KUAZİ OPTİĞİN DURGUN OLMAYAN DENKLEMİ İÇİN BİR OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

Gabil Yagub[1], Nigar Yıldırım Aksoy[1], Eray Aksoy[2]

[1]Kafkas Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi-36040/Kars

[2]Kafkas Üniversitesi, Susuz Meslek Yüksekokulu-36040/Kars

e-mail: gabilya@mail.ru

Abstract

In this paper, an optimal control problem for nonstationary quasi-optics equation that show the scattering of the light beam inhomogeneous mediums is considered. In this problem, controls are a refraction and absortion indicators of the scattered medium of the light beam. As a cost fuctional is used the Lions functional that is based on Dirichlet- Neumann operator. For the considered optimal control problem, the existence and uniqueness theorems are obtained. Frechet-differentiability of the cost functional is shown and its gradient is obtained. Finally, a necessary optimality condition in variational inequality form for the optimal control problem is given.

Keywords: Nonstationary quazi-optics equation, optimal control problem

Giriş

Kuazi optiğin durgun olmayan denklemi için optimal kontrol problemleri genellikle homojen olmayan ortamda ışık demetinin dağılımının incelendiği lineer olmayan optikte ortaya çıkar. Bu problemlerde kontrol fonksiyonları genellikle ışık dalgasının dağılma ortamının kırılma ve emilme göstergeleridir. Ancak, bazı durumlarda kontrol, dağılan dalganın başlangıç fazı da olabilir [1]. Kuazi optiğin durgun olmayan denklemi için optimal kontrol problemleri, daha önce [2-5] çalışmalarında incelenmiştir.

Bu çalışmada kuazi optiğin durgun olmayan denkleminin kompleks değerli katsayısı ile optimal kontrol problemi ele alınmıştır ki, burada kompleks katsayının reel kısmı, homojen ve lineer olmayan ortamın kırılma göstergesi, sanal kısmı ise emilme göstergesidir ve sadece uzay değişkenlerine bağımlıdır. Bu durumda kullanılan amaç fonksiyoneli, tüm bölge üzerinden integralle tanımlanan Lions fonksiyonelidir.

Söylemek gerekir ki, amaç (veya gözlem) fonksiyoneli olarak Lions fonksiyoneli, ilk kez J.L.Lions tarafından ısı geçırgenlik denklemi için bilinmeyen başlangıç fonksiyonunu belirlemek amacıyla ele alınan ters problemde kullanılmıştır [6]. Daha sonra Lions fonksiyoneli, matematiksel fiziğin cok boyutlu denklemlerinde katsayıların bulunması ile ilgili ters problemlerin varyasyonel konulmalarında ilk kez A.D. İskenderov‘ un çalışmalarında incelenmiştir [7]. Ayrıca, kuazi optiğin durgun denklemi veya durgun olmayan Schrödinger denklemi için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemleri [8,9] ve diger çalışmalarda ele alınmıştır.

Optimal Kontrol Probleminin Konulması

Farz edelim ki, $l>0, L>0, T>0$- verilen sayılar, $0\le x\le l$, $0\le t\le T$, $0\le z\le L$, $\Omega_{tz}=(0,l)\times(0,t)\times(0,z)$, $\Omega=\Omega_{TL}$, $\Omega_t=(0,l)\times(0,t)$, $\Omega_z=(0,l)\times(0,z)$, $Q=(0,T)\times(0,L)$. $C^k([0,T],B)$- Banach uzayı olup, $[0,T]$ aralığında tanımlı, değerlerini B Banach uzayından alan ve $k\ge 0$ kez sürekli türevlenebilir fonksiyonların uzayıdır. $L_p(\Omega)$ ise $p\ge 1$ dereceden integrallenebilir fonksiyonların Lebesgue uzayıdır; $W_p^{k,m}(\Omega_L), W_p^{k,m}(\Omega_T)$, $p\ge 1$, $k\ge 0$, $m\ge 0$ - Sobolev uzayları olup, tanımları [10] çalışmasında verilmiştir; $W_2^{0,1,1}(\Omega)$-Hilbert uzayı olup, elemanları ve onların $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial z}$ genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan $u=u(x,t,z)$ fonksiyonlarının Sobolev uzayıdır.Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdakı gibi tanımlanmaktadır:

$$(u_1,u_2)_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}=\int_\Omega\left(u_1\bar{u}_2+\frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t}+\frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial z}\right)dxdtdz,$$

$$\|u\|_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}=\sqrt{(u,u)_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}}<+\infty;$$

