $n^2 = \underbrace{2m+1}_{Tek} \rightarrow$ tek olmak zorundadır.

İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Geometri Alanındaki İspat Özellikleri

Öğretmen adaylarının geometri alanındaki ispat özellikleri kullandıkları ispat yapıları (Inglis vd., 2007) ve ispat şemalarına (Harel ve Sowder, 1998) göre değerlendirildiğinde onların ispatları yine üç yapı ve dört şema altında toplanmıştır. Tablo 2'de söz konusu kategorilere ait bilgiler sunulmuştur.

Tablo 2.

Öğretmen Adaylarının Geometri Alanındaki İspat Yapıları ve Şemaları

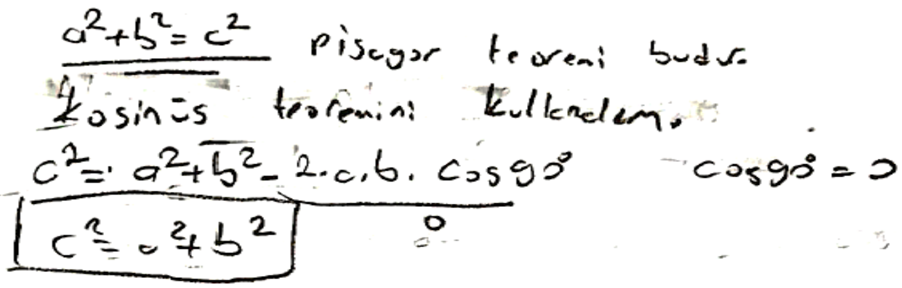
İspat Yapıları	İspat şemaları	Frekans (f)
Tümdengelimsel ispat yapısı	Dönüşümsel ispat şeması	2
Tümevarımsal ispat yapısı	Tümevarımsal ispat	11
Yapısal-sezgisel ispat yapısı	Algısal ispat	13
	Referanssız-sembolik ispat	3
Toplam		29

Tablo 2'ye genel olarak bakıldığında öğretmen adaylarının çoğunun tümevarımsal ve yapısal-sezgisel ispat yapısında oldukları ortaya çıkmıştır. Sadece iki öğretmen adayının (ÖA3, ÖA15) ispatı tümdengelimsel ispat yapısındadır. Bu iki öğretmen adayının dönüşümsel ispat şemasında geçerli ispat yapabildikleri görülmüştür. Formel gerekçelendirmeler olan tümdengelimsel yapı ve analitik ana şemada ispat yapan sadece iki öğretmen adayı olduğundan öğretmen adaylarının geometri alanında ispat yapma becerilerinin düşük olduğu söylenebilir. Çoğunlukla tümevarımsal ve algısal ispat şemasında oldukları ortaya çıkmıştır. Yine sadece üç öğretmen adayının referanssız-sembolik ispat şemasında olduğu tespit edilmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının çoğunlukla bir veya birkaç örneğe dayalı olarak yapılan doğrulamaları geçerli ispat olarak gördükleri, düşündüklerini matematiksel olarak ifade etmede zorlandıkları söylenebilir.

Dönüşümsel ispat şemasında olan öğretmen adayları, geometri alanında ispat yaparken herhangi bir güçlük yaşamamışlardır. Bu öğretmen adaylarından biri olan ÖA3, ispat için kullandığı argümanda Cosinüs Teoremini gerekçe olarak kullanmıştır. Geometri alanındaki ispatta, cebirsel ağırlıklı bir ispat yapmıştır. Diğer dönüşümsel ispat şemasındaki ÖA15 kodlu öğretmen adayı çizdiği eş dik üçgenlerden oluşturduğu karenin alanından faydalanarak geçerli tümdengelimsel argümanlar kullanmıştır. Tümdengelimsel yapı ve dönüşümsel ispat şemasındaki öğretmen adaylarının ispatları Şekil 5 ve Şekil 6'da sunulmuştur.

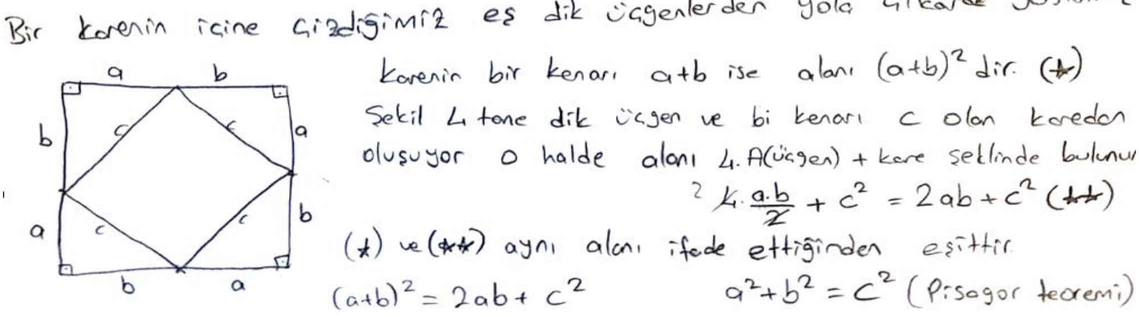
Şekil 5.

Tümdengelimsel Yapıdaki ÖA3'ün Dönüşümsel İspat Şemasındaki Geçerli İspatı



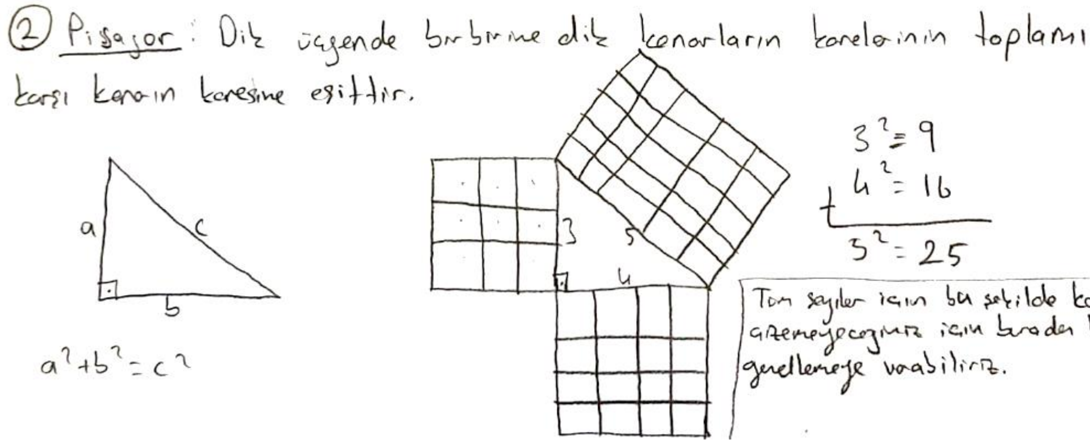
Şekil 6.

