

Çatlak İçeren Silindirik Borularda SH Dalgası Yayılımı

Hasan Faik KARA *¹

¹Trakya Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 22180, Edirne

(Alınış / Received: 11.10.2016, Kabul / Accepted: 22.02.2017, Online Yayınlanma / Published Online: 10.04.2017)

Anahtar Kelimeler

Çatlak,
Silindirik boru,
SH dalgaları

Özet: Bu çalışmada, sonsuz ortamda gömülü ve içten dışa doğru düzgün bir çatlak içeren silindirik boruların SH dalgaları etkisi altındaki davranışı incelenmiştir. Ele alınan dalga yayılımı probleminde, silindirik borunun düzgün bir çatlak içermesi, yapılan çalışmayı literatürdeki mevcut çalışmalardan ayırmaktadır. Boru ve sonsuz ortamın homogen, izotrop ve lineer elastik davranış gösterdiği ve çatlak yüzeyinde sürtünme olmadığı varsayılmıştır. Çözümde analitik ve sayısal yöntemler birlikte kullanılmıştır. Boru içerisinde ve sonsuz ortamdaki yer değiştirme fonksiyonları, dalga fonksiyonları açılımı tekniği ile kapalı formda Bessel fonksiyon serileri olarak elde edilmiştir. Elde edilen çözüm serileri, Sommerfeld Radyasyon Koşulunu ve boru iç yüzeyindeki sıfır gerilme şartını tam olarak sağlar. Bu iki koşuldun, Bessel fonksiyon serilerindeki bilinmeyen kompleks katsayıların bir bölümü elde edilmiştir. Kalan katsayılar, boru ve sonsuz ortam arasındaki sınır koşullarının En Küçük Kareler Yöntemi ile yaklaşık olarak sağlatılması ile bulunmuştur. Elde edilen sonuçlar, çatlaksız boruya ait kesit çözümler ile kıyaslanmıştır ve çatlakın gerilmeler üzerine etkisi grafiklerle gösterilmiştir.

Propagation of SH Waves in Cylindrical Tubes Containing a Crack

Keywords

Crack,
Cylindrical tube,
SH waves

Abstract: In this study, behavior of cylindrical tubes containing a flat crack between inner and outer surface embedded in an infinite medium subjected to SH-waves is investigated. In the considered wave propagation problem, existence of a flat crack in the cylindrical tube makes this study distinguished among present studies in literature. It is assumed that the tube and the infinite medium have homogeneous, isotropic and linear elastic behavior and there is no friction on crack surfaces. Analytical and numerical techniques are used together in the solution. Displacement functions inside the tube and the infinite medium are obtained as Bessel Function series in closed form by using wave function expansion method. These solution series completely satisfy zero stress condition at inner surface of the tunnel and Sommerfeld Radiation Condition. From these two conditions, some of the complex unknowns of Bessel function series are obtained. Remaining constants are obtained by satisfying boundary conditions between the tube and the infinite medium approximately by using The Method of Least Squares. Obtained results are compared with exact solutions of the tube without a crack and the effect of the crack on stress distributions are demonstrated by graphics.

1. Giriş

Silindirik tünellerin ya da boşlukların SH dalgaları etkisi altındaki davranışını inceleyen çok sayıda araştırma vardır. Mow ve Pao [1], elastik dalgalar etkisi altında sonsuz ortamdaki silindirik boşluklarda dinamik gerilme yığılmalarına ait kesin çözümleri elde etmiştir. Lee [2] ve Lee ve Trifunac [3], yarı sonsuz uzayda gömülü dairesel boşluklarda ve tünellerde SH dalgası yayılımı probleminin, imaj tekniğini kullanarak analitik çözümünü bulmuştur. SH dalgaları etkisi altındaki ikili silindirik tünel içeren bir yarı sonsuz ortamın davranışı Balendra ve arkadaşları [4] tarafından incelenmiştir. Lee ve arkadaşları [5], yarı

