

Research Article

Received: date: 09.10.2024
Accepted: date: 31.08.2025
Published: date: 31.12.2025

Poisson Karma Dağılım Modeli Kullanılarak COVID-19 Verilerine Bir Uygulama: Türkiye Örneği

İnci Açıkgöz^{1*}

¹Faculty of Nursing, Nursing of Department, Ankara University, Ankara, Türkiye; acikgoz@science.ankara.edu.tr

Orcid: 0000-0002-9388-0478¹

*Correspondence: acikgoz@science.ankara.edu.tr

Öz: COVID-19 vakasının Türkiye’de ilk olarak görülmesinden itibaren zaman serileri, SIR, büyüme eğrisi vb. yöntemler kullanılarak bir çok tahmin ve modelleme üzerine çalışmalar yapılmıştır. COVID-19 verileri aşırı yayılım göstermektedir ve Türkiye’deki COVID-19 verilerine ilişkin Poisson karma dağılım modeli kullanılarak yapılan bir çalışmaya rastlanmamıştır. Poisson karma dağılım modeli kullanılarak COVID-19 ile ilgili parametre değerlerinin belirlenebileceğini ve aynı zamanda gelecekteki başka salgınların tahmin edilmesinde de bu yöntemin önem taşıyacağı düşünüldüğü için bu çalışma yapılmıştır. Çalışmada, Poisson karma (dağılım) modeli kullanılarak aylık vaka sayısı, ölen sayısı, iyileşen sayısı, yoğun bakımdaki hasta sayısı ve entübe hasta sayıları tahmin edilmiş, gerçek değerler ile tahmin edilen değerler Ortalama Mutlak Hata (MAE), Hata Kareler Ortalaması (MSE) ve Kök Ortalama Kare Hatası (RMSE) ölçütlerine göre karşılaştırılmıştır. Sağlık Bakanlığının günlük olarak açıkladığı 11 Mart ile 31 Haziran arasındaki COVID-19 verileri kullanılmıştır. Gerçek değerler ile tahmin edilen aylık ortalama değerler birbirine yakın bulunmuştur. Özellikle ölü sayısı ve yoğun bakımdaki hasta sayıları gerçek değerlere daha yakın tahmin edilmiştir. Bu durum, COVID-19 parametrelerinin Poisson karma (dağılım) modeli ile tahmin edilebileceğini ve muhtemel benzer salgınlarda da karma dağılım kullanılarak parametre değerlerinin tahmin edilebilir olduğunu göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: Poisson Karma Dağılım, EM Algoritması, Parametre Tahmini, COVID-19

An Application to COVID-19 Data Using Poisson Mixture Distribution Model: Türkiye Example

Abstract: Many studies on prediction and modeling have been carried out using methods. Time series, SIR, growth curve, etc. since the first case of COVID-19 was seen in Türkiye. COVID-19 data show excessive spread and there is no study found using the Poisson mixture distribution model on COVID-19 data in Türkiye. This study was conducted because it was thought that parameter values related to COVID-19 could be determined using the mixture distribution model and that this method would also be important in predicting other future epidemics. In the study, the monthly number of cases, deaths, the number of healed, number of patients in intensive care and intubated patients were estimated using the Poisson mixed (distribution) model, and the true values and estimated values were compared according to the Mean Absolute Error (MAE), Mean Square Error (MSE) and Root Mean Square Error (RMSE) criteria. COVID-19 data between March 11 and June 31, announced daily by the Ministry of Health, was used. The actual values and the estimated monthly average values were found to be close to each other. In particular, the number of deaths and the number of patients in intensive care were estimated closer to the true values. This shows that COVID-19 parameters can be estimated with the Poisson mixture (distribution) model, and parameter values can be estimated using the mixture distribution in possible similar outbreaks.

Keywords: Poisson Mixture Distributions; EM Algorithm; Parameter Estimation; COVID-19

1. Giriş

Karma dağılımlar son yıllarda tıp, mühendislik, ekonomi, zooloji, psikoloji, ziraat, eğitim gibi birçok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır. Karma dağılımlarda parametre tahminini ilk defa 1896'da Pearson ele almıştır. Cohen 1963 ve 1965 'de, iki Poisson dağılımının karmasını kullanarak parametre tahmini yapmıştır [1]. Daha sonraları çeşitli araştırmacılarda Poisson karma dağılım ile ilgili bir çok çalışma yapmıştır [2-14]. Karma dağılımlar, her biri ayrı bir ortalama ve standart sapma içeren, farklı oranlara sahip iki veya daha fazla bileşenden oluşur. Karma dağılımlarda parametreleri tahmin etmek için geliştirilmiş çeşitli yöntemler vardır. Bu yöntemlerden biri olan EM (Expectation-Maximization) algoritması, karma dağılımlarda olabilirlik fonksiyonunu maksimize eder[15,16].

