Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Cilt 21, Sayı 3, 942-947, 2017

Süleyman Demirel University
Journal of Natural and Applied Sciences
Volume 21, Issue 3, 942-947, 2017

DOI: 10.19113/sdufbed.50072

Bazı Sillojistik ve Kardinalite Karşılaştırmalı Lojiklerin Türetimlerinin Cebirsel ve Etiketli Çizge Teorik Özellikleri Üzerine

Selçuk Topal[*1]

[1]Bitlis Eren Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 13000, Bitlis

(Alınış / Received: 27.09.2016, Kabul / Accepted: 23.03.2017, Online Yayınlanma / Published Online: 28.04.2017)

Anahtar Kelimeler
Lojik,
Doğal dillerin lojiği,
Etiketli yönlü çizgeler,
Bağıntısal kapanış,
Sillojizm,
Kardinalite karşılaştırması

Özet: Bu makale, *All, Some, No, More* ve *At Least* lojiklerinin türetimlerinin cebirsel özelliklerini kullanarak bu lojiklerin etiketli yönlü çizge temsillerini sunar. *All, Some* ve *No* lojikleri Aristo sillojizmlerinden gelmektedir. Sillojizmler p ve q çoğul isimler olmak üzere *All p are q*, *Some p are q*, *No p are q* cümle formlarını içerir. *At least* and *More* lojikleri p ve q çoğul isimler olmak üzere sırasıyla "*En az q kadar p vardır*" ve "*q dan daha fazla p vardır*" formlarındadırlar. Özellikle, *At least* ve *More* lojiklerin dilleri birinci mertebe dilde ifade edilemez olduğu için etiketli yönlü çizge temsilleri önemli bir konumdadır.

On Properties of Algebraic and Labeled Graph Theoretical of Derivations of Some Logics of Syllogistic and Cardinality Comparisons

Keywords
Logic,
Logic of natural languages,
Labeled digraphs,
Relational closure,
Syllogism,
Cardinality comparison

Abstract: This paper presents labeled digraph representations of logics of *All, Some, No, More* and *At Least* by using algebraic properties of derivations of the logics. The logics of *All, Some* and *No* come from the Aristotalian syllogisms. The syllogisms contain sentence forms of *All p are q*, *Some p are q*, *No p are q* where p and q are plural nouns. The logics of *At least* and *More* have respectively the form of "*There are at least as many p as q*" and "*There are more p than q*" where p and q are plural nouns. Especially, labeled digraph representations of logics of *At least* and *More* are a crucial position since languages of the logics are not expressible in first order language.

1. Giriş ve Ön Tanımlar

All men are mortal (Tüm insanlar ölümlüdür)
All Greeks are men (Tüm Yunanlılar insandır)

Therefore, all Greeks are mortal. (Bu nedenle, tüm Yunanlılar ölümlüdür.)

Miller'in tanımı ile "iki öncülden, tümdengelimsel akıl yürütme yoluyla bir hüküm türetilmesine ***sillojizm***" denir [1]. Klasik sillojizm kavramı hakkında yukarıdaki örnekden hareketle açıklayıcı bilgiler verelim. Öncelikle, $Therefore$ dan sonraki cümle bir ***hüküm*** cümlesidir. Burada *All men are mortal* ve *All Greeks are men* birer ***öncül*** ve *All Greeks are mortal* cümlesine bir ***hüküm*** denir. *Greeks, mortal* ve *men* kelimelerine birer ***terim*** denir. Hüküm kısmında yer almayan fakat her iki öncülde de yer alan *men* kelimesine ***orta terim***, hüküm cümelesinin öznesi olan Greeks kelimesine ***küçük terim***, hüküm cümlesinin yüklemi olan *mortal* kelimesine ***büyük terim*** denir. Büyük terimin yer aldığı öncül cümlesine ***büyük öncül*** ve küçük terimin yer aldığı öncül cümlesine ***küçük öncül*** denir. Bir öncül ya da hüküm ***All subject(özne) are predicate(yüklem)*** formunda ise ***A tipidir***. Örnek verdiğimiz sillojizm ***AAA*** durumundadır [2] ve bu türde yapılan kıyaslamaya kategorik kıyaslama adı verilir.
Diğer taraftan, modern sillojizm anlayışında öncül olmak zorunda değildir ve de ikiden fazla öncül de olabilir. Kısım 1.1 de, (1) numaralı örnekde görülebileceği gibi bir öncüle gerek duyulmaksızın türetim yapılmıştır. Diğer bir ifade ile modern lojik içindeki aksiyom (belit) kavramına denk gelmektedir. (2) numaralı örnek üç öncülden oluşan bir türetim örneğidir.
Modern anlamda sillojizmin en yeni örnekleri [3] *At Least* ve *More* gibi kümelerin eleman sayılarını karşılaştıran lojik türleridir. Bu niceleyicileri içeren lojikler birinci mertebe dilde ifade edilemez ve daha yüksek mertebeden dillere ihtiyaç vardır. Bu yönü ile de kardinalite kıyaslaması yapılan dillerin türetim ve çizge, dolayısıyla algoritmik özellikleri ve veri yapılarını keşfetmek önem arz etmektedir.