$W_2^{2,0,0}(\Omega)$- Hilbert uzayı olup, elemanları ve onların $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayına ait olan $u=u(x,t,z)$ fonksiyonlarının Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdakı gibi tanımlanmaktadır:

$$(u_1,u_2)_{W_2^{2,0,0}(\Omega)}=\int_\Omega\left(u_1\bar{u}_2+\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x^2}\right)dxdtdz,$$

$$\|u\|_{W_2^{2,0,0,}(\Omega)}=\sqrt{(u,u)_{W_2^{2,0,0}(\Omega)}};$$

$W_2^{2,1,1}(\Omega)\equiv W_2^{2,0,0}(\Omega)\cap W_2^{0,1,1}(\Omega)$; $\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayı $W_2^{2,1,1}(\Omega)$uzayının alt uzayıdır ve bu uzayın elemanları $x=0, x=l$ noktalarında sıfıra eşdeğerdir.

Bu çalışmada, $\overset{0}{\forall}$ sembolü bir miktarın “hemen hemen tüm değerleri” ni, c_j, $j=0,1,2,...$ ler ise değerlendirilen miktarlardan bağımsız sabitleri belirtir.

Şimdi aşağıdaki optimal kontrol problemini ele alalım. Yani,

$$J_\alpha(v) = \|\psi_1 - \psi_2\|^2_{L_2(\Omega)} + \alpha\|v - \omega\|^2_H \tag{1}$$

fonksiyonelinin

$$V = \left\{ v = (v_0, v_1),\ v_m \in L_2(0,l), |v_m(x)| \le b_m, m = 0,1, \overset{0}{\forall}\, x \in (0,l) \right\}$$

kümesi üzerinde

$$i\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + ia_0\frac{\partial \psi_k}{\partial z} - a_1\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} + a(x)\psi_k + v_0(x)\psi_k + iv_1(x)\psi_k = f_k(x,t,z), k = 1,2, (x,t,z) \in \Omega \tag{2}$$

$$\psi_k(x,0,z) = \varphi_{0k}(x,z), k = 1,2, (x,z) \in \Omega_L \tag{3}$$

$$\psi_k(x,t,0) = \varphi_{1k}(x,t), k = 1,2, (x,t) \in \Omega_T \tag{4}$$

$$\psi_1(0,t,z) = \psi_1(l,t,z) = 0,\ (t,z) \in Q \tag{5}$$

$$\frac{\partial \psi_2(0,t,z)}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2(l,t,z)}{\partial x} = 0,\ (t,z) \in Q \tag{6}$$

şartları altında minimumunun bulunması problemini göz önüne alalım. Burada $i = \sqrt{-1}$; $a_0 > 0, a_1 > 0, b_0 > 0, b_1 > 0, \alpha \ge 0$ verilen sayılar, $a(x)$

$$\mu_0 \le a(x) \le \mu_1, \overset{0}{\forall}\, x \in (0,l), \mu_0, \mu_1 = const > 0 \tag{7}$$

şartını sağlayan reel değerli ölçülebilir bir fonksiyon; $\varphi_{0k}(x,z), \varphi_{1k}(x,t), f_k(x,t,z), k = 1,2$ fonksiyonları

$$\varphi_{01} \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L),\ \varphi_{02} \in W_2^{2,1}(\Omega_L), \frac{\partial \varphi_{02}(0,z)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_{02}(l,z)}{\partial x} = 0; \tag{8}$$

$$\varphi_{11} \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T),\ \varphi_{12} \in W_2^{2,1}(\Omega_T), \frac{\partial \varphi_{12}(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_{12}(l,t)}{\partial x} = 0; \tag{9}$$

$$f_k \in W_2^{0,1,1}(\Omega), k = 1,2 \tag{10}$$

şartlarını sağlayan verilen kompleks değerli fonksiyonlar; $H \equiv L_2(0,l) \times L_2(0,l)$ ve $\omega = (\omega_0, \omega_1) \in H$ verilen bir elemandır.

