

Sonlu Kanonik Hipergrupların SS-Tümlemiş Althipergrupları Üzerine

*Makale Bilgisi / Article Info

Alındı/Received: 11.10.2024

Kabul/Accepted: 19.02.2025

Yayımlandı/Published: 04.08.2025

On SS-Supplemented Subhypergroups of Finite Canonical Hypergroups

Sena Cam¹ , Burcu Nişancı Türkmen^{2*} , Yıldız Aydın³ ¹ Amasya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Amasya, Türkiye^{2*} Amasya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, İpekköy Kampüsü, Amasya, Türkiye³ İstanbul Gelişim Üniversitesi, İktisadi İdari ve Sosyal Bilimler Fakültesi, Yönetim Bilişim Sistemleri, İstanbul, Türkiye

© 2025 The Authors | Creative Commons Attribution-Noncommercial 4.0 (CC BY-NC) International License

Öz

Bu çalışmada literatürde var olan sonlu grupların SS-tümlemiş altgrupları kavramı, sonlu kanonik hipergruplarda yorumlanmıştır. SS-tümlemiş her althiper grubun althiper grubunda da ss-tümlemiş olduğu görülmüştür. Hiper yapılar da çarpıcı bir sonuç olarak SS-tümlemiş bir hiper grubun her bölüm hiper grubunun ve güçlü normal althiper grubunun da SS-tümlemiş olduğu ispatlanmıştır. Hiper cebirsel yapı özelliklerinin çözülebilir hiper gruplarda korunduğu görülmüştür. Böylece SS-tümleyen althiper gruba sahip olma özelliği çözülebilir hiper gruplarda karakterize edilmiştir.

Anahtar Kelimeler Sonlu Kanonik Hipergrup, Güçlü Normal Althipergrup, Çözülebilir Althipergrup, SS-Tümlemiş Althipergrup

Abstract

In this study, the concept of SS-supplemented subgroups of finite groups existing in the literature has been interpreted in finite canonical hypergroups. It has been observed that every SS-supplemented subhypergroup is also SS-supplemented in its subhypergroup. As a striking result in hyperstructures, it has been proven that every factor hypergroup and strong normal subhypergroup of an SS-supplemented hypergroup is SS-supplemented. It has been observed that hyperalgebraic structure properties are preserved in solvable hypergroups. Thus, the property of having an SS-supplemented subhypergroup has been characterized in solvable hypergroups.

Keywords Finite Canonical Hypergroup, Strong Normal Subhypergroup, Solvable Hypergroup, SS-Supplemented Subhypergroup

1. Giriş

Matematikte Sylow teoremleri sonlu gruplar teorisinin temelini oluşturmaktadır. Sonlu bir G grubunun H alt grubu verilsin. $G = HK$ ve $H \cap K = \{e\}$ koşullarını sağlayan bir K alt grubu varsa H a G de tamlanmış alt grup adı verilir. Bu durumda K ye H nin G deki *tamlayanı* adı verilir. Hall (1937) de sonlu bir grubun çözülebilir olması için gerek ve yeter koşulun bu grubun her bir Sylow alt grubunun tamlanmış olması olduğu ispatlanmıştır. Hall (1937) de her alt grubu tamlanmış olan grupları karakterize etmiştir. Ayrıca bu grupların elementer abel Sylow alt gruplu süper çözülebilir gruplar oldukları gösterilmiştir. Sonlu grupların tamlanmış alt gruplarını güçlendirerek sonlu gruplarda C -tümlemiş alt grup kavramı Ballester vd. (2000) de çalışılmıştır. Sonlu bir G grubunun H alt grubu için $G = HK$ ve $H \cap K \leq Core_G(H)$ olan bir $K \leq G$ mevcutsa H ye G de C -tümlemiş alt grup adı verilir. Burada $H_G = Core_G(H) = \bigcap_{a \in A} a^{-1}Ha$ dir. G sonlu bir grup olsun. G nin mertebesi olan $|G|$ yi bölen tüm asalların kümesi $\pi(G)$ ile gösterilmektedir. $|G|_p$ ise G nin

