# RİDGE REGRESYON TEORİSİNDE 1970 DEN SONRAKİ GELİŞMELER

Fikri Akdeniz *
Altan Çabuk **

**Özet**

Hoerl ve Kennard (1970a) da önerdikleri "ridge regresyon" yöntemiyle tahmin edilen regresyon katsayılarının en küçük kareler yöntemiyle yapılan tahminlerden daha küçük hata kareler ortalamasına sahip olduklarını gösterdiler. Bu çalışmada (i) Teorideki gelişmeler; (ii) Ridge regresyonda yanlılık parametresi k' nın ve genelleştirilmiş ridge regresyonda optimal $k_i$ parametrelerinin seçim algoritmaları; (iii) En küçük kareler tahmin edicisi ve diğer yanlı tahmin edicilerle hata kareler ortalaması matrislerinin karşılaştırılması; (iv) Değişik disiplinlerden uygulama örnekleri verilecektir.

* Prof. Dr.,, Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü
** Prof. Dr., Çukurova Üniversitesi İİBF Ekonometri Bölümü

## 1. GİRİŞ

Çok değişkenli lineer regresyon tüm istatistik yöntemlerin en çok kullanılanlarından biridir. Veri analizi yapan bir araştırmacı tarafından bilim ve teknolojinin hemen hemen her alanında model kurmak için kullanılır. Regresyon katsayılarını tahmin etmek için kullanılan ortak yöntem en küçük kareler yöntemidir. Bununla birlikte kullanılan veri vektörleri ortogonal olmadığında deneyimler göstermiştir ki regresyon katsayılarının tahmin edilmesinde aşağıdaki problemler ortaya çıkmaktadır.

(i) Katsayılar mutlak değerce oldukça büyük olma eğilimindedir.

(ii) Bazı katsayıların yanlış işaretli olması mümkündür.

(iii) Korelasyon matrisinin öz değerlerinden biri veya daha çoğu çok küçük olacaktır.

Tahmin etmede kullanılan vektörler ortogonallıktan daha çok sapma gösterdiğinde bu tür güçlüklerin olasılığı artacaktır. Ayrıca tahmin etmede kullanılan vektörler arasındaki korelasyon yüksek ise yani çoklu iç ilişki ( mulcollinearity) varsa en küçük kareler yöntemi doğru yargıya varılabilecek sonuçlara götürmez.

İç ilişkinin derecesini göstermek için bir X matrisinin (ya da $X'X$ in) koşul sayısı (KS) kullanılır.$\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ ler $X'X$ in özdeğerleri olmak üzere KS=$\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$ şeklinde tanımlanır. (Belsley, et. al. (1980 sayfa:100-104) koşul sayısı 5 ve 10 arasında ise zayıf ilişki olduğu, KS nin değeri 30 dan 100 e doğru arttıkça orta şiddette ilişkiden şiddetli ilişkiye geçiş eğilimi vardır. Bazı araştırmacılar KS=$\left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}\right)^{1/2}$ formülünü tercih etmektedirler. (Vinod ve Ullah(1981)).

**1.1 Çoklu iç ilişkinin sonuçları**

(i) **En küçük kareler tahminleri tahmin edilen parametrelerin gerçek değerlerinden oldukça farklıdır.**

(ii) Tahminlerde yansızlık vardır, tahminlerin mutlak değerleri oldukça büyük ve varyansları da büyük, verideki çok küçük değişiklikle tahmin edilen parametrelerin işaretleri değişir.

(iii) Şiddetli çoklu ilişki altında parametre tahminleri kararsız olma eğilimi gösterecektir.. Tahminlerin geçerliliğini görmek için yeni örneklemler kullanıldığında tahminler şiddetle etkilenerek değişirler.

**(iv)** Ayrıca çoklu iç ilişki varlığında farklı en küçük kareler bilgisayar algoritmaları belirlenen model parametreleri için farklı tahminler ve işaretler verebilir.

Hoerl ve Kennard (1970a) böyle güçlükleri yenmek için teorik bir temele dayanan ve belirtilen kusurlara sahip olmayan "ridge regresyon" denen yeni bir tahmin yöntemi sundular.

Bu çalışmada, 2. bölümde regresyon modelini ve tahmin edicileri vereceğiz. 3. bölüm k yanlılık parametresinin optimum seçim yöntemlerinin incelenmesine ayrıldı. 4. bölümde ridge tahmin ediciler ile diğer yanlı tahmin edicilerin ve EKK tahmin edicisinin karşılaştırılmasını yapacağız. Son bölümde ridge tahmin edicinin uygulandığı bazı alanlardan örnekler vereceğiz.

## 2. MODEL VE TAHMİN EDİCİLER

Aşağıdaki lineer regresyon modelini düşünelim

$$y=X+u$$

(2.1)

Burada X: nxp ve rank (X)=p, $\beta$: px1, E(u) =0, E(uu′)= $\sigma^2 I_n$ dir. X′X korelasyon matrisi formundadır. Dağılım gerekli ise u nun çok değişkenli normal dağılıma sahip olduğu kabul edilecektir. Hoerl ve Kennard (1970a) nın $\beta$ parametreleri için önerdiği ridge tahmin edici

$$\hat{\beta}_k=(X'X+kI)^{-1}X'y \qquad (k>0) \tag{2.2}$$

ile verilmiştir. k=0 için $\beta$ nın en küçük kareler (EKK) tahmin edicisi

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'y \tag{2.3}$$

elde edilir. EKK tahmin edicisinin yansız olduğu bilinmektedir. $\hat{\beta}_k$ nın temel özelliklerinden biri yanlı olmasıdır. Yani

$$\text{bias}(\hat{\beta}_k)=E(\hat{\beta}_k)-\beta=-k(X'X+kI)^{-1}\beta \tag{2.4}$$

dir. Görüldüğü gibi eşitliğin ikinci yanı bilinmeyen $\beta$ parametresine bağlıdır. Ridge regresyonla ilgili pek çok teorik problemler bu nedenle ortaya çıkar. Ridge regresyonun diğer özelliklerini görmek için X matrisinin tekil değer ayrışımını ele alacağız.

$X=H\Lambda^{1/2}G'$ yazılabilir. Burada, H: nxp, H′H = I, $\Lambda$ , X′X in $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ öz değerlerinin köşegen matrisidir. G: pxp G′G=I koşulunu sağlayan $g_i$ öz vektörlerinin matrisidir. $X'X=G\Lambda G'$ dir. O halde (2.1) modelinden kanonik modele geçebiliriz:

$$\begin{aligned} y&=H\Lambda^{1/2}G'\beta+u \\ &=Z\alpha+u. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Burada $Z=H\Lambda^{1/2}$, $\alpha=G'\beta$ dir. $\alpha$ nın EKK tahmin edicisi

$$\hat{\alpha}=(Z'Z)^{-1}Z'=\Lambda^{-1}Z'y \tag{2.6}$$

ve genelleştirilmiş ridge tahmin edicisi

$$\hat{\alpha}(K) = (Z'Z + K)^{-1} Z'y = (\Lambda + K)^{-1} Z'y$$

(2.7)

dir.Burada K=diag($k_1,...,k_p$), $k_i \geq 0$ . K=kI , $k \geq 0$ alınırsa , tahmin edici basit ridge tahmin edici veya ridge tahmin edici olarak tanımlanır ve

$$\hat{\alpha}(k) = (Z'Z + kI)^{-1} Z'y = (\Lambda + kI)^{-1} Z'y$$

(2.8)

olur. (2.7) de $Z'y = \Lambda \hat{\alpha}$ olduğundan (2.7) ve (2.8) sırasıyla $(\Lambda+K)^{-1}\Lambda\hat{\alpha}$ ve $(\Lambda+kI)^{-1}\Lambda\hat{\alpha}$ biçiminde yazılır. Görüldüğü gibi ridge tahmin edicileri "shrunken" en küçük kareler tahmin edicileri olarak görülür.