SARS-Cov2'nin neden olduğu bir hastalık olan COVID-19, ilk olarak 2019 Aralık ayının sonunda Çin'in Wuhan kentinde tespit edilmiştir ve birkaç hafta içerisinde hızla yayılarak tüm dünyayı etkisi altına almıştır. COVID-19 olarak adlandırılan virüsün neden olduğu salgın, 11 Mart 2020'de DSÖ tarafından pandemi olarak tanımlandı [17].

Pandemi süreci içerisinde COVID-19 ile ilgili zaman serileri, SIR, büyüme eğrisi vb. yöntemler kullanılarak bir çok tahmin ve modelleme üzerine çalışmalar yapılmıştır [18-22]. Karma dağılım modeli kullanılarak yapılan çalışma sayısı azdır [23-29]. [30], Türkiye'de COVID-19 verilerinin tahmininde log-normal, gamma ve Weibull karma dağılım modeli kullanmışlardır. COVID-19 verilerinde varyans ortalamadan büyüktür. Varyansın ortalamadan büyük olduğu durumlarda aşırı yayılım söz konusudur. Bu durumlarda en çok Poisson dağılımı kullanılmaktadır. COVID-19 verileri tek başına Poisson dağılımı ile açıklanamayacağı için ve Türkiye'deki COVID-19 verilerine ilişkin Poisson karma dağılım modeli kullanılarak yapılan bir çalışmaya rastlanmamış olması ve gelecekte buna benzer salgınların tahmin edilmesinde de karma dağılım modelinin kullanılabileceği düşünüldüğü için bu çalışma yapılmıştır.

2. Materyal ve Yöntem

Çalışmada; Türkiye'de vakanın ilk görüldüğü 11 Mart 2020 ile 31 Haziran 2020 arasındaki Sağlık bakanlığı tarafından açıklanan günlük veriler [31] kullanılarak Poisson karma dağılım modeli ile bu tarihler arasındaki ortalama aylık vaka sayısı, ölen sayısı, iyileşen sayısı, yoğun bakımdaki hasta sayısı ve entübe hasta sayısı tahmin edilmiştir. Uygun karma dağılım modelini belirlemek için Akaike Bilgi Kriteri (AIC) ve Bayes Bilgi Kriteri kullanılmış (BIC) ve 4 bileşenli karma dağılım modelinin uygun olduğu belirlenmiştir. Bu tarihler arasındaki aylık ortalama değerler ile tahmin edilen değerler birbirine yakın bulunmuştur. Buradan yola çıkılarak, MATLAB programında Poisson karma dağılım modelinde en çok olabilirlik tahmin edicilerinden EM algoritması kullanılarak bir simülasyon çalışması yapılmıştır.

2.1. Sonlu karma dağılım modeli

Bir $\mathbf{X}$ rasgele değişkeninin veya vektörün olasılık (yoğunluk) fonksiyonu,

$$f(x) = \sum_{j=1}^k p_j f_j(x, \theta_j) \quad (1)$$

olmak üzere $\mathbf{X}$ 'e sonlu karma dağılıma sahiptir denir. Burada k bileşen sayısını, $f_j(x, \theta_j) : j$.

bileşenin olasılık (yoğunluk) fonksiyonunu ve p_j : karma dağılımın j . bileşeni için karma oranını

göstermektedir. Burada $0 < p_j < 1$ ($j = 1, 2, \dots, k$) olmak üzere, $\sum_{j=1}^k p_j = 1$ dir [32].

2.2. Poisson karma dağılımı

k bileşenli bir Poisson karma dağılımının olasılık fonksiyonu

$$P(x; \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{j=1}^k p_j \cdot \frac{\lambda_j^x \cdot \exp(-\lambda_j)}{x!}, \quad x = 0, 1, \dots \quad (2)$$

dır. Burada ($j = 1, 2, \dots, k$) olmak üzere, p_j : j . bileşenin karma oranı, λ_j : j . bileşenin ortalamasıdır.

2.3. EM algoritması (Expectation-Maximization)

E-M algoritması, E (Expectation) ve M (Maximization) olmak üzere iki aşamadan oluşan yinelemeli bir tahmin yöntemidir. Bir karma dağılımdaki parametrelerin en çok olabilirlik tahminlerini Φ^0 başlangıç tahmin değerinden itibaren t-yineleme sayısı olmak üzere yakınsama sağlanana kadar Φ 'yi güncelleyerek tahmin eder.

$$\begin{aligned} \text{E-aşaması: } Q(\Phi, \Phi^t) &= E_{\Phi(t)} [\ln L(\Phi) | Y] \\ \text{M- aşaması: } \Phi^{(t+1)} &= \arg \max_{\Phi} Q(\Phi, \Phi^t) \end{aligned} \quad (3)$$

biçimindedir [33].