Tümdengelimsel Yapıdaki ÖA15'in Dönüşümsel İspat Şemasındaki Geçerli İspatı

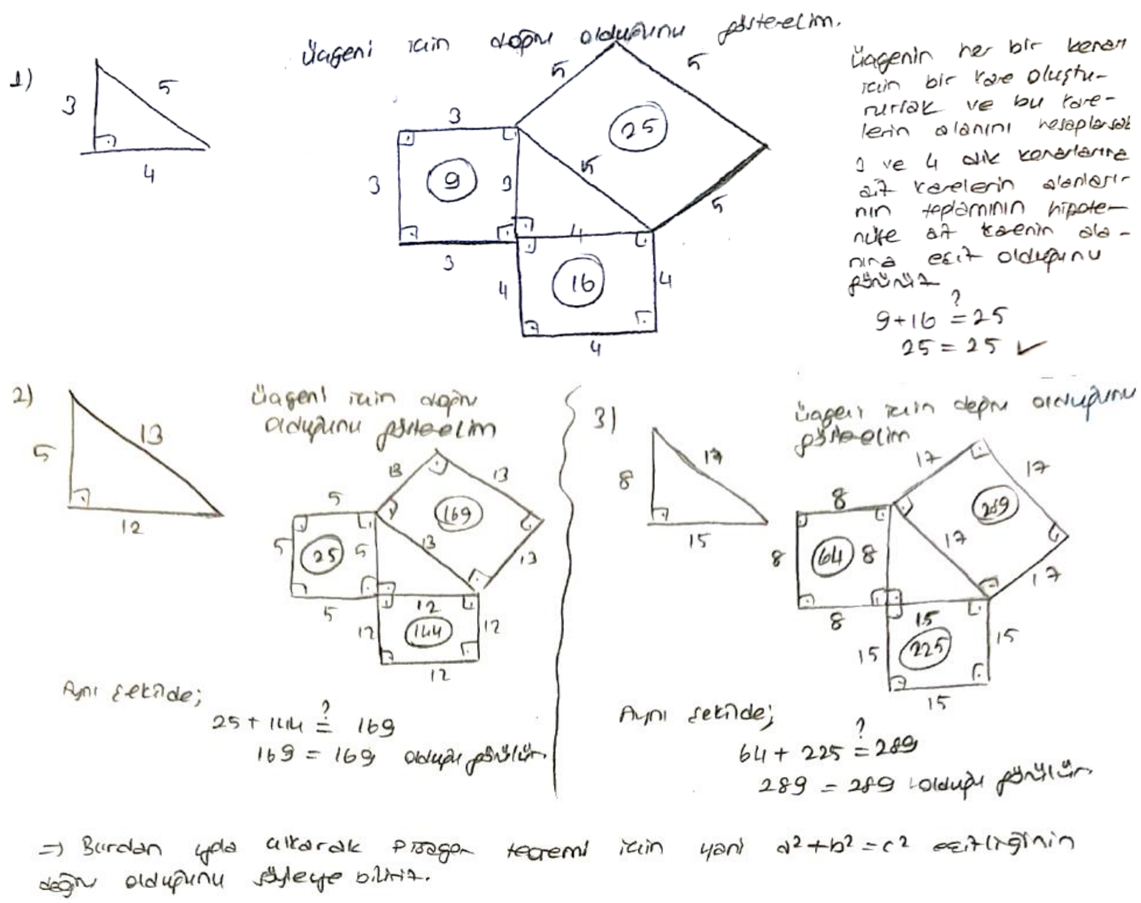


Geometri alanındaki ispatı tümevarımsal yapı ve şemada tamamlayan öğretmen adayları, önermeyi ispatlamak yerine özel üçgenler için kenarlara verilen bir veya birkaç değerle doğrulama yapabilmişlerdir. Öğretmen adaylarının en sık yaptığı doğrulama 3-4-5 özel üçgeni için yapılan doğrulamalardır. Yanıtları tümevarımsal ispat kategorisinde toplanan bu öğretmen adayları ikna olmaya veya ikna etmeye yetecek sayıda örnek verdiklerine inana dek değer vermeyi sürdürmüşlerdir. Bu öğretmen adaylarının geometri alanındaki ispatlarında bir ya da birkaç örnek için yapılan doğrulamayı geçerli ispat olarak gördükleri söylenebilir. Bu öğretmen adaylarından sadece bir örnekle doğrulama yapan ÖA13'ün yanıtı Şekil 7'de, birkaç örnekle doğrulama yapan ÖA1'in yanıtı Şekil 8'de sunulmuştur.

Şekil 7.
Tümevarımsal Yapıdaki ÖA13'ün Tümevarımsal İspat Şemasındaki İspatı



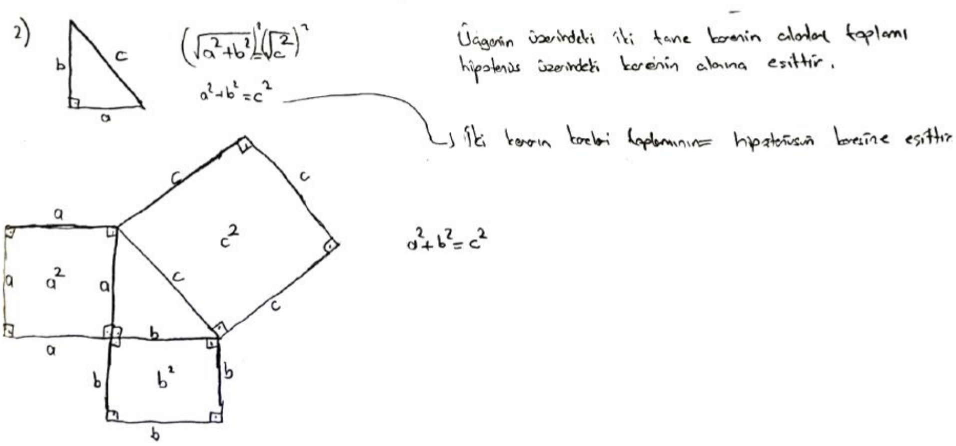
Şekil 8.
Tümevarımsal Yapıdaki ÖA1'in Tümevarımsal İspat Şemasındaki İspatı



Geometri alanındaki ispatı, yapısal-sezgisel yapıda tamamlayan öğretmen adaylarının yanıtlarından 13'ü algısal ispat, üçü de referanssız-sembolik ispat şemasında toplanmıştır. Algısal ispat şemasına örnek olarak ÖA5'in yanıtı Şekil 9'da, referanssız-sembolik ispat şemasına örnek olarak ÖA7'nin yanıtı Şekil 10'da sunulmuştur.