Ridge tahmin edici için hata kareleri ortalaması (HKO) matrisi

$$E(L_1^2) = E(\hat{\alpha}(k) - \alpha)(\hat{\alpha}(k) - \alpha)' = E(\hat{\beta}(k) - \beta)(\hat{\beta}(k) - \beta)'$$

$$= \mathrm{var}(\hat{\alpha}(k)) + \mathrm{bias}(\hat{\alpha}(k)\ \mathrm{bias}(\hat{\alpha}(k))'$$

$$= \sigma^2 (\Lambda+K)^{-1} \Lambda\ (\Lambda+K)^{-1} + (I - \Delta)\alpha\alpha'(I - \Delta)$$

biçiminde yazılır. Burada $\mathrm{var}(\hat{\alpha}(k)) == \sigma^2 (\Lambda+K)^{-1} \Lambda\ (\Lambda+K)^{-1}$, $\Delta = (\Lambda + K)^{-1}\Lambda$ and $\mathrm{bias}(\hat{\alpha}(k)) = E(\hat{\alpha}(k)) - \alpha = (\Delta - I)\alpha$ dir.

$$D(\hat{\alpha}, \hat{\alpha}(K)) = \mathrm{MtxMSE}\ (\hat{\alpha}) - \mathrm{MtxMSE}(\hat{\alpha}(K))$$

$$= \Lambda^{-1}\sigma^2 - [\sigma^2 (\Lambda+K)^{-1} \Lambda(\Lambda+K)^{-1} + (I - \Delta)\alpha\alpha'(I - \Delta)]$$

$$= (\Lambda+K)^{-1}K[\sigma^2(2I+\Lambda^{-1}K) - \alpha\alpha' K](\Lambda+K)^{-1}$$

(2.9)

dir. K=kI için

$$D(\hat{\alpha}, \hat{\alpha}(k)) = k(\Lambda+kI)^{-1}[\sigma^2(2I+\Lambda^{-1}k) - k\,\alpha\alpha'](\Lambda+kI)^{-1}$$

(2.10)

yazılır. Burada $G_k = (\Lambda+kI)^{-1} > 0$ olduğundan, $D(\hat{\alpha}, \hat{\alpha}(k)) \geq 0$ (pozitif semi definit) olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$[\sigma^2(2I+\Lambda^{-1}k) - k\,\alpha\alpha'] \geq 0$$

(2.11)

dir.

TEOREM 2.1 (Gruber (1990)). d pozitif bir skaler ve A pozitif definit bir matris olsun. dA-bb′ nin pozitif definit olabilmesi için gerek ve yeter koşul $b'A^{-1}b \leq d$ dir. Ya da yukarıdaki (Gruber (1990) Teorem 2.5.2) nin kullanılmasıyla

$$\sigma^{-2}k\alpha'(2I+k\Lambda^{-1})^{-1}\alpha \leq 1 \tag{2.12}$$

dir. (2.12) için yeter koşul olarak model matrisi X ten bağımsız olarak

$$2\sigma^2 I - k\alpha\alpha' \geq 0$$

elde edilir. Ya da eşdeğer olarak

$$k \leq \frac{2\sigma^2}{\alpha'\alpha} \tag{2.13}$$

bulunur. Bu koşul $\hat{\alpha}(k)$ nın $\hat{\alpha}$ ya üstünlüğü için yeter koşuldur, fakat gerekli değildir. Uygulamada bu koşul çok fazla ılımlıdır. $k_i=k$, $i=1,2,\ldots,p$ özel hali için

$$HKO(\hat{\alpha}(k)) = mse(\hat{\alpha}(k)) = \sum_{i=1}^{p} \frac{(\lambda_i\sigma^2 + \alpha^2{}_i k^2)}{(\lambda_i + k)^2} \tag{2.14}$$

olacaktır. Hoerl ve Kennard (1970a) $HKO(\hat{\alpha}(k)) < HKO(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i}$ olacak şekilde daima bir $k > 0$ ın varlığını gösterdiler. Vinod ve Ullah (1981) yanlılık parametresi k nın değerleri için $0 < k < k_{max}$ "kabul edilebilir aralık" tanımladılar. $k_{max} = \frac{2\sigma^2}{\alpha'\alpha}$ dır.

Rao (1976 ) da G n.n.d. matris olmak üzere

$$M=\{y, X\beta, \sigma^2 V\}$$

Modelini göz önüne alarak β için

$$\beta_G^{(r)} = (G+X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y \tag{2.15}$$

genel ridge tahmin edici tanımladı. Markiewicz (1996) da bu tahmin edicinin, singüler olmayan model olması durumunda tüm lineer tahmin ediciler kümesi içinde yeterlilik ve kabul edilebilirlik durumunu incelemiştir.

### 2.1 Hemen hemen yansız genelleştirilmiş ridge tahmin edici

Ohtani (1986) de Kadiyala(1984) de önerilen bias düzeltme yaklaşımını ve Singh, Chaubey ve Dwivedi (1986) Jackknife yöntemini kullanarak aşağıdaki hemen hemen yansız genelleştirilmiş ridge (HHYGR) tahmin ediciyi verdiler.

$y=X\beta+u$ modelinden Z=XG ve $\alpha=G'\beta$ dönüşümleriyle

$$y=Z\alpha+u \qquad (Z'Z=G'X'XG=\Lambda)$$

modeline geçerek $\hat{\gamma}(K) = (\Lambda+K)^{-1}Z'y$ genelleştirilmiş ridge tahmin edici olmak üzere

$$\tilde{\alpha}=\left[I+(\Lambda+K)^{-1}K\right]\hat{\alpha}(K)$$

$$\tilde{\alpha}=\left[I-((\Lambda+K)^{-1}K)^{2}\right]\Lambda^{-1}Z'y$$

yi tanımladılar. Ohtani (1986) kullanılabilir (operational) HHYGR tahmin edicinin HKO özelliklerini inceledi.

### 2.2 Ön bilgi ile yansız ridge tahmin edici

Crouse ve Jain (1997) de ön bilgi ile birlikte yansız ridge tahmin edici tanımladılar ve ridge parametresi k nın robust tahminini önerdiler. $y=X\beta+u$ modelinde EKK tahmin edicisi $\hat{\beta}$ nın dağılımı $N(\beta,\sigma^2(X'X)^{-1})$ olmak üzere $\hat{\beta}$ dan bağımsız J ön bilgisinin $N(\beta, V)$ dağılımına sahip olması durumunda , $C=V(\sigma^2 (X'X)^{-1}+V)^{-1}$ olmak üzere

$\beta(C,J) = C\hat{\beta} + (I-C)J$ şeklinde konveks tahmin edicinin $\beta$ için yansız tahmin edici olduğunu gösterdiler. C nin optimal değeri için konveks tahmin edici minimum HKO na sahip olacaktır. Özel olarak $V=\frac{\sigma^2}{k}I$ seçilirse $C=(X'X+kI)^{-1} X'X$ olacağından konveks tahmin edici $\beta(C,J)= (X'X+kI)^{-1}(X'y+kJ)$ olacaktır. $E[\beta(C,J)]= \beta$ olduğu gösterilir.