2.4. Poisson karma dağılımlarda EM algoritması

Karma dağılımlarda EM (Expectation-Maximization) algoritması, olabilirlik fonksiyonunu maksimize etmek için kullanılır. [34], EM algoritmasının genel biçimini oluşturmuşlardır.

Olasılık fonksiyonu (2) Eşitliği ile verilen bir boyutlu k-bileşenli Poisson karma bir dağılımının olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} L(\Phi) &= \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^k p_j f(x_i; \theta_j) \\ &= \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^k p_j \cdot \frac{\lambda_j^{x_i} \exp(-\lambda_j)}{x_i!} \quad , \quad j = 1, \dots, k \quad , \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4)$$

olmak üzere logaritmik olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} \ln L(\Phi) &= \sum_{i=1}^n \ln \sum_{j=1}^k p_j f(x_i; \theta_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \sum_{j=1}^k p_j \frac{\lambda_j^{x_i} \exp(-\lambda_j)}{x_i!} \end{aligned} \quad (5)$$

biçimindedir. Olabilirlik fonksiyonu maksimize edilerek,

$$\hat{p}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{P}(j | x_i) \quad (6)$$

$$\hat{\lambda}_j = \frac{1}{n \hat{p}_j} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \hat{P}(j | x_i) \quad (7)$$

bulunur. Burada,

$$\hat{P}(j | x_i) = \frac{\hat{p}_j \cdot P_j(x, \hat{\lambda}_j)}{P(x, \hat{p}, \hat{\lambda})} \quad (8)$$

dır [1, 15, 35, 36].

3. Bulgular

Çalışmada; Türkiye’de COVID-19 vakasının ilk görüldüğü 11 Mart 2020 ile 31 Haziran 2020 tarihleri arasındaki (Sağlık Bakanlığı tarafından açıklanan) yaklaşık 4 ayın günlük vaka sayısı, ölen sayısı, iyileşen sayısı, yoğun bakımdaki hasta sayısı ve entübe edilen hasta sayısı verileri kullanılmıştır [31]. Bu verilere ilişkin tanımlayıcı istatistikler Tablo 1. de verilmiştir ve verilerde aşırı yayılım olduğu görülmektedir. Bu nedenle COVID-19 verilerinin parametrelerinin tahmininde poisson karma dağılım modeli kullanılmıştır.

Tablo 1. Mart-Haziran 2020 tarihleri arasındaki COVID -9 vakalarının tanımlayıcı istatistikleri

Vakalar Gün sayısı=103	Ortalama	Standart sapma	Ortanca
Yeni Vaka	1768	1262,01	1429
Ölü Sayısı	45	37,17	28
İyileşen Sayısı	1544	1451,36	1302
Yoğun Bakım Hasta Sayısı	1088	447,35	963
Entübe sayısı	504	360,60	385

Poisson karma dağılım modelinin uygun bileşen sayısı Akaike Bilgi Kriteri (AIC) ve Bayes Bilgi Kriteri (BIC) ile belirlenmiştir. k bileşenli bir model için

$$AIC = -2 \ln L(\Phi) + 2k ,$$

$$BIC = -2 \ln L(\Phi) + \ln(n)k \quad (9)$$

formülleriyle hesaplanır. Burada $L(\Phi)$, karma dağılım modelinin olabilirlik fonksiyonu değeri, n gözlem sayısıdır. En küçük değere sahip AIC ve BIC değerleri en uygun modeli belirlemektedir. Çalışmada her iki kritere göre de en uygun modelin 4 bileşenli olduğu saptanmıştır (Tablo 2.).

Tablo 2. Mart-Haziran 2020 tarihleri arasındaki Covid 19 vakalarının BIC ve AIC değerleri

Vakalar	Bileşen sayısı	$\ln L(\Phi)$	AIC	BIC
Yeni Vaka	k=2	-760,4016	1530	1524
	k=3	-726,9873	152429	1084,40
	k=4	-310,3196	629,7827	628,7391
Ölü Sayısı	k=2	-539,1828	1087,70	1084,40
	k=3	-291,6495	591,2991	592,6260
	k=4	-54,7064	113,4127	118,7396
İyileşen Sayısı	k=2	-729,5195	1463,00	1468,20
	k=3	-539,1828	1087,50	1084,40
	k=4	-200,2463	408,4926	409,6421
Yoğun Bakım Hasta Sayısı	k=2	-484,8436	973,6873	978,8367
	k=3	-338,2431	685,6356	682,4862
	k=4	-200,2463	408,4926	409,6421
Entübe Sayısı	k=2	-200,2463	408,4926	409,6421
	k=3	-8,7162	21,4324	26,5818
	k=4	-5,5782	17,1564	20,3058