Tanım 1.1. Bir R bağıntısının bir bağıntı (yansıyan, simetrik, geçişken gibi) kapanışı, R bağınıtısını kapsayan en küçük (yansıyan, simetrik, geçişken gibi) bağıntıdır[4].

Tanım 1.2. Bir G ***çizgesi*** ya da bir ***basit çizge***, bir V tepeler kümesi ve V nin 2-li alt kümelerinden oluşan E ayrıt-

* *İlgili yazar: s.topal@beu.edu.tr*

lar kümesinden oluşan bir $G = (V,E)$ sıralı ikilisidir [5].

Tanım 1.3. Bir G ***yönlü çizge***, V nin sıralı 2-li alt kümelerinden oluşan E ayrıtlar kümesini içeren bir $G = (V,E)$ sıralı ikilisidir [6].

Tanım 1.4. [7] Bir ***etiketli yönlü çizge*** aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $G = \langle V, r_V, r_E \rangle$ üçlüsüdür:

1. Tepelerin sonlu bir V kümesi,
2. v_i tepesi ve l etiketine sahip, (v_i,l) ikililerinin kümesi olan bir $r_V \subseteq V \times L_V$ bağıntısı,
3. Bir $r_E \subseteq V \times V \times L_E$ bağıntısı (v_i,v_j,l), (v_i,v_j) ikilileri ve l etiketine sahip üçlülerin bir kümesidir.

1.1. *All* Niceleyicili Lojik

Tablo 1. *All* lojiğinin kuralları

$$\frac{}{\forall(p,p)}\ (Axiom) \qquad \frac{\forall(p,q)\quad \forall(q,n)}{\forall(p,n)}\ (B)$$

x, y, z, ... çoğul isimlerini içeren P değişkenler kümesi verilsin. *All* un cümleleri *All x are y* formundadır ve Türkçe olarak "*Tüm x ler y dir*" anlamındadır. $\forall(x,y)$ sintaksı *All x are y* ın kısaltılmış hali olarak kullanılacaktır. Semantikler, cümlelerin sonlu kümesi olan Γ ve sonlu evren M üzerinde inşa edilecektir. P den M nin alt kümelerine olan $[[\,]]$ *yorum fonksiyonu*, her $x \in P$ için, $[[x]] \subseteq M$ şeklinde tanımlanır. Bir $\mathscr{M} = (M,[[\,]])$ modeli

$$\text{“}\mathscr{M} \models \forall(x,y) \ :\Leftrightarrow\ |[[x]]| \subseteq |[[y]]|,\ \mathscr{M} \text{ de doğrudur”}$$

doğruluk özelliğine sahip olacaktır.
All lojiğinin türetimlerini anlaşılır kılmak için aşağıdaki (1) ve (2) numaralı türetimler incelenebilir. (1) numaralı örnek *Axiom* kuralı için bir örnektir. (2) numaralı örnek *B* kuralı için bir örnektir.

―――――――――――――――――――――――――― (1)
Tüm çiçekler çiçektir (All flowers are flowers).

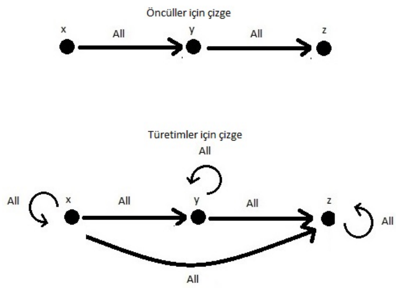
Tüm Isparta gülleri güldür (All roses of Isparta are roses).
Tüm güller çiçektir (All roses are flowers).
Tüm çiçekler bitkidir (All flowers are plants).
―――――――――――――――――――――――――― (2)
Bu nedenle, tüm Isparta gülleri bitkidir (Therefore, all roses of Isparta are plants).

