



Volterra integral denklemlerinin ve Volterra integro-diferensiyel denklemlerinin G_r -dönüşümü kullanılarak çözümü

Adil Mısıır^{*1} , İslam Qasım Abdullah Al-Salih² 

¹Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06500, Ankara, Türkiye

²Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, 06500, Ankara, Türkiye

Öne Çıkanlar

- Denklem çözümlerinde integral operatörlerinin önemli bir rolü vardır.
- G_r - integral dönüşümü ve ondan türetilen integral dönüşümleri verilmiştir.
- G_r - integral dönüşümü yardımıyla denklemlerinin çözülebileceği gösterilmiştir.

Makale Bilgileri

Geliş: 18/10/2024
Kabul: 07/04/2025

Anahtar Kelimeler

Volterra integral denklemleri,
Volterra integro-diferensiyel denklemleri
 G_r -dönüşümü

Öz

Volterra integral denklemleri ve Volterra integro-diferensiyel denklemleri, birçok farklı mühendislik ve bilimsel problemin oldukça genel temsilleri olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu makalede yazarlar, lineer Volterra integral denklemlerini ve lineer Volterra integro-diferensiyel denklemlerini çözmek için yeni geliştirilen ve G_r -dönüşümü olarak adlandırılan bir hesaplama algoritmasını tanıtmaktadırlar. Daha sonra birkaç örnekle G_r -dönüşümünün her iki denklem türünü çözmekteki verimliliğini göstermektedirler.

On the solution of Volterra integral equations and Volterra integro-differential equations by using the G_r -transform

Highlights

- The integral operators play an important role in equation solutions
- The G_r - integral transformation and the integral transformations derived from it are provided.
- It has been demonstrated equations can be solved using the G_r -integral transform.

Article Info

Received: 18/10/2024
Accepted: 07/04/2025

Keywords

Volterra integral equations,
Volterra integro-differential equations,
 G_r -transform

Abstract

In this respect, it turns out that Volterra integral equations and Volterra integro-differential equations are quite general representations of many different engineering and scientific problems. In this paper, the authors introduce a newly developed G_r -transform computational algorithm to solve linear Volterra integral equations and linear Volterra integro-differential equations. We outline the general concept of the G_r -transform through several examples to demonstrate its efficiency in solving both types of equations.

1. GİRİŞ

İntegral denklemleri, matematiksel analizde, bilinmeyen bir fonksiyonun bir integral ifadesi içinde yer aldığı denklemler olarak tanımlanır. Bu denklemler, diferensiyel denklemlerle yakından ilişkili olup çoğu zaman fizik, mühendislik, biyoloji ve ekonomi gibi alanlardaki karmaşık sistemlerin modellenmesinde kullanılır. İntegral denklemleri üzerine ilk çalışmalar 18. yüzyılda başlamış olup, bu alandaki önemli katkılardan biri İsviçreli matematikçi Daniel Bernoulli'ye aittir. Ancak, integral denklemleri modern anlamda inceleyen ve sınıflandıran ilk matematikçilerden biri, 19. yüzyılın sonlarında bu alanda derinlemesine çalışmalar yapan Vito Volterra'dır.

Volterra integral denklemleri, bilinmeyen fonksiyonun bir üst sınır olarak yer aldığı çözümlerle karakterize ederken Volterra integro-diferansiyel denklemleri, hem integral hem de türev terimlerini birleştirir ve daha karmaşık sistemlerin modellenmesini sağlar. Volterra integral ve integro-diferansiyel denklemleri, matematik ve uygulamalı bilimlerde köklü bir yere sahiptir. Vito Volterra'nın çalışmaları, bu alandaki temel kavramların gelişimini sağlamış ve bilimsel ilerlemeye katkıda bulunmuştur. Bu denklemler, hala aktif bir araştırma konusu olmanın yanı sıra, yeni teknolojik uygulamaların temelini oluşturmaya devam etmektedir. İntegral ve integro-diferansiyel denklemler için çözüm yöntemleri, analitik ve sayısal yöntemler olmak üzere iki ana grupta incelenir. Analitik yöntemlere örnek olarak ayrıştırma yöntemleri, Laplace ve Fourier dönüşümleri ve seri çözüm yöntemleri verilebilir. Sayısal yöntemlere örnek olarak da adım yöntemleri, kollokasyon yöntemi ve iteratif yöntemler verilebilir. İntegral ve integro-diferansiyel denklemlerinin kesin çözümünü bulmak zor olduğundan, yüksek hassasiyetli sayısal çözümleri sıklıkla incelenir. İntegral ve integro-diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için [1-5] ve bunların referanslarına bakılabilir.