Mart-Haziran 2020 tarihleri arasındaki 103 günlük vaka sayısı, ölen sayısı, iyileşen sayısı, yoğun bakımdaki hasta sayısı ve entübe edilen hasta sayısının aylık ortalama değerleri MATLAB programında tek değişkenli 4 bileşenli poisson karma dağılım modeli oluşturularak, en çok olabilirlik yöntemlerinden EM algoritması ile tahmin edilmiştir. Tahmin edilen değişkenlerin parametre değerleri ile gerçek değerlerin parametre değerleri Ortalama Mutlak Hata (MAE), Hata Kareler Ortalaması (MSE) ve Kök Ortalama Kare Hatası (RMSE) ölçütlerine göre karşılaştırılmış ve grafikleri çizilmiştir (Tablo 3., Şekil 1.).

y_i gerçek değer, y'_i tahmin değeri olmak üzere, tahmin ölçütleri

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - y'_i| \quad (10)$$

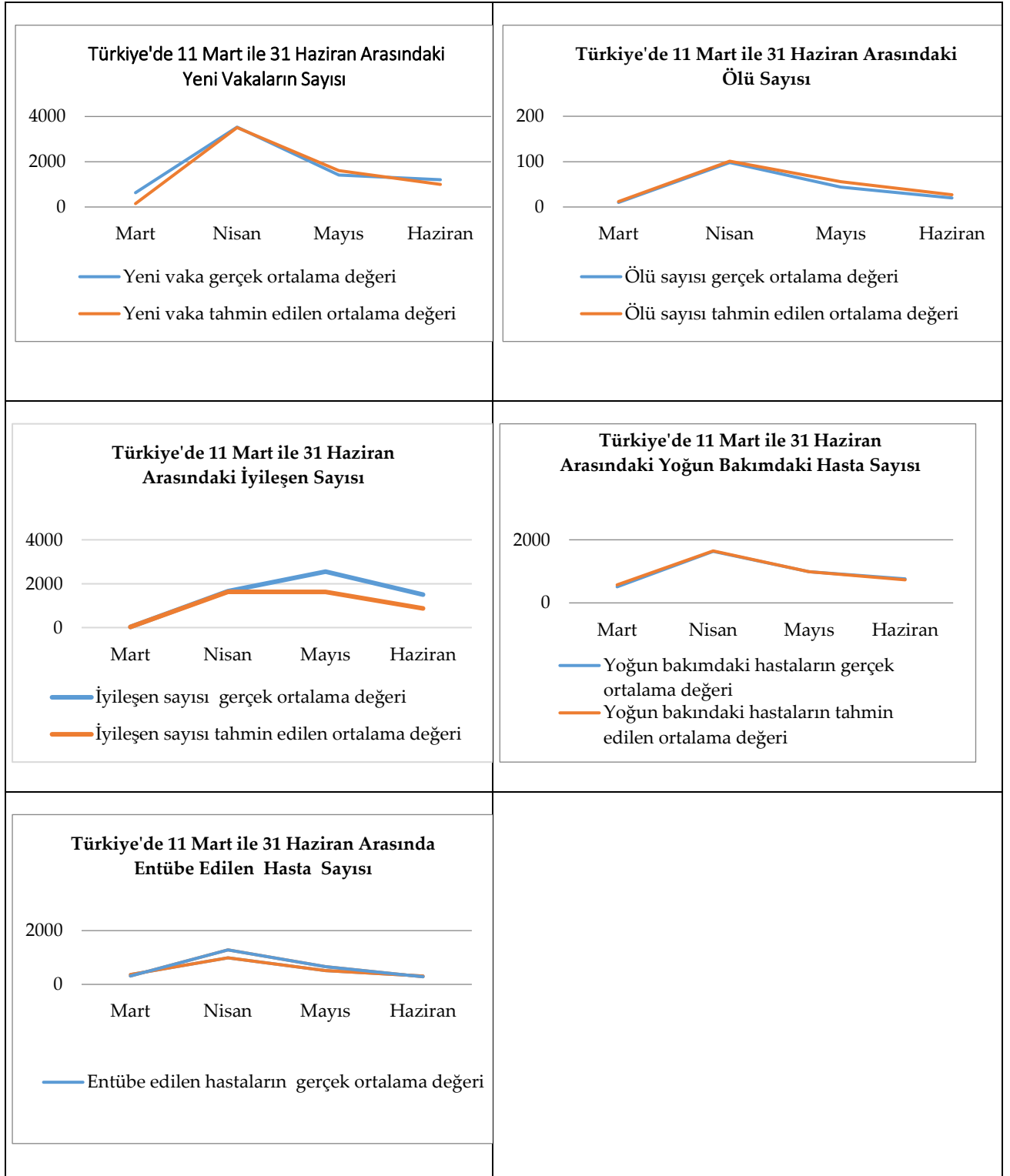
$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - y'_i)^2 \quad (11)$$

$$RMSE = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - y'_i)^2} \quad (12)$$

formülleriyle hesaplanır. Burada, n gözlem sayısıdır.