1.1.1. Cebirsel Gözlemler

Moss [8] tarafından oluşturulan *All* lojiğinde, verilen bir Γ kümesinden türetilen bir $\forall(x,y)$ cümlesi $x \leq y$ ile temsil edilmiştir. Farz edelim ki, $x \leq y$ ve $y \leq z$, bir Γ dan türetilebilir olsun. Bu taktirde $x \leq x$, $y \leq y$ ve $z \leq z$ ifadeleri *Axiom* kuralı kullanılırak türetilirler. Öte yandan, $x \leq y$ ve $y \leq z$ ve de B kuralı kullanılarak $x \leq z$ türetilir. Γ cümleler kümesi içindeki değişkenlerin kümesi P olmak üzere, $x \leq y$ ifadesini $(x,y) \in P \times P$ olarak düşünelim. Böylece Γ dan elde edilen türetimlerin $P \times P$ nin *yansıyan-geçişken kapanışı* olduğu görülür.

1.1.2. Çizge Teorik Temsil

Şekil 1 de görüleceği üzere her bir $\forall(x,y)$ cümlesi $x \xrightarrow{All} y$ ile temsil edilmiştir. Dikkat edilirse, x ve y gibi iki nokta, noktaları birbiri ile ilişkilendiren ve isimlendirilmiş yön belirten bir kenar söz konusudur.



Şekil 1. *All* için bir çizge teorik temsil örneği

Şekil 1 den de yararlanarak *All* lojiğini Tanım 2.3 deki etiketli yönlü çizge olarak temsil edebiliriz. Burada elde edeceğimiz iki çizge söz konusudur. Birinci çizge Γ öncüller kümesi veya diğer bir ifade ile öncüllerin oluşturduğu cümleler kümesinden elde edilirken, ikinci çizge Γ dan türetilen cümlelerin oluşturduğu kümeden elde edilir.

Tanım 1.5. Bir Γ etiketli yönlü çizgesi $\langle V, r_V, r_E \rangle$ aşağıdaki özellikleri sağlayan üçlüdür:

1. Γ daki değişkenlerin (isimlerin) kümesi olan $P = V$ kümesi,
2. p_i tepesi ve $l = All$ etiketine sahip, (v_i, All) ikililerinin kümesi olan bir $r_P \subseteq P \times L_P$ bağıntısı,
3. Bir $r_E \subseteq P \times P \times L_P$ bağıntısı (p_i,p_j,l), (p_i,p_j) ikilileri ve *All* etiketine sahip üçlülerin bir kümesidir.

Buna göre Şekil 1 deki öncüller kümesi için etiketli yönlü çizge G: $P = \{x,y,z\}$ tepeler kümesi, *All* etiket olmak üzere (x,y,All), (y,z,All) den oluşur.
Benzer şekilde, Şekil 1 deki türetimler kümesi için etiketli yönlü çizge G_t: (x,x,All), (y,y,All), (z,z,All), (x,y,All), (y,z,All), (x,z,All) den oluşur.

1.2. *At Least* Niceleyicili Lojik

x, y, z, ... çoğul isimlerini içeren P değişkenler kümesi verilsin. *At Least* in cümleleri *There are at least as many x as y* formundadır ve Türkçe olarak "*En az y kadar x vardır*" anlamındadır. $\exists^{\geq}(x,y)$ sintaksı *There are at least as many x as y* ın kısaltılmış hali olarak kullanılacaktır. Semantikler, cümlelerin sonlu kümesi olan Γ ve sonlu evren M üzerinde inşa edilecektir. P den M nin alt kümelerine olan $[[\,]]$ *yorum fonksiyonu*, her $x \in P$ için, $[[x]] \subseteq M$ şeklinde tanımlanır. $[[x]]$ in kardinalitesi, $|[[x]]|$ ile gösterilir. Bir $\mathscr{M} = (M,[[\,]])$ modeli

$$\text{“}\mathscr{M} \models \exists^{\geq}(x,y) \ :\Leftrightarrow\ |[[x]]| \geq |[[y]]|,\ \mathscr{M} \text{ de doğrudur”}$$

doğruluk özelliğine sahip olacaktır.
At Least lojiğinin türetimlerini açıklığa kavuşturmak için aşağıdaki (3) ve (4) numaralı türetimler incelenebilir.

Tablo 2. *At Least* lojiğin kuralları

$$\frac{}{\exists^{\geq}(x,x)}\ (Axiom_C) \qquad \frac{\exists^{\geq}(x,y)\quad \exists^{\geq}(y,z)}{\exists^{\geq}(x,z)}\ (B_C)$$

(3) numaralı örnek $Axiom_C$ kuralı için bir örnektir. (4) numaralı örnek B_C kuralı için bir örnektir.

———————————————————-(3)

Bu nedenle, en az öğretmenler kadar öğretmen vardır (Therefore, there are at least as many persons as teachers).