## 3. RİDGE REGRESYONDA OPTİMUM K SEÇİMİ

Lee ve Campbell (1985), Hoerl ve Kennard (1970a) i izleyerek en küçük kareler ve ridge tahmin edicileri için HKO yı göstermek üzere

$$M_1(\hat{\alpha})=\sum_{i=1}^{p} E(\hat{\alpha}_i-\alpha_i)^2=\sum_{i=1}^{p}\frac{\sigma^2}{\lambda_i} \quad (3.1)$$

ve

$$f_{M1}(k)=M_1(\hat{\alpha}_k)=\sum_{i=1}^{p} E(\hat{\alpha}_i(k)-\alpha_i)^2=\sum_{i=1}^{p}(\lambda_i\sigma^2+k^2\alpha_i^2)\Big/(\lambda_i+k)^2 \quad (3.2)$$

yi kullandılar.(3.2) denkleminde $f_{M1}(k)$ $k=k^*$ da yerel minimuma sahipse $k^*$ ridge parametresinin optimal değeri olacaktır. $\hat{\alpha}_{k^*}$ ridge tahmin edicisine optimal ridge tahmin edici denir. $f_{M1}(k)$ nın k ya göre türevi alınırsa

$$f'_{M1}(k)=2\Big/\sum_{i=1}^{p}\{(\lambda_i(k\alpha^2_i-\sigma^2)\Big/(\lambda_i+k)^3\}$$

elde edilir. Sıfırdan farklı $\alpha_i$ lerin mutlak değerce maksimum olanını $\alpha_{max}$ ile minimum olanını da $\alpha_{min}$ ile göstererek $k_1 = \sigma^2 / \alpha^2_{max}$ ve $k_2 = \sigma^2 / \alpha^2_{min}$ tanımlayalım. $f'_{M1}(k_1)<0$ ve $f'_{M1}(k_2)>0$ olduğundan $k_1$ ve $k_2$ arasında olacak şekilde en az bir $k^*$ yerel minimumu olmak zorundadır. $k^*$ ın tek olmadığına dikkat edelim.

Hoerl ve Kennard (1970) yanlılık parametresinin seçimi için üç yöntem önerdiler.

i) Ridge trace yöntemi

ii) Basit ridge için $k = p\sigma^2 / \hat{\beta}'\hat{\beta} = p\sigma^2 / \hat{\alpha}'\hat{\alpha}$ nın kullanılması

iii) Genelleştirilmiş ridge için $k_i = \hat{\sigma}^2 / \hat{\alpha}_i$ üzerinde iterasyon yöntemi

Bu yöntemleri kısaca açıklayalım.

### 3.1 Basit ridge tahmin edicisinin kararlılığı ve ridge izi

Ridge izi, ridge ailesi içinde k için özel çözüm bulunmasında kullanılan grafiksel yöntemdir. Regresyon katsayıları $\hat{\alpha}_i(k)$ lar düşey eksende, k değerleri yatay eksende alınarak iki boyutlu uzayda grafik elde edilir. X′X korelasyon matrisi pek çok büyük korelasyon içerdiğinde, basit korelasyon katsayılarının incelenmesiyle açıklayıcı değişkenler arasındaki ilişkiyi açığa çıkarmak güçtür. "Ridge izi" araştırmacıya hangi katsayıların verilere göre hassas olduğu konusunda yardımcı olur. Böylece, ridge regresyonun bir amacı hassaslık analizidir. Her bir katsayı için bir eğri ya da iz oluşur. .Görüldüğü gibi katsayının varyansı k nın bir azalan fonksiyonu ve bias k nın artan bir fonksiyonudur. Böylece, k artarken katsayıların HKO sı minimuma azalır ve sonra artar. Amaç en küçük karelerden daha küçük HKO veren k değerini bulmak ve "kararlı" katsayılar kümesini oluşturmaktır. Kararlılıktan kasıt tahmin etme de kullanılan verilerdeki küçük değişikliklere karşı katsayıların hassas olmasıdır. Ön tahmin değişkenleri yüksek ilişkili iseler katsayılar k nın sıfıra yakın değerlerinde çok hızlı değişecek ve k nın değerleri arttıkça kararlı olacaktır. Katsayıların kararlı olduğu k değeri istenen katsayılar kümesini verecektir.

Değişkenler ortogonal iseler katsayılar kararlı olacağından k nın değeri değiştikçe katsayıların değerleri çok az değişecektir. Bu durumda en küçük kareler çözümü katsayıların iyi bir kümesini verir. Uygulamada bu yöntemle k nın seçimi sorun yaratmamaktadır. Araştırmacının deneyimi önemlidir.

### 3.2 Basit ridge regresyonda k nın seçimi için algoritma

Hoerl ve Kennard (1970a) k nın seçimi için algoritma geliştirmede aşağıdaki iki sonucun yararlı olduğunu ifade ettiler.

a) $X'X = I$ iken, $k = p\sigma^2 / \beta'\beta$ değeri için HKO minimum değerini alır.

b) Genellleştirilmiş ridge regresyonda $k_i = \sigma^2 / \beta^2_i$ $i=1,2,\ldots,p$ için HKO minimum

değerini almaktadır. $k_i$ ler bir tek k değeri bulmak için birleştirilirse en uygun ortalama harmonik ortalama olacaktır. Bu ortalama $k_h$ ile gösterilirse

$$\frac{1}{k_h} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{k_i} = \frac{\beta'\beta}{p\sigma^2} = \frac{\alpha'\alpha}{p\sigma^2}$$

ve

$$k_h = \frac{p\sigma^2}{\alpha'\alpha} \tag{3.3}$$

bulunur. Verilen bu iki sonuç k için yapılacak otomatik seçimin $\frac{p\sigma^2}{\alpha'\alpha}$ nin bir tahmini olmasını vurgular. O halde

$$k_a = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}'\hat{\alpha}} = k_{HKB} \tag{3.4}$$

seçilir. (bak, Hoerl, Kennard ve Baldwin (1975)). Bu çalışmada geniş bir simulasyon çalışması yapılarak $k_{HKB}$ nin çeşitli özellikleri incelenmiştir. Tamarkin (1982) k nın bu seçim yöntemini irdelemiş ve simulasyon çalışması yapmıştır. Örneğin, literatürde Hald verileri olarak bilinen çimento verileri kullanıldığında (Draper ve Smith (1981) sayfa. 630) $\hat{\sigma}^2 = s^2 = 0{,}0022$, p=4, ve $\hat{\beta} = (0{,}6065\ ;0,\ 5279;\ 0{,}0434;\ -0{,}1602\ )$ elde edilir. (3.4) ü kullanarak

$$k^* = k_a = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}'\hat{\alpha}} = 0{,}0131$$

bulunur. Bununla birlikte, içilişkinin varlığında büyük bir olasılıkla $\hat{\alpha}'\hat{\alpha}$ büyük olacağından bu durumda çok küçük k değerinin kullanılması eğilimi olacaktır.

**Hoerl, Kennard ve Baldwin (1975) in simulasyon sonuçları**

1. $k_a$ yanlılık parametresi ile ridge tahmin edicinin kullanılması 0,5 den büyük olasılıkla,
   EKK den küçük HKO li tahminler verir.
2. p değeri artarken $k_a$ kullanarak daha küçük HKO elde edilmesi olasılığı da artar.
3. p nin verilmiş değeri için $k_a$ nın kullanılmasıyla daha küçük HKO elde edilmesi olasılığı -X′X nin özdeğerlerindeki yayılma artarken- artacaktır.
4. Yapısı belli verilmiş bir X ve $\beta$ regresyon katsayılarının kümesi için $\sigma^2$ ile ölçülen, rasgele dağılımın değişkenliği artarken $k_a$ kullanılarak bulunan HKO nun daha küçük olması olasılığı da artar.