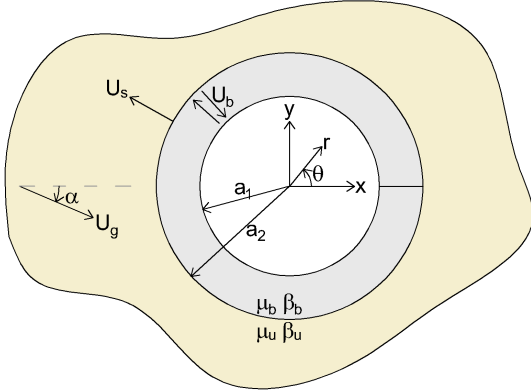
dairese silindirik bir tepe içerisindeki yarı dairesel tünelde SH dalgası yayılımı problemini çözmüştür. Hayır ve arkadaşları [6] silindirik boşluk içeren bir levhada SH dalgalarının yayılımını incelemiştir. Liang ve arkadaşları [7] yarı-silindirik boşluk içeren bir yarım-uzayın SH dalgaları etkisindeki davranışını incelemiştir. Kara [8] Çeyrek sonsuz ortamda gömülü bir silindirik tünelde SH dalgaları saçılımı problemini incelemiştir.

Bu çalışmada, sonsuz ortamda gömülü ve iç yüzeyinden dış yüzeyine doğru uzanan düzgün bir çatlak içeren silindirik borularda SH dalgası yayımı problemi incelen-

* İlgili yazar: faikkara@gmail.com

miştir. Silindirik borunun düzgün bir çatlak içermesi, yapılan çalışmayı literatürdeki benzer çalışmalardan ayırmaktadır.

2. Temel Denklemler ve Çözüm



Şekil 1. Problem geometrisi

Problem geometrisi şekil 1 de görülmektedir. Tanımlanan silindirik koordinat sisteminin merkezinde iç yarıçapı a_1 , dış yarıçapı a_2 olan bir silindirik boru bulunmaktadır. Boruda merkezden $\theta = 0$ doğrultusuna doğru uzanan bir çatlak bulunmaktadır. Çatlak yüzeylerinin sürtünmesiz olduğu varsayılmıştır. Boruyu bir tam sonsuz uzay çevrelemektedir. Tam sonsuz uzay, yonu çatlak doğrultusu ile α açısı yapan harmonik SH dalgaları etkisi altındadır. Boru iç yüzeyi serbesttir. Boru ve tam uzayın homogen, izotrop ve lineer elastik davranış gösterdiği varsayılmıştır. Boru ve tam uzay farklı malzeme sabitlerine sahiptir. Boru malzemesinin kayma modülü ve kayma dalgası hızı sırasıyla μ_b ve β_b ile gösterilmiştir. Benzer şekilde tam uzaydaki malzeme sabitleri de μ_u ve β_u ile gösterilmiştir. Yer değiştirme fonksiyonları U ile gösterilmiş, tam uzayda borudan saçılan dalgalar için s indisi, gelen SH dalgaları için g indisi, tam uzaydaki toplam yer değiştirme fonksiyonu için u indisi ve boru içerisindeki yer değiştirme fonksiyonu için b indisi kullanılmıştır. Boru içerisinde ve tam uzayda geçerli olan yönetici denklem aşağıda gösterilen dalga denklemidir [9]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) U_i(r, \theta, t) = \frac{1}{\beta_i^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U_i(r, \theta, t) \quad (1)$$

Burada t zaman parametresidir ve i indisi yerine g , s veya b gelebilir. Gelen SH dalgaları harmonik olduğu için yer değiştirmeler de harmonik olacaktır ve aşağıdaki formda gösterilebilir [9]:

$$U_i(r, \theta, t) = u_i(r, \theta) e^{-i\omega t} \quad (2)$$

Burada ω açısal frekansı ifade eder. (2) ifadesi (1)'de yerine yazılırsa Helmholtz denklemi elde edilir:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k_i^2 \right) u_i(r, \theta) = 0 \quad (3)$$

Burada k_i dalga sayısını ifade eder:

$$k_i = \omega / \beta_i \quad (4)$$

2.1. Tam uzay ortamı için çözüm

Tünelden saçılan dalgaları ifade eden u_s yer değiştirme fonksiyonunun hesabı için, çarpanlara ayırma yöntemi kullanılarak, yer değiştirme potansiyeli sadece r ve sadece θ 'ya bağlı iki fonksiyonun çarpımı olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$u_s(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \quad (5)$$

(5) (3)'de yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapırsa:

$$\frac{r^2}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{r}{R(r)} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + k^2 r^2 = \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} \quad (6)$$