En az öğretmenler kadar öğrenci vardır (There are at least as many students as teachers).
En az öğrenciler kadar insan vardır (There are at least as many persons as students).

———————————————————-(4)

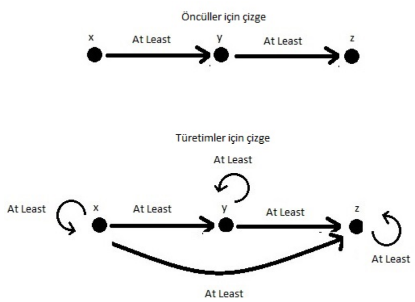
Bu nedenle, en az öğretmenler kadar insan vardır (Therefore, there are at least as many persons as teachers).

1.2.1. Cebirsel Gözlemler

Moss [8] tarafından oluşturulan *At Least* lojiğinde, verilen bir Γ kümesinden türetilen bir $\exists^{\geq}(x,y)$ cümlesi $x \leq_c y$ ile temsil edilmiştir. $x \leq_c y$ ve $y \leq_c z$, bir Γ dan türetilebilir olsun. Bu taktirde $x \leq_c x$, $y \leq_c y$ ve $z \leq_c z$ ifadeleri $Axiom_C$ kuralı uygulanarak türetilirler. Öte yandan, $x \leq_c y$ ve $y \leq_c z$ ve de B_C kuralı kullanarak $x \leq_c z$ türetilir. Γ cümleler kümesi içindeki değişkenlerin kümesi P olmak üzere, $x \leq y$ ifadesini $(x,y) \in P \times P$ olarak düşünelim. Böylece Γ dan elde edilen türetimlerin $P \times P$ nin *yansıyan-geçişken kapanışı* olduğu görülür.

1.2.2. Çizge Teorik Temsil

Şekil 2 de görüleceği üzere her bir $\exists^{\geq}(x,y)$ cümlesi $x \overset{At\ Least}{\rightarrow} y$ ile temsil edilmiştir. Dikkat edilirse, x ve y gibi iki nokta, noktaları birbiri ile ilişkilendiren ve isimlendirilmiş yön belirten bir kenar söz konusudur.



Şekil 2. *At Least* için bir çizge teorik temsil örneği

All lojiğinin çizge temsilinde yaptığımız gibi Şekil 2 den de yararlanarak *At Least* lojiğini Tanım 2.3 deki etiketli yönlü çizge olarak temsil edebiliriz.

Tanım 1.6. Bir Γ etiketli yönlü çizgesi $\langle V, r_V, r_E \rangle$ üçlüsüdür:

1. Γ daki değişkenlerin (isimlerin) kümesi olan $P = V$ kümesi,
2. p_i tepesi ve $l = At\ Least$ etiketine sahip, $(v_i, At\ Least)$ ikililerinin kümesi olan bir $r_P \subseteq P \times L_P$ bağıntısı,
3. Bir $r_E \subseteq P \times P \times L_P$ bağıntısı $(p_i, p_j, At\ Least)$, (p_i, p_j) ikilileri ve *At Least* etiketine sahip üçlülerin bir kümesidir.

Buna göre Şekil 2 deki öncüller kümesi için etiketli yönlü çizge G: $P = \{x,y,z\}$ tepeler kümesi, *At Least* etiket olmak üzere $(x,y,At\ Least)$, $(y,z,At\ Least)$ den oluşur.
Benzer şekilde, Şekil 2 deki türetimler kümesi için etiketli yönlü çizge G_t: $(x,x,At\ Least)$, $(y,y,At\ Least)$, $(z,z,At\ Least)$, $(x,y,At\ Least)$, $(y,z,At\ Least)$, $(x,z,At\ Least)$ den oluşur.

1.3. *Some* Niceleyicili Lojik

x, y, ... çoğul isimlerini içeren P değişkenler kümesi verilsin. *Some* ın cümleleri *Some x are y* formundadır ve Türkçe olarak "*Bazı x ler y dir*" anlamındadır. $\exists(x,y)$ sintaksı *Some x are y* ın kısaltılmış hali olarak kullanılacaktır. Semantikler, cümlelerin sonlu kümesi olan Γ ve sonlu evren M üzerinde inşa edilecektir. P den M nin alt kümelerine olan $[[\,]]$ *yorum fonksiyonu*, her $x \in P$ için, $[[x]] \subseteq M$ şeklinde tanımlanır. Bir $\mathscr{M} = (M, [[\,]])$ modeli

"$\mathscr{M} \models \exists(x,y) \;:\Leftrightarrow\; [[x]] \cap [[y]] \neq \emptyset$, $\mathscr{M}$ de doğrudur"

doğruluk özelliğine sahip olacaktır.