Volterra integral denklemleri, lineer viskoelastisite [6], süper akışkanlık teorisi [7], popülasyon dinamiklerinin incelenmesi [8,9], kalıtsal süreçler [10] ve geometrik olasılık [11]; yenilenme teorisi [12], salgınlar teorisi [13], tel titreşimlerinin sönümlenmesi [14], viskoelastik gerilme analizi [15] ve parçacık istatistikleri [16] gibi alanlarda kullanılmaktadır. Bu nedenle, araştırmacılar, özellikle Volterra integral denklemleri olmak üzere diferensiyel ve integro-diferansiyel denklemlerle başa çıkmada bu denklemler üzerinde etkili oldukları için, integral dönüşümlerini kullanmaktadırlar. η sıfırdan farklı bir sabit, $w(h)$ bilinmeyen fonksiyon, $K(h, p)$ integral operatörünün çekirdek fonksiyonu ve $f(h)$ fonksiyonu, verilen reel değerli fonksiyon olmak üzere ikinci tür lineer Volterra integral denklemi

$$w(h) = f(h) + \eta \int_0^h K(h, p) w(p) dp \quad (1.1)$$

şekilde yazılır [17-20]. Birinci tür lineer Volterra integral denklemi

$$f(h) = \eta \int_0^h K(h, p) w(p) dp \quad (1.2)$$

formunda tanımlanır [21-23]. $w(h)$ bilinmeyen fonksiyonunun h ya göre i -inci türevi $w^{(i)}(h)$ ile gösterilmek üzere lineer Volterra integro-diferansiyel denklemi

$$w^{(i)}(h) = f(h) + \eta \int_0^h K(h, p) w(p) dp \quad (1.3)$$

şeklinde tanımlanır. Denklem (1.3) integral işaretinin dışında bir diferensiyel operatör içerdiğinden, denklemin $w(h)$ çözümünü bulmak için $w(0), w'(0), \dots, w^{(i-1)}(0)$ başlangıç koşulları belirlenmelidir.

Bu denklemler, Laplace dönüşümü, Elzaki dönüşümü, Aboodh dönüşümü ve Mohand dönüşümü gibi birçok integral dönüşümü kullanılarak çözülebilirler. Örneğin, Aggarwal ve arkadaşları [24], birinci tür Volterra integral denklemleri için Shehu dönüşümünü uygulamıştır. Bu tür denklemleri çözmek için Kamal dönüşümü de kullanılır ve Agarwal ve arkadaşları [25] bunu daha önce kullanmıştır.

Sawi dönüşümü, Higazy ve arkadaşları [26] tarafından Volterra integral denklemlerinin analizi ve temel çözümlerin belirlenmesi amacıyla sunulmuş olup, bu yöntem intravenöz enjeksiyonlar sırasında ve sonrasında kan şekeri tahminini sağlamıştır. İkinci tür lineer Volterra integral denklemleri için, Aggarwal ve arkadaşları [27] Mohand dönüşümünü kullanmıştır. Ali ve arkadaşları [28], (1.1) türündeki denklemleri Aboodh dönüşümü ile çözmüştür. Sattaso ve arkadaşları [29], bu amaçla diferensiyel denklemleri çözmek için Laplace-tipi integral dönüşümleri kullanarak simülasyon gerçekleştirmiş, Kim [30] ise Laguerre denklemini çözmek için G_r -dönüşümünü kullanmıştır. Şener ve arkadaşları [31], birinci tür lineer Volterra integral denkleminin doğruluğunu ZZ-dönüşümü aracılığıyla kontrol etmiştir. Elzaki dönüşümü uygulayarak ikinci tür lineer Volterra integral denklemlerini Song ve Kim [32] çözmüştür. Birinci tür denklemlerle ilgili olarak, Gnanavel ve arkadaşları [33] Tarig dönüşümünü uygulamıştır. Benzer şekilde, aynı amaçla Haarsa [34] da Elzaki dönüşümünü kullanmıştır. Aggarwal ve arkadaşları [35], Elzaki dönüşümü ve diğer etkili integral dönüşümleri ile ilgili ilişkiler üzerinde düşünmüştür. Aggrewal ve Sharma [36], birinci tür denklemler için Laplace dönüşümünü kullanmıştır. Bu çalışmada, Mishra ve arkadaşları [37], Sumudu ve diğer önemli dönüşümler arasındaki ilişkileri incelemiştir. Büyüme ve azalma problemleri, birinci basamaktan lineer diferensiyel denklemler ve Sawi dönüşümü kullanılarak Singh ve Aggarwal [38] tarafından çözülmüştür. Volterra integral denklemi ve Volterra integro-diferensiyel denkleminin çözümlerinin davranışları için, okuyucu [39,40] ve oradaki referanslara başvurabilir. Bu makalenin amacı, lineer Volterra integral denklemlerinin ve lineer Volterra integro-diferensiyel denklemlerinin tam çözümlerini minimum hesaplama çabası ve minimum zamanla G_r -dönüşümü kullanarak bulunabileceğini göstermektir.