Hoerl ve Kennard (1970a) $k_a$ ile başlayarak $k_{at}$ ile gösterdikleri tahmin ediciyi hesaplamak için iteratif yöntem geliştirdiler. Ayrıca biliyoruz ki

$$E(\hat{\beta}'\hat{\beta}) = \beta'\beta + \sigma^2 \mathrm{trace}(X'X)^{-1}$$

dir. Böylece $\hat{\beta}'\hat{\beta}$ , $\beta'\beta$ den daha büyük ve X′X matrisinin ( ill-conditioned ) koşul sayısının büyük olması durumunda ikisi arasındaki fark artar. $\hat{\beta}$ ile ridge regresyona dayalı $\hat{\beta}(k_a)$ yi yer değiştirdiğimizde $\hat{\beta}(k_a)'\ \hat{\beta}(k_a)<\hat{\beta}'\hat{\beta}$ olacaktır.

İterasyon da aynı strateji kullanacaktır.

Algoritma $\beta$ nın tahminlerinin ve k nın değerlerinin dizisine dayalıdır.

$$\hat{\beta}, k_{ao} = p\hat{\sigma}^2 \big/ \hat{\beta}'\hat{\beta};\quad \hat{\beta}(k_{ao}),\ k_{a1} = p\hat{\sigma}^2 \big/ \left(\hat{\beta}(k_{ao})\right)'\left(\hat{\beta}(k_{ao})\right) ;\dots;\hat{\beta}(k_{at}).$$

$$|(k_{a,i+1} - k_{a,i})|/k_{a,i} \leq \delta = 20T^{-1,30}$$

olduğunda ($\delta$ – kriterine göre) iterasyona son verilir. Burada $T=trace(X'X)^{-1}/p$ dir (bak, Hoerl ve Kennard (1976)) . Hald verilerini tekrar kullanarak iteratif yöntemle k değerini belirleyelim. Önceden bulunan başlangıç değeri $k_{a0}=0{,}0131$ dir. $T=trace(X'X)^{-1}/p=155{,}619$ ve $\delta=20(155{,}619)^{-1,30}=0{,}02827$ dir. 2. iterasyon sonrasında

$$(k_{a2} - k_{a1})/k_{a1}=(0{,}0175225- 0{,}0173274)/0{,}173274= 0{,}0113< \delta=0{,}0282$$

bulunur. Böylece $k^*=k_{a1}=0.01733$ alınır.

Lawless ve Wang (1976) k yı

$$k_{LW}=\frac{p\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=}^{p}\lambda_i\hat{\alpha}^2_i}$$

(3.5)

formülüyle hesapladılar ve simulasyon sonuçları verdiler.

Dempster, Schatzoff ve Wermut (1977) de k yı

$$\sum_{i=1}^{p}\left[\hat{\alpha}^2_i \Big/ \left(\frac{1}{k}+\frac{1}{\lambda_i}\right)\right] = p\hat{\sigma}^2$$

(3.6)

lineer olmayan denklemin çözümünden belirlediler ve $k_{RIDGM}$ olarak gösterdiler.

Gosling ve Puterman (1985) $k_{HKB}$ ve $k_{RIDGM}$ yi karşılaştırarak $k_{RIDGM} > k_{HKB}$ sonucunu verdiler.

Alam ve Hawkes (1978) aşağıdaki k için ridge tahmin ediciler sınıfını düşündüler:

$$k = a\hat{\sigma}^2 \left(b + \sum_{i=1}^{p} c_i \hat{\alpha}_i^{\,2}\right)^{-1} \qquad (3.7)$$

Burada $a>0$ , $b>0$, $c_i>0$ $i=1,2,3,\ldots,p$ dir. $a=p$ ,$b=0$ ve $c_i=1$ için $k_{HKB}$ ve $a=p$, $b=0$ $c_i=\lambda_i$ için $k_{LW}$ elde edilir.

### $\hat{k}$ nın beklenen değeri için üst sınır

**Kadiyala (1981) de**

$$0 < E(\hat{k}) \le \frac{p}{p-2}$$

sınırlarını verdi. Firinquetti ve Rubio (2000) de

$$E(\hat{k}_{LW}{}^{r}) = \left(\frac{p}{n-p}\right)^{r} \frac{\Gamma(\frac{n-p}{2}+r)}{\Gamma(\frac{n-p}{2})} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\theta/2}(\theta/2)^{j}}{j} \frac{\Gamma(\frac{p}{2}+j-r)}{\Gamma(\frac{p}{2}+j)} < \left(\frac{p}{n-p}\right)^{r} \frac{\Gamma(\frac{n-p}{2}+r)}{\Gamma(\frac{n-p}{2})} \frac{\Gamma(\frac{p}{2}-r)}{\Gamma(\frac{p}{2})}$$

verilmiştir. r=1 için Kadiyala (1981) deki sonuç bulunur.

### 3.3 Genelleştirilmiş ridge regresyonda $k_i$ lerin seçimi

$k_i$ lerin optimal değerleri için

$$Q = HKO(\hat{\beta}_K) = HKO(\hat{\alpha}_K) = E\{(\hat{\alpha}_K - \alpha)'(\hat{\alpha}_K - \alpha)\}$$

ve

$$\frac{\partial Q}{\partial k_i} = \frac{2\lambda_i(\lambda_i + k_i)(k_i\alpha_i^{\,2} - \sigma^2)}{(\lambda_i + k_i)^4} = 0, i = 1,2,\ldots,p.$$

minimizasyon denklemleri bulunur. $\lambda_i$ değerleri pozitif olduğundan

$$k_i=\frac{\sigma^2}{\alpha_i^2} \qquad i=1,2,\ldots,p.$$

(3.8)

çözümleri bulunur. İteratif yöntemle $k_i$ ler tahmin edilir (Hemmerle (1975)).Troskie ve Chalton (1996) da $k_i$ leri tahmin etmek için,

$$\hat{k}_i=\frac{\lambda_i\hat{\sigma}^2}{\lambda_i\hat{\beta}_i^2+\hat{\sigma}^2}$$

(3.9)

ve Firinquetti (1999) da

$$\hat{k}_i=\frac{\lambda_i\hat{\sigma}^2}{(n-p)\hat{\sigma}^2+\lambda_i\hat{\beta}_i^2}$$

(3.10)

formüllerini önerdiler.

## 4. RİDGE REGRESYON TAHMİN EDİCİSİNİN VE DİĞER BAZI TAHMİN EDİCİLERİN HATA KARELERİ ORTALAMALARI MATRİSLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

**Theobald (1974) EKK ve ORR tahmin edicilerini**

$$\mathbf{m_j}= E(\tilde{\beta}_J-\beta)'B(\tilde{\beta}_J-\beta) \qquad \mathbf{j=1,2}$$

**(4.1)**

genelleştirilmiş hata kareleri ortalaması (g.h.k.o) kriterine göre karşılaştırdı. Burada B bir n.n.d. matristir. Ayrıca

$$M_j= E(\tilde{\beta}_j-\beta)(\tilde{\beta}_j-\beta)' \qquad j=1,2,$$

(4.2)

ikinci mertebeden momentler matrisi ile olan ilişkiyi aşağıdaki teoremle verdi.

TEOREM 4.1 (Theobald (1974)). Aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:

(i) $M_1$-$M_2$ n.n.d. matristir.

(ii) Tüm n.n.d. B matrisleri için $m_1$-$m_2 \geq 0$ dır.

Böylece bir $\beta_2$ tahmin edicisinin g.h.k.o. anlamında bir $\beta_1$ tahmin edicisinden daha iyi olabilmesi için gerek ve yeter koşul $M_1 - M_2$ nin pozitif definit olması , tüm n.n.d. B ler için $m_1 - m_2 > 0$ ı gerektirir.

$\hat{\beta}_k = (X'X + kI)^{-1}X'y$ ORR tahmin edicisi olmak üzere M(0)-M(k) farkı pozitif definit olacak şekilde bir $0 < k < k^*$ sayısının olacağını gösterdi. Böylece yeter koşul olarak $k < 2\sigma^2 / \beta'\beta$ yı buldu.