Tablo 3. *Some* lojiğinin kuralları

$$\frac{\exists(x,y)}{\exists(x,x)}\ (Exist) \qquad \frac{\exists(x,y)}{\exists(y,x)}\ (Con)$$

Some lojiğinin türetimlerinin anlaşılırlığı adına aşağıdaki (5), (6) ve (7) numaralı türetimler incelenebilir. (5) numaralı örnek *Con* kuralı için bir örnektir. (6) ve (7) numaralı örnekler *Exist* kuralı için birer örnektirler.

Bazı öğrenciler öğretmendir (Some students are teachers).

——————————————————— (5)

Bu nedenle, bazı öğretmenler öğrencidir (Therefore, some teachers are students).

Bazı öğrenciler öğretmendir (Some students are teachers).

——————————————————— (6)

Bu nedenle, bazı öğrenciler vardır (Therefore, some students are students).

Bazı öğrenciler öğretmendir (Some students are teachers).

——————————————————— (7)

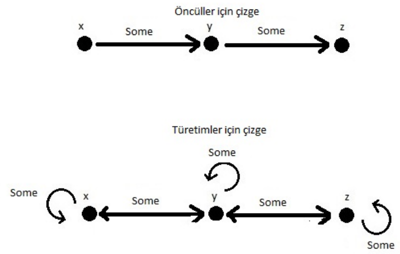
Bu nedenle, bazı öğretmenler vardır (Therefore, some teachers are teachers).

1.3.1. Cebirsel Gözlemler

Some lojiğinde, verilen bir Γ kümesinden türetilen bir $\exists(x,y)$ cümlesi $x\star_s y$ ile temsil edilebilir. Cümlelerin bir kümesi olan Γ dan $x\star_s y$ ve $y\star_s z$ cümeleleri türetilebilir olsunlar. Bu taktirde $x\star_s x$, $y\star_s y$ ve $z\star_s z$ ifadeleri *Exist* kuralı kullanılırak türetilirler. Öte yandan, $y\star_s x$ ve $z\star_s y$ ifadeleri *Con* kuralı kullanılarak türetilir. Γ cümleler kümesi içindeki değişkenlerin kümesi P olmak üzere, $x\star_s y$ ifadesini $(x,y)\in P\times P$ olarak düşünelim. Böylece Γ dan elde edilen türetimlerin $P\times P$ nin *yansıyan-simetrik kapanışı* olduğu görülür.

1.3.2. Çizge Teorik Temsil

Şekil 3 de görüleceği üzere her bir $\exists(x,y)$ cümlesi $x \overset{Some}{\rightarrow} y$ ile temsil edilmiştir. Dikkat edilirse, x ve y gibi iki nokta, noktaları birbiri ile ilişkilendiren ve isimlendirilmiş yön belirten bir kenar söz konusudur.



Şekil 3. *Some* için bir çizge teorik temsil örneği

Şekil 3 den de yararlanarak *Some* lojiğini Tanım 2.3 deki etiketli yönlü çizge olarak temsil edebiliriz.

Tanım 1.7. Bir Γ etiketli yönlü çizgesi $\langle V, r_V, r_E\rangle$ üçlüsüdür:

1. Γ daki değişkenlerin (isimlerin) kümesi olan $P=V$ kümesi,
2. p_i tepesi ve $l = Some$ etiketine sahip, $(v_i, Some)$ ikililerinin kümesi olan bir $r_P\subseteq P\times L_P$ bağıntısı,
3. Bir $r_E\subseteq P\times P\times L_P$ bağıntısı $(p_i,p_j,Some)$, (p_i,p_j) ikilileri ve *Some* etiketine sahip üçlülerin bir kümesidir.

Buna göre Şekil 3 deki öncüller kümesi için etiketli yönlü çizge G: $P=\{x,y,z\}$ tepeler kümesi, *Some* etiket olmak üzere $(x,y,Some)$, $(y,z,Some)$ den oluşur.
Benzer şekilde, Şekil 3 deki türetimler kümesi için etiketli yönlü çizge G_t: $(x,x,Some)$, $(y,y,Some)$, $(z,z,Some)$, $(x,y,Some)$, $(y,z,Some)$, $(y,x,Some)$, $(z,y,Some)$ den oluşur.

