Tek Boyutta Lineer Anizotropik Saçılımlı Nötron Transport Denklemine Chebyshev Polinomu Yaklaşımı ve Özdeğer Spektrumu

Ahmet UĞUZ, Fikret ANLI
Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü, Kahramanmaraş

Geliş Tarihi: 18.05.2007 **Kabul Tarihi: 18.11.2007**

ÖZET: Tek boyutlu dilim geometride, lineer anizotropik saçılımlı nötron transport denklemi ortagonal polinomlar serisine açma yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Nötronların dağılımını temsil eden açısal akı 1. tip Chebyshev polinomları cinsinden seriye açıldı. Konuma bağlı akı momentleri fonksiyonları uygun çözümler sağlaması bakımından üstel olarak tanımlanmıştır. Genellikle transport teoride transport eşitlikleri Legendre polinomları ile çözülür ve bu metot P_N yaklaşımı olarak adlandırılır. Bu çalışmada lineer anizotropik nötron transport denklemini Chebyshev polinomlarının 1. tipi ile çözmeye çalıştık. Bu metod T_N yaklaşımı olarak adlandırılır. P_N ve T_N metodu kullanılarak, farklı c_0 ve c_1 (çarpışma başına ortaya çıkan ortalama nötron sayısı) değerleri için hesaplamalar yapıldı ve ν özdeğerleri karşılaştırma yapmak için aynı tablolarda sunuldu.

Sonuç olarak, her iki metot ile (P_N ve T_N) elde edilen sonuçların mükemmel bir uyum içerisinde oldukları görülür.

Anahtar Kelimeler: Transport deklemi, Chebyshev polinomları, Özdeğerler

Chebsyhev Polynomial Approximation to One-Dimensional Neutron Transport Equation with Linear Anisotropic Scattering and Eigenvalue Spectrum

ABSTRACT: Neutron transport equation in slab geometry with linearly anisotropic scattering is solved by using the method of orthogonal polynomial expansion. The angular flux that describes the neutron distribution was expanded in terms of the first kind Chebyshev polynomials. The functions of the flux moments which depend on the position were described as exponential functions to get appropriate solutions. Generally, angular flux of neutrons is expanded in terms of Legendre polynomials to get appropriate solutions and then the method is called P_N approximation. In this work, We used the first kind Chebyshev polynomial instead of Legendre polynomials. The method is called as T_N approximation. Using P_N and T_N methods, we calculated the ν eigenvalues for different values of c_0 and c_1 (mean neutron outputs per total interaction) and the results were presented in the same tables for comparison.

As a conclusion the results obtained using the both methods (P_N and T_N) are seen in an excellent agreement.

Keywords: Transport equation**,** Chebyshev polynomials, eigenvalues

GİRİŞ

Nükleer reaktörler, kendi kendine yeten, zincirleme reaksiyon olarak bilinen fisyon reaksiyonlarını kontrol altında tutarak ve düzenli bir şekilde devamını sağlayarak ısı enerjisi üretebilen sistemlerdir. Bir nötronun fisyon olabilecek bir çekirdek ile etkileşmesi sonucu gerçekleşen fisyon olayı sonucunda farklı enerjilere sahip olabilen 2 veya 3 nötron açığa çıkmaktadır. Açığa çıkan bu nötronların başka fisyonlara sebep olmalarıyla zincirleme fisyon reaksiyonları gerçekleşmektedir. Böylece nötronlar kendiliğinden reaktör içerisine yayılmaktadır. Bunun sonucu olarak, reaktörün bir noktasındaki nötronlar, farklı bir noktada, farklı bir enerji ile ortaya çıkabilirler.

Yani nötronlar bir konumdan başka bir konuma transfer olmuşlardır. Nötronların bu davranışları "Nötron Transport Teori" nin konusu olmuştur. Nötron Transport Teorisi, nötronların davranışlarını konum, açı, enerji ve zaman değişkenlerine bağlı olarak inceler. Yüksüz parçacıkların davranışını açıklamakta Boltzman Denklemi olarak da bilinen Transport Denklemi kullanılır.

Nötron transport denkleminin çözümünde en önemli faktörlerden biri, uygun bir nötron dağılım fonksiyonu tanımlamaktır. Nükleer reaktörlerde, nötronların enerjilerinin düzenlenerek fisyon reaksiyonlarının düzenli bir şekilde yürütülmesi ve güç düzeyinin kontrol edilmesi açısından nötron akısının reaktör içerisindeki dağılımının tam olarak bilinmesi gerekir. Bu durumda reaktörlerin güvenli ve sağlıklı bir şekilde işleyişlerini sürdürebilmeleri için nötronların reaktör içerisindeki uzaysal dağılımlarını karakterize eden özdeğerlerin araştırılması önem kazanmaktadır. Nötron dağılım fonksiyonunun bağlı olduğu özdeğerlerin hesaplanması için çeşitli yöntemler kullanılmaktadır.

Değişik yaklaşımlar kullanılarak özdeğer hesaplamaları daha önce Garis and Sjöstrand (1994), Yavuz (1997), Woznicki (1998), Siewert and Wright

(1999), Anlı ve Yaşa (2003), Yaşa ve ark. (2006) tarafından çalışılmıştır.

Tek boyutlu dilim geometride nötron transport eşitliğinin I. tip Chebyshev polinomları ile çözülebileceğini ilk olarak Aspelund (1959) ve Conkie (1959) önermişlerdir.