Gunst ve Mason (1976) da Theobald'ın sonucuna ek olarak

(a) EKK ve temel bileşenler regresyon tahmin edicilerini

(b) Temel bileşenler ve ridge regresyon tahmin edicilerini karşılaştırdılar.

Trenkler (1980) de $\lambda_1$, X′X nin en büyük özdeğeri olmak üzere

$$\hat{\beta}_{m,\alpha} = \rho\sum_{i=0}^{m} (I - \rho X'X)^i X'y, \qquad (0 < \rho < \frac{1}{\lambda_1}, \ m=0,1,\ldots)$$

(4.3)

biçiminde iterasyon tahmin edici tanımlayarak yukarıda verdiğimiz diğer tahmin edicilerle karşılaştırdı.

Marquardt (1970 ) i izleyerek temel bileşenler regresyon tahmin edicisi

$$\hat{\beta}_r = A^+{}_r \ X'y$$

(4.4)

şeklinde tanımlanır. Burada $A^+{}_r$ rankı r olan X′X matrisinin Moore-Penrose genelleştirilmiş inversidir.

Baye ve Parker (1984) de ridge ve temel bileşenler tahmin edicilerini birleştirerek aşağıdaki (r,k) sınıfı tahmin edicileri tanımladılar

$\hat{\beta}_r(k) = \quad T_r \quad (T_r'X'XT_r+kI_r)^{-1}T_r'X'y. \qquad k>0.$

(4.5)

Burada $T=(t_1,...,t_p)$, $T'X'XT=\Lambda$, $\Lambda$ diagonal bir matris, $T_r=(t_1,...,t_r)$, $r \leq p$. $T_r'X'XT_r=\Lambda_r=diag(\lambda_1,...,\lambda_r)$ dir. Bu tahmin edici EKK, ridge ve temel bileşenler tahmin edicilerin üçünüde içerdiğinden genel tahmin edicidir. Yani:

(i) $\hat{\beta}_p(0) = \hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ (EKK tahmin edicisi)

(ii) $\hat{\beta}_p(k) = \hat{\beta}(k) = (X'X + kI_p)^{-1}X'y$ (Ridge regresyon tahmin edicisi)

(iii) $\hat{\beta}_r(0) = \hat{\beta}_r = T_r(T_r'X'XT_r)^{-1}T_r'X'y$ (Temel bileşenler tahmin edicisi)

Nomura ve Ohkubo (1985) (r, k) sınıfı tahmin edicileri HKO kriterine göre basit ridge ve EKK tahmin edicileri karşılaştırdılar.

Martinez (1990) (r,k) tahmin edicilerin HKO kriterine göre basit ridge, temel bileşenler ve EKK tahmin edicilerinden daha iyi oldukları durumlar için gerekli koşulları inceledi.

Sarkar (1996) HKO matrisini kullanarak Martinez (1990) daki karşılaştırmaları yapmıştır. Ayrıca düşünülen durumlarda istenen koşulların sağlanıp sağlanmadığını belirlemek için testler önermiştir.

Trenkler (1984) de homoscedasticity varsayımı sağlanmadığında

$y=X\beta + u, E(u) = 0, \text{cov}(u) = \sigma^2 V$

lineer regregyonda yanlı tahmin edicilerin performansını görmek amacıyla HKO matrislerini karşılaştırmıştır.

Trenkler (1985) de kovaryans matrislerin farkı singüler matris olması durumunda HKO matrisleri farkına dayalı olarak verdiği teoremlerin pre-test tahmin ediciler için uygulanabileceğini gösterdi.

Singh ve Chaubey (1987) de $k_i > (3/2)\sigma^2/\gamma_i^2$ olduğunda $HKO(\tilde{\gamma}) < HKO(\hat{\gamma}(K))$ olacağını gösterdiler.Bu sonucu Theobald'ın verdiği sonuçla birleştirdiğimizde $(3/2)\sigma^2/\gamma_i^2 < k_i < 2\sigma^2/\gamma_i^2$ iken HKO($\tilde{\gamma}$) <HKO($\hat{\gamma}$(K)) <HKO($\hat{\gamma}$) elde edilir.

Singh ve Chaubey (1987) de EKK tahmin edicisi ve genelleştirilmiş ridge tahmin edicinin konveks kombinasyonunu alarak L=diag($a_1,...,a_p$) , $0<a_i<1$ olmak üzere

$$\hat{\hat{\gamma}} = L\tilde{\gamma} + (I - L)\hat{\gamma}(K) \tag{4.6}$$

geliştirilmiş ridge tahmin edici tanımladılar. Sabit K için bu yeni tahmin ediciyi genelleştirilmiş ridge tahmin edici ve hemen hemen yansız genelleştirilmiş ridge tahmin edici ve EKK tahmin edicisi ile HKO kriterine göre karşılaştırdılar.

Nebebe ve Sim (1990) da K nın bilinmeyen parametrelerin tahminlerine bağlı olduğu durum için genişlettiler. Ridge tahmin edicilerin HKO nın daha güvenilir tahminlerini bulmak için bootstrap yöntemi önerdiler.

Chawla ve Jain (1988) de basit ridge regresyon tahmin edici ile genelleştirilmiş ridge regresyon tahmin ediciyi HKO matrisi kriterine göre karşılaştırdılar.

Sarkar (1992) de $\hat{\beta}$, EKK tahmin edici olmak üzere stokastik olmayan $R\beta = r$ kısıtlaması altında S=X′X olmak üzere

$$\beta^* = \hat{\beta} - S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}R(R\hat{\beta} - r) \tag{4.7}$$

kısıtlanmış EKK tahmin edicisini kullanarak

$$\tilde{\beta}^*(k) = (X'X + kI)^{-1}X'X\beta^* \tag{4.8}$$

kısıtlanmış ridge regresyon tahmin ediciyi tanımladı. Bu yeni tahmin ediciyi kısıtlanmış EKK tahmin edicisi ile karşılaştırdı. .

**Kaçıranlar, Sakallıoğlu ve Akdeniz (1998) de Swindel (1976) da önerilmiş olan**

$$b(k,b^*) = (X'X+kI)^{-1}(X'y+kb^*) \tag{4.9}$$

modifiye edilmiş ridge regresyon tahmin edicisini ve $\hat{\beta}_k^{*} = (X'X + kI)^{-1} X'X\beta^{*}$.kısıtlanmış ridge regresyon tahmin edicisini HKO matrisi kriterine göre karşılaştırdılar.

Sakallıoğlu ve Akdeniz (1998) de

$$\hat{\beta}^{(n)} = (I - hGX)\hat{\beta}^{(n-1)} + hGy$$

(4.10)

$$G = \left[c_1 I + c_2 X'X + c_3 (X'X)^2 + \ldots + c_q (X'X)^{q-1}\right] X' ;$$

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{q} c_j \lambda_i^{\,j}, i = 1,2,\ldots, p. ; 0<h< 2/\delta_{max}$$

şeklinde yeni bir iterasyon tahmin edici tanımlayarak genelleştirilmiş inverse tahmin edici adını verdikleri bu tahmin edici ile EKK tahmin edicisini HKO matrisi kriterine göre karşılaştırdılar.

Troskie ve ark. (1994) de $y=X\beta+u$ modeli ile birlikte $H\beta+v=h$ stokastik ön bilgiyi düşündüler. Her ikisini birleştirerek

$$\begin{pmatrix} y \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ H \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

(4.11)

modelinden elde edilen Aitken tahmin edicisinin özel hali olarak $\hat{\beta}(k) = (X'X + kI)^{-1} X'y$ ridge tahmin ediciyi elde edip ridge rezidüleri incelediler.