1.4. *No* Niceleyicili Lojik

x, y, ... çoğul isimlerini içeren P değişkenler kümesi verilsin. *No* nun cümleleri *No x are y* formundadır ve Türkçe olarak "*Hiçbir x, y değildir*" anlamındadır. $N(x,y)$ sintaksı *No x are y* ın kısaltılmış hali olarak kullanılacaktır. Semantikler, cümlelerin sonlu kümesi olan Γ ve sonlu evren M üzerinde inşa edilecektir. P den M nin alt kümelerine olan $[[\,]]$ *yorum fonksiyonu*, her $x\in P$ için, $[[x]]\subseteq M$ şeklinde tanımlanır. Bir $\mathscr{M}=(M,[[\,]])$ modeli

"$\mathscr{M}\models N(x,y)\;:\Leftrightarrow\;[[x]]\cap[[y]]=\emptyset$, $\mathscr{M}$ de doğrudur"

doğruluk özelliğine sahip olacaktır.

Tablo 4. *No* lojiğinin kuralları

$$\frac{N(p,p)}{N(p,q)}\ (Nexsist) \qquad \frac{N(p,q)}{N(q,p)}\ (CoN)$$

Tablo 4 deki *Nexsist* ve *CoN* kurallarının daha rahat anlaşılması için (8) ve (9) numaralı türetimler incelenebilir. (8) numaralı türetim biraz kafa karşıtırıcı görülebilir. Bu anlamsal karışıklık lojiğin semantiğinin kümesel olmasından ve model teorik yaklaşımdan kaynaklanmaktadır. Bu anlamda iki kümenin kesişimi söz konusu olduğu için (8) de model altında öğrenciler kümesi bir boş küme olur. Boş bir kümenin tüm kümelerle kesişimi de boş küme olacaktır. Bu nedenle "hiçbir öğrenci, öğrenci değildir" kullanmak yerine "hiç öğrenci yoktur" kullanmak daha anlamlı olacaktır.

Hiç öğrenci yoktur (No students are students).
――――――――――――――――――――― (8)
Bu nedenle, hiçbir öğrenci diğer herhangi bir şey değildir (Therefore, no student is anything else).

Hiçbir bitki hayvan değildir (No plants are animals).
――――――――――――――――――――― (9)
Bu nedenle, hiçbir hayvan bitki değildir (Therefore, no animals are plants).

1.4.1. Cebirsel Gözlemler

No lojiğinde, verilen bir Γ kümesinden türetilen bir $N(x,y)$ cümlesi $x\star_n y$ ile temsil edilebilir. $x\star_n y$ ve $y\star_n z$ nin bir Γ dan türetilebilir olduğunu kabul edelim. $y\star_s x$ ve $z\star_s y$ ifadeleri *Con* kuralı kullanılarak türetilir. Γ cümleler kümesi içindeki değişkenlerin kümesi P olmak üzere, $x\star_s y$ ifadesini $(x,y)\in P\times P$ olarak düşünelim. Böylece Γ dan elde edilen türetimlerin $P\times P$ nin *simetrik kapanışı* olduğu görülür.

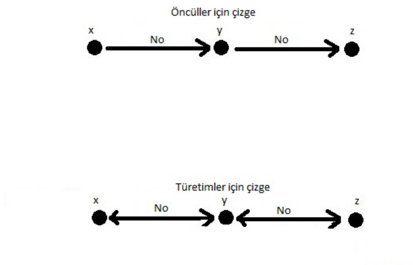
1.4.2. Çizge Teorik Temsil

Şekil 4 de ve Şekil 5 görüleceği üzere her bir $N(x,y)$ cümlesi $x \overset{No}{\rightarrow} y$ ile temsil edilmiştir. x ve y gibi iki nokta, noktaları birbiri ile ilişkilendiren ve isimlendirilmiş yön belirten bir kenar söz konusudur.
Şekil 4 de ve Şekil 5 den de yararlanarak *No* lojiğini Tanım 2.3 deki etiketli yönlü çizge olarak temsil edebiliriz.

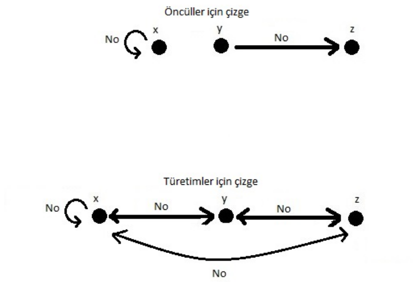
Tanım 1.8. Bir Γ etiketli yönlü çizgesi $\langle V, r_V, r_E\rangle$ aşağıdaki koşulları sağlayan üçlüdür:

1. Γ daki değişkenlerin (isimlerin) kümesi olan $P=V$ kümesi,

2. p_i tepesi ve $l = No$ etiketine sahip, (v_i, No) ikililerinin kümesi olan bir $r_P \subseteq P \times L_P$ bağıntısı,
3. Bir $r_E \subseteq P \times P \times L_P$ bağıntısı (p_i, p_j, No), (p_i, p_j) ikilileri ve No etiketine sahip üçlülerin bir kümesidir.