Bu çalışmada dilim geometride lineer anizotropik saçılmalı durumda nötron transport denklemi için hem Legendre polinomları (P_N) hem de I. tip Chebyshev polinomları (T_N) kullanılarak nötron dağılım fonksiyonunun bağlı olduğu özdeğerler hesaplanmıştır. T_N yaklaşımı olarak isimlendirilen yöntem, nötron transport eşitliğinin çözümünde geleneksel bir yöntem olan P_N yaklaşımına alternatif bir metot olarak kabul edilebilir. (Conkie, 1959)

MATERYAL ve METOT

Legendre Polinomu Yaklaşımı: P_N Metodu

Tek gruplu ve tek boyutlu dilim geometride kaynaktan bağımsız lineer anizotropik saçılmalı nötron transport eşitliği,

$$\mu \frac{d\psi(x,\mu)}{dx} + \sigma_T\,\psi(x,\mu) = \frac{1}{2}\,\sigma_{S0}\int_{-1}^{1}\psi(x,\mu')\,d\mu' + \frac{3}{2}\,\sigma_{S1}\,\mu\int_{-1}^{1}\mu'\psi(x,\mu')\,d\mu'$$
$$-1 \le \mu \le 1, \quad -a \le x \le a \tag{1}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikteki μ, nötron doğrultusunu belirleyen bir parametre olup nötron doğrultusunun x-ekseni ile yaptığı açının kosinüsünü, σ_{S0} ve σ_{S1} diferansiyel saçılma tesir kesitinin sırasıyla ilk ve ikinci bileşenlerini temsil etmektedir. $\psi(x,\mu)$, açısal akı fonksiyonu Legendre polinomları cinsinden aşağıda verildiği gibi seriye açılabilir;

$$\psi(x,\mu) = \sum_{n=0}^{N}\frac{2n+1}{2}\,\phi_n(x)P_n(\mu),$$
$$-1 \le \mu \le 1, \quad -a \le x \le a \tag{2}$$

Eş.(2)'deki $\phi_n(x)$'ler, akı momentleri olarak adlandırılır. Legendre polinomları serisine bağlı olarak ifade edilen Eş.(2)'nin, Eş.(1)'de kullanılarak çözümleme yapılması yöntemine P_N metodu denir.

Legendre polinomları için tekrarlama ve ortagonallik (diklik) bağıntıları sırasıyla,

$$(2n+1)\mu P_n(\mu) = (n+1)\,P_{n+1}(\mu) + n\,P_{n-1}(\mu) \tag{3}$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(\mu)\,P_m(\mu)\,d\mu = \begin{cases} 0, & n \ne m \\ \dfrac{2}{2n+1}, & n = m \end{cases} \tag{4}$$

şeklinde tanımlanır.

Eş.(1)'in çözümü için; Eş.(2), bu eşitlikte yerine yazıldıktan sonra elde edilen yeni eşitlikte önce Eş.(3)'de tanımlanan tekrarlama bağıntısı kullanılır. Daha sonra da eşitliğin her iki yanı $P_m(\mu)$ ile çarpılıp μ üzerinden $[-1,\ 1]$ aralığında Eş.(4)'de tanımlanan özellik dikkate alınarak integrali alınırsa $\phi_n(x)$ akı momentleri ile ilgili diferansiyel denklemler elde edilir.

$$\frac{d\phi_1(x)}{dx} + \sigma_T\,\phi_0(x) = \sigma_{S0}\,\phi_0(x) \tag{5a}$$

$$\frac{d\phi_0(x)}{dx} + 2\frac{d\phi_2(x)}{dx} + 3\sigma_T\,\phi_1(x) = 3\sigma_{S1}\,\phi_1(x) \tag{5b}$$

$$2\frac{d\phi_1(x)}{dx} + 3\frac{d\phi_3(x)}{dx} + 5\sigma_T\,\phi_2(x) = 0 \tag{5c}$$

$$3\frac{d\phi_2(x)}{dx} + 4\frac{d\phi_4(x)}{dx} + 7\sigma_T\,\phi_3(x) = 0 \tag{5d}$$

Sonuç olarak akı momentleri için genel bir ifade;

$$n\frac{d\phi_{n-1}(x)}{dx} + (n+1)\frac{d\phi_{n+1}(x)}{dx} + (2n+1)\,\sigma_T\,\phi_n(x)$$
$$= \sigma_{S0}\phi_0(x)\,\delta_{n0} + 3\sigma_{S1}\phi_1(x)\,\delta_{n1}, \quad n \ge 0 \tag{6}$$

şeklinde yazılabilir. Burada δ_{mn} Kronecker delta olarak bilinir;

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \ne m \end{cases} \tag{7}$$

Eş.(6)'dan anlaşılacağı gibi $n = 0,1,2,3,\ldots,N$ olmak üzere sonlu sayıda birbiri ile bağıntılı $N+1$ tane $\phi_n(x)$ akı momentleri ile ilgili diferansiyel denklem mevcuttur.