Chipman (1999) da

$$\xi = \Psi\beta + \eta, \qquad E(\eta) = 0, \qquad E(\eta\eta') = \tau^2 \Theta$$

(4.12)

stokastik kısıtlamalar altında

$$\tilde{\beta}(\rho^2) = (X'\Omega^{-1}X + \rho^2 \Psi'\Theta^{-1}\Psi)^{-1} (X'\Omega^{-1}y + \rho^2 \Psi'\Theta^{-1}\xi)$$

(4.13)

biçiminde genelleştirilmiş ridge tahmin edici tanımladı. Burada $\rho^2 = \frac{\sigma}{\tau^2}$ dir. Genellikle bilinmemektedir. $\Psi = I, \Omega = \Theta = I$ için bildiğimiz basit ridge tahmin edici bulunur. Chipman kısıtlanmış genelleştirilmiş EKK ve genelleştirilmiş ridge tahmin edicilerini HKO matrisi kriterine göre karşılaştırdı.

Saleh ve Kibria (1993) de $\beta$ üzerinde $R\beta=r$ şeklinde ek bilgiye sahip olma durumunda

$$\beta^*=\hat{\beta}-S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}(R\hat{\beta}-r)$$

(4.14)

kısıtlı EKK tahmin edicisini kullanarak tanımlanan

$$\hat{\beta}_{PT} = I_{[0,c]}(u)\beta^* + I_{[c,\infty]}(u)\hat{\beta}$$

(4.15)

pre-test tahmin ediciyi ve Sarkar (1992) de tanımlanan

$$\tilde{\beta}^*(k) = W\beta^*$$

(4.16)

kısıtlı ridge regresyon tahmin ediciyi kullanarak aşağıdaki gibi pre- test ridge regresyon tahmin edici tanımladılar:

$$\tilde{\beta}_{PT}(k) = \begin{cases} W\hat{\beta}....H_0..\text{reddedilirse} \\ W\beta^*..H_0....\text{kabul..edilirse} \end{cases}$$

(4.17)

$H_o$: $\delta = R\beta - r = 0$ ya da $\delta \neq 0$ durumlarında kovaryans matrislerine ve HKO kriterine göre $\hat{\beta}_{PT}$ ve $\tilde{\beta}_{PT}(k)$ tahmin edicileri karşılaştırdılar.

Akdeniz (2001) de $H_0$: $\delta = 0$ hipotezi altında Var ($\hat{\beta}_{PT}$) - Var ($\tilde{\beta}_{PT}(k)$ nın n.n.d. olması için gerek ve yeter koşulun $\lambda_{max}(M^{-1}N) \leq 1$ olduğunu gösterdi. Burada

$$M=2I+kS^{-1}$$

ve

$$N=(SB+BS+kB)G_{q+2,n-p}(l_{1,\alpha};0), \quad B=S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}RS^{-1}$$

dir. Yani $\tilde{\beta}_{PT}(k)$ nin $\hat{\beta}_{PT}$ dan daha kötü olmadığına ilişkin örnekleme varyanslarına dayalı kriter verilmiştir. Burada M p.d. bir matris ve N simetrik bir matristir. Ayrıca $\delta \neq 0$ durumunda da benzer sonuç çıkarılmış ve Saleh ve Kibria(1993) deki hatalı sonuç belirtilmiştir.

Sakallıoğlu, Kaçıranlar ve Akdeniz (2001) de

$$\hat{\beta}_k=(X'X+kI)^{-1} \quad X'y \qquad (k>0)$$

(4.18)

ridge regresyon tahmin edicisi ve Liu (1993) de tanımlanan

$$\hat{\beta}_d=(X'X+I)^{-1}(X'y+d\hat{\beta})$$

(4.19)

yanlı tahmin edicinin (Liu tahmin edici olarak isimlendirilen) ikinci mertebeden moment matrislerini (HKO matrisleri) kullanarak d ve k nın çeşitli değerleri için karşılaştırdılar. Ayrıca benzer karşılaştırma Trenkler (1980) de verilen iterasyon tahmin edici ile de yapıldı. Karşılaştırmalar grafiksel olarak gösterildi.

Akdeniz ve Erol (2003) de $\hat{\beta}_K=(X'X+K)^{-1}X'y$ genelleştirilmiş ridge regresyon tahmin edici ile $\hat{\beta}_D=(X'X+I)^{-1}(X'y+D\hat{\beta})$ genelleştirilmiş Liu tahmin ediciyi HKO matrisi kriterine göre karşılaştırdılar. Ayrıca benzer karşılaştırmalar hemen hemen yansız genelleştirilmiş ridge tahmin edici

$$\tilde{\alpha}^*_R=\left[I-((\Lambda+K)^{-1}K)^2\right]\Lambda^{-1}Z'y$$

(4.20)

ile Akdeniz ve Kaçıranlar(1995) ve Akdeniz, Erol ve Öztürk (1999) de tanımlanan hemen hemen yansız genelleştirilmiş Liu tahmin edici

$$\tilde{\alpha}^*_D=\left[I-(\Lambda+I)^{-2}(I-D)^2\right]\Lambda^{-1}Z'y$$

(4.21)

için yapıldı. Burada $\Lambda$ köşegen elemanları $\lambda_i$ , i=1,2,...,p ler olan bir köşegen matristir.

**Kullanmaya hazır (Operational, feasible, adaptive) genelleştirilmiş ridge regresyon tahmin edici ve özellikleri**

$\hat{\beta}_K=(X'X+K)^{-1}X'y$ genelleştirilmiş ridge tahmin edicide $k_i$ ler yerine $k_{i(opt)}=\dfrac{\sigma^2}{\beta_i^{\,2}}$ i=1,2,...,p koyulduğunda $\sigma^2$ ve $\beta_i$ ler bilinmediğinden kullanışsız bir tahmin edici bulunur. Bu nedenle bu parametreler

$$S^2=\frac{(y-X\hat{\beta})'(y-X\hat{\beta})}{n-p}$$

ve $\hat{\beta}_i$ tahmin edicileri ile yer değiştirilir. Böylece $\tilde{\beta}_K=(X'X+\hat{K})^{-1}X'y$ kulanılabilir genelleştirilmiş ridge tahmin edici (KGRTE) bulunur. Bu yerine koyma bir tahmin edicinin optimallık özelliklerini bozar. Dwivedi ,Srivastava ve Hall (1980) de bu tür tahmin edicinin ilk iki momentini elde edip merkezi olmama parametresi ve serbestlik derecesinin çeşitli değerleri için relatif HKO ve relatif yanlılık teriminin durumunu incelediler. Srivastava ve Chatuverdi (1983) KGRTE' nin dağılım özelliklerini, Srivastava ve Giles (1991) KGRTE' nin HKO nın yansız tahminini, Ohtani (1993) dağılım ve yoğunluk fonksiyonlarını verdiler. Wan (1999) simetrik olmayan LINEX kayıp fonksiyonunu kullanarak uygulanabilir (feasible) genelleştirilmiş ridge regresyon tahmin edicinin özelliklerini inceledi. Akdeniz ve Erol (2003) de hemen hemen yansız genelleştirilmiş ridge regresyon tahmin edici ve hemen hemen yansız genelleştirilmiş Liu tahmin edici hata kareleri matrislerini kullanarak karşılaştırıldı. Veriye dayalı olarak tahmin edilmiş $\hat{k}$ ve $\hat{d}$ parametre tahminlerini kullanarak nümerik analiz yapıldı. Kibria (2003) genelleştirilmiş ridge regresyon yaklaşımına dayalı bazı yeni tahmin ediciler önerek bunların hata kareleri ölçütüne göre performanslarını simülasyon çalışması ile inceledi.