Bu makale üç temel bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde birinci ve ikinci tipten Volterra integral ve integro-diferensiyel denklemler tanıtıldı. Daha sonra bu denklem tiplerinin uygulamada sahip olduğu önemden bahsedildi ve bu denklem tiplerinin çözümleri için hangi tip integral operatörlerinin kullanıldığına dair tarihsel bilgi verildi. İkinci bölümde G_r integral dönüşümü tanıtıldı ve bu integral dönüşümünün sahip olduğu bazı temel özellikler ortaya konuldu. Ardından G_r -integral dönüşümü ile bilinen bazı Laplace türü integral dönüşümleri arasındaki bağ ortaya konuldu. Üçüncü bölümde konvolüsyon tipi çekirdeğe sahip Volterra integral ve integro-diferensiyel denklemlerin G_r -integral dönüşümü yardımıyla çözülebileceği gösterildi ve bu şekilde denklemlerin çözümünü elde etmenin daha az zamanda daha az bir çaba ile elde edilebileceği çeşitli örnekler yardımıyla gösterildi.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu kesimde, Laplace dönüşümü veya Fourier dönüşümü gibi klasik dönüşümlerle uyumlu bir yapıya sahip ve bu dönüşümlerin genelleştirilmiş bir versiyonu olarak çalışabilen, integral dönüşümlerinin temel prensiplerini genişleterek, standart yöntemlerle çözülemeyen problemleri analitik olarak çözülebilirliğini sağlayan, G_r dönüşümünü ve onun özelliklerini tanıtacağız.

2.1. G_r -İntegral Dönüşümü ve Onunla İlişkili Dönüşümler

Bu kesimde, ilk bulgularımızın kanıtlarında kullanacağımız temel kavramlar sunulmuştur.

Tanım 2.1.1. $h \geq 0$ için tanımlı $w(h)$ fonksiyonuna karşılık gelen G_r -dönüşümü

$$G_r\{w(h)\} = z^r \int_0^{\infty} e^{-h/z} w(h) dh = W(z) \quad (2.1)$$

ile tanımlanır. Burada $r \in \mathbb{Z}$ olup $z^r e^{-h/z}$ fonksiyonu G_r -dönüşümünün çekirdeği olarak adlandırılır [41].

Gösterilmiştir ki $w(h)$ fonksiyonu, $h \geq 0$ için parçalı sürekli ve üstel mertebeli ise G_r -dönüşümü mevcuttur. Bu koşullar, $w(h)$ fonksiyonunun G_r -dönüşümünün varlığı için yalnızca yeterli koşullardır. $w(h)$ fonksiyonu, $W(z)$ fonksiyonunun ters G_r -dönüşümü olarak adlandırılır. Eğer $G_r\{w(h)\} = W(z)$ eşitliği mevcut ise sembolik olarak bu durumu $G_r^{-1}\{W(z)\} = w(h)$ şeklinde yazabiliriz.

İntegral dönüşümlerinin yapısı, çekirdeğin formuyla ilişkilidir. Örneğin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibi verilmiştir [42]:

$$L\{w(h)\} = \int_0^{\infty} e^{-qh} w(h) dh.$$

Laplace dönüşümünü (2.1) denkleminde $q = 1/z$ ve $r = 0$ olarak

$$L\{w(h)\} = \int_0^{\infty} e^{-h/z} w(h) dh$$

şeklinde yazabiliriz. Benzer şekilde Elzaki dönüşümünü (2.1) denkleminde $q = 1/z$ ve $r = 1$ olarak

$$E\{w(h)\} = z \int_0^{\infty} e^{-h/z} w(h) dh$$

şeklinde tanımlanmıştır [43]. Sawi dönüşümü, (2.1) denkleminde $q = 1/z$ ve $r = -2$ olarak

$$S\{w(h)\} = \frac{1}{z^2} \int_0^{\infty} e^{-h/z} w(h) dh$$

şeklinde tanımlanmıştır [44] ve Sumudu dönüşümü, (2.1) denkleminde $q = 1/z$ ve $r = -1$ olarak

$$Su\{w(h)\} = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} e^{-h/z} w(h) dh$$

şeklinde tanımlanmıştır [45]. Sonuç olarak, G_r -dönüşümü, Laplace, Elzaki, Sumudu ve Sawi dönüşümlerinin daha kapsamlı ve temel bir versiyonudur.

Kim [30], G_r -dönüşümünün temel yapısını ve lineerlik özelliği de dahil olmak üzere bazı özelliklerini incelemiştir. Bu çalışmaya göre G_r -dönüşümü $G_r\{a_1w_1(h) + a_2w_2(h)\} = a_1W_1(h) + a_2W_2(h)$

lineerlik özelliğine, $G_r\{w(ah)\} = \frac{1}{a^{r+1}}W(az)$ skalerin değişimi özelliğine ve kaydırma özelliği olarak bilinen $G_r\{e^{ah}w(h)\} = (1 - az)^r W\left(\frac{z}{1-az}\right)$ özelliğine sahiptir. Ayrıca $w(h)$ fonksiyonunun i -inci basamaktan türevlerinin G_r -dönüşümü

$$G_r\{w^{(i)}(h)\} = \frac{1}{z^i} G_r\{w\} - \frac{1}{z^{i-1}}w(0)z^r - \frac{1}{z^{i-2}}w'(0)z^r - \dots - w^{(i-1)}(0)z^r \quad (2.2)$$

olarak hesaplanmıştır.