Difüzyon yaklaşımında, $N \ge 1$ değerleri için akı momentlerinin $\phi_{N+1}(x) = 0$ olduğu kabul edilir. P_1 yaklaşımında, $n = 0$ ve $n = 1$ için Eş.(6) sırasıyla;

$$\frac{d\phi_1(x)}{dx} + \sigma_T\,\phi_0(x) = \sigma_{S0}\,\phi_0(x) \tag{8}$$

$$\frac{d\phi_0(x)}{dx} + 3\sigma_T\,\phi_1(x) = 3\sigma_{S1}\,\phi_1(x) \tag{9}$$

şeklinde yazılabilir. $c_0 = \dfrac{\sigma_{S0}}{\sigma_T}$ ve $c_1 = \dfrac{\sigma_{S1}}{\sigma_T}$ olmak üzere Eş.(8) ve Eş.(9) sırasıyla;

$$\frac{d\phi_1(x)}{dx} + \sigma_T\,(1-c_0)\phi_0(x) = 0 \tag{10}$$

$$\phi_1(x) = -\frac{1}{3\sigma_T\,(1-c_1)}\frac{d\phi_0(x)}{dx} \tag{11}$$

şeklinde düzenlenebilir. $\phi_0(x)$ nötron skaler akısını, $\phi_1(x)$ ise x doğrultusundaki nötron akımını temsil eder.

Genel geometride, nötron skaler akısı ile nötron akımı arasında Fick's kanununa göre,

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = -D\,\nabla\phi(\mathbf{r}) \tag{12}$$

ile tanımlanan bir ilişki vardır. Eş.(12)'de D, difüzyon sabitidir. Fiziksel olarak tek boyutta Eş.(12), Eş.(11)'e eşdeğerdir. Eş.(11), Eş.(10)'da yerine yazılırsa

$$\frac{d^2\phi_0(x)}{dx^2} - 3\sigma_T^2(1-c_0)(1-c_1)\,\phi_0(x) = 0 \tag{13}$$

sonucu elde edilir ki Eş.(13) dış kaynaktan bağımsız nötron difüzyon eşitliği adını alır. Sonuç olarak P_1 yaklaşımına göre difüzyon sabiti ve difüzyon uzunluğu sırası ile,

$$D = \frac{1}{3\sigma_T(1-c_1)} \tag{14}$$

$$L = \frac{1}{\sigma_T\sqrt{3(1-c_0)(1-c_1)}} \tag{15}$$

olarak bulunur.

Eş.(6) ile verilen birbiri ile kulpajlı denklem sisteminin çözümü için

$$\phi_n(x) = A_n(v)\exp(\sigma_T x/v), \quad -a \le x \le a \tag{16}$$

şeklinde tanımlanan bir eşitlik önerilebilir. Eş.(16), Eş.(6)'da kullanılarak çözümleme yapılırsa bütün $A_n(v)$'ler için analitik ifadeler bulmak mümkündür;

$$A_0(v) = 1 \tag{17a}$$

$$A_1(v) + v(1-c_0)A_0(v) = 0 \tag{17b}$$

$$A_0(v) + 2A_2(v) + 3v(1-c_1)A_1(v) = 0 \tag{17c}$$

$$2A_1(v) + 3A_3(v) + 5vA_2(v) = 0 \tag{17d}$$

$$3A_2(v) + 4A_4(v) + 7vA_3(v) = 0 \tag{17e}$$

Buna göre $A_n(v)$'ler için genel bir tekrarlama bağıntısı,

$$nA_{n-1}(v) + (n+1)A_{n+1}(v) + (2n+1)v\,A_n(v) = vc_0A_0(v)\,\delta_{n0} + 3vc_1A_1(v)\,\delta_{n1}, \quad n \ge 0 \tag{18}$$

şeklinde yazılabilir. Burada v'ler özdeğerleri, $A_n(v)$'ler de özfonksiyonları temsil etmektedir. v özdeğerlerinin hesaplanması için iki yöntem vardır. Bunlardan ilki $A_{N+1}(v) = 0$ denklemini çözmektir. Örneğin $N = 1$ için Eş.(17c)'de $A_2(v) = 0$ olmalıdır. Buradan

$$v = \pm\frac{1}{\sqrt{3(1-c_0)(1-c_1)}} \tag{19}$$

özdeğerleri P_1 yaklaşımına göre hesaplanmış olur.

İkinci yöntem ise Eş.(18)'i kullanarak $A_n(v)$'lerin katsayılarından oluşan $(N+1)\,\mathrm{x}\,(N+1)$ elemanlı bir kare matris oluşturmak ve bu matrisin determinantını sıfıra eşitleyerek v özdeğerlerini hesaplanmaktır.

$$\left|M(v)\right|\mathbf{A} = \mathbf{0} \tag{20}$$

$$M(v) = \begin{vmatrix} v(1-c_0) & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3v(1-c_1) & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 5v & 3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7v & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (2n+1)v \end{vmatrix} \tag{21}$$

c_0 ve c_1'in bazı değerleri için hesaplanan v özdeğerleri, T_N metodundan hesaplanan özdeğerlerle karşılaştırabilmek için tablolar halinde bulgular ve tartışma bölümünde sunulmuştur.