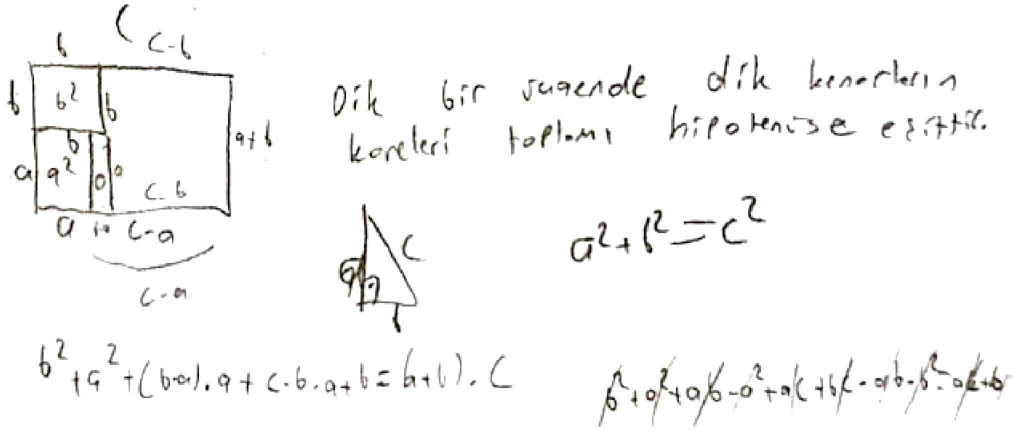
Şekil 9.

Yapısal-sezgisel Yapıdaki ÖA5'in Algısal İspat Şemasındaki İspatı



Şekil 10.

Yapısal-Sezgisel Yapıdaki ÖA7'nin Referanssız-Sembolik İspat Şemasındaki İspatı



ÖA5 tam gelişmemiş zihinsel imgelere dayalı, resmi ispat için yetersiz bir zihinsel gösterim yapmıştır. Genel olarak yapmaya çalıştığı ispatı matematiksel-mantıksal olarak geliştirememiş bundan dolayı açıklama yapmaya çalışmıştır. ÖA7 ise yaptığı çizim ve sonrasındaki işlemlerde matematiksel-mantıksal referansı olmayan argümanlara yer vermiştir.

Öğretmen Adaylarının Cebir ve Geometri Alanlarındaki İspatlarının Yapısal Bütünlük Durumları

Öğretmen adaylarının cebir ve geometri alanındaki ispatları arasında yapısal bütünlük durumları Pedemonte'nun (2007a) yapısal bütünlük hipotezine göre test edilmiştir. Öğretmen adaylarının cebir ve geometri alanında yaptıkları ispatların yapısının yansıtıldığı çapraz tablo; Tablo 3'te sunulmuştur. Bu çapraz tablodan yararlanılarak bu iki alanda yapılan ispatlar arasındaki yapısal süreklilik, spontane süreklilik ve yapısal mesafe durumları yorumlanmıştır.

Tablo 3.

Öğretmen Adaylarının Cebir ve Geometri Alanındaki İspatlarının Yapısal Bütünlük Durumları

		Geometri alanındaki ispat yapısı		
		Tümdengelimsel	Tümevarımsal	Yapısal-sezgisel
Cebir alanındaki ispat yapısı	Tümdengelimsel	0	2	1
	Tümevarımsal	0	5	7
	Yapısal-sezgisel	2	4	8

Tablo 3 değerlendirildiğinde cebir ve geometri alanlarındaki ispatlar arasında yapısal sürekliliğin olmadığı, çoğunlukla yapısal mesafenin olduğu bunu da spantone sürekliliklerin takip ettiği görülmektedir.

Tablo 3'e göre hiçbir öğretmen adayı her iki ispat türünde birden tümdengelimsel yapıyı sürdürememişlerdir. Hiçbir öğretmen adayının cebir ve geometri alanındaki ispatları arasında yapısal süreklilik yoktur. Çünkü hem cebir hem de geometri alanındaki ispatların ikisini birden tümdengelimsel yapıda tamamlayan öğretmen adayı yoktur. Cebir alanındaki ispatlarında tümdengelimsel yapıda geçerli ispat yapan üç öğretmen adayının aynı başarı ve yapıyı geometri alanındaki ispatlarında sürdüremedikleri tespit edilmiştir. Bu öğretmen adaylarından ikisi geometri alanındaki ispatında tümevarımsal yapıda biri de yapısal-sezgisel yapıda geçerli olmayan ispatlar yapmışlardır. Benzer şekilde geometri alanındaki ispatlarında tümdengelimsel yapıda geçerli ispat yapan iki öğretmen adayı da aynı yapıyı cebir alanındaki ispatlarında sürdürememişlerdir. Geometri alanındaki ispatlarında tümdengelimsel yapıda ispatı tamamlayan öğretmen adaylarının ikisi de cebir alanındaki ispatlarında yapısal-sezgisel ispat yapabilmişlerdir.

Tablo 3 detaylı incelendiğinde toplamda 13 öğretmen adayının cebir ve geometri alanındaki ispatları arasında spantone sürekliliğin mevcut olduğu söylenebilir. Beş öğretmen adayının cebir ve geometri alanındaki ispatlarında tümevarımsal yapıyı korudukları (tümevarımsal cebir ispatı ve tümevarımsal geometri ispatı) görülmektedir. Yine benzer şekilde sekiz öğretmen adayı da cebir ve geometri alanındaki ispatlarında yapısal-sezgisel yapıyı korudukları (yapısal-sezgisel cebir ispatı ve yapısal-sezgisel geometri ispatı) görülmektedir. Spontane sürekliliğin en fazla yapısal-sezgisel yapılar arasında korunduğu söylenebilir.

Yine Tablo 3'ten 16 öğretmen adayının cebir ve geometri alanındaki ispatları arasında yapısal mesafe mevcuttur. Bu öğretmen adayları cebir ve geometri alanındaki ispatlarda farklı ispat yapılarında ispat üretmişlerdir. Cebir alanındaki ispatta tümdengelimsel yapıda ispat yapan üç öğretmen adayından ikisi geometri alanındaki ispatta tümevarımsal yapıda (tümdengelimsel cebir ispatı ve tümevarımsal geometri ispatı), bir öğretmen adayı da yapısal-sezgisel yapıda (tümdengelimsel cebir ispatı ve yapısal-sezgisel geometri ispatı) ispat üretmişlerdir. Cebir alanındaki ispatta tümevarımsal yapıda ispat yapan 12 öğretmen adayından yedisi ise geometri alanındaki ispatta yapısal-sezgisel yapıda (tümevarımsal cebir ispatı ve yapısal-sezgisel geometri ispatı) ispat üretebilmişlerdir. Yine cebir alanında yapısal-sezgisel yapıda ispat yapan 14 öğretmen adayından ikisi tümdengelimsel (yapısal-sezgisel cebir ispatı ve tümdengelimsel geometri ispatı) ve dördü de tümevarımsal yapıda (yapısal-sezgisel cebir ispatı ve tümevarımsal geometri ispatı) ispat üretebilmişlerdir.