Tablo 3. Mart-Haziran 2020 tarihleri arasındaki Covid 19 vakalarının aylık gerçek ortalama değerleri ile tahmin edilen ortalama değerleri (p_j : j. bileşenin karma oranı, λ_j : j. bileşenin ortalaması ($j = 1,2,3,4$))

Vakalar	Aylar		Gerçek Değerler	Tahmin Değerleri	MAE	MSE	RMSE
Yeni Vaka	Mart	λ_1	631	149	0.6179	2.5200	1.2328
	Nisan	p_1	0.19	0.14	0.0001	0.0000	0.0000
		λ_2	3532	3511	0.0029	4.7204	2.1726
	Mayıs	p_2	0.27	0.32	0.0000	0.0000	0.0000
		λ_3	1410	1605	0.0646	392.0103	19.7992
	Haziran	p_3	0.27	0.27	0.0000	0.0000	0.0000
		λ_4	1206	1000	0.0933	437.4845	20.9161
		p_4	0.27	0.27	0.0000	0.0000	0.0000
Ölü Sayısı	Mart	λ_1	10	12	0.0900	0.0377	0.1941
		p_1	0.19	0.18	0.0004	0.0000	0.0000
	Nisan	λ_2	98	101	0.0150	0.0804	0.2835
		p_2	0.27	0.22	0.0002	0.0000	0.0048
	Mayıs	λ_3	44	56	0.1200	1.3501	1.1619
		p_3	0.27	0.35	0.0008	0.0000	0.0000
	Haziran	λ_4	20	27	0.1489	0.4402	0.6634
		p_4	0.27	0.25	0.0004	0.0000	0.0000
İyileşen Sayısı	Mart	λ_1	29	29	0.0000	0.0000	0.0000
		p_1	0.19	0.19	0.0000	0.0000	0.0000
	Nisan	λ_2	1654	1629	0.0076	5.8961	2.4282
		p_2	0.27	0.22	0.0001	0.0000	0.0000
	Mayıs	λ_3	2551	1628	0.2208	8.7702	2.9614
		p_3	0.27	0.23	0.0001	0.0000	0.0000
	Haziran	λ_4	1504	878	0.2628	8.0366	2.8349
		p_4	0.27	0.36	0.0003	0.0000	0.0000
Yoğun Bakım Hasta Sayısı	Mart	λ_1	510	572	0.0573	36.2641	6.0219
		p_1	0.19	0.16	0.0002	0.0000	0.0000
	Nisan	λ_2	1634	1649	0.0045	2.3005	1.5167
		p_2	0.27	0.33	0.0001	0.0000	0.0000
	Mayıs	λ_3	991	991	0.0000	0.0000	0.0000
		p_3	0.27	0.33	0.0003	0.0000	0.0000
	Haziran	λ_4	759	730	0.0194	7.9332	2.8165
		p_4	0.27	0.18	0.0006	0.0000	0.0000
Entübe Sayısı	Mart	λ_1	365	314	0.0751	24.5302	4.9527
		p_1	0.19	0.16	0.0001	0.0000	0.0000
	Nisan	λ_2	988	1278	0.1279	705.0813	26.5533
		p_2	0.27	0.33	0.0000	0.0000	0.0000
	Mayıs	λ_3	512	658	0.1247	201.0940	14.1807
		p_3	0.27	0.35	0.0001	0.0000	0.0000
	Haziran	λ_4	310	283	0.0455	6.8772	2.6224
		p_4	0.27	0.16	0.0001	0.0001	0.0106



Şekil 1. Mart-Haziran 2020 tarihleri arasındaki COVID-19 vakalarının aylık gerçek değerleri ile MAE ölçütüne göre tahmin edilen ortalama değerlerinin grafiği

Yapılan tahmin sonucunda parametreleri MAE ölçütünün, MSE ve RMSE ölçütlerinden daha iyi tahmin ettiği görülmektedir. MAE ölçütüne göre, Nisan ayında ortalama yeni vaka sayısı ve ölü sayısı, mart ayında ortalama iyileşen hasta sayısı, Mayıs ve Nisan aylarında ortalama yoğun bakımdaki hasta sayısı, Haziran ve Mart aylarında da ortalama Entübe edilen hasta sayısı daha iyi tahmin edilmiştir. Karma oranları ise, genelde mevcut ayların hepsinde gerçek değerlere yakın bulunmuştur. Özellikle ölü sayısı ve yoğun bakımdaki hasta sayıları gerçek değerlere daha yakın tahmin edilmiştir.