Chebyshev Polinomu Yaklaşımı: T_N Metodu

Bu yöntemde, Eş.(1)'deki $\psi(x,\mu)$, açısal akı fonksiyonu I. tip Chebyshev polinomları cinsinden aşağıdaki gibi seriye açılabilir;

$$\psi(x,\mu) = \frac{\Phi_0(x)T_0(\mu)}{\pi\sqrt{1-\mu^2}} + \frac{2}{\pi\sqrt{1-\mu^2}}\sum_{n=1}^{N}\Phi_n(x)T_n(\mu)$$

$$-1 \le \mu \le 1, \quad -a \le x \le a \tag{22}$$

Eş.(22)'deki $\Phi_n(x)$'ler, akı momentleridir. I. tip Chebyshev polinomları serisine bağlı olarak ifade edilen Eş.(22)'nin, Eş.(1)'de kullanılarak çözümleme yapılması yöntemine T_N metodu denir.

Chebyshev polinomlarının I. tipi için tekrarlama ve ortagonallik (diklik) bağıntıları sırasıyla,

$$2\mu T_n(\mu) = T_{n+1}(\mu) + T_{n-1}(\mu) \tag{23}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(\mu)\,T_m(\mu)}{\sqrt{(1-\mu^2)}}\,d\mu = \begin{cases} 0, & n \ne m \\ \dfrac{\pi}{2}, & n = m \ne 0 \\ \pi, & n = m = 0 \end{cases} \tag{24}$$

ile verilir.

T_N yönteminde Eş.(1) çözümü için; Eş.(22), Eş.(1)'de yerine yazıldıktan sonra elde edilen yeni eşitlikte önce Eş.(23)'de tanımlanan tekrarlama bağıntısı kullanılır. Daha sonra da eşitliğin her iki yanı $T_m(\mu)$ ile çarpılıp μ üzerinden $[-1,\ 1]$ aralığında Eş.(24)'de tanımlanan özellik dikkate alınarak integrali alınırsa $\Phi_n(x)$ akı momentleri ile ilgili diferansiyel denklemler elde edilir.

$$\frac{d\Phi_1(x)}{dx}+\sigma_T\Phi_0(x)=\sigma_{s0}\Phi_0(x)\,, \tag{25a}$$

$$\frac{d\Phi_0(x)}{dx}+\frac{d\Phi_2(x)}{dx}+2\sigma_T\Phi_1(x)=2\sigma_{S1}\Phi_1(x)\,, \tag{25b}$$

$$\frac{d\Phi_1(x)}{dx}+\frac{d\Phi_3(x)}{dx}+2\sigma_T\Phi_2(x)=-\frac{2}{3}\sigma_{S0}\Phi_0(x)\,, \tag{25c}$$

$$\frac{d\Phi_2(x)}{dx}+\frac{d\Phi_4(x)}{dx}+2\sigma_T\Phi_3(x)=-\frac{6}{5}\sigma_{S1}\Phi_1(x)\,, \tag{25d}$$

$$\frac{d\Phi_3(x)}{dx}+\frac{d\Phi_5(x)}{dx}+2\sigma_T\Phi_4(x)=\frac{-2}{15}\sigma_{S0}\Phi_0(x)\,, \tag{25e}$$

Sonuç olarak akı momentleri için genel bir ifade;

$$\frac{d\Phi_{n+1}(x)}{dx}+\frac{d\Phi_{n-1}(x)}{dx}+2\sigma_T\Phi_n(x)=\left[\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}\right]\sigma_{S0}\Phi_0(x)+3\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2-4}\right]\sigma_{S1}\Phi_1(x)$$

$$-a\le x\le a\,,\quad n\ge 3 \tag{26}$$

şeklinde yazılabilir. (25a), (25b) ve (25c)eşitlikleri de dahil olmak üzere Eş.(26)'dan anlaşılacağı gibi $n=3,4,\ldots,N$ için sonlu sayıda birbiri ile bağıntılı $N+1$ tane $\Phi_n(x)$ akı momentleri ile ilgili diferansiyel denklem mevcuttur.

P_N metodunda, $n=1$ durumunun difüzyon yaklaşımına benzer olduğu gösterilmişti. $N\ge 1$ değerleri için akı momentlerinin $\Phi_{N+1}(x)=0$ olduğu varsayılarak benzer şekilde T_N metodunda da $n=1$ durumunun difüzyon yaklaşımına eşdeğer sonuçlar verdiği gösterilebilir. Bu kural, $n=1$ için T_1 yaklaşımında, Eş.(25b)'de kullanılırsa;

$$\frac{d\Phi_0(x)}{dx}+2\sigma_T\Phi_1(x)=2\sigma_{S1}\Phi_1(x) \tag{27}$$

elde edilir. $c_0=\dfrac{\sigma_{S0}}{\sigma_T}$ ve $c_1=\dfrac{\sigma_{S1}}{\sigma_T}$ olmak üzere Eş.(25a) ve Eş.(27) sırasıyla,

$$\frac{d\Phi_1(x)}{dx}+\sigma_T(1-c_0)\Phi_0(x)=0 \tag{28}$$

$$\Phi_1(x)=-\frac{1}{2\sigma_T(1-c_1)}\frac{d\Phi_0(x)}{dx} \tag{29}$$

şeklinde yazılabilir. Genel geometride, nötron skaler akısı ile nötron akımı arasında tanımlanan Fick's kanunu, Eş.(12) ile verilmişti. Tek boyutta Eş.(12), Eş.(29)'a eşdeğerdir. Eş.(29), Eş.(28)'da yerine yazılırsa;

$$\frac{d^2\Phi_0(x)}{dx^2}-2\sigma_T^2(1-c_0)(1-c_1)\Phi_0(x)=0 \tag{30}$$

sonucu elde edilir. Eş.(30) dış kaynaktan bağımsız nötron difüzyon eşitliğidir. Sonuç olarak T_1 yaklaşımına göre difüzyon sabiti ve difüzyon uzunluğu sırası ile,

$$D=\frac{1}{2\sigma_T(1-c_1)} \tag{31}$$

$$L=\frac{1}{\sigma_T\sqrt{2(1-c_0)(1-c_1)}} \tag{32}$$

olarak bulunur.