2.2. G_r -Dönüşümü ve Laplace Dönüşümü Arasındaki İlişki

Laplace dönüşümü G_r -dönüşümünün $r = 0$ olması özel bir durumu olduğu için elbette ki G_r -dönüşümü, genellikle yaygın olarak kullanılan Laplace dönüşümü kullanılarak çözülebilen tüm problemleri de çözebilir. Bu nedenle, eğer $w(h)$ fonksiyonunun G_r -dönüşümü $G_r\{w(h)\} = W(z)$ ve $w(\xi)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $L\{w(h)\} = \int_0^{\infty} e^{-zh} w(h)dh$ ise,

$$L\{w(h)\} = A(z) = \int_0^{\infty} e^{-zh} w(h) dh = z^r \left(\frac{1}{z^r} \int_0^{\infty} e^{-zh} w(h) dh \right) = z^r W\left(\frac{1}{z}\right)$$

ilişkisi sağlanır. Bu ilişki, ihtiyaç duyulduğunda bir dönüşümden diğerine geçmek için bir yol sağlar. Buradan $L\{w(h)\} = A(z)$ Laplace dönüşümü için $G_r\{w(h)\} = z^r A\left(\frac{1}{z}\right)$ eşitliğini kullanarak bazı elemanter fonksiyonların G_r ve ters G_r -integral dönüşümleri sırasıyla aşağıdaki gibi elde edebiliriz

- 1) $G_r\{1\} = z^{r+1}$, dolayısıyla $G_r^{-1}\{z^{r+1}\}=1$,
- 2) $G_r\{h\} = z^{r+2}$, dolayısıyla $G_r^{-1}\{z^{r+2}\}=h$,
- 3) $G_r\{h^n\} = n! z^{r+n+1}$, dolayısıyla $G_r^{-1}\{z^{r+n+1}\} = \frac{h^n}{n!}$,
- 4) $G_r\{e^{ah}\} = \frac{z^{r+1}}{1-az}$, dolayısıyla $G_r^{-1}\left\{\frac{z^{r+1}}{1-az}\right\} = e^{ah}$,
- 5) $G_r\{\sin ah\} = \frac{az^{r+2}}{1+a^2z^2}$, dolayısıyla $G_r^{-1}\left\{\frac{z^{r+2}}{1+a^2z^2}\right\} = \frac{\sin ah}{a}$,
- 6) $G_r\{\cos ah\} = \frac{z^{r+1}}{1+a^2z^2}$, dolayısıyla $G_r^{-1}\left\{\frac{z^{r+1}}{1+a^2z^2}\right\} = \cos ah$,
- 7) $G_r\{\sinh ah\} = \frac{az^{r+2}}{1-a^2z^2}$, dolayısıyla $G_r^{-1}\left\{\frac{z^{r+2}}{1-a^2z^2}\right\} = \frac{\sinh ah}{a}$,
- 8) $G_r\{\cosh ah\} = \frac{z^{r+1}}{1-a^2z^2}$, dolayısıyla $G_r^{-1}\left\{\frac{z^{r+1}}{1-a^2z^2}\right\} = \cosh ah$.

Teorem 2.2.1. (Konvolüsyon Teoremi)

Eğer $G_r\{w(h)\} = W(z)$ ve $G_r\{q(h)\} = Q(z)$ ise konvolüsyonun G_r -dönüşümü

$$G_r\{(w * q)(h)\} = z^{-r} G_r\{w(h)\} G_r\{q(h)\} = z^{-r} W(z)Q(z)$$

dır.

İspat. $w(h)$ ve $q(h)$ fonksiyonunun konvolüsyonu $(w * q)(h) = \int_0^h q(h - v) w(v)dv$ dir.

Eğer (2.1) i kullanarak bu ifadenin her iki tarafına G_r -dönüşümünü uygularsak,

$$\begin{aligned} G_r\{(w * q)(h)\} &= z^r \int_0^\infty e^{-h/z} (w * q)(h) dh = z^r \int_0^\infty e^{-h/z} \int_0^h q(h - v) w(v)dv dh \\ &= z^r \int_0^\infty \int_0^h e^{-h/z} q(h - v) w(v)dv dh = z^r \int_0^\infty \int_v^\infty e^{-h/z} q(h - v) w(v)dh dv \end{aligned}$$

elde ederiz. Eğer $h - v = m$ değişken değiştirmesini yaparsak $dh = dm$ olur ve yukarıdaki eşitlik

$$\begin{aligned} G_r\{(w * q)(h)\} &= z^r \int_0^\infty w(v) \int_v^\infty e^{-(m+v)/z} q(m) dm dv \\ &= z^r \int_0^\infty e^{-\frac{v}{z}} w(v)dv \int_v^\infty e^{-\frac{m}{z}} q(m) dm \\ &= z^{-r} W(z)Q(z) \end{aligned}$$

halini alır ki bu da konvolüsyon teoreminin ispatını tamamlar.