(6) denkleminin her iki tarafı farklı bir değişkene bağlıdır. Bu yüzden denklem ancak her iki taraf bir sabite eşit olursa sağlanır. Bu sabiti n^2 olarak seçebiliriz. Periyodiklik koşulu gereği n 'in tam sayı olması gerekir. Her iki taraf için ayrı çözüm yapıp (5) denkleminde yerine yerleştirirsek aşağıdaki çözümü elde ederiz:

$$u_s(r, \theta) = \sum_{n=-N}^N A_{u,n} H_n^{(1)}(k_u r) e^{in\theta} + \sum_{n=-N}^N B_{u,n} H_n^{(2)}(k_u r) e^{in\theta} \quad (7)$$

(7) çözümü, N 'nin sonsuz olması durumunda kesin çözümü ifade eder. Ancak sayısal sonuç elde etmek için N , yeterince yakınsaklık sağlayacak şekilde seçilen sonlu bir sayı olmalıdır. $H_n^{(1)}$ ve $H_n^{(2)}$ n 'inci mertebeden birinci ve ikinci tür Hankel Fonksiyonlarıdır. $H_n^{(1)}$ giden dalgaları, $H_n^{(2)}$ gelen dalgaları ifade eder. Sommerfeld Radyasyon koşulu gereği, sonsuzdan dalgalar yansımaz. Bu yüzden (7) çözümünden $H_n^{(2)}$ 'li terimler atılır ve çözüm aşağıdaki forma gelir:

$$u_s(r, \theta) = \sum_{n=-N}^N A_{u,n} H_n^{(1)}(k_u r) e^{in\theta} \quad (8)$$

Burada $A_{u,n}$ 'ler bilinmeyen karmaşık sabitlerdir ve değerleri sınır koşullarından elde edilecektir. y eksenini ile saat yönünde γ açısı yapacak şekilde gelen birim genlikte harmonik SH dalgaları, zamana bağlı kısmı atılarak aşağıdaki formda ifade edilebilir [8]:

$$u_g(r, \theta) = \sum_{n=-N}^N e^{in\gamma} J_n(k_u r) e^{in\theta} \quad (9)$$

Çatlak doğrultusu ile saat yönünde α açısı yapan SH dalgaları ise aşağıdaki gibi olacaktır:

$$u_g(r, \theta) = \sum_{n=-N}^N e^{in(\alpha+\pi/2)} J_n(k_u r) e^{in\theta} \quad (10)$$

Burada da J_n n 'inci mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonudur. Tam uzay ortamındaki toplam yer değiştirme potansiyeli, tünelden saçılan dalgalar ve gelen SH dalgalarının toplamı olacaktır:

$$u_u(r, \theta) = u_s(r, \theta) + u_g(r, \theta) \quad (11)$$

2.2. Boru ortamı için çözüm

Boru ortamında Bessel fonksiyonlarının fraksiyonları kullanılarak (3) denklemini sağlayan aşağıdaki çözüm önerilebilir:

$$u_b(r, \theta) = \sum_{n=0}^{2N} A_{b,n} H_{n/2}^{(1)}(k_b r) \cos(n\theta/2) + \sum_{n=0}^{2N} B_{b,n} H_{n/2}^{(2)}(k_b r) \cos(n\theta/2) \quad (12)$$

2.3. Sınır koşulları ve bilinmeyen sabitlerin hesaplanması

Problemde aşağıda gösterilen sınır koşullarının sağlanması gereklidir:

Boru ve tam uzay ara kesitinde kayma gerilmesi ve yer değiştirmelerin sürekliliği:

$$\mu_b \frac{\partial}{\partial r} u_b(r = a_2, \theta) = \mu_u \frac{\partial}{\partial r} u_u(r = a_2, \theta) \quad (13)$$

$$u_b(r = a_2, \theta) = u_u(r = a_2, \theta) \quad (14)$$

Gerilmemiş boru iç yüzeyi:

$$\mu_b \frac{\partial}{\partial r} u_b(r = a_1, \theta) = 0 \quad (15)$$

Gerilmemiş çatlak yüzeyleri:

$$\mu_b \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u_b(r, \theta = 0) = 0 \quad (16)$$

$$\mu_b \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u_b(r, \theta = 2\pi) = 0 \quad (17)$$