Eş.(26) ile verilen birbiri ile kulpajlı denklem sisteminin çözümü için

$$\Phi_n(x)=G_n(v)\exp(\sigma_T x/v),\quad -a\le x\le a \tag{33}$$

şeklinde tanımlanan bir eşitlik önerilebilir. Eş.(33), Eş.(26)'da kullanılarak çözümleme yapılırsa bütün $G_n(v)$'ler için analitik ifadeler bulmak mümkündür.

$$G_0(v)=1 \tag{34a}$$

$$G_1(v)=-v(1-c_0)G_0(v) \tag{34b}$$

$$G_0(v)+G_2(v)=-2v(1-c_1)G_1(v) \tag{34c}$$

$$G_1(v)+G_3(v)+2vG_2(v)=-\frac{2}{3}vc_0G_0(v) \tag{34d}$$

$$G_2(v)+G_4(v)+2vG_3(v)=-\frac{6}{5}vc_1G_1(v) \tag{34e}$$

Buna göre $G_n(v)$'ler için genel bir tekrarlama bağıntısı,

$$G_{n+1}(v)+2vG_n(v)+G_{n-1}(v)=\left[\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}\right]vc_0G_0(v)+3\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2-4}\right]vc_1G_1(v),$$

$$n\ge 3, \tag{35}$$

şeklinde yazılabilir. Burada v'lar özdeğerleri, $G_n(v)$'ler de özfonksiyonları temsil etmektedir. v özdeğerlerinin hesaplanması için P_N metodunda olduğu gibi yine iki yöntem vardır. Bunlardan ilki $G_{N+1}(v)=0$ denklemini çözmektir. Örneğin $N=1$ için Eş.(34c)'de $G_2(v)=0$ olmalıdır. Buradan

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{2(1-c_0)(1-c_1)}} \tag{36}$$

özdeğerleri T_1 yaklaşımına göre hesaplanmış olur.

İkinci yöntem ise (34b), (34c), (34d) eşitlikleri ile Eş.(35)'i kullanarak $G_n(v)$ 'lerin katsayılarından oluşan $(N+1)\,\mathrm{x}\,(N+1)$ elemanlı bir kare matris oluşturmak ve bu matrisin determinantını sıfıra eşitleyerek v özdeğerlerini hesaplamaktır.

$$\left| M(v) \right| \mathbf{G} = \mathbf{0} \tag{37}$$

$$M(v)=\begin{vmatrix} v(1-c_0) & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2v(1-c_1) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{2}{3}vc_0 & 1 & v & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{6}{5}vc_1 & 1 & 2v & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1+(-1)^n}{1-n^2}vc_0 & 3\frac{(-1)^n-1}{n^2-4}vc_1 & 0 & 0 & \dots & 2v \end{vmatrix} \tag{38}$$

c_0 ve c_1'in bazı değerleri için hesaplanan v özdeğerleri, P_N metodundan hesaplanan özdeğerlerle karşılaştırabilmek için tablolar halinde bulgular ve tartışma kısmında sunulmuştur.

BULGULAR ve TARTIŞMA

Eş.(1)'de yer alan σ_T (toplam diferansiyel tesir kesiti), σ_{S0} (diferansiyel saçılma tesir kesitinin ilk bileşeni) ve σ_{S1} (diferansiyel saçılma tesir kesitinin ikinci bileşeni) terimlerinin birimi cm^{-1}'dir. Reaktör fiziğinde $\frac{1}{\sigma_T}$ niceliği nötronun soğurulmadan önce gidebileceği ortalama yol (mean free path) olarak bilinir. Bu çalışmada yapılan tüm sayısal hesaplamalarda $\sigma_T = 1\,cm^{-1}$ alınmıştır.

Nötron transport denklemini çözmek için geliştirilmiş birçok yöntem vardır. Bu çalışmada önce Legendre polinomları kullanılarak anizotropik saçılmalı durum için nötron transport denkleminin çözümü yapıldı. Daha sonra da Chebysev polinomu yaklaşımı kullanılarak çözüm gerçekleştirildi.