Şekil 4. *No* için bir çizge teorik temsil örneği



Şekil 5. *No* için bir çizge teorik temsil örneği

Şekil 4 deki öncüller kümesi için etiketli yönlü çizge G: $P = \{x, y, z\}$ tepeler kümesi, No etiket olmak üzere (x, y, No), (y, z, No) den oluşur.
Benzer şekilde, Şekil 4 deki türetimler kümesi için etiketli yönlü çizge G_t: (x, y, No), (y, z, No), (y, x, No), (z, y, No) den oluşur.
Şekil 5 deki öncüller kümesi için etiketli yönlü çizge G: $P = \{x, y, z\}$ tepeler kümesi, No etiket olmak üzere (x, x, No), (y, z, No) den oluşur.
Yine benzer şekilde, Şekil 5 deki türetimler kümesi için etiketli yönlü çizge G_t: (x, x, No), (x, y, No), (x, z, No), (y, x, No), (z, x, No), (y, z, No), (z, y, No) den oluşur.

1.5. *More* Niceleyicili Lojik

x, y, z, ... çoğul isimlerini içeren P değişkenler kümesi verilsin. *At Least* in cümleleri *There are more x than y* formundadır ve Türkçe olarak " *y den daha fazla x vardır*" anlamındadır. $\exists^{>}(x, y)$ sintaksı *There are more x than y* ın kısaltılmış hali olarak kullanılacaktır. Semantikler, cümlelerin sonlu kümesi olan Γ ve sonlu evren M üzerinde inşa edilecektir. P den M nin alt kümelerine olan $[[\,]]$ *yorum fonksiyonu*, her $x \in P$ için, $[[x]] \subseteq M$ şeklinde tanımlanır. $[[x]]$ in kardinalitesi, $|\,[[x]]\,|$ ile gösterilir. Bir $\mathscr{M} = (M, [[\,]])$ modeli

"$\mathscr{M} \models \exists^{>}(x, y) \;:\Leftrightarrow\; |[[x]]| > |[[y]]|$, $\mathscr{M}$ de doğrudur"

doğruluk özelliğine sahip olacaktır.

Tablo 5. *More* lojiğinin kuralları

$$\frac{\exists^{>}(x,x)}{\phi}\ (ExFalso) \qquad \frac{\exists^{>}(x,y) \quad \exists^{>}(y,z)}{\exists^{>}(x,z)}\ (B_M)$$

Uyarı 1.9. Tablo 5 incelendiğinde $ExFalso$ kuralı gereği bir Γ cümleler kümesi tutarlı ise ne $\exists^{>}(x, x)$ tipinde bir ifadeyi içerir ne de bu bu tipte bir ifade bu kümeden türetilebilirdir. Bu kural çelişik durumu anlatır. Çünkü bir kümenin elemanın sayısının aynı kümenin eleman sayısından fazla olması imkansızdır. Bu durumda Γ tutarsızdır denir. Bu durumda, lojik içerisindeki her cümle türetilebilirdir. ϕ simgesi bu nedenle kullanılmıştır.

Öğretmenlerden daha fazla öğrenci vardır (There are more students than teachers).
Öğrencilerden daha fazla insan vardır (There are more people more than students).
———————————————— (10)
Bu nedenle, öğretmenlerden daha fazla insan vardır (Therefore, there are more people than teachers).

Öğretmenlerden daha fazla öğretmen vardır (There are more students than teachers).
———————————————— (11)
Bu nedenle, herşey türetilebilirdir (Therefore, everything is derivable).

1.5.1. Cebirsel Gözlemler

Moss [3] tarafından oluşturulan *More* lojiğinde, verilen bir Γ kümesinden türetilen bir $\exists^{>}(x, y)$ cümlesi $x < y$ ile temsil edilmiştir. $x < y$ ve $y < z$ nin tutarlı bir Γ dan türetilebilir olduğunu farz edelim. $x < y$ ve $y < z$ den B_M kuralı kullanılarak $x < z$ türetilir. Γ tutarlı olduğu için $x < x$ türünde bir ifade asla türetilemez. Γ cümleler kümesi içindeki değişkenlerin kümesi P olmak üzere, $x \leq y$ ifadesini $(x, y) \in P \times P$ olarak düşünelim. Böylece Γ dan elde edilen türetimlerin $P \times P$ nin *yansımasız-geçişken kapanışı* olduğu görülür.