## 5. RİDGE TAHMİN EDİCİNİN UYGULANDIĞI BAZI ALANLAR

Ridge regresyon yönteminin uygulama alanlarının içinde, kimya mühendisliği, hava kirliliği, jeoloji, botanik, ekonomi, pazarlama, sosyoloji, hidroloji , meteoroloji ve diğer bir çok disiplin sayılabilir.

- Miller (1972) aggregate veri kullanarak seçmenlerle ilgili değişkenlik ölçümlerini incelerken verideki içilişkinin etkisini azaltmak için ridge regresyonu kullanmıştır.
- Anderson ve Scott (1974) hidrolojik açma-kapama -kontrol modeline ridge regresyon analizini uyguladılar. Kontrol değişkenlerinin iki kümesini kullanarak bir nehir üzerindeki iki açma-kapama istasyonunu incelediler: Ön tahmin yeteneği bakımından ridge regresyon analizi ile basit regresyon analizini karşılaştırdılar.
- Motor yağı sıcaklığı, tasarım ve motor çalıştıran yedi değişkenin lineer regresyonu ile ilişkilidir. Bu durumu gözönüne alarak açıklayıcı değişkenler arasında korelasyonların olması nedeniyle Gallopoulos (1974) ridge regresyon analizini kullandı.
- Brown ve Beattie (1975) üretim fonksiyonlarının uygulamalarında ekonomik parametrelerin tahminlerinin iyileştirilmesi için ridge regresyonu kullandılar.
- Gapinski ve Tuckman (1976) 1961-1974 yılları arasında Florida'daki turist trafiğinin analizii ve ön tahmini için seyahat isteği fonksiyonlarının incelenmesinde ridge kriterini kullandılar.
- Hızlı bir biçimde değişen ekonomik koşullar altında ekonometrik modellerin oluşturulmasında ekonometristler bağımsız değişkenler arasında içilişkiden kuşkulanabilirler. Bu durumu düşünerek Watson ve White (1976) faiz oranlarının değişken yapı göstermesi durumunda para talebinin tahmin edilmesi amacıyla ridge regresyonu kullandılar.
- Mahajan, Jain ve Bergier (1977) pazarlama modellerinde regresyon katsayılarının tahmininde, veride içilişki olması durumunda EKK tahmin yönteminin şişirilmiş tahminler vermesinin bir sonucu olarak ridge regresyon yöntemini kullandılar ve ridge regresyon analizinin yararını belirttiler.
- Kitanidis ve Bras (1979) yağış miktarı- yağmur sonrası suyun emilmeden toprak üstünde kalan kısmı, ile ilgili istatistiksel modellerde açıklayıcı

değişkenler arasında kaçınılmaz korelasyonların varlığında ridge regresyon tekniğini kullanarak tahminde kararlılık durumunu incelediler.

- Meisner (1979) kısa dönem kayıtlarından uzun dönem yağış miktarlarını tahmin etmek için ridge regresyonu kullandı.
- Maclaren (1980) İngiltere'de etlerin toptan satış fiyatlarının tahmin edilmesinde ridge regresyonu kullandı.
- Çabuk ve Çabuk (1991) 1986-1988 dönemindeki 31 aylık reklam harcamaları ve satış değerlerinden oluşan verileri kullanarak translog satış-reklam modeli kurdular. Standartlaştırılmış modelde X'X matrisinin en büyük öz değerinin en küçük öz değerine oranı K=(5, 3646)/(0,0125)=429 olduğundan çoklu içilişki problemi vardır. Bu nedenle
parametre tahminleri için ridge regresyon yöntemini kullandılar.

## KAYNAKLAR

Akdeniz, F. and Kaçıranlar , S. (1995). **On the almost unbiased generalized Liu estimator and unbiased estimation of the bias and MSE.** Commun. Statist.– Theory Meth., 24(7), 1789-1797.

Akdeniz, F., Erol, H. and Öztürk, F. (1999). **MSE comparisons of some biased estimators in linear regresson model.** Journal of Applied Statistical Science, 9(1), 73-85.

Akdeniz, F. (2001). **More on the pre-test estimator in ridge regression**. Commun. Statist.– Theory Meth., 31(6), 987-994.

Akdeniz , F. and Erol, H. (2001). **Ridge ve Liu tahmin edicilerin hata kareleri ortalaması matrislerinin karşılaştırılması.** 2. İstatistik Kongresi, 2-6 Mayıs 2001, Belek, Antalya.

Akdeniz, F. and Erol, H. (2003). **Mean squared error matriz comparisons of some biased estimators in linear regression**. Commun. Statist.-Theory Meth., 32(12), 2389-2413.

Alam, K. and Hawkes, J. S. (1978). **Estimation of regression coefficients**. Scand. J. Statist., 5, 169-172.

Anderson , D. A. and Scott , R.G.(1974). **The application of ridge regression analysis to a hydrologic target- control model**. Water Resources Bulletin, 10, 680-690.

Baye, M. R. and Parker, D. F. (1984). **Combining ridge and principal component regression.** Commun. Statist.-Theory Meth., 13(2), 197-205.

Belsley, D. A., Kuh,E. And Welsch, R. E. (1980). **Regression diagnostics identifying influential data and sources of collinearity**. John Wiley& Sons, New York.

Brown, W. G. and Beattie, B. R. (1975). **Improving estimates of economic parameters by use of ridge regression with production function applications.** American Journal of Agricultural Economics, 57, 21-32.

Chawla , J. S. and Jain, R. K. (1988). **Superiority of generalized ridge estimator over ordinary ridge estimator. Metron,** Vol. XLVI, 141-146.

Chipman, J. S. (1999). **Linear restrictions, rank reduction, and biased estimation in linear regression. Linear algebra and its Applications** ,289, 55-74.

Crouse , R. H. and Jin, C., and Hanumara , R. C. (1995). **Unbiased ridge estimation with prior information and ridge trace**. Commun. Statist.-Theor. Meth., 24(9), 2341-2354.

Çabuk, A. ve Çabuk, S. (1991). **Bir işletmede reklamın satışlar üzerindeki etkisinin translog satış reklam modeli ile incelenmesi.** Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 3(3), 115-125.

Demmpster, A. P. Schatzoff, M. and Wermut, N. (1977). **A simulation study of alternatives to ordinary least squares.** Journal of the American Statistical Association, 72, 77-91.

Draper, N. R. and Smith, H. (1981). **Applied Regression Analysis,** ($2^{nd}$ Ed.) New York: John Wiley.

Farebrother, R. W. (1976). **Further results on the mean square error of ridge regression**. Journal of Royal Statistical Society, B.38, 248-250.

Firinquetti, L. (1999). **A generalized ridge regression estimator and its finite sample properties**. Commun. Statist. – Theory Meth. 28(5), 1217-1229.

Firinquetti , L. and Rubio, H. (2000). **A note on the moments of stochastic shrinkage parameters in ridge regression**. Commun. Statist.-Simula. ,29(3), 955-970.

Foucart, Thierry (1999). **Stability of the inverse correlation matrix. Partial ridge regression.** Journal of Statistical Planning and Inference 77, 141-154.

Gallopoulos, N. E. (1974). **Temparatures of fluids in passenger car power trains**. Society of Automotive Engineers. Reprint# 740407 Automotive Engineering Congress, February .

Gapinski , J. H. and Tuckman, H. P. (1976). **Travel demand functions for Florida-bound tourists.** Transportation Research, 10, 267-274.

Gosling, B. J. and Puterman, M. L. (1985) **Ridge estimation in regression problems with autocorrelated errors: A monte carlo study**. Commun. Statist.- Simula. Computa. 14(3), 577-613..

Gruber, M. H. J. (1990). **Regression estimators A Comparative Study**. Academic Press, Boston.