Tartışma ve Sonuç

İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının hem cebir hem geometri alanındaki ispatlarının özelliklerinin üst düzeyde olması beklenmektedir. Yani öğretmen adaylarının bu alanlardaki ispat yapılarının tümdengelimsel yapıda (Mejia-Ramos ve Simpson, 2007), ispat şemalarının da aksiyomatik şemada (Harel ve Sowder, 1998) olması beklenir. Ayrıca öğretmen adaylarının cebir ve geometri alanlarındaki ispatlarının yapıları arasında yapısal süreklilik olması (Pedemonte, 2007a, 2007b, 2008) beklenmektedir. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının cebir ve geometri alanındaki ispatlarının özelliklerini inceleyen bu çalışmanın en temel sonucu öğretmen adaylarının ispat özelliklerinin istenen düzeyde olmadığı dolayısıyla öğretmen adaylarının cebir ve geometri alanında ispat yapmada başarısız olduklarıdır. Çünkü ilköğretim matematik öğretmen adaylarının hem ispat yapıları hem de ispat şemaları aşağıda da detaylı şekilde değineleceği gibi beklenen düzeye ulaşamamıştır. Buradan hareketle cebir ve geometri alanındaki ispatlarda, birçok öğrencinin bir veya birkaç örnekle yapılan doğrulamaları yeterli gördükleri, düşüncelerini matematiksel olarak ifade etmekte güçlük yaşadıkları ve argümanlarında matematiksel referansı olmayan bilgileri kullandıkları ortaya çıkmıştır. Bu sonuçlar okul öğrencilerinin ve öğretmen adaylarının cebirsel (Chin ve Lin, 2009; Cusi ve Malara, 2007; Healy ve Hoyles, 2000; Öztürk ve Kaplan, 2019; Reyhani vd., 2012; Yeşilyurt-Çetin ve Dikici, 2020) ve geometrik (Clements ve Battista, 1992; Karpuz ve Atasoy, 2020; McCrone ve Martin, 2004; Öztürk ve Kaplan, 2022; Şen ve Güler, 2022) ispat yapmada güçlükler yaşadıklarını tespit eden çalışmaların sonuçlarını destekler niteliktedir. Literatürde cebirsel ispat becerilerini (İpek ve Akkuş-İspir, 2011: Martinez vd., 2011; Morselli ve Robotti, 2023) ve geometrik ispat becerilerini (İpek ve Akkuş-İspir, 2011: Şen ve Güler, 2022) geliştirmek için tasarlanıp uygulanan öğretim deneyleri ve öğretim etkinliklerinin olumlu sonuçlarını rapor eden çalışmalar mevcuttur. İpek ve Akkuş-İspir'in (2011) çalışmalarının sonuçlarına göre ilköğretim matematik öğretmeni adayları, cebirsel ve geometrik ispat çalışmalarında dinamik geometri yazılımını faydalı bulmuşlardır. Öğretmen adayları dinamik geometri yazılımındaki canlandırma ve renklendirme özellikleri sayesinde cebirsel ve geometrik ispatları daha kolay anlayabileceklerini fark etmişlerdir (İpek ve Akkuş-İspir, 2011). Şen ve Güler (2022) ise van Hiele modeline dayalı öğretim etkinlikleri aracılığıyla öğretmen adaylarının geometrik ispat yazma becerilerindeki gelişimlerini incelemişlerdir. Öğretim deneyi öncesi öğretmen adaylarının ispata yönelik sınırlı bilgiye sahip oldukları ve geçerli geometrik ispat yazmakta güçlük yaşadıkları ancak öğretim deneyi sonrası en üst düzeye ulaşabildikleri araştırmanın sonuçları arasındadır (Şen ve Güler, 2022).

İspat şemalarının analizi öğretmen adaylarının cebir alanındaki ispatlarda çoğunlukla tümevarımsal ve referanssız-sembolik ispat şemalarını kullandıklarını, geometri alanındaki ispatlarda ise çoğunlukla tümevarımsal ve algısal ispat şemalarını kullandıklarını ortaya çıkarmıştır. Öğretmen adaylarının hem cebir hem de geometri alanlarında çok nadir sıklıkta analitik ispat şemalarında ispat üretebilmiş olmaları onların yetersiz ispat şemalarına sahip olduklarına işaret etmektedir. Bu sonuçlar öğretmen adaylarının yetersiz ispat şemalarına sahip oldukları sonucuna ulaşan çalışmaların sonuçlarını (Cusi ve Malara, 2007; Çontay ve Duatepe-Paksu, 2019; İskenderoğlu vd., 2010; Pala ve Narlı, 2018; Sears, 2019) cebir ve geometri bağlamlarında destekler niteliktedir. Literatürde öğretmen adaylarının ispat şemalarını geliştirecek müdahale çalışmalarının olumlu sonuçlarını rapor eden çalışmalar (Cihan ve Akkoç, 2023; Mariotti, 2000; Samkoff ve Weber, 2015) mevcuttur. Örneğin Cihan ve Akkoç (2023) öğretmen adaylarının ispat şemaları ile ilgili hem alan hem de pedagojik alan bilgilerini geliştirecek bir ders modülünün olumlu etkilerini raporlamışlardır. Yine de matematik sınıflarında araştırmaya dayalı müdahalelerin tasarımı, uygulaması ve değerlendirmesi aracılığıyla çözüm üretmeye daha az vurgu yapılmıştır (Stylianides vd., 2017). Bu araştırmanın sonuçları bu tür müdahale araştırmalarının yoğunluk kazanması ve öğretmen eğitimi müfredatlarına entegre edilmesinin elzem olduğunu göstermektedir. Bunun dışında çevrim içi medya paylaşım sitelerindeki ispat yöntemleri ile ilgili videolar her sınıf düzeyinden öğrencilerin ispat öğrenimleri için bazı faydalı unsurlar içerdiğinden dolayı bu tür platformlar ispat öğretiminin yapıldığı matematik sınıflarına entegre edilebilir (Cihan, 2024).