(12) ifadesindeki u_b yer değiştirme fonksiyonu (16) ve (17) koşullarını doğrudan sağlar. (12) ifadesi (15)'de yerine yazılırsa:

$$\sum_{n=0}^{2N} \left\{ A_{b,n} \frac{k}{2} \left(H_{n/2-1}^{(1)}(k_b a_1) - H_{n/2+1}^{(1)}(k_b a_1) \right) + B_{b,n} \frac{k}{2} \left(H_{n/2-1}^{(2)}(k_b a_1) - H_{n/2+1}^{(2)}(k_b a_1) \right) \right\} \times \cos(n\theta/2) = 0 \quad (18)$$

Periyodiklik koşulundan:

$$A_{b,n} \left(H_{n/2-1}^{(1)}(k_b a_1) - H_{n/2+1}^{(1)}(k_b a_1) \right) + B_{b,n} \left(H_{n/2-1}^{(2)}(k_b a_1) - H_{n/2+1}^{(2)}(k_b a_1) \right) = 0 \quad (19)$$

$$B_{b,n} = A_{b,n} \frac{\left(H_{n/2+1}^{(1)}(k_b a_1) - H_{n/2-1}^{(1)}(k_b a_1) \right)}{\left(H_{n/2-1}^{(2)}(k_b a_1) - H_{n/2+1}^{(2)}(k_b a_1) \right)} \quad (20)$$

$B_{b,n}$ katsayılarının $A_{b,n}$ katsayıları cinsinden elde edilmesi ile toplam 3 takım olan bilinmeyen hesaplanmayan 2 takım kalmıştır. Bu iki takım bilinmeyen, $A_{u,n}$ ve $A_{b,n}$, (13) ve (14) sınır koşullarından hesaplanacaktır. Yer değiştirme fonksiyonları (8) ve (12) farklı formlarda olduğu için, $A_{u,n}$

ve $A_{b,n}$ 'nin analitik olarak hesabı çok zordur. Bu yüzden (13) ve (14) sınır koşulları En Küçük Kareler Yöntemi ile yaklaşık olarak sağlatılacaktır. Sırasıyla (13) ve (14) koşullarında, boru ve tam uzaydaki gerilme ve yer değiştirme farklarının karesini gösteren hata fonksiyonları tanımlanırsa:

$$\Pi_\tau(\theta) = \left(\mu_b \frac{\partial u_b(r = a_2, \theta)}{\partial r} - \mu_u \frac{\partial u_u(r = a_2, \theta)}{\partial r} \right)^2 \quad (21)$$

$$\Pi_u(\theta) = (u_b(r = a_2, \theta) - u_u(r = a_2, \theta))^2 \quad (22)$$

Bu hata fonksiyonlarının toplamı aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\Pi_T(\theta) = \Pi_\tau(\theta) + \Pi_u(\theta) \quad (23)$$

Arakesitte M farklı açıda toplam hata fonksiyonunu sıfır yapacak olan $A_{u,n}$ ve $A_{b,n}$ aşağıdaki gösterilen şekilde bulunur:

$$\frac{\partial}{\partial A_{b,n}} \sum_{m=1}^M \Pi_T \left(\theta = -\frac{\pi}{M} + m \frac{2\pi}{M} \right) = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial A_{u,n}} \sum_{m=1}^M \Pi_T \left(\theta = -\frac{\pi}{M} + m \frac{2\pi}{M} \right) = 0 \quad (25)$$

(24) ve (25) denklemleri her n için çözüldüğünde $A_{u,n}$ ve $A_{b,n}$ hesaplanır.

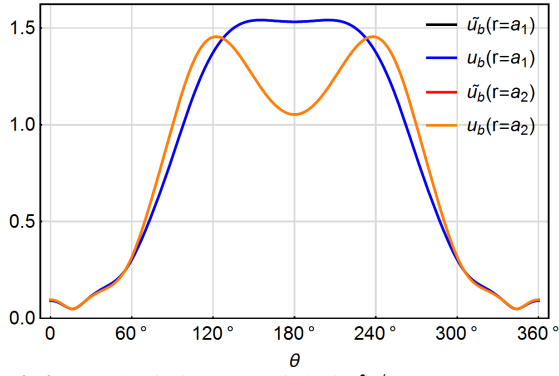
3. Sayısal Sonuçlar

Sayısal sonuçlar kısmında, normalize edilmiş problem değişkenlerinin çeşitli değerleri için yer değiştirmeler ve gerilmelere ait grafikler verilmiştir. Borudaki malzeme katsayıları, tam uzaydaki malzeme katsayıları ile normalize edilmiştir. Uzunluk boyutundaki parametreler de boru iç yarıçapına oranı ile ifade edilmiştir. Gelen SH dalgaları da α açısı ve dalga boyunun (λ) boru iç yarıçapına oranı ile ifade edilmiştir.