Türkiye’de yaklaşık 4 aylık bu süre içerisinde 5 değişkenin aylık ortalama gerçek ve tahmin edilen değerleri genelde Nisan ayında maksimum (en büyük) değerdedir. Bu süreçte maske, hijyen, kapanma gibi alınan birçok önlemin etkisiyle bu değerlerde Mayıs ayında bir azalma olmuş ve Haziran ayında minimum değere ulaşmıştır. (Tablo 3., Şekil 1.).

Parametreleri MAE ölçütü, diğer ölçütlere göre daha iyi tahmin ettiği için COVID-19 vakalarının aylık gerçek değerleri ile MAE ölçütüne göre tahmin edilen ortalama değerlerinin grafiği alınmıştır (Şekil1.).

4. Tartışma ve Sonuç

Poisson karma dağılımlar, sağlık alanında tahmin ve modelleme amacıyla yaygın olarak kullanılmaktadır. Salgınlarda, salgınların önlenmesini sağlamak, yayılımını azaltabilmek ve gelecekte başka salgınların dağılımını belirleyerek gerekli önlemleri alabilmek son derece önemlidir. Bu amaçla salgınların durumunu belirleyebilmek ve tahmin edebilmek için matematiksel ve istatistiksel modellemeler yapılır. Ülkemizde de pandemi döneminde COVID-19 ile ilgili çeşitli modellemeler yapılmıştır.

[37], 27 Mart 2020 ile 17 Ocak 2021 tarihleri arasında 297 günlük COVID-19 verilerini kullanarak uygulamalı ağ tabanlı bulanık mantık çıkarım sistemi ve yapay sinir ağları ile Türkiye’de gelecek 5 gün için COVID-19 vefat sayılarını %96 doğruluk oranı ile tahmin etmişlerdir. [38], büyüme eğrileri ve zaman serisi analizini kullanmışlar ve Türkiye’de ilk bir aylık verilerden hareketle elde ettikleri tahmin sonucunda toplam vaka sayısının ve toplam ölüm sayısının öngörülmesinde üstel düzleştirme (Box-cox) yönteminin kullanılmasının uygun olabileceği sonucuna varmışlardır. [20], 11 Mart 2020- 19 Mayıs 2020 tarihleri arasındaki COVID-19 verilerini kullanarak lojistik büyüme ve üstel büyüme modelleri ile Türkiye’de covid 19 vakalarına ilişkin büyümeyi tanımlayan bir istatistiksel model oluşturmuşlardır. [21], 24 Mart-7 Nisan 2020 tarihleri arasındaki verileri kullanarak Nisan ayı sonuna kadar Poisson regresyon yöntemiyle yoğun bakım yatak sayısı, entübesayısı gibi hastanelerde verilecek hizmet alt yapı gereksinimlerini tahmin etmişlerdir. [22], Türkiye için 19 Mart 2020 verilerini inceleyerek 20 Mart 2020 dahil 10 günlük birikimli pozitif vaka sayıları ve birikimli ölüm sayılarını kübik model ile tahmin etmişlerdir. [19], Türkiye’de 11 Mart-28 Ekim 2020 COVID-19 prevalansını incelemiş ve gelecekteki vakaların ve ölümlerin sayısını makine öğrenme yöntemiyle tahmin etmişlerdir. [30], Mart-Mayıs 2020 tarihleri arasındaki 3 aylık günlük pozitif vaka sayılarını alarak Türkiye’de COVID-19 durumunu log normal, gamma ve weibull karma dağılımını kullanarak modellemişler ve parametreleri tahmin etmişlerdir. Tahmin sonucunda; AIC, BIC uyum iyiliği sonuçlarına göre 3 bileşenli gamma dağılım modelinin en iyi model olduğunu saptamışlardır.

Çalışmada, Türkiye’de COVID-19 vakasının ilk görüldüğü tarihten itibaren 4 aylık (11 Mart 2020 ile 31 Haziran 2020) veriler kullanılarak günlük vaka sayısı, ölen sayısı, iyileşen sayısı, yoğun bakımdaki hasta sayısı ve entübe hasta sayısı olmak üzere 5 değişkenin aylık ortalama değerleri tek değişkenli 4 bileşenli poisson karma dağılım modeli oluşturularak, en çok olabilirlik yöntemlerinden EM algoritması ile tahmin edilmiştir. Gerçek değerler ile tahmin edilen değerler OMH ölçütüne göre birbirine yakın bulunmuştur. Çalışmamız; pandemi döneminde farklı tarihler arasında, farklı yöntemler kullanılarak yapılan literatürdeki bu çalışmalarla benzerlik göstermektedir. Dolayısıyla, Poisson karma dağılım modeli ile COVID-19 ve gelecekteki başka salgınların parametrelerinin tahmin edilebileceği söylenebilir. Günümüzde COVID-19’un etkisi her ne kadar azalmış olsa da her geçen gün başka virüslerin ortaya çıktığı görülmektedir. Bu nedenle Poisson karma dağılım modelinin gelecekteki başka salgınların tahmin edilmesinde de önem taşıyacağı düşünülmektedir.