Her iki metoda önerilen çözüm fonksiyonları nötron transport eşitliğinde kullanılarak akı momentleri elde edildi. Akı momentlerinin çözümü için uygun matematiksel varsayımlar kullanıldı. Böylece hem P_N hem de T_N yönteminde nötron transport denklemi için asimptotik ve sürekli çözümler elde edildi. v özdeğerlerinin hesaplanmasında Maple9 bilgisayar programından yararlanıldı. Hesaplamalarda virgülden sonra beşinci basamaktan sonra yuvarlama yapıldı. Her iki yöntemle (c_0 ve c_1'in çeşitli değerleri için) hesaplanan v özdeğerleri tablolar halinde verildi.

v özdeğerleri, P_N metodunda $A_N(v)=0$ denkleminin çözümünden, T_N metodunda ise $G_N(v)=0$ denkleminin çözümünden elde edilmiştir. N çift sayı ise hem $A_N(v_j)=0$ hem de $G_N(v_j)=0$ denkleminin çözümünden elde edilen N tane kök $\pm v_j$ çiftleri halindedir. Eğer N tek sayı ise hem $A_N(v_j)=0$ hem de $G_N(v_j)=0$ denkleminin köklerinden bir tanesi sıfır olup (N-1) tanesi $\pm v_j$ çiftleri halindedir. Yani v_j özdeğerleri, 0 orijin noktasına göre simetriktir. Her iki denklemin çözümünden de elde edilen $\pm v_j$ özdeğerleri için pozitif v_j özdeğerleri, negatif v_j özdeğerlerinin simetriği olduğu için tablolarda sadece pozitif v_j özdeğerleri gösterildi.

Eğer $0 < c_0 < 1$ ise Tablo 1, Tablo 2 ve Tablo 3'de görüldüğü gibi bütün özdeğerler gerçel olup bir çifti 1'den büyüktür. Diğerleri ise $-1 < v < 1$ aralığındadır. Bu aralıktaki özdeğerlere sürekli özdeğerler ve bu özdeğerlere karşılık gelen çözümlere de sürekli çözümler denir. Bu sonuca göre $0 < c_0 < 1$ için, $-1 < v < 1$ aralığının dışındaki özdeğerlerin $1 < v < \infty$ aralığında değişeceği açıktır. $v > 1$ özdeğerlerinin tekabül ettiği çözümlere de asimptotik çözümler denir. (Bell and Glasstone 1970)

$c_0 > 1$ iken Tablo 4, Tablo 5 ve Tablo 6'da görüldüğü gibi özdeğerlerin bir çifti kompleks olup bunlar asimptotik köklerdir. Kompleks özdeğerler $\pm i\infty$ aralığında değişmektedir. Diğerleri ise yine $-1 < v < 1$ aralığında reel sayı olmaktadır.

Tablolardaki sonuçlardan da görüldüğü gibi, hem P_N metodundan hem de T_N metodundan elde edilen değerler birbirlerine çok yakındır. Bu durum, T_N metoduna nötron transport denkleminin çözümünde kullanılan P_N metoduna alternatif bir yöntem olarak bakılabileceğini açıkca göstermektedir.

Tablo 1. $c_0 = 0$ ve $0 \le c_1 < 1$ için, T_N ve P_N yaklaşımlarının karşılaştırılması

	c_1	N=2		N=5		N=6		N=10	
		T_N	P_N	T_N	P_N	T_N	P_N	T_N	P_N
$c_0 = 0.00$	0.99	7.07106	5.77350	7.75437	7.75338	7.75339	7.75338	7.75338	7.75339
				0.72090	0.62933	0.84370	0.76634	0.96283	0.93437
				0.00	0.00	0.27023	0.24760	0.77365	0.73996
								0.48411	0.45845
								0.15806	0.15027
	0.80	1.58113	1.29099	1.77614	1.76942	1.77058	1.76972	1.76976	1.76976
				0.70376	0.61663	0.83254	0.75577	0.96092	0.93166
				0.00	0.00	0.26815	0.24595	0.76780	0.73422
								0.47973	0.45473
								0.15775	0.15001
	0.50	1.00000	0.81649	1.18542	1.16675	1.17774	1.17085	1.17287	1.17265
				0.66690	0.59144	0.80175	0.73044	0.95380	0.92253
				0.00	0.00	0.26475	0.24327	0.75335	0.72060
								0.47154	0.44787
								0.15727	0.14959
	0.00	0.70710	0.57735	0.95105	0.90617	0.96592	0.93246	0.98768	0.97390
				0.58778	0.53846	0.70710	0.66120	0.89100	0.86506
				0.00	0.00	0.25881	0.23861	0.70710	0.67941
								0.45399	0.43339
								0.15643	0.14887

Tablo 2. $c_0 = 0.50$ ve $0 \le c_1 < 1$ için, T_N ve P_N yaklaşımlarının karşılaştırılması

	c_1	N=2		N=5		N=6		N=10	
		T_N	P_N	T_N	P_N	T_N	P_N	T_N	P_N
$c_0 = 0.50$	0.99	10.0000	8.16496	9.66524	9.66473	9.66473	9.66473	9.66473	9.66473
				0.75263	0.66128	0.85738	0.78382	0.96470	0.93733
				0.00	0.00	0.30169	0.27465	0.78358	0.75045
								0.50252	0.47622
								0.17023	0.16132
	0.80	2.23606	1.82574	2.18195	2.17889	2.17926	2.17895	2.17896	2.17896
				0.74547	0.65588	0.85263	0.77934	0.96385	0.93613
				0.00	0.00	0.30085	0.27396	0.78106	0.74797
								0.50076	0.47476
								0.17013	0.16123
	0.50	1.41421	1.15470	1.40817	1.40044	1.40325	1.40128	1.40147	1.40146
				0.73055	0.64539	0.84134	0.76958	0.96154	0.93300
				0.00	0.00	0.29946	0.27285	0.77554	0.74269
								0.49758	0.47216
								0.16996	0.16108
	0.00	1.00000	0.81649	1.05072	1.02887	1.04992	1.03662	1.04565	1.04374
				0.69231	0.62117	0.80173	0.74094	0.94595	0.91623
				0.00	0.00	0.29699	0.27088	0.75845	0.72734
								0.49096	0.46685
								0.16968	0.16083