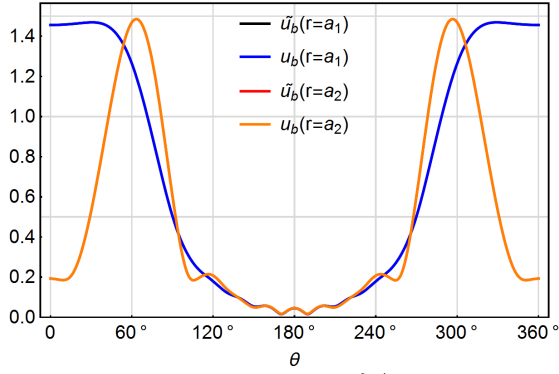
$$\lambda = 2\pi/k_s \quad (26)$$

Sayısal hesapların tamamında, yeterli yakınsaklık ve hesap süreleri temel alınarak $M = 4N + 8$ ve $N = 80$ seçilmiştir. Sayısal sonuçlarının doğruluğunu test etmek amacıyla, α açısının 0 ve π olduğu durumlar için yer değiştirme ve gerilme grafikleri, tam uzayda gömülü çatlak içermeyen boru probleminin kesin çözümü ile kıyaslanmıştır. Gelen SH dalgaları, çatlak ile aynı doğrultuda olduğunda, yer değiştirmeler çatlak doğrultusuna göre simetrik olmalıdır. Yani çatlakın her iki yüzü beraber hareket edecektir. Bu durumda çatlakın yer değiştirme ve gerilmelere bir etkisi kalmayacak ve çözümler çatlak bulundurmeyen boru ile aynı olacaktır. Yapılan bütün hesaplamalarda, problemin çeşitli değişkenleri için, α 'nın 0 ve π olması durumunda sonuçlar tam olarak örtüşmüştür. Şekil 2 ve 3'te bunlardan ikisine ait grafikler verilmiş, çatlaksız boru problemine ait kesin sonuçlar tilda (\sim) ile gösterilmiştir (kullanılan çözüm yöntemi ile elde edilen çözümler ile kesin çözümler tam olarak üst üste düştüğü için figürlerde iki eğri varmış gibi görünmektedir).

Şekil 4 ve 5'te, α 'nın 0 ya da π olmadığı durumlarda, kullanılan yaklaşık yöntemle boru ile tam uzay arasındaki sınır

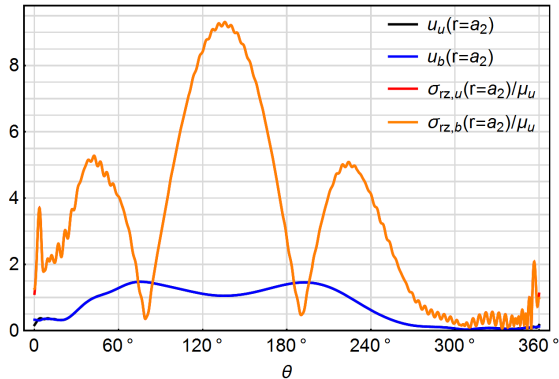


Şekil 2. Yer değiştirme genlikleri ($\lambda/a_1 = 1$ $\alpha = 0$ $a_2/a_1 = 1.2$ $\mu_b/\mu_u = 2$ $\beta_b/\beta_u = 1.5$ için)



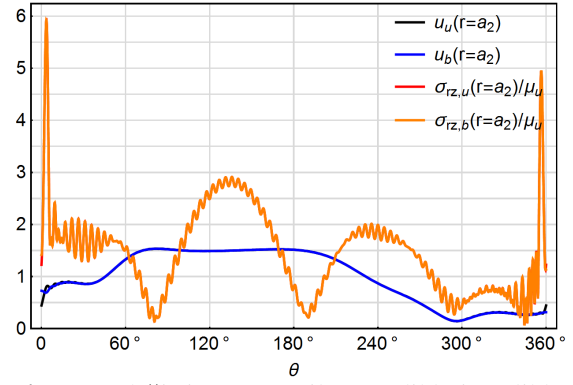
Şekil 3. Yer değiştirme genlikleri ($\lambda/a_1 = 0.5$ $\alpha = \pi$ $a_2/a_1 = 1.2$ $\mu_b/\mu_u = 2$ $\beta_b/\beta_u = 1.5$ için)

koşullarının ne ölçüde sağlandığı görülmektedir (burada da kullanılan çözüm yöntemi ile elde edilen çözümler ile kesin çözümler tam olarak üst üste düştüğü için figürlerde iki eğri varmış gibi görünmektedir).