Bu çalışmanın sonuçlarından biri de hem cebir hem de geometri alanında ortak olarak tümevarımsal (deneysel) şemanın en sıklıkla kullanılan şemalardan biri olduğudur. İspat şemaları ile ilgili literatür (Cusi ve Malara, 2007; Çontay ve Duatepe-Paksu, 2019; İskenderoğlu vd., 2010; Sears, 2019; Sarı vd., 2007; Stylianou vd., 2006; Şengül ve Güner, 2013; Weber vd., 2020) incelendiğinde üniversite öğrencileri ve öğretmen adayları tarafından kullanılan ispat şemalarının farklılaştığı görülmektedir. İspat şemalarının farklılaşmasının sebebinin, bağlamla (Furinghetti ve Paola, 1997), soruların ifade ediliş biçimi veya zorluğuyla (Knuth vd., 2009) veyahut ta katılımcıların değerleri ve başarı olasılıklarına ilişkin algılarıyla (Weber vd., 2020) alakalı olduğu düşünülebilir. Tek bir faktör ispatla ilgili öğrenci davranışlarını anlamak için yeterli değildir çünkü bu davranışlar tarihsel, sosyolojik, matematiksel, epistemolojik, öğretimsel ve bilişsel birçok faktörden etkilenir (Harel ve Sowder, 2007). Healy ve Hoyles'in (2000) çalışmasının sonuçlarına göre öğrencilerin cebirdeki ispat inşaları onların matematiksel yeterliliklerinden, müfredatla ilgili faktörlerden, ispata ilişkin görüşlerinden ve cinsiyetlerinden etkilenmiştir (Healy ve Hoyles, 2000). Üniversite öğrencileri ve öğretmen adayları tarafından başvurulan ispat şemaları farklılaşmasına rağmen daha sıklıkla başvurulan şemanın tümevarımsal (deneysel) ispat şeması (İskenderoğlu vd., 2010; Pala ve Narlı, 2018; Stylianou vd., 2006; Weber vd., 2020) olduğu görülmektedir ki bu çalışmanın sonuçlarıyla paralellik göstermektedir. Ayrıca tümevarımsal ispat şemaları dışında cebir alanında referanssız-sembolik, geometri alanında ise algısal ispat şemaları sıklıkla kullanılan şemalardır. Cebrin sembolik dil yapısının ve geometrinin şekilsel yapısının bu sonuçlara sebep olduğu düşünülebilir. Çünkü cebir alanındaki ispatta öğretmen adayları sembolleri manipüle ederek, geometri alanında da gelişmemiş zihinsel imgelerini ve algılarını kullanarak ispat üretmeye çalışmışlardır.

İspat yapılarının analiz sonuçları ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının hem cebir hem de geometri alanındaki ispatlarda çoğunlukla tümevarımsal ve yapısal-sezgisel yapıda ispat üretebildiklerini, her iki alanda da çok sınırlı sayıda tümdengelimsel yapıda geçerli ispat üretebildiklerini ortaya koymuştur. Rosyidi ve Kohar'ın (2018) çalışması da öğretmen adaylarının cebirsel eşitsizliklerle ilgili ispat sorularında en çok tümevarımsal çıkarımları en az da tümdengelimli çıkarımları kullandığını ortaya koymuştur. Araştırmanın sonuçları doğrultusunda öğretmen adaylarının ispat yapılarının tümdengelimsel yapıya, ispat şemalarının da aksiyomatik şemaya transferi için öğretmen eğitimi düzeyinde öğretimsel çalışmalar yapılması önerilebilir. Bu tür çalışmalar cebir ve geometri alanlarındaki ispatlarda yapısal sürekliliğin sağlanması adına da fayda sağlayabilir. Formel ispatlara ancak tümdengelimsel (dedüktif) yapıyla ulaşılabileceğinden (Inglis vd., 2007) dolayı Rosyidi ve Kohar (2018) öğretmen eğitimcilerine, öğretmen adaylarının ispatlarını tümevarımsal yapıdan tümdengelimsel yapıya ve informelden formel ispata doğru geliştirebilecek müfredat reformları önermiştir. Ayrıca yine öğretmen adaylarına ispat öğretimindeki ispat aktivitelerinde tümevarımsal yapının sınırlılıkları ve sakıncaları üzerine sınıf tartışmaları yaptırılması önerilebilir. Chin ve Lin'e (2009) göre öğrencilerin sınıf içindeki diğer kişilerle iletişim kurmasının teşvik edilmesi argümantasyonların geliştirilmesine katkı sağlamaktadır. Bunlar dışında öğretmen eğitiminde geometri alanındaki ispat aktivitelerine derslerde daha fazla yer verilmesi önerilebilir.

İspatlanacak olan önermenin cebir ya da geometri alanından olması; argümantasyon süreci ve ispat arasındaki yapısal bütünlüğün ispatlama sürecine etkisini de değiştirir (Pedemonte, 2007b). Bundan farklı olarak bu çalışmanın en orijinal sonucu cebir ve geometri alanlarındaki ispatlar arasındaki yapısal bütünlük durumları incelendiğinde bu iki alandaki ispatlar arasında yapısal sürekliliğin olmadığı, çoğunlukla yapısal mesafenin olduğu bunu da spantone sürekliliklerin takip ettiğidir. Cebir ve geometri alanlarındaki ispatlar arasında yapısal sürekliliğin olmaması bu iki alanda birden başarılı bir şekilde ispatı tamamlayabilen öğretmen adayı olmamasına bir sebep olabilir. Literatürdeki bazı çalışmalar argümantasyon süreçleri ile ispat arasında yapısal bütünlüğü koruyabilen öğrencilerin formel ispat yapmada daha başarılı olduklarını raporlamıştır (Doruk, 2016; Pedemonte, 2007; Pedemonte ve Buchbinder, 2011). Bu çalışma, cebir ve geometri alanlarındaki ispatları arasında spantone süreklilik bulunan öğretmen adaylarının ispat yapmada başarısız olduklarını ortaya çıkarmıştır. Yine literatürde de argümantasyon süreçleri ve ispat arasındaki ilişkilerde spantone sürekliliklerin ispat yapmada güçlüklere sebep olduğu öne sürülmüştür (Doruk, 2016; Martinez ve Pedemonte, 2014; Pedemonte, 2007). Bu çalışmada cebir ve geometri alanlarındaki ispatları arasında yapısal mesafeler bulunan öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu ispat yapmada başarısız olsa da başarılı birkaç öğretmen adayı da bulunmaktadır. Literatürde argümantasyon süreci ve ispatı farklı yapıda olup ispatlarında başarılı olan öğrencilerin mevcut olduğu bilindiği gibi bunun tersini iddia eden çalışmalar da mevcuttur (Doruk, 2016; Martinez ve Pedemonte, 2014; Pedemonte, 2007a; Pedemonte, 2008). Son olarak ileriki çalışmalarda matematiğin farklı alanlarındaki ispat yapılarının sınanması önerilebilir.

Etik Kurul Onay Bilgileri

Bu araştırma için Hakkari Üniversitesi Rektörlüğü Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu'ndan (04.03.2024-76833) etik izin alınmıştır.

Çıkar Çatışması

Yazarlar, bu makalenin araştırılması, yazarlığı ve/veya yayınlanmasına ilişkin herhangi bir potansiyel çıkar çatışması beyan etmemiştir.

Finansal Destek

Yazarlar, bu makalenin araştırılması, yazarlığı ve / veya yayınlanması için herhangi bir finansal destek almamıştır.

Araştırma Beyanı

"Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesinde' yer alan tüm kurallara uyulmuş ve yönergenin ikinci bölümünde yer alan "Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemlerden" hiçbiri gerçekleştirilmemiştir.