3. BULGULAR

Bundan sonra bu makalede, (1.1), (1.2) ve (1.3) denklemlerinin çekirdeğinin bir konvolüsyon tipi çekirdek olduğu varsayılacaktır, yani $K(h, p) = K(h - p)$ olarak alınacaktır.

3.1. Denklem (1.1) in G_r -Dönüşümü Yardımıyla Çözümü

Eğer (1.1) ikinci tür lineer Volterra integral denkleminde $K(h, p) = K(h - p)$ olduğunu kullanırsak denklem

$$w(h) = f(h) + \eta \int_0^h K(h - p) w(p) dp \quad (3.1)$$

halini alır. Eğer (3.1) ifadesinin her iki tarafına G_r -dönüşümünü uygularsak

$$\begin{aligned} G_r\{w(h)\} &= G_r\left\{f(h) + \eta \int_0^h K(h - p) w(p) dp\right\} \\ &= G_r\{f(h)\} + G_r\left\{\eta \int_0^h K(h - p) w(p) dp\right\} \\ &= G_r\{f(h)\} + \eta G_r\{K * w(h)\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

elde ederiz. Eğer (3.2) ifadesinde konvolüsyon teoremini kullanırsak kullanırsak

$$G_r\{w(h)\} = \frac{G_r\{f(h)\}}{1 - z^{-r}\eta G_r\{K(h)\}} \quad (3.3)$$

elde ederiz. Eğer (3.3) eşitliğinin her iki tarafına ters G_r -dönüşümünü uygularsak, (3.1) denkleminin çözümünü

$$w(h) = G_r^{-1}\left\{\frac{G_r\{f(h)\}}{1 - z^{-r}\eta G_r\{K(h)\}}\right\} \text{ olarak elde ederiz.}$$

Örnek 3.1.1. Aşağıda verilen ikinci tip lineer Volterra integral denklemini ele alalım

$$w(h) = \sin h - 2 \int_0^h \cos(h - p) w(p) dp. \quad (3.4)$$

Eğer (3.4) denkleminin her iki tarafına G_r -dönüşümünü uygularsak

$$G_r\{w(h)\} = G_r\left\{\sin h - 2 \int_0^h \cos(h - p) w(p) dp\right\} = G_r\{\sin h\} - 2G_r\left\{\int_0^h \cos(h - p) w(p) dp\right\}$$

dolayısıyla

$$G_r\{w(h)\} = \frac{z^{r+2}}{1 + z^2} - 2G_r\{\cos(h) * w(h)\} \quad (3.5)$$

elde ederiz. Eğer (3.5) eşitliğinde konvolüsyon teoremini kullanırsak

$$G_r\{w(h)\} = \frac{z^{r+2}}{(1 + z^2)^2} \quad (3.6)$$

elde ederiz. Eğer (3.6) nın her iki tarafına ters G_r -dönüşümünü uygularsak, (3.4) denkleminin çözümünü

$$w(h) = he^{-h} \text{ olarak elde ederiz.}$$

Örnek 3.1.2. Aşağıda verilen ikinci tip lineer Volterra integral denklemini ele alalım

$$w(h) = 1 - \frac{1}{2}h^2 + \int_0^h w(p) dp. \quad (3.7)$$

Eğer (3.7) denkleminin her iki tarafına G_r -dönüşümünü uygularsak

$$G_r\{w(h)\} = z^{r+1} - z^{r+3} + G_r\left\{\int_0^h w(p)dp\right\} = z^{r+1} - z^{r+3} + G_r\{1 * w(h)\} \quad (3.8)$$

elde ederiz. Eğer (3.8) eşitliğinde konvolüsyon teoremini kullanırsak

$$G_r\{w(h)\} = z^{r+1} - z^{r+3} + z G_r\{w(h)\} \text{ dolayısıyla} \\ G_r\{w(h)\} = z^{r+1} + z^{r+2} \quad (3.9)$$

elde ederiz. Eğer (3.9) un her iki tarafına ters G_r -dönüşümünü uygularsak, (3.7) denkleminin çözümünü $w(h) = 1 + h$ olarak elde ederiz.

3.2. Denklem (1.2) nin G_r -Dönüşümü Yardımıyla Çözümü

Eğer (1.2) denkleminde $K(h, p) = K(h - p)$ olduğunu kullanırsak birinci tür lineer Volterra integral denklemi

$$f(h) = \eta \int_0^h K(h - p) w(p) dp \quad (3.10)$$

halini alır. Eğer (3.10) nin her iki tarafına G_r -dönüşümünü uygularsak

$$G_r\left\{\eta \int_0^h K(h - p) w(p) dp\right\} = \eta G_r\{(K * w)(h)\} \quad (3.11)$$

elde ederiz. Eğer (3.11) eşitliğinde konvolüsyon teoremini kullanırsak

$$G_r\{w(h)\} = \frac{G_r\{f(h)\}}{z^{-r}\eta G_r\{K(h)\}} \quad (3.12)$$

elde ederiz. Eğer (3.12) nin her iki tarafına ters G_r -dönüşümünü uygularsak, (3.10) denkleminin çözümünü

$$w(h) = G_r^{-1}\left\{\frac{G_r\{f(h)\}}{z^{-r}\eta G_r\{K(h)\}}\right\} \text{ olarak elde ederiz.}$$