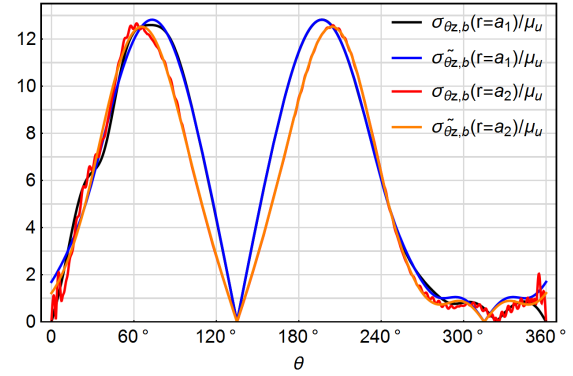
Şekil 4. Yer değiştirme ve gerilme genlikleri genlikleri ($\lambda/a_1 = 1$ $\alpha = \pi/4$ $a_2/a_1 = 1.2$ $\mu_b/\mu_u = 2$ $\beta_b/\beta_u = 1.5$ için)

Şekil 6,7,8 ve 9'da boru iç de dış yüzeyindeki $\sigma_{\theta z}$ kayma gerilmeleri, çatlaksız probleme ait kayma gerilmeleri (tilda (\sim) ile gösterilmiştir) ile kıyaslanmıştır. Gelen dalgaların dalga boyu küçüldüğünde, gerilmelerin genel olarak yükseldiği görülmektedir. Şekil 7 ve 9'da pik gerilmeler, çatlak olmayan duruma göre çok daha yüksektir. Şekil 6 ve 8'de ise pik gerilmelerdeki fark çok daha azdır. Ayrıca, gerilmelerin boru iç yüzeyinde düzgün dağılırken, dış

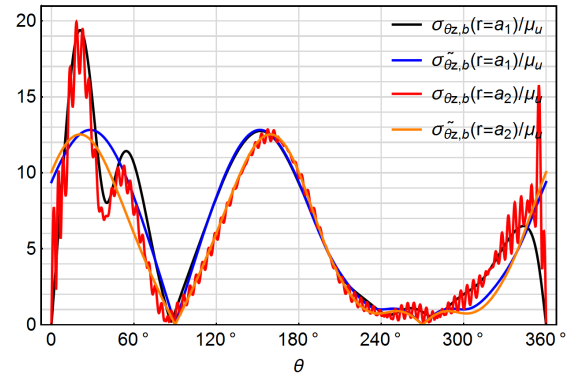


Şekil 5. Yer değiştirme ve gerilme genlikleri genlikleri ($\lambda/a_1 = 2$ $\alpha = \pi/4$ $a_2/a_1 = 1.2$ $\mu_b/\mu_u = 2$ $\beta_b/\beta_u = 1.5$ için)

yüzeyinde son derece değişken olduğu gözlemlenmiştir.



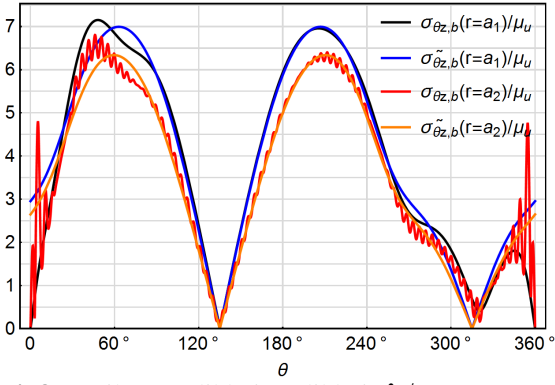
Şekil 6. Gerilme genlikleri genlikleri ($\lambda/a_1 = 1$ $\alpha = \pi/4$ $a_2/a_1 = 1.2$ $\mu_b/\mu_u = 2$ $\beta_b/\beta_u = 1.5$ için)