Finansman: Bu araştırma dışarıdan fon almadı.

Conflicts of Interest: Çıkar çatışması yoktur.

Kaynakça

- [1] B. S. Everitt and D.J. Hand, "Finite mixture distributions", Chapman and Hall, London, 1981.
- [2] M. K., Roy and S. Rahman, M.M. Ali, "A Class of Poisson Mixed Distributions", Journal of Information and Optimization sciences, vol.13, pp.207–208, 1992.

- [3] T. Brijs, D. Karlis, G. Swinnen, K. Vanhoof, G. Wets and P. Manchanda, "A Multivariate Poisson Mixture Model for Marketing Applications", *Statistica Neerlandica*, vol.58, no.3, pp. 322-348, 2004.
- [4] D. Karlis and E. Xekalaki, "Mixed Poisson Distributions", *International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique*, pp.35-58, 2005.
- [5] S. D. Zuyderduyn, "Statistical Analysis and Significance Testing of Serial Analysis of Gene Expression Data Using a Poisson Mixture Model", *BMC Bioinformatics*, vol.8, pp. 1-14, 2007.
- [6] D. Karlis and M. Rahmouni, "Analysis of Defaulters' Behaviour Using the Poisson-Mixture Approach", *IMA Journal of Management Mathematics*, vol.18, no.3, pp. 297-311, 2007.
- [7] B. J. Park and D. Lord, "Application of Finite Mixture Models for Vehicle Crash Data Analysis", *Accident Analysis & Prevention*, vol.41, no.4, pp. 683-691, 2009.
- [8] I. Chang and S. W. Kim, "Modelling for Identifying Accident-Prone Spots: Bayesian Approach With a Poisson Mixture Model", *KSCE Journal of Civil Engineering*, vol.16, pp.441-449, 2012.
- [9] R. R. Jayasekare, R. Gill and K. Lee, "Modeling Discrete Stock Price Changes Using a Mixture of Poisson Distributions", *Journal of the Korean Statistical Society*, vol.45, no.3, pp. 409-421, 2016.
- [10] J. Zhang and K. Hirakawa, "Improved Denoising Via Poisson Mixture Modeling of Image Sensor Noise", *IEEE Transactions on Image Processing*, vol.26, no.4, pp.1565-1578, 2017.
- [11] I. Simeunović, M. Balaban, D. Bodroža. "Pricing automobile insurance using mixed Poisson distributions", *Industrija*, vol. 46, no. 1, pp. 61-78, 2018.
- [12] M. Habibi, A. Asgharzadeh. "A new mixed Poisson distribution: modeling and applications", *Journal of Testing and Evaluation*, vol. 46, no. 4, pp. 1728-1740, 2018.
- [13] S.H. Ong, W.J. Lee, Y.C. Low. "A general method of computing mixed Poisson probabilities by Monte Carlo sampling", *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 170, pp. 98-106, 2020.
- [14] N. Uncu, M. Koyuncu, "An improved emergency medical service system simulation-optimization model with Poisson mixture distribution". *Journal of Engineering Research*, vol.11, no.3, 2307-1877, 2023.
- [15] İ. Açıkgoz, "Sonlu karma dağılımlarda parametre tahmini", *Doktora Tezi*, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı, Ankara, 2007.
- [16] İ. Açıkgoz, "Parameter Estimation With Profile Likelihood Method and Penalized EM Algorithm in Normal Mixture Distributions". *Journal of Statistics & Management Systems*, vol. 21, no. 7, pp.1211-1228, 2018.
- [17] World Health Organization, 2020. Coronavirus Disease (COVID-19) Pandemic. Geneva, Switzerland: WHO. Available at: www.who.int/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019. Accessed September 1, 2020.
- [18] Chakraborty, J. Chen, A. Desvars-Larrive, P. Klimek, E. F. Tames, D. Garcia, ... and P. Turchin, "Analyzing covid-19 data using sird models". *medRxiv*, 2020-05.
- [19] A. Uçar, Ş. Arslan and Y. Özdemir, "Nowcasting and forecasting the spread of COVID-19 and healthcare demand in Turkey, a modelling study". *medRxiv*, 2020-04.