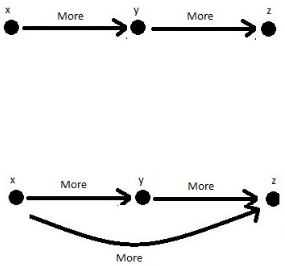
1.5.2. Çizge Teorik Temsil

Şekil 6 da görüleceği üzere her bir $\exists^{>}(x, y)$ cümlesi $x \overset{More}{\rightarrow} y$ ile temsil edilmiştir. Dikkat edilirse, x ve y gibi iki nokta, noktaları birbiri ile ilişkilendiren ve isimlendirilmiş yön belirten bir kenar söz konusudur.
Şekil 6 den de yararlanarak *More* lojiğini Tanım 2.3 deki etiketli yönlü çizge olarak temsil edebiliriz.

Tanım 1.10. Bir Γ etiketli yönlü çizgesi $\langle V, r_V, r_E \rangle$ aşağıdaki koşulları sağlayan üçlüdür:

1. Γ daki değişkenlerin (isimlerin) kümesi olan $P = V$ kümesi,
2. p_i tepesi ve $l = More$ etiketine sahip, $(v_i, More)$ ikililerinin kümesi olan bir $r_P \subseteq P \times L_P$ bağıntısı,

3. Bir $r_E \subseteq P \times P \times L_P$ bağıntısı $(p_i, p_j, More)$, (p_i, p_j) ikilileri ve *More* etiketine sahip üçlülerin bir kümesidir.



Şekil 6. *More* için bir çizge teorik temsil örneği

Buna göre Şekil 6 deki öncüller kümesi için etiketli yönlü çizge G: $P = \{x, y, z\}$ tepeler kümesi, *More* etiket olmak üzere $(x, y, More)$, $(y, z, More)$ den oluşur.
Benzer şekilde, Şekil 6 deki türetimler kümesi için etiketli yönlü çizge G_t: $(x, y, More)$, $(y, z, More)$, $(x, z, More)$ den oluşur.

2. Bulgular

All lojiğinin aksine *At Least* lojiğinin cümleleri birinci mertebe dilde ifade edilemez olmasına karşın, semantik anlamda *At Least* lojiği kardinalite (en az) ve *All* lojiği alt küme kıyaslaması yapması nedeni ile türetimleri aynı cebirsel yapıya sahiptirler. Diğer taraftan hiçbir kümenin eleman sayısı kendisinden az ya da fazla olamayacağı için *More* lojiği yansımasız özelliğe sahip olmuştur.
Tablo 6 da görülebileceği gibi *All, Some, No, More* ve *At Least* lojiklerinin hepsi farklı dillere ve cebirsel yapılara sahip olmasına rağmen etiketli yönlü çizge (EYÇ) ile temsil edilebilirlerdir.

Tablo 6. Özet Tablo

Lojik	Cebirsel Yapı	EYÇ
All	yansıyan-geçişken	uygun
At Least	yansıyan-geçişken	uygun
Some	yansımalı-simetrik	uygun
No	simetrik	uygun
More	yansımasız-geçişken	uygun

Teşekkür

Makalenin kalitesinin artırılmasına ve geliştirilmesine yönelik katkılarından ve yorumlarından dolayı hakemlere teşekkür ederim.

Kaynakça

[1] Miller, G. A. 1995. WordNet: a lexical database for English, Communications of the ACM, 38(11): 39-41s.

[2] Smith, R. 1989. Aristotle: Prior Analytics, translated with introduction notes and commentary, Indianapolis, Hackett, 265s.

[3] Moss, Lawrence S. 2016. Syllogistic Logic with Cardinality Comparisons. In: J. Michael Dunn on Information Based Logics. Springer International Publishing, 391-415s.

[4] Velleman D. J. 2006 How to Prove It: A Structured Approach, 2nd Edition, Cambridge University Press, England, 384s.

[5] Iyanaga, S., Kawada, Y. 1980. Encyclopedic Dictionary of Mathematics, MIT Press, Cambridge, MA, 1005s.

[6] Bang-Jensen, J., Gregory G. 2000. Digraphs, Theory: Algorithms and Applications, Springer Verlag, 798s.

[7] Champin, P. A., Solnon C. 2003. Measuring the Similarity of Labeled Graphs, Case-Based Reasoning Research and Development, K. Ashley and D. Bridge, Springer Berlin Heidelberg, 2689: 80-95s.

[8] Moss, Lawrence S. 2008. Completeness theorems for syllogistic fragments. Logics for linguistic structures, 29: 143-173s