Her bir $v \in V$ için (2)-(6) şartlarından $\psi_k = \psi_k(x,t,z) \equiv \psi_k(x,t,z;v), k=1,2$ fonksiyonlarının bulunması problemi kuazi optiğin durgun olmayan (2) denklemi için başlangıç sınır değer problemidir . Her bir $v \in V$ için (2)-(6) başlangıç sınır değer probleminin çözümü olarak $\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$, $W_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzaylarına ait olan hemen her yerde çözüm olan $\psi_k(x,t,z), k=1,2$ fonksiyonları anlaşılmaktadır. [11] çalışmasındaki sonuçları kullanarak aşağıdaki teoremin geçerli olduğunu elde ederiz:

Teorem 1. Farz edelim ki, $a(x), \varphi_{0k}(x,z),\ \varphi_{1k}(x,t),\ f_k(x,t,z), k=1,2$ fonksiyonları (7)-(10) şartlarını sağlasın. Bu takdirde her bir $v \in V$ için (2)-(6) başlangıç sınır değer probleminin $\psi_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$, $\psi_2 \in W_2^{2,1,1}(\Omega)$ bir tek çözümü vardır ve aşağıdaki kestirimler geçerlidir:

$$\|\psi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)} \le c_1\left(\|\varphi_{01}\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)} + \|\varphi_{11}\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T)} + \|f_1\|^2_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}\right) \tag{11}$$

$$\|\psi_2\|^2_{W_2^{2,1,1}(\Omega)} \le c_2\left(\|\varphi_{02}\|^2_{W_2^{2,1}(\Omega_L)} + \|\varphi_{12}\|^2_{W_2^{2,1}(\Omega_T)} + \|f_2\|^2_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}\right) \tag{12}$$

Bu teoreme dayanarak (1) fonksiyonelinin her verilen $v \in V$ için (1)- (6) başlangıç sınır değer probleminin çözüm sınıfları içerisinde bir anlam ifade ettiğini kolaylıkla söyleyebiliriz.

Optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği

Bu bölümde öncelikle, (1)- (6) optimal control probleminin $\alpha > 0$ için tek çözüme sahip olduğunu göstereceğiz.

Teorem 2: Farz edelim ki, $a(x), \varphi_{0k}(x,z),\ \varphi_{1k}(x,t),\ f_k(x,t,z), k=1,2$ fonksiyonları (7)-(10) şartlarını sağlasın ve $\omega \in H$ verilen bir eleman olsun. Bu durmda H uzayında her yerde yoğun olan öyle bir G alt kümesi vardır ki, herhangi $\omega \in G$ ve $\alpha > 0$ için (1)- (6) optimal kontrol problemi tek çözüme sahiptir.

Bu teoremin ispatı

$$J_0(v) = \|\psi_1 - \psi_2\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{13}$$

fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli olması ve [12,13] çalışmalarındaki sonuçların yardımıyla kolaylıkla elde edilir.

Teorem 2 ye dayanarak şunu söyleyebiliriz ki, $\alpha > 0$ olduğunda (1)-(6) optimal control probleminin herhangi $\omega \in H$ için çözümü olmayabilir. Ancak, aşağıdaki teorem 3 ile $\alpha \geq 0$ için olduğunda, (1)-(6) optimal control probleminin herhangi $\omega \in H$ için en az bir çözüme sahip olduğunu kolaylıkla ifade edebiliriz.

Teorem 3. Teorem 2'nin şartlarının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, $\alpha \geq 0$ olduğunda herhangi $\omega \in H$ için (1)- (6) optimal control problemi en az bir çözüme sahiptir.

Bu teoremin ispatı [6] çalışmasındaki metod kullanılarak ve $\alpha \geq 0$ olduğunda $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde alttan zayıf yarı sürekli olduğunun gösterilmesiyle elde edilir.

Fonksiyonelin diferansiyellenebilirliği ve optimal kontrol probleminin çözümü için gerek şart

Bu bölümde, (1)- (6) optimal control probleminin çözümü için bir gerek şart elde edeceğiz. Bunun için, çözümü $\phi_k = \phi_k(x,t,z), k = 1,2$ fonksiyonu olan aşağıdaki eşlenik problemi göz önüne alalım:

$$i\frac{\partial \phi_k}{\partial t} + ia_0\frac{\partial \phi_k}{\partial z} - a_1\frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x^2} + v_0(x)\phi_k - iv_1(x)\phi_k = (-1)^k\, 2(\psi_1 - \psi_2),\ (x,t,z) \in \Omega, k = 1,2 \quad (14)$$

$$\phi_k(x,T,z) = 0, \quad (x,z) \in \Omega_L, k = 1,2 \quad (15)$$

$$\phi_k(x,t,L) = 0, \quad (x,t) \in \Omega_T, k = 1,2 \quad (16)$$

$$\phi_1(0,t,z) = \phi_1(l,t,z) = 0, (t,z) \in Q \quad (17)$$

$$\frac{\partial \phi_2(0,t,z)}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2(l,t,z)}{\partial x} = 0, (t,z) \in Q. \quad (18)$$

Burada $\psi_k = \psi_k(x,t,z) \equiv \psi_k(x,t,z;v), k = 1,2$ fonksiyonları (2)- (6) başlangıç sınır değer probleminin $v \in V$ ye karşılık gelen çözümüdür.