Örnek 3.2.1. Aşağıda verilen birinci tip lineer Volterra integral denklemlerini göz önünde bulunduralım

$$h^2 = \int_0^h e^{(h-p)} w(p) dp. \quad (3.13)$$

Eğer (3.13) denkleminin her iki tarafına G_r -dönüşümünü uygularsak $G_r\{h^2\} = G_r\left\{\int_0^h e^{(h-p)} w(p) dp\right\}$ dolayısıyla

$$2z^{r+3} = G_r\{e^h * w(h)\} \quad (3.14)$$

elde ederiz. Eğer (3.14) ifadesinde konvolüsyon teoremini kullanırsak

$$G_r\{h^2\} = 2z^{r+3} = z^{-r} G_r\{e^h\} G_r\{w(h)\} = z^{-r} \frac{z^{r+1}}{1-z} G_r\{w(h)\} \text{ elde ederiz. Buradan,} \\ G_r\{w(h)\} = 2z^{r+2} - 2z^{r+3} \quad (3.15)$$

olarak bulunur. Eğer (3.15) in her iki tarafının ters G_r -dönüşümünü alırsak (3.13) denkleminin çözümü

$$w(h) = 2h - h^2 \text{ olarak elde edilir.}$$

Örnek 3.2.2. Aşağıda verilen birinci tip lineer Volterra integral denklemini ele alalım

$$\sin h = \int_0^h e^{(h-p)} w(p) dp. \quad (3.16)$$

Eğer (3.16) denkleminin her iki tarafına G_r -dönüşümünü uygularsak

$$\frac{z^{r+2}}{1+z^2} = G_r\{e^h * w(h)\} \quad (3.17)$$

elde ederiz. Eğer (3.17) ifadesinde konvolüsyon teoremini kullanırsak

$$\frac{z^{r+2}}{1+z^2} = z^{-r} G_r\{e^h\} G_r\{w(h)\} = z^{-r} \frac{z^{r+1}}{1-z} G_r\{w(h)\} \text{ dolayısıyla,}$$

$$G_r\{w(h)\} = \frac{z^{r+1}}{1+z^2} - \frac{z^{r+2}}{1+z^2} \quad (3.18)$$

elde ederiz. Eğer (3.18) in her iki tarafına ters G_r -dönüşümünü uygularsak (3.16) denkleminin çözümünü $w(h) = \cos h - \sin h$ olarak elde ederiz.

3.3. Denklem (1.3) ün G_r -Dönüşümü Yardımıyla Çözümü

Eğer (1.3) lineer Volterra integral denkleminde $K(h, p) = K(h - p)$ olduğunu kullanırsak denklemi

$$w^{(i)}(h) = f(h) + \eta \int_0^h K(h-p) w(p) dp, w(0) = a_0, w'(0) = a_1, \dots, w^{(i-1)}(0) = a_{i-1} \quad (3.19)$$

olarak yazılabilir. Eğer (3.19) nin her iki tarafına G_r -dönüşümünü uygulayıp (2.2) yi kullanırsak

$$\frac{1}{z^i} G_r\{w(h)\} = \frac{a_0}{z^{i-1}} z^r + \frac{a_1}{z^{i-2}} z^r + \dots + a_{i-1} z^{r+i} + G_r\{f(h) + \eta \int_0^h K(h-p) w(p) dp\}$$

ve basit bir düzenleme ile

$$G_r\{w(h)\} = a_0 z^{r+1} + a_1 z^{r+2} + \dots + a_{i-1} z^{r+i} + z^i G_r\{f(h)\} + z^i \eta G_r\{K(h)\} G_r\{w(h)\} \quad (3.20)$$

elde ederiz. Eğer (3.8) nin her iki tarafına G_r -dönüşümünü uygularsak (3.19) denkleminin çözümünü

$$\{w(h)\} = a_0 + a_1 h + \dots + a_{i-1} \frac{z^{r+i-1}}{i!} + z^i G_r^{-1}\{f(h)\} + \eta G_r\{(K * w)(h)\} \text{ olarak elde ederiz.}$$

Örnek 3.3.1. Aşağıda verilen başlangıç koşullu lineer Volterra integro-differensiyel denklemini ele alalım

$$w'(h) = 2 + \int_0^h w(p) dp, \quad w(0) = 2. \quad (3.21)$$

Eğer (3.21) denkleminin her iki tarafına G_r -dönüşümünü uygulayıp başlangıç koşulunu kullanırsak

$$\frac{1}{z} G_r\{w(h)\} = 2z^r + 2z^{r+1} + G_r\left\{\int_0^h (h-p) w(p) dp\right\} \text{ elde ederiz. Eğer bu eşitlikte konvolüsyon teoremini kullanırsak}$$

$$G_r\{w(h)\} = \frac{2z^{r+1}}{1-z} \quad (3.22)$$

elde ederiz. Eğer (3.22) nin her iki tarafına ters G_r -dönüşümünü uygularsak, (3.21) denkleminin çözümünü $w(h) = 2e^h$ olarak elde ederiz.