- [20] Ş. N. Şencan, B. Şencan, M. Borazan Çelikbıçak, D. Arslan, E. S. Özkan, A. Ş. Gökçen, R. B. Çiftçi, İ. Arıkan, B. Uğur, H. Şahin, A. E. Coşkun, H. Konşuk Ünlü and S. Aktaş, "Lojistik Büyüme ve Üstel Büyüme Modelleri ile Türkiye'de COVID-19 Modellemesi", *Nicel Bilimler Dergisi*, vol.2, no.1, pp. 1-18, 2020.
- [21] H. Ankaralı and S. Ankaralı, "COVID-19 Salgını için Türkiye'de Nisan Ayı Sonuna Kadar İhtiyaç Duyulan Yoğun Bakım Yatak Sayısı ve Hastane Kapasitesinin Dolaylı Tahmini", *Türk Yoğun Bakım Dergisi*, 2020.
- [22] H. Ankaralı and S. Ankaralı and N. Erarslan, "COVID-19, SARS-CoV2, enfeksiyonu: güncel epidemiyolojik analiz ve hastalık seyrinin modellemesi", *Anatolian Clinic the Journal of Medical Sciences*, vol.25(Special Issue on COVID 19), pp.1-22, 2020.
- [23] A. Singhal, P. Singh, B. Lall and S. D. Joshi, "Modeling and prediction of COVID-19 pandemic using Gaussian mixture model", *Chaos, Solitons & Fractals*, vol.138, 110023, 2020.
- [24] N. Mamode Khan, A. D. Soobhug and M. Heenaye-Mamode Khan, "Studying the trend of the novel coronavirus series in Mauritius and its implications", *PloS one*, vol.15, no.7, e0235730, 2020.
- [25] M. K. J. Arti and A. Wilinski, "Mathematical modeling and estimation for next wave of COVID-19 in Poland", *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, pp.1-7, 2021.
- [26] C. Kremer, A. Torneri, S. Boesmans, H. Meuwissen, S. Verdonchot, K. Vanden Driessche, ... and N. Hens, "Quantifying superspreading for COVID-19 using Poisson mixture distributions", *Scientific reports*, vol.11, no.1, 14107, 2021.
- [27] N. A. Kaciroti, C. Lumeng, V. Parekh and M. L. Boulton, "A bayesian mixture model for predicting the COVID-19 related mortality in the United States", *The American Journal of Tropical Medicine and Hygiene*, vol.104, no.4, 1484, 2021.
- [28] T. N. Sindhu, Z. Hussain, N. Alotaibi and T. Muhammad, "Estimation method of mixture distribution and modeling of COVID-19 pandemic", *Aims Math*, vol.7, no.6, 9926-9956, 2022.
- [29] M. Campolieti and A. Ramos, "The distribution of COVID-19 mortality", *Infectious Disease Modelling*, vol.7, no.4, pp. 856-873, 2022.
- [30] Fahrizal, Hendri, Arisman Adnan, and Rado Yendra. "Mixture Distribution for Modeling Turkey Covid-19 Case." *International Journal of Mathematics Trends and Technology-IJMTT*, vol.69, no.1, pp. 56-61, 2023.
- [31] T.C. Sağlık Bakanlığı Bilgilendirme Platformu., Available at: <https://covid19.saglik.gov.tr/TR-66935/genel-koronavirus-tablosu.html>
- [32] G. McLachlan and D. Peel, "Finite mixture models", John Wiley & Sons, Inc., Canada, 2000.
- [33] G. J. McLachlan and T. Krishnan, "The EM Algorithm and Extensions", Wiley series in probability and statistics, Canada, 1997.
- [34] A. P. Dempster, N. M. Laird and D. B. Rubin, "Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm", *Journal of the royal statistical society. Series B (methodological)* vol. 39, no.1, pp.1-38, 1977.
- [35] T. Brijs, D. Karlis, G. Swinnen, K. Vanhoof, G. Wets, P. Manchanda. "A multivariate Poisson mixture model for marketing applications". *Statistica Neerlandica*, vol.58, no.3, 322-348, (2004).
- [36] Q. Wang, G. Guo, G. Qian, X. Jiang. "Distributed online expectation-maximization algorithm for Poisson mixture model". *Applied Mathematical Modelling*, 124, 734-748, 2023.
- [37] T. Turan, G. Turan and K. Ö. S. E. Utku, "Uyarlamalı Ağ Tabanlı Bulanık Mantık Çıkarım Sistemi ve Yapay Sinir Ağları ile Türkiye'deki COVID-19 Vefat Sayısının Tahmin Edilmesi", *Bilişim Teknolojileri Dergisi*, vol.15, no.2, pp. 97-105, 2022.
- [38] B. Ergül, A. A. Yavuz, E. G. Aşık and B. Kalay, "Dünya'da ve Türkiye'de nisan ayı itibarıyla COVID-19 salgın verilerinin istatistiksel değerlendirilmesi", *Anadolu Kliniği Tıp Bilimleri Dergisi*, vol. 25, no.1, pp. 130-141, 2020.