Tablo 3. $c_0 = 0.99$ ve $0 \le c_1 < 1$ için, T_N ve P_N yaklaşımlarının karşılaştırılması

	c_1	N=2		N=5		N=6		N=10	
		T_N	P_N	T_N	P_N	T_N	P_N	T_N	P_N
$c_0 = 0.99$	0.99	70.7106	57.7350	57.9655	57.9655	57.9655	57.9655	57.9655	57.9655
				0.80479	0.71349	0.88231	0.81527	0.96874	0.94369
				0.00	0.00	0.34564	0.31131	0.80251	0.76995
								0.53034	0.50252
								0.18491	0.17449
	0.80	15.8113	12.9099	12.9615	12.9615	12.9615	12.9615	12.9615	12.9615
				0.80478	0.71348	0.88230	0.81527	0.96874	0.94369
				0.00	0.00	0.34564	0.31131	0.80251	0.76995
								0.53034	0.50252
								0.18491	0.17449
	0.50	10.0000	8.16496	8.19770	8.19768	8.19768	8.19768	8.19768	8.19768
				0.80478	0.71348	0.88228	0.81526	0.96873	0.94369
				0.00	0.00	0.34565	0.31131	0.80251	0.76995
								0.53033	0.50252
								0.18491	0.17449
	0.00	7.07106	5.77350	5.79675	5.79672	5.79673	5.79672	5.79672	5.79672
				0.80476	0.71346	0.88224	0.81525	0.96873	0.94369
				0.00	0.00	0.34566	0.31131	0.80251	0.76994
								0.53033	0.50251
								0.18491	0.17449

Tablo 4. $c_0 = 1.01$ ve $0 \le c_1 < 1$ için, T_N ve P_N yaklaşımlarının karşılaştırılması

	c_1	N=2		N=5		N=6		N=10	
		T_N	P_N	T_N	P_N	T_N	P_N	T_N	P_N
$c_0 = 1.01$	0.99	70.7106i	57.7350i	57.5036i	57.5036i	57.5036i	57.5036i	57.5036i	57.5036i
				0.80767	0.71636	0.88378	0.81711	0.96901	0.94411
				0.00	0.00	0.34784	0.31311	0.80365	0.77110
								0.53177	0.50385
								0.18558	0.17508
	0.80	15.8113i	12.9099i	12.8582i	12.8582i	12.8582i	12.8582i	12.8582i	12.8582i
				0.80767	0.71636	0.88379	0.81710	0.96901	0.94411
				0.00	0.00	0.34783	0.31311	0.80364	0.77110
								0.53177	0.50385
								0.18558	0.17508
	0.50	10.0000i	8.16496i	8.13238i	8.13236i	8.13236i	8.13236i	8.13236i	8.13236i
				0.80766	0.71635	0.88380	0.81710	0.96901	0.94411
				0.00	0.00	0.34782	0.31311	0.80364	0.77110
								0.53177	0.50385
								0.18558	0.17508
	0.00	7.07106i	5.77350i	5.75056i	5.75053i	5.75054i	5.75053i	5.75053i	5.75053i
				0.80764	0.71634	0.88382	0.81709	0.96901	0.94411
				0.00	0.00	0.34781	0.31311	0.80363	0.77109
								0.53178	0.50385
								0.18558	0.17508

$i = \sqrt{-1}$

Tablo 5. $c_0 = 1.50$ ve $0 \le c_1 < 1$ İçin, T_N ve P_N yaklaşımlarının karşılaştırılması

	c_1	N=2		N=5		N=6		N=10	
		T_N	P_N	T_N	P_N	T_N	P_N	T_N	P_N
$c_0 = 1.50$	0.99	10.0000i	8.16496i	6.33953i	6.33786i	6.33786i	6.33786i	6.33786i	6.33786i
				0.91638	0.82442	0.94584	0.89273	0.98500	0.96796
				0.00	0.00	0.41704	0.36772	0.85095	0.81633
								0.57671	0.54497
								0.20400	0.19136
	0.80	2.23606i	1.82574i	1.46251i	1.45939i	1.45993i	1.45982i	1.45978i	1.45978i
				0.88822	0.80058	0.92799	0.87253	0.97876	0.95911
				0.00	0.00	0.41261	0.36525	0.83915	0.80630
								0.57209	0.54113
								0.20374	0.19117
	0.50	1.41421i	1.15470i	0.94868i	0.94729i	0.94995i	0.94925i	0.94895i	0.94895i
				0.86602	0.78005	0.91482	0.85661	0.97505	0.95352
				0.00	0.00	0.40683	0.36185	0.82910	0.79720
								0.56659	0.53641
								0.20334	0.19088
	0.00	1.00000i	0.81649i	0.68501i	0.68549i	0.69169i	0.69010i	0.68916i	0.68913i
				0.84808	0.76224	0.90494	0.84395	0.97271	0.94987
				0.00	0.00	0.39939	0.35723	0.82082	0.78932
								0.56027	0.53082
								0.20273	0.19043