Örnek 3.3.2. Aşağıda verilen başlangıç koşullu lineer Volterra integro-differensiyel denklemini ele alalım

$$w''(h) = 1 + \int_0^h (h-p) w(p) dp, \quad w(0) = 1, w'(0) = 0. \quad (3.23)$$

Eğer (3.23) denkleminin her iki tarafına G_r -dönüşümünü uygulayıp başlangıç koşullarını kullanırsak

$\frac{1}{z^2} G_r\{w(h)\} = \frac{1}{z} z^r + z^{r+1} + G_r\left\{\int_0^h (h-p) w(p) dp\right\}$ elde ederiz. Eğer bu eşitlikte konvolüsyon teoremini kullanırsak

$$G_r\{w(h)\} = \frac{z^{r+1}}{1-z^2} \quad (3.24)$$

elde ederiz. Eğer (3.24) ün her iki tarafına ters G_r -dönüşümünü uygularsak, (3.23) denkleminin çözümünü $w(h) = \cosh h$ olarak elde ederiz.

4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu makalede, lineer Volterra integral denklemlerini ve lineer Volterra integro-diferensiyel denklemlerini çözümede G_r -integral dönüşümünün uygulanmasını başarıyla gösterdik. Sonuçlar göstermiştir ki, G_r -integral dönüşümü Volterra integral denklemleri ve Volterra integro-diferensiyel denklemlerinin çözümünü elde etmede son derece etkili bir integral dönüşümü olduğunu ve Volterra integral denklemleri ile Volterra integro-diferensiyel denklemlerinin doğrudan çözümünde Laplace dönüşümü ve Fourier dönüşümü gibi klasik integral dönüşümlerle uyumlu bir yapıya sahip olduğunu göstermiştir. Ayrıca bu denklem modellerinde G_r -integral dönüşümünün, bilinen birçok klasik integral dönüşümlerin bir genelleştirilmiş versiyonu olarak çalıştığını, minimal zamanda minimal çabayla, sayısal hesaplamalara gerek kalmadan bu tür denklemlerin çözülebileceği örnekler üzerinde gösterilmiştir.

ÇIKAR ÇATIŞMASI BİLDİRİMİ

Yazarlar arasında çıkar çatışması bulunmamaktadır.

YAZARLARIN KATKI ORANI

Adil Mısıır: Metodoloji, Kavramlaştırma, Materyal temini, Danışman/Kontrolörlük. **İslam Qasım Abdullah Al-Salih:** Araştırma, İçerik analizi, Makalenin yazımı- İnceleme ve Düzenleme.

KAYNAKLAR

- [1] Linz, P. (1974). A simple approximation method for solving Volterra integro-differential equations of the first kind. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 14(2), 211–215.
- [2] Çimen, E. (2018). A computational method for Volterra integro-diferentialequation. *Erzincan Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 11(3), 347–352.
- [3] Ajiley, G., Amoo S.A. (2023). Numerical solution to Volterra integro-differential equations using collocation approximation. *Mathematics and Computational Sciences*, 4(1), 1–8.
- [4] Zhou, H., Wang, Q., (2019). The Nystrom method and convergence analysis for system of Fredholm integral equations. *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, 2(1), 28-32.
- [5] Zhou, H., Wang, Q., (2019). Two-Grid iterative method for a class of Fredholm functional integral equations based on the radial basis function interpolation. *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, 2(2), 117-122.
- [6] Dafemos, C. M. (1970). An abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity. *Journal of Differential Equations*, 7(3), 554–569.