Gruber, M. H. J . (1998). **Improving Efficiency by Shrinkage: The James- Stein and Ridge Regression Estimators.** Marcel Dekker, Inc. New York.

Gunst, R. F.and Mason, R. L. (1976). **Generalized mean squared error properties of regression estimators**. Commun. Statist. – Theory Meth. A5(15), 1501-1508.

Hemmerle , W. J. (1975). **Relations between ridge regression and eigenanalysis of the augmented correlation matrix.** Technometrics, 17, 477-480

Hoerl, A.E. and Kennard, R. W. (1970a). **Ridge regression. Biased estimation for non-orthogonal problems.** Technometrics, 12, 55-67.

Hoerl,A. E. ,Kennard, R. W. and Baldwin , K. F. (1975) . **Ridge regression: Some simulations.** Communications in Statistics ,4(2), 105-123.

Hoerl , A. E. and Kennard, R. W. (1976). **Ridge regression : Iterative estimation of the biasing parameter.** Commun. Statist.- Theory Meth. A5(1), 77-78.

Hoerl, A. E. and Kennard, R. W. (1981). **Ridge regression-1980 Advences, Algorithms, and Applications. American Journal of Mathematical and Management Sciences**, 1(1), 5-83.

Kaçıranlar, S. Sakallıoğlu , S. and Akdeniz, F (1998). **Mean squared error comparisons of the modified ridge regresssion estimator and the restricted ridgeregression estimator.** Commun. Statist.–Theory Meth, 27(1), 131-138.

Kadiyala, K. (1984). **A class of almost unbiased and efficient estimators of regression coefficients**. Economic Letters, 16,293-296.

Kadiyala , K. (1981). **Bounds for the biasing parameter in ridge regression.** Commun. Statist.-Theory Meth, ,A10,2369-2372.

Kibria, B. M. G. (2003). **Performance of some new ridge regression estimators. Commun. Statist.**- Theory Meth., 32(2), 419-435.

Kitanidis, P. K. and Bras, R. L. (1979). **Collinearity and stability in the estimation of rainfall-runoff model parameters**. Journal of Hydrology, 42, 91-108.

**Lawless, J. F. and Wang, P. (1976). A simulation study of ridge and other regression estimators. Commun. Statist. A5, 307-323.**

Lee, T. Z. And Campbell, D. B. (1985) **Selecting the optimum K in ridge regression**. Commun. Statist.- Theory Meth. 14(7), 1589-1604

Liu, Ke Jian (1993). **A new class of biased estimate in linear regression**. Commun. Statist. – Theory Meth., 22, 393-402.

Mahajan, V. Jain, A. K. and Bergier, M.(1977). **Parameter estimation in marketing models in the presence of multicollinearity: An application of ridge regression**. Journal of Marketing Research.,14, 586-591.

Maclaren, D. (1980) . **Forecasting wholesale prices of meats in the United Kingdom by ridge regression.** Journal of Agricultural Economics, XXXI, 15-27.

Markiewicz, A. (1996). Characterization of general ridge estimators. Statistics & Probability Letters 27, 145-148.

Marquardt, D.W. (1970). **Generalized inverses, ridge regression, biased linear estimation, and nonlinear estimation**. Technometrics, 12, 591-612.

Meisner, B. N. (1979). **Ridge regression—time extrapolation aplied to Hawaiian rainfall normals**. Journal of Applied Meteorology, 18, 904-912.

Miller, W. L. (1972). **Measures of electral change using aggregate data.** Journal of the Royal Statistical Society , Series A, 135, 122-142.

Nebebe, F. and Sim, A. B. (1990). **The relative performances of improved ridge estimators and an emprical Bayes estimator:** Some monte carlo results. Commun. Statist. – Theory Meth. ,19(9), 3469-3495.

Nomura, M.and Ohkubo, T. (1985). **A note on combining ridge and principal component regression.** Commun. Statist.-Theory Meth., 14, 2489-2493.

Ohtani, K (1986). **On small sample properties of the almost unbiased generalized ridge estimator**. Commun. Statist.-Theor. Meth. 15(5), 1571-1578.

Ohtani, K. (1993). **Distribution and density functions of the feasible generalized ridge regression estimator.** Commun. Statist.–Theory Meth, 22, 2733-2746.

Rao, C. R. (1976). **Estimation of parameters in a linear model**. Ann. Statist. 4, 1023-1037. Sakallıoğlu, S. and Akdeniz, F. (1998). Generalized inverse estimator and comparison with least squares estimator. Turkish Journal of Mathematics , 22(1), 77-84.

Sakallıoğlu, S. Kaçıranlar, S. and Akdeniz, F. (2001). **Mean squared error comparisons of some biased regression estimators.** Commun. Statist. –Theory Meth., 30(2),

Saleh, A. K. Md. E. and Kibria,B. M. G. (1993). **Performance of some new preliminary test ridge regression estimators and their properties.** Commun. Statist. –Theory Meth., 22(10), 2747-2764.

Sarkar, N. (1992). **A new estimator combining the ridge regression and the restricted least squares methods of estimation.** Commun. Statist.-Theory Meth. 21(7), 1987-2000.

Sarkar, N. (1996). **Mean square error matrix comparison of some estimators in linear regressions with multicollinearity**. Statistics & Probability Letters 30, 133-138.

Singh, B., Chaubey, Y.P. Dwivedi , T.D. (1986). **An almost unbiased ridge estimator**. Sankhyā, Ser. B. 48, 342-346.

Singh, B. and Chaubey, Y.P. (1987). **On some improved ridge estimators**. Statistische Hefte, 28, 53-67.

Srivastava ,V.K. and Chaturvedi, A. (1983). **Some properties of the distribution of an operational ridge estimator.** Metrika, 30, 227-237.

Srivastava, V. K. and Giles , D.E.A. (1991) . **Unbiased estimation of the mean squared error of the feasible generalised ridge regression estimator**. Commun. Statist.-Theory Meth., 20(8), 2375-2386

Swindel , B. F. (1976). **Good ridge estimators based on prior information**. Communications. in Statistics, 11, 1065-1075.

Tamarkin, M. (1982). **A simulation study of the stochastic ridge** k . Commun. Statist.- Simulation and Computation.11(2), 159-173

Theobald, C. M. (1974). **Generalizations of mean square error applied to ridge regression**. Jour. Royal Stat. Soc. Series B ,36, 103-106.

Trenkler, G. (1980). **Generalized mean squared error comparisons of biased regression estimators**. Commun. Statist.-Theory Meth. A9(12), 1247-1259.

Trenkler, G. (1984). **On the performance of biased estimators in the linear regression model with correlated or heteroscedastic errors**. Journal of Econometrics 25, 179-190.

Trenkler, G. (1985). **Mean square error matrix comparisons of estimators in linear regression.** Commun. Statist.- Theory Meth. 14(10), 2495-2509.

Troskie , C.G., Chalton, D. O., Stewart, T. J. and Jacobs, M.(1994). **Detection of outliers and influential observations in regression analysis using stochastic prior information.** Commun. Statist. – Theory Meth. 23(12), 3253-3476.

Troskie , C. G. and Chalton, D.O. (1996) . **A Bayesian estimate for the constants in ridge regression.** South African Statist. J. 30, 119-137 .

Vinod, H. D. and Ullah, A. (1981). **Recent Advances in Regression Methods**, NewYork: Dekker.

Wan, A. T. K. (1999). **A note on almost unbiased generalized ridge regression estimator under asymmetric loss**. J. Statist. Comput. Simul., 62, 411-421.

Watson, D. E. and White, K. J. (1976). **Forecasting the demand for money under changing term structure of interest rates: An application of ridge regression**. Southern Economic
Journal, 43, 1096-1105.