Tablo 6. $c_0 = 2$ ve $0 \le c_1 < 1$ İçin, T_N ve P_N Yaklaşımlarının Karşılaştırılması

	c_1	N=2		N=5		N=6		N=10	
		T_N	P_N	T_N	P_N	T_N	P_N	T_N	P_N
$c_0 = 2.00$	0.99	7.07106i	5.77350i	2.75779i	2.74234i	2.74219i	2.74248i	2.74248i	2.74248i
				1.26046	1.16828	1.21256	1.18945	1.19750	1.19693
				0.00	0.00	0.53164	0.45101	0.92860	0.88651
								0.63761	0.59969
								0.22727	0.21162
	0.80	1.58113i	1.29099i	0.79681i	0.79561i	0.80659i	0.80521i	0.80349i	0.80349i
				0.97548	0.90043	0.98466	0.94415	1.00012	0.98909
				0.00	0.00	0.49769	0.43272	0.88401	0.84824
								0.61607	0.58184
								0.22579	0.21054
	0.50	1.00000i	0.81649i	0.54498i	0.54954i	0.57165i	0.56840i	0.56414i	0.56409i
				0.90203	0.82448	0.93532	0.88433	0.97993	0.96114
				0.00	0.00	0.46756	0.41392	0.84841	0.81698
								0.59565	0.56422
								0.22371	0.20898
	0.00	0.70710i	0.57735i	0.40261i	0.40949i	0.44005i	0.43585i	0.42943i	0.42923i
				0.86338	0.78238	0.91287	0.85503	0.97415	0.95218
				0.00	0.00	0.44005	0.39478	0.82852	0.79775
								0.57755	0.54790
								0.22076	0.20673

$i = \sqrt{-1}$

SONUÇ

I. tip Chebyshev polinomlarının özelliklerinin Legendre polinomlarının özelliklerine benzer olması ve her iki polinomun argümanlarının $[-1,\ 1]$ aralığında değişiyor olması anizotropik saçılmalı nötron transport denkleminin çözümünün I. tip Chebyshev polinomları ile de yapılabileceği fikrini ortaya çıkardı. Bu amaçla nötron dağılımını temsil eden fonksiyon, bu polinomlar cinsinden seriye açılıp anizotropik saçılmalı

nötron transport denkleminde kullanılarak akı momentleri ile ilgili diferansiyel denklemler elde edildi. Bu diferansiyel denklemler çözülerek özdeğerler hesaplandı.

$c_1 = 0$ için saçılma izotropik olur. Yani saçılma her yöne aynı ihtimal ile gerçekleşmektedir. Tabloların son satırında ($c_1 = 0$ iken) verilen özdeğerler, izotropik saçılmalı nötron transport denklemi kullanılarak elde edilen özdeğerlere eşittir.

Tablolar dikkatlice incelendiğinde P_N ve T_N yönteminden elde edilen asimptotik çözümlerin özellikle $N = 5$ yaklaşımından sonra hemen hemen neredeyse birbirine eşit olduğu görülür. Yine aynı şekilde N'nin çok büyük değerlerinde sürekli özdeğerlerin de giderek birbirine eşit olduğu görülmektedir. Her iki yöntemle de hesaplanan özdeğerlerin birbiri ile uyumlu olması T_N yaklaşımının geçerliliğini doğrulamaktadır. Kısacası I. tip Chebyshev polinomu (T_N) yaklaşımının nötron transport denkleminin çözümünde ve çeşitli reaktör parametrelerinin (difüzyon uzunluğu, difüzyon sabiti v.b.) hesaplanmasında kullanılabileceği açıktır.

KAYNAKLAR

Anlı, F., Yaşa, F. 2003. Nötron Transportu İçin Küresel Geometride Ödeğer Hesaplaması. KSÜ Fen ve Mühendislik Dergisi, 6(2):28 - 33

Anlı, F., Yaşa, F., Güngör, S., Öztürk, H. 2006. T_N Approximation to Neutron Transport Equation and Application to Critical Slab Problem. Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 101: 129-134.

Arfken, G.B., Weber, H.J. 1995. Mathematical Methods For Physicists. Academic Pres, London, 4. edition, 1028s.

Atalay, M.A., Yıldız, C. 2002. P_N Critically Solutions Neutron Transport Equation With Anisotropic Scattering In Reflected Homogeneous Slab and Sphere. Kerntechnik, 67: 276-283.

Bell, G.I., Glasstone, S. 1970. Nuclear Reactor Theory. Van Nostrand Reinhold Company, United States of America, 619s.

Case, K.M., Zweifel, P.F. 1967. Lineer Transport Theory. Addison-Wesley Publishing Company, United States of America, 342s.

Conkie, W. R. 1959. An Iterative Method In Neutron Transport Theory. Nucl. Sci. And Eng., 6: 267.

Garis, N.S. 1991. One-Speed Neutron Transport Eigenvalues for Reflected Slabs and Spheres. Nucl. Sci. And Eng., 107: 343-358.

Seiwert, C.E., Wright, S. J. 1999. Efficient Eigenvalue Calculations In Radiative Transfer. Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 62:685-688

Yaşa, F., Anlı, F., Güngör, S. 2006. Eigenvalue Spectrum With Chebyshev Polynomial Approximation of The Transport Equation In Slab Geometry. Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer,1: 51-57.

Yıldız, C. 2001. The Spherical Harmonics Method For Anisotropic Scattering In Neutron Transport Theory. Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 71: 25-37.