Kaynaklar

Balacheff, N., & Margolinas, C. (2005). Ck¢ modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématique* (pp. 75–106). La Pensèe Sauvage.

Boero, P., Douek, N., Morselli, F., & Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. In *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 179–204). Belo-Horizonte, Brazil.

Bozkurt, A., Şimşekler-Dizmen, T. H., & Tutan, S., (2022). Investigation of classroom practices of middle school mathematics teachers in the context of geometric reasoning processes. *Psycho-Educational Research Reviews*, *11*(2), 70-87. https://doi.org/10.52963/PERR_Biruni_V11.N2.05

Bülbül, A., & Urhan, S. (2016). Argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasındaki ilişkiler. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *10*(1), 351-373. https://doi.org/10.17522/nefefmed.00387

Chin, E. & Lin, F. (2009). A comparative study on junior high school students' proof conceptions in algebra between Taiwan and the UK. *Journal of Mathematics Education*, *2*(2), 52-67. https://sid.ir/paper/618677/en

Chrysostomou, M., Pitta-Pantazi, D., Tsingi, C., Cleanthous, E., & Christou, C. (2013). Examining number sense and algebraic reasoning through cognitive styles. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(2), 205-223. http://www.jstor.org/stable/23434217

Cihan, F., & Akkoç, H. (2023). An intervention study for improving pre-service mathematics teachers' proof schemes. *Mathematics Teaching-Research Journal*, *15*(2), 56-80. https://eric.ed.gov/?id=EJ1394137

Cihan, F. (2024). Matematiksel ispat yöntemlerine ilişkin Youtube™ videolarının ve video yorumlarının analizi. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *25*(2), 437-460. https://doi.org/10.17679/inuefd.1378938

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420–464). Macmillan.

Cusi, A., & Malara, N. (2007). Proofs problems in elementary number theory: Analysis of trainee teachers' productions. In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Eds.), *Proceedings ofthe Fifth Congress of the European Societyfor Research in Mathematics Education* (pp. 591–600). Cyprus, Larnaca.

Çontay, E. G., & Duatepe-Paksu, A. (2019). The proof schemes of preservice middle school mathematics teachers and investigating the expressions revealing these schemes. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *10*(1), 59-100. https://doi.org/10.16949/turkbilmat.397109

Doruk, M. (2016). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçlerinin incelenmesi* (Tez No: 433823). [Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi].

Douek, N. (1999). Argumentative aspects of proving: analysis of some undergraduate mathematics students' performances. In *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.273–280). Haifa, Israel.

Duatepe-Paksu, A. (2016). Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri. E. Bingölbali, S. Arslan & İ. Ö. Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* içinde (s. 266–275). Pegem Akademi.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: an ICMI study*. Kluwer.

Evans, R. (2007). Proof and geometric reasoning. *Mathematics Teaching Incorporating Micromath*, *201*, 38-41. https://eric.ed.gov/?id=EJ768907

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139-162. https://doi.org/10.1007/BF01273689

Friel, S., Rachlin, S., Doyle, D., Nygard, C., Pugalee, D., & Ellis, M. (2001). *Navigating through algebra in grades 6–8. Principles and standards for school mathematics navigations series*. National Council of Teachers of Mathematics.

Furinghetti, F., & Paola, D. (1997). Shadows on proof. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 273–280). Lahti, Filand.

Garuti, R., Boero, P., & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulties of proof. In A. Olivier, & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 345–352). Stellenbosch, South Africa.

Grønmo, L. S. (2018). The role of algebra in school mathematics. In G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, & B. Xu (Eds.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 175–193). ICME-13 Monographs. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72170-5_11

Guba, E. G., & Lincoln, Y. S. (1981). *Effective evaluation: Improving the usefulness of evaluation results through responsive and naturalistic approaches*. Jossey-Bass.

Hair, J. F., Black, W. C., Babin, B. J., & Anderson, R. E. (2014). *Multivariate Data Analysis* (7^{th} ed.). Pearson Education.

Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. In S. Campbell, & R. Zaskis (Eds.), *Learning and teaching number theory* (pp.185–212). Ablex Publishing Corporation.

Harel, G. (2007). Students' proof schemes revisited. In P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 65–78). Sense Publishers

Harel, G. (2008). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: Focus on proving. *ZDM-International Journal of Mathematics Education*, *40*(3), 487-500. https://dx.doi.org/10.1007/s11858-008-0104-1

Harel, G. (2014). Deductive reasoning in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 143–147). Springer.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234–283). American Mathematical Society.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805–842). Information Age Publishing.

Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(4), 396-428. https://doi.org/10.2307/749651

Herbert, K. & Brown, R. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics*, *3*(6), 340-344. https://doi.org/10.5951/TCM.3.6.0340

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modeling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 3-21. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9059-8

İpek, S., & Akkuş-İspir, O. (2011). Preservice elementary mathematics teachers' geometric and algebraic proof process with dynamic geometry software. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, *2*(1), 20-34. https://doi.org/10.16949/turcomat.67161

İskenderoğlu, T., Baki, A., & İskenderoğlu, M. (2010). Proof schemes used by first grade of preservice mathematics teachers about function topic. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *9*, 531-536. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.192

Jones, K. (1998). Theoretical frameworks for the learning of geometrical reasoning. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *18*(1&2), 29-34.

Jupri, A., Drijvers, P., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Difficulties in initial algebra learning in Indonesia. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(4), 683-710. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0097-0

Kaput, J., & Blanton, M. (2005). Algebrafying the elementary mathematics experience in a teacher-centered, systemic way. In T. A. Romberg, T. P. Carpenter, & F. Dremock (Eds.), *Understanding Mathematics and Science Matters*. Lawrence Erlbaum Associates.

Karpuz, Y., & Atasoy, E. (2020). High school mathematics teachers' content knowledge of the logical structure of proof deriving from figural-concept interaction in geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *51*(4), 585-603. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1736347

Kaya, D., & Keşan, C. (2014). İlköğretim seviyesindeki öğrencilerden cebirsel düşünme ve cebirsel muhakeme becerisinin önemi. *International Journal of New Trends in Arts, Sports and Science Education, 3*(2), 38-47. https://acikerisim.nevsehir.edu.tr/bitstream/handle/20.500.11787/6649/IJTASE.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Knuth, E. J., Choppin, J., & Bieda, K. (2009). Middle school students' productions of mathematical justification. In D. Stylianou, M. Blanton, & E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 153–170). Routledge.

Kramarski, B. (2008). Promoting teachers' algebraic reasoning and self-regulation with metacognitive guidance. *Metacognition and Learning*, *3*, 83-99. https://doi.org/10.1007/s11409-008-9020-6

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 25-53

Mariotti, M. A., Bartolini-Bussi, M.G., Boero, P., Ferri, F., & Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition. In *Proceedings of the 21th PME Conference,* Lathi (pp.180–195). University of Helsinki.