Eşlenik problemin çözümü olarak sırasıyla $\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$, $W_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzaylarına ait olan hemen hemen tüm $(x,t,z) \in \Omega$ için (14)-(18) şartlarını sağlayan, yani $\overset{0}{\forall}(x,t,z) \in \Omega$ için (14) denklemini, $\overset{0}{\forall}(x,z) \in \Omega_L$ ve $\overset{0}{\forall}(x,t) \in \Omega_T$ için sırasıyla (15) ve (16) şartlarını, $\overset{0}{\forall}(t,z) \in Q$ için (17), (18) sınır değer şartlarını sağlayan $\phi_k = \phi_k(x,t,z), k = 1,2$ fonksiyonları anlaşılmaktadır.

Eşlenik problemde $\tau = T - t,\ \theta = L - z$ değişken dönüşümleri yapılarak, bu problem, (2)-(6) başlangıç sınır değer probleminin kompleks eşleniği biçiminde olan bir probleme kolaylıkla indirgenebilir. Bu nedenle [11] çalışmasındaki sonuçları kullanarak aşağıdaki teoremin geçerli olduğunu elde edebiliriz:

Teorem 4: Teorem 1 in şartlarının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda her bir $v \in V$ için (14)-(18) eşlenik probleminin $\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$, $W_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayına ait olan bir tek çözümü vardır ve bu çözüm için aşağıdaki kestirimler geçerlidir:

$$\|\phi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)} \le c_4\left(\|\psi_1-\psi_2\|^2_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}\right), \tag{19}$$

$$\|\phi_2\|^2_{W_2^{2,1,1}(\Omega)} \le c_4\left(\|\psi_1-\psi_2\|^2_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}\right). \tag{20}$$

(1)- (6) optimal kontrol probleminin çözümü için gerek şartı elde etmek için, önce (1)- (6) optimal kontrol problemi için Hamilton-Pontryagin fonksiyonu olarak adlandırılan aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H}\left(x,\psi_1(x,.,.),\psi_2(x,.,.),v_0(x),v_1(x),\bar{\phi}_1(x,.,.),\bar{\phi}_2(x,.,.)\right)\\
&=-\int_Q \mathrm{Re}\left(\psi_1(x,t,z)\bar{\phi}_1(x,t,z)+\psi_2(x,t,z)\bar{\phi}_2(x,t,z)\right)dtdzv_0(x)\\
&+\int_Q \mathrm{Im}\left(\psi_1(x,t,z)\phi_1(x,t,z)+\psi_2(x,t,z)\bar{\phi}_2(x,t,z)\right)dtdzv_1(x)\\
&-\alpha\left(v_0(x)-\omega_0(x)\right)^2-\alpha\left(v_1(x)-\omega_1(x)\right)^2.
\end{aligned} \tag{21}$$

Burada $\psi_k(x,t,z)\equiv\psi_k(x,t,z;v), k=1,2$ ve $\phi_k(x,t,z)\equiv\phi_k(x,t,z;v), k=1,2$ fonksiyonları sırasıyla (2)- (6) başlangıç sınır değer probleminin ve (14)-(18) eşlenik problemin $v\in V$ ye karşılık gelen çözümleridir.

Teorem 5. Teorem 4'ün şartlarının sağlandığını kabul edelim ve $\omega \in H$ verilen bir eleman olsun. Bu taktirde, $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde Frechet anlamında diferansiyellenebilirdir ve onun gradiyenti için aşağıdaki formül geçerlidir:

$$J'_\alpha(v) = -\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial v_0},\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial v_1}\right). \tag{22}$$

Burada $\mathrm{H}=\mathrm{H}\left(x,\psi_1,\psi_2,v_0,v_1,\bar{\phi}_1,\bar{\phi}_2\right)$ fonksiyonu (21) formülü ile tanımlanır.