- [7] Levinson, N. (1960). A nonlinear Volterra equation arising in the theory of superfluidity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1(1), 1–11.
- [8] Shilepsky, C. C. (1974). The asymptotic behavior of an integral equation with an application to Volterra's population equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 48(3), 764–779.
- [9] Swick, K. E. (1981). A nonlinear model for human population dynamics. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 40(2), 266–278.
- [10] Distefano, N. (1968). A Volterra integral equation in the stability of some linear hereditary phenomena. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 23(2), 365–383.
- [11] Philip, J. R. (1966). Some integral equations in geometrical probability. *Biometrika*, 53(3–4), 365–374.
- [12] Feller, W. (1941). On the integral equation of renewal theory. *The Annals of Mathematical Statistics*, 12(3), 243–267.
- [13] Wang, F. J. S. (1978). Asymptotic behavior of some deterministic epidemic models. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 9(3), 529–534.
- [14] Lin, S. P. (1975). Damped vibration of a string. *Journal of Fluid Mechanics*, 72(4), 787–797.
- [15] Rogers, T. G., Lee, E. H. (1964). The cylinder problem in viscoelastic stress analysis. *Quarterly of Applied Mathematics*, 22(2), 117–131.
- [16] Goldsmith, P. L. (1967). The calculation of true particle size distributions from the sizes observed in a thin slice. *British Journal of Applied Physics*, 18(6), 813.
- [17] Raisinghani, M. D. (2007). Integral equations and boundary value problems. New Delhi. *S. Chand Publishing*.
- [18] Rahman, M. (2007). Integral Equations and Their Applications. Boston. *WIT press*.
- [19] Polyanin, P., Manzhirov, A. V. (2008). Handbook of Integral Equations. London: *Chapman and Hall/CRC*.
- [20] Wazwaz, A. M. (2011). Linear and nonlinear integral equations. Berlin. *Springer*.
- [21] Pipkin, A. C. (1991). A Course on Integral Equations. New York Berlin Heidelberg. *Springer Science & Business Media*, 9.
- [22] Bitsadze, A. V. (1995). Integral Equations of First Kind. Singapore. *World Scientific*, 7.
- [23] Hackbusch, W. (1995). Integral Equation Theory and Numerical Treatment. Basel. *Birkhauser press*.
- [24] Aggarwal, S., Gupta, A. R., Sharma, S. D. (2019). A new application of Shehu transform for handling Volterra integral equations of first kind. *International Journal of Research in Advent Technology*, 7(4), 439–445.
- [25] Aggarwal, S., Sharma, N., Chauhan, R. (2018). Application of Kamal transform for solving linear Volterra integral equations of first kind. *International Journal of Research in Advent Technology*, 6(8), 2081–2088.
- [26] Higazy, M., Aggarwal, S., Nofal, T. A. (2020). Sawi decomposition method for Volterra integral equation with application. *Journal of Mathematics*, 2020, 1–13.
- [27] Aggarwal, S., Sharma, N., Chauhan, R. (2018). Solution of linear Volterra integral equations of second kind using Mohand transform. *International Journal of Research in Advent Technology*, 6(11), 3098–3102.
- [28] Ali, A. I., Kalim, M., Khan, A. (2022). Solutions of Volterra integral equations (VIEs) of the second kind with Bulge function using Aboodh transform. *Scientific Inquiry and Review*, 6(2), 21–31.
- [29] Sattaso, S., Nonlaopon, K., Kim, H. (2019). Further properties of Laplace-typed integral transforms. *Dynamic Systems and Applications*, 28, 195–215.
- [30] Kim, H. (2017). The solution of Laguerre's equation by using G-transform. *International Journal of Applied Engineering Research*, 12(24), 16083–16086.
- [31] Şener, S. Ş., Çelik, E., Özdemir, E. (2021). The solution of linear Volterra integral equation of the first kind with ZZ-transform. *Turkish Journal of Sciences*, 6(3), 127–133.
- [32] Song, Y., Kim, H. (2014). The solution of Volterra integral equation of the second kind by using the Elzaki transform. *Applied Mathematical Sciences*, 8(11), 525–530.
- [33] Gnanavel, M. G., Saranya, C., Viswanathan, A. (2019). Applications of linear Volterra integral equations of first kind by using Tarig transform. *International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering*, 8(10), 2278–3075.
- [34] Haarsa, P. (2017). On volterra integral equations of the first kind by using Elzaki transform. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 102(9), 1857–1863.
- [35] Aggarwal, S., Bhatnagar, K., Dua, A. (2019). Dualities between Elzaki transform and some useful integral transforms. *International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering*, 8(12), 4312–4318.
- [36] Aggarwal, S., Sharma, N. (2019). Laplace transform for the solution of first kind linear Volterra integral equation. *Journal of Advanced Research in Applied Mathematics and Statistics*, 4(3&4), 16–23.
- [37] Mishra, R., Aggarwal, S., Chaudhary, L., Kumar, A. (2020). Relationship between Sumudu and some efficient integral transforms. *International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering*, 9(3), 153–159.
- [38] Singh, G. P., Aggarwal, S. (2019). Sawi transform for population growth and decay problems. *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science*, 8(8), 157–162.

- [39] Tunç, C., Mohammed, S. A. (2017). On the stability and instability of functional Volterra-integro differential equation of first order. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 9(1), 151-160.
- [40] Tunç, C., Tunç, O (2019). A note on the qualitative analysis of Volterra integro-differential equations. *Journal of Taibah University for Science*, 13(1), 490–496.
- [41] Kim, H. (2017). The intrinsic structure and properties of Laplace-typed integral transforms. *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2017.
- [42] Aggarwal, S., Gupta, A. R., Singh, D. P., Asthana, N., Kumar, N. (2018). Application of Laplace transform for solving population growth and decay problems. *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science*, 7(9), 141–145.
- [43] Elzaki, T. M. (2012). On the new integral transform "Elzaki transform" fundamental properties investigations and applications. *Global Journal of Mathematical Sciences: Theory and Practical*, 4(1), 1–13.
- [44] Aggarwal, S., Sharma, S. D., Vyas, A. (2020). Sawi transform of Bessel's functions with application for evaluating definite integrals. *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science*, 9, 12–18.
- [45] Eltayeb, H., Kılıçman, A. (2010). On some applications of a new integral transform. *International Journal of Mathematical Analysis*, 4(3), 123–132.