Martinez, M. V., Brizuela, B. M., & Superfine, A. C. (2011). Integrating algebra and proof in high school mathematics: An exploratory study. *The Journal of Mathematical Behavior, 30*(1), 30-47. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.11.002

Martinez, M. V., & Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational studies in mathematics*, *86*(1), 125-149. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9530-2

McCrone, S. M. S., & Martin, T. S. (2004). Assessing high school students' understanding of geometric proof. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *4*(2), 223-242. https://doi.org/10.1080/14926150409556607

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook* (2nd ed.). Sage Publications.

Morselli, F., & Robotti, E. (2023). Designing inclusive educational activities in mathematics: The case of algebraic proof. In K. M. Robinson, D. Kotsopoulos, A. K. Dubé (Eds.), *Mathematical teaching and learning* (pp.69–87). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-31848-1_5

Öztürk, M., & Kaplan, A. (2019). Cognitive analysis of constructing algebraic proof processes a mixed method research. *Education and Science*, *44*(197), 25-64. https://dx.doi.org/10.15390/EB.2018.7504

Öztürk, M., & Kaplan, A. (2022). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının geometrik ispat yapma süreci: Bir durum çalışması. *Eurasian Journal of Teacher Education*, *3*(1), 39-54. https://dergipark.org.tr/en/pub/ejte/issue/69452/995010

Pala, O., & Narlı, S. (2018). Examining proof schemes of prospective mathematics teachers towards countability concept. *Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science & Mathematics Education*, *12*(2), 136-166. http://doi.org/10.17522/balikesirnef.506425

Pedemonte, B. (2007a). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational studies in mathematics*, *66*(1), 23-41. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9057-x

Pedemonte, B. (2007b). Structural relationships between argumentation and proof in solving open problems in algebra. *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education/European Research in Mathematics Education (CERME 5)*, 643-653.

Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik [Central Journal for Didactics of Mathematics]*, *40*(3), 385-400. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0085-0

Pedemonte, B., & Buchbinder, O. (2011). Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: the case of triangular numbers. *ZDM Mathematics Education*, *43*(2), 257-267. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0311-z

Pedemonte, B., & Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational studies in mathematics*, *76*(3), 281-303. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9275-0

Ramlan, A. M., & Ramlan, S. M. (2017). Analysis of the students' geometric reasoning ability. *Journal of Mathematics Education*, *2*(1), 11-16. https://doi.org/10.31327/jomedu.v2i1.250

Reyhani, E., Hamidi, F., & Kolahdouz, F. (2012). A study on algebraic proof conception of high school second graders. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *31*, 236-241. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2011.12.048

Rosyidi, A. H., & Kohar, A. W. (2018). Student teachers' proof schemes on proof tasks involving inequality: Deductive or inductive? *Journal of Physics: Conference Series*, *947*(1), 012028. https://doi.org/10.1088/1742-6596/947/1/012028

Samkoff, A., & Weber, K. (2015). Lessons learned from an instructional intervention on proof comprehension. *The Journal of Mathematical Behavior*, *39*, 28-50. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.05.002

Sarı, M., Altun, A., & Aşkar, P. (2007). Üniversite öğrencilerinin analiz dersi kapsamında matematiksel kanıtlama süreçleri: Örnek olay çalışması. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, *40*(2), 295-319. http://dergipark.gov.tr/auebfd/issue/38396/445309

Sears, R. (2019). Proof schemes of pre-service middle and secondary mathematics teachers. *Investigations in Mathematics Learning*, *11*(4), 258-274. https://doi.org/10.1080/19477503.2018.1467106

Smith, J., & Thompson, P. W. (2007). Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 95–132). Erlbaum.

Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *The Mathematics Teacher*, *91*(8), 670-675. Retrieved March 12, 2016 from http://www.jstor.org/stable/27970745

Stylianou, D., Chae, N., & Blanton, M. (2006). Students' proof schemes: A closer look at what characterizes students' proof conceptions. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 54-60). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 237–266). National Council of Teachers of Mathematics.

Susac, A., Bubic, A., Vrbanc, A., & Planinic, M. (2014). Development of abstract mathematical reasoning: the case of algebra. *Frontiers in Human Neuroscience*, *8*, 679. https://doi.org/10.3389/fnhum.2014.00679

Şen, C., & Güler, G. (2022). Matematik öğretmeni adaylarının geometrik ispatlarda ispat yazma becerilerinin incelenmesi: van Hiele modeli. *Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, *23*(Özel Sayı), 128-176. https://doi.org/10.29299/kefad.997311

Şengül, S., & Güner, P. (2013). DNR tabanlı öğretime göre matematik öğretmen adaylarının ispat şemalarının incelenmesi. *The Journal of Academic Social Science Studies*, *6*(2), 869-878. http://dx.doi.org/10.9761/JASSS_401

Toulmin S. E. (1993). *The use of arguments*. Cambridge: Cambridge University Press (French translation De Brabanter P. (1958). Les usages de l'argumentation, Presse Universitaire de France).

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Academic Press, Inc.

Weber, K., Lew, K., & Mejía-Ramos, J. P. (2020). Using expectancy value theory to account for individuals' mathematical justifications. *Cognition and Instruction*, *38*(1), 27-56. https://doi.org/10.1080/07370008.2019.1636796

Woods, N. F., & Calanzaro M. (1980). *Nursing research: Theory and practice*. Mosby.

Yeşilyurt-Çetin, A., & Dikici, R. (2020). Matematik öğretmeni adaylarının cebirsel ispat yapabilme durumlarının incelenmesi. *Online Journal of Mathematics, Science and Technology Education (OJOMSTE)*, *1*(1), 75-85. https://www.ojomste.com/index.php/1/article/view/7/16

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (10. baskı). Seçkin Yayınevi.

Extended Abstract

Introduction

In their future classes, prospective teachers may have to convince their students of mathematical expressions in the domains of algebra or geometry. Therefore, prospective teachers must be able to to complete proofs in the domains of algebra and geometry validly. Beyond that, the characteristics of their proofs in both algebra and geometry must include the highest level of thinking. There are studies classifying these ways of thinking in the literature (Harel & Sowder, 1998; Inglis et al., 2007; Pedemonte, 2007a).