Bu teoremin ispatı fonksiyonel uzaylarda Frechet anlamında diferansiyellenebilirliğin tanımı kullanılarak gösterilir.

Son olarak, (1)-(6) optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şartı aşağıdaki gibi formüle edebiliriz:

Teorem 6: Farz edelim ki teorem 5'in şartları sağlansın ve $V_* \equiv \left\{v^* \in V : J_\alpha\left(v^*\right) = J_{\alpha*} = \inf_{v \in V} J_\alpha(v)\right\}$ kümesi (1)- (6) optimal kontrol probleminin çözümler kümesi olsun. Bu durumda, herhangi $v^* \in V_*$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{gathered}\int_\Omega \operatorname{Re}\left(\psi_1^*(x,t,z)\bar{\phi}_1^*(x,t,z) + \psi_2^*(x,t,z)\bar{\phi}_2^*(x,t,z)\right)\left(v_0(x) - v_0^*(x)\right)dxdtdz \\ -\int_\Omega \operatorname{Im}\left(\psi_1^*(x,t,z)\bar{\phi}_1^*(x,t,z) + \psi_2^*(x,t,z)\bar{\phi}_2^*(x,t,z)\right)\left(v_1(x) - v_1^*(x)\right)dxdtdz \\ +2\alpha\int_0^l \left(v_0^*(x) - \omega_0(x)\right)\left(v_0(x) - v_0^*(x)\right)dx \\ +2\alpha\int_0^l \left(v_1^*(x) - \omega_1(x)\right)\left(v_1(x) - v_1^*(x)\right)dx \geq 0,\ \forall v \in V.\end{gathered} \tag{23}$$

Burada $\psi_k^*(x,t,z) \equiv \psi_k\left(x,t,z;v^*\right),\ \phi_k^*(x,t,z) \equiv \phi_k\left(x,t,z;v^*\right), k = 1,2$ fonksiyonları sırasıyla (2)-(6) başlangıç sınır değer ve (14)-(18) eşlenik problemlerinin $v^* \in V$ 'ye karşılık gelen çözümleridir.

Bu teoremin ispatı, V kümesinde tanımlanan $J_\alpha(v)$ fonksiyonelin gradyenti için olan (22) formülü kullanılarak, Banach uzayında tanımlanan ekstramel problemlerin çözümü için gerek şarta ait [14, syf. 28] çalışmasından bildiğimiz teoremin yardımıyla kolaylıkla gösterilir.

Kaynaklar

1. Vorontsov, M. A. and Shmalgauzen V. I., The Principles of Adaptive Optics, Izdatel'stvo Nauka, Moscow, 1985 (in Russian).
2. Yagubov, G.Y., Ibrahimov N.S. *"Problems of Math. and wholesale. Management ",* Baku, 2001, pp. 49-57
3. Ibrahimov, N.S., *Bulletin of the Lankaran State. Univ. Ser. Science,* 2010, Lankaran, p. 27-44.
4. Ibrahimov, N.S., *Tauride Journal of Computer Science and Mathematics,* 2010, № 2, p. 45-55.
5. Ibrahimov, N.S., *Journal of Computational and Applied Mathematics,* Kiev. Zap them. Shevchenko, 2010, № 4, p. 26-37.
6. Lions J.-L., *Springer-Verlag,* 1972. p 416 .
7. Iskenderov, A.D., Matematiksel fiziğin çok boyutlu denklemleri için ters problemlerin varyasyonel formülasyonu, Dokl. AN SSSR, 1984, c. 274, № 3, s.531-533.
8. Iskenderov, A.D., Mahmudov, N. M., Kuantum Mekanik sistemlerin Lions fonksiyoneli kriterli optimal kontrolü, - Izv.AN. Azerb. SSR, Serie fiz. tekn. mat. Bilimleri, 1995,c. XVI, №5-6, s. 30-35.
9. Mahmudov, N.M., Reel katsayılı *Izv. Vuzov.,* 2010, № 11, s. 31-40.
10. Ladyzhenskaya, O. A., *Springer Verlag*, 1985.
11. Iskenderov, A. D., Ibrahimov, N. S., *Bulletin of the Lankaran State. Univ. Ser. Science,* 2009, Lankaran, p. 47-66.
12. Yoshida, K., *Springer-Verlag,* 1967.
13. Goebel, M., *Math. Nachr.,*1979, vol.93(1), pp. 67-73.
14. Vasilyev F.P., *MeNauka, Moscow,* 1981, p. 400.