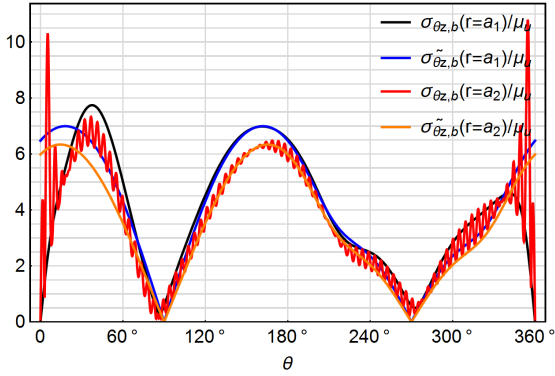
Şekil 7. Gerilme genlikleri genlikleri ($\lambda/a_1 = 1$ $\alpha = \pi/2$ $a_2/a_1 = 1.2$ $\mu_b/\mu_u = 2$ $\beta_b/\beta_u = 1.5$ için)

4. Tartışma ve Sonuç

Düzensiz bir çatlak içeren sonsuz ortamda gömülü bir silindirik boruda düzlem dışı SH dalgalarının etkisi incelenmiştir. Dalga fonksiyonu açılım tekniği ve en küçük kareler yöntemi kullanılarak yarı analitik bir çözüm yöntemi uygulanmıştır. Yapılan çözümler, çatlak içermeyen durum ile kıyaslanmış ve sonuçların oldukça uyumlu olduğu görülmüştür. Elde edilen diğer sonuçlarda da, çatlakın,



Şekil 8. Gerilme genlikleri genlikleri ($\lambda/a_1 = 2 \alpha = \pi/4$
 $a_2/a_1 = 1.2 \mu_b/\mu_u = 2 \beta_b/\beta_u = 1.5$ için)



Şekil 9. Gerilme genlikleri genlikleri ($\lambda/a_1 = 2 \alpha = \pi/2$
 $a_2/a_1 = 1.2 \mu_b/\mu_u = 2 \beta_b/\beta_u = 1.5$ için)

boruda gerilme ve yer değiştirme dağılımını etkilediği görülmüştür. Çatlağın, gerilmelere ait pik değerleri, problem parametrelerinin çeşitli değerleri için bazen önemsiz derecede, bazı durumlarda da çok ciddi ölçüde arttırdığı görülmüştür. Elde edilen sonuçlar, derinde gömülü ve çatlak içeren boru ya da tünel gibi yer altı yapılarının deprem dalgaları etkisi altındaki davranışı konusunda yol gösterici olabilir. Ayrıca uygulanan çözüm yöntemi, geometri olarak daha karmaşık bazı problemlere de uygulanabilir.

Kaynakça

- [1] Mow, C. C., Pao, Y. H. 1971. The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations.
- [2] Lee, V. W. 1977. On deformations near circular underground cavity subjected to incident plane SH waves. Proceedings of the Application of Computer Methods in Engineering Conference. Vol. 2. Los Angeles.
- [3] Lee, V. W., Trifunac, M. D. 1979. Response of Tunnels to Incident Sh-Waves. Journal of the Engineering Mechanics Division-Asce 105.4 : 643-659.
- [4] Balendra, T., Thambiratnam, D. P., Koh, C. G., Lee, S. L. 1984. Response of Tunnels to Incident Sh-Waves. Journal of the Engineering Mechanics Division-Asce 105.4: 643-659.
- [5] Lee, V. W., Luo Hao, L. J. 2004. Diffraction of anti-plane SH waves by a semi-circular cylindrical hill with

an inside concentric semi-circular tunnel. Earthquake Engineering and Engineering Vibration 3.2: 249-262.

- [6] Hayir, A., Bakirtas, I. 2004. A note on a plate having a circular cavity excited by plane harmonic SH waves. Journal of Sound and Vibration 271.1: 241-255
- [7] Liang, J., Luo, H., Lee, V. W. 2010. Diffraction of plane SH waves by a semi-circular cavity in half-space. Earthquake Science 23.1: 5-12.
- [8] Kara, H. F. 2016. A note on response of tunnels to incident SH-waves near hillsides. Soil Dynamics and Earthquake Engineering 90: 138-146
- [9] Graff, K. F. 2012. Wave motion in elastic solids.