The aim of this study is to reveal the characteristics of the proofs made by primary school mathematics teacher candidates in the domains of algebra and geometry. Therefore, presenting the proof characteristics together in these two domains, which require different skills, can reveal the needs in terms of algebra and geometry education in teacher education. In this context, the focus was on the proof structures and schemes of the proofs made by prospective teachers in the domains of algebra and geometry. In this study, Harel and Sowder's (1998) classification of proof schemes and Inglis et al.'s (2007) classification of justification types were used to examine the characteristics of primary mathematics teacher candidates' proofs in the domains of algebra and geometry. Harel and Sowder (1998) categorized the proof schemas that reveal the cognitive characteristics of the proof process into three main schemas: external, empirical, and analytical. They classified external proof schemes into ritual, authoritarian, and symbolic, empirical proof schemes into inductive and perceptual, and analytical proof schemes into transformational and axiomatic (Harel & Sowder, 1998). Inglis et al. (2007) examined students' argumentation processes in their study. They classified the students' justification types as deductive, inductive, and structural-intuitive (Inglis et al., 2007). Examining the proof characteristics of prospective teachers in the context of both proof structures and proof schemes may be valuable in terms of reflecting the unique characteristics of different classifications. Another aim of this study is to examine the structural unity status of primary school mathematics teacher candidates' proof structures in the domains of algebra and geometry. The cognitive unity status of prospective teachers' proofs in the domains of algebra and geometry was examined according to Pedemonte's (2007a) structural unity hypothesis. It is aimed to examine structural unity situations in the context of structural continuity, spontaneous continuity, and structural distance. In other words, the aim is to test the structural unity hypothesis in proofs in different domains. Examining whether the proof structures of prospective teachers change when their proof domains change, whether structural continuity and spontaneous continuity are preserved, and the structural distances, if any, are among the aims that add originality to this study. Therefore, this study sought answers to the following three research questions.

- What are the characteristics of the proofs made by teacher candidates in the domain of algebra?
- What are the characteristics of the proofs made by teacher candidates in the domain of geometry?
- How is the structural unity of teacher candidates' proofs in the domains of algebra and geometry?

Method

This research, designed in qualitative research design, is a case study. The study group consists of 29 teacher candidates studying in the fourth grade of the primary mathematics teaching department of a state university in Türkiye. The criterion was to be enrolled in the Logical Reasoning course in the seventh-semester course plan of the primary mathematics teaching department. The data of the study were collected through the Algebra-Geometry Proof Form in the spring semester of the 2023-2024 academic year. The form included two open-ended questions that prospective teachers had to prove in the domains of algebra and geometry. The first question was asked in the domain of algebra, the second question was asked in the domain of geometry in order to reveal the characteristics of their proofs. These proofs were analyzed with the help of descriptive analysis. For this purpose, Harel and Sowder's (1998) proof schemes, Inglis et al.'s (2007) justification types, and Pedemonte's (2007a) structural unity situations were used as codes. The structure of the proofs made by the prospective teachers in the domains of algebra and geometry was reflected in the cross-table and by using the cross-table, the structural continuity, spontaneous continuity, and structural distance cases between the proofs made in these two domains were analyzed in detail. Within the scope of the validity and reliability studies of the research, expert opinions (Hair et al., 2014; Yıldırım & Şimşek, 2016) were consulted and agreement between coders (Miles & Huberman, 1994) was taken into account.

Discussion & Conclusion

The most basic result of this study, which examines the characteristics of the proofs of primary school mathematics teacher candidates in the domains of algebra and geometry, is that the proof characteristics of the teacher candidates are not at the desired level, and therefore the teacher candidates are unsuccessful in making proofs in the domains of algebra and geometry. Based on this, it has been revealed that in the proofs in the domains of algebra and geometry, many students find verifications made with one or a few examples sufficient, have difficulty in expressing their thoughts mathematically, and use information that has no mathematical reference in their arguments. These results support the results of studies that have determined that school students and teacher candidates have difficulty in making algebraic (Chin & Lin, 2009; Cusi & Malara, 2007; Healy & Hoyles, 2000; Öztürk & Kaplan, 2019; Reyhani et al., 2012; Yeşilyurt-Çetin & Dikici, 2020) and geometric (Clements & Battista, 1992; Karpuz & Atasoy, 2020; McCrone & Martin, 2004; Öztürk & Kaplan, 2022; Şen & Güler, 2022) proofs.

The analysis results of the proof structures revealed that teacher candidates were mostly able to produce inductive and structural-intuitive proofs in proofs in both algebra and geometry, and that they could produce valid proofs in a very limited number of deductive structures in both domains. Rosyidi and Kohar's (2018) study also revealed that prospective teachers used inductive inferences the most and deductive inferences the least in proof questions about algebraic inequalities. Since formal proofs can only be achieved with a deductive structure (Inglis et al., 2007), Rosyidi and Kohar (2018) suggested curriculum reforms for teacher educators that could improve teacher candidates' proofs from an inductive structure to a deductive structure and from informal to formal proof. In addition, it can be suggested that teacher candidates should have class discussions on the limitations and drawbacks of the inductive structure in proof activities in teaching proofs. According to Chin and Lin (2009), encouraging students to communicate with others in the class contributes to the development of argumentation. Apart from these, it can be suggested that proof activities in the domain of geometry should be included more in teacher education courses.

The analysis of proof schemes revealed that pre-service teachers mostly used inductive and non-referential symbolic proof schemes in proofs in the domain of algebra, while they mostly used inductive and perceptual proof schemes in proofs in the domain of geometry. The fact that pre-service teachers were able to produce proofs with analytical proof schemes very rarely in both the domains of algebra and geometry indicates that they have inadequate proof schemes. These results support the results of studies that concluded that prospective teachers have inadequate proof schemes (Cusi & Malara, 2007; Çontay & Duatepe-Paksu, 2019; İskenderoğlu et al., 2010; Pala & Narlı, 2018; Sears, 2019) in the contexts of algebra and geometry. There are studies in the literature reporting positive results of interventions that will improve prospective teachers' proof schemes (Cihan & Akkoç, 2023; Mariotti, 2000; Samkoff & Weber, 2015). For example, Cihan and Akkoç (2023) reported the positive effects of a course module that would develop both content and pedagogical content knowledge of pre-service teachers about proof schemes. However, less emphasis has been placed on generating solutions through the design, implementation, and evaluation of research-based interventions in mathematics classrooms (Stylianides et al., 2017). The results of this study suggest that it is essential to intensify such intervention research and integrate it into teacher education curricula.

Whether the proposition to be proved is from algebra or geometry also changes the effect of the structural integrity between the argumentation process and the proof on the proving process (Pedemonte, 2007b). Unlike this, the most original result of this study is that when the structural unity between proofs in the domains of algebra and geometry is analyzed, it is found that there is no structural continuity between the proofs in these two domains, mostly structural distance, followed by spontaneous continuity. The lack of structural continuity between the proofs in algebra and geometry may be a reason why there are no pre-service teachers who can successfully complete proofs in both of these domains.

In line with the results of the research, it can be suggested that instructional studies be carried out at the teacher training level to transfer the proof structures of prospective teachers to the deductive structure and the proof schemes to the axiomatic scheme. Such studies can also be useful in ensuring structural continuity in proofs in the domains of algebra and geometry. Finally, it may be recommended that proof structures be tested in different domains of mathematics in future studies.