mertebesini bölen p asalının en yüksek kuvvetini göstermektedir. G_p ise $p \in \pi(G)$ olan G nin Sylow p – alt grubudur. G grubunun asal mertebeli olan alt grubuna minimal alt grup denir. G sonlu grubunun H alt grubu verilsin. Eğer H, G nin her Sylow alt grubu ile permüte edilebiliyorsa yani G nin her bir P Sylow alt grubu için $HP = PH$ ise H ye G de S – permüte edilebilir denir Kegel (1962). G sonlu grubunun H alt grubu için $G = HK$ ve $H \cap K$; K de S –quasinormal olacak şekilde bir $H \leq G$ varsa H ye G nin SS –tümlemiş alt grubu denir. Bu takdirde K ye H nin G deki SS –tümleyen adı verilir. Burada $H \cap K$ nin K de S –quasinormal olması K nin her P Sylow alt grubu için $(H \cap K)P = P(H \cap K)$ olmasıdır. Li vd. (2008) in bir genelleştirmesi olarak sonlu bir G grubunun H alt grubu için $G = HK$ ve H, K nin her Sylow alt grubu ile permüte edilebiliyorsa H a G de S –quasinormal adı verilir Guo ve Lu (2012).

Marty (1934) de cebirsel fonksiyon ve kesir cismi başta olmak üzere gruplarla ilgili bazı problemlerin çözüm yöntemlerini araştırırken grup kavramından daha genel

olan hipergrup kavramını tanımlamıştır. Bu kavram Corsini (1993), Corsini ve Leoreanu (2003), Davvaz ve Leoreanu Fotea (2007), Vougiouklis (1994) kaynaklarında detaylı bir biçimde çalışılmıştır. H boştan farklı bir küme ve $P^*(H)$, H nin boştan farklı alt kümelerinin bir ailesi olsun. $\cdot : H \times H \rightarrow P^*(H)$, her $(a, b) \in H \times H$ için $\cdot(a, b) = a \cdot b$ biçiminde tanımlı dönüşümüne bir hiperişlem denir. $\emptyset \neq V, W \subseteq H$ için

$$V \cdot W = \bigcup \{vw \mid v \in V, w \in W\}$$

biçiminde tanımlıdır. Kısalık açısından $\{w\} \cdot V$ veya $V \cdot \{w\}$ sırasıyla $w \cdot V$ veya $V \cdot w$ biçiminde yazılacaktır. Her $a, b, c \in H$ için $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ olan $(H, \cdot)$ yarı hipergrup olarak adlandırılır. $(H, \cdot)$ bir yarı hipergrup olsun. Her $a \in H$ için $a \cdot H = H = H \cdot a$ ise H ye hipergrup adı verilir. H hiper grubunun boştan farklı K alt kümesi verilsin. K , H daki hiperişlemine göre bizzat bir hipergrup ise K ye H nin althiper grubu adı verilir ve $K \leq H$ ile gösterilir. $(H, \cdot)$ hiper grubunda her bir $x \in H$ için $x \in (x \cdot e_r)(x \in (e_l \cdot x))$ koşulunu sağlayan e_r (e_l) elemanı mevcutsa bu elemana H nin sağ birim (sol birim) elemanı denir. $(H, \cdot)$ hiper grubunda her bir $x \in H$ elemanı verildiğinde $x \in (x \cdot e) \cap (e \cdot x)$ olan $e \in H$ elemanı mevcutsa bu elemana H nin birim elemanı adı verilir. $(H, \cdot)$ hiper grubunda her bir $x \in H$ elemanı için $x = (x \cdot e_r)(x = (e_l \cdot x))$ olan e_r (e_l) elemanına H nin skalar sağ birimi (skalar sol birimi) denir. Her $x \in H$ için $x = (x \cdot e) = (e \cdot x)$ eşitliğini sağlayan $e \in H$ varsa buna H hiper grubunun skalar birimi denir. $(H, \cdot)$ hiper grubunda $a \in H$ için $e_r \in (a \cdot a')(e_l \in (a' \cdot a))$ olan a' elemanına a nın sağ (sol) ters elemanı denir. $e \in (a' \cdot a) \cap (a \cdot a')$ ise $a' \in H$, a nın tersi olarak adlandırılır Jantani vd.(2017). Skalar birim elemana sahip, her elemanın tek ters elemanı bulunan, değişmeli olan ve $x \in (y \cdot z)$ olan her $x, y, z \in H$ için $y \in (x \cdot z^{-1})$ ve $z \in (y^{-1} \cdot x)$ koşullarını sağlayan $(H, \cdot)$ ikilisine kanonik hipergrup denir. $(H, \cdot)$ kanonik hipergrup T de H nin kanonik althiper grubu olsun. $\frac{H}{T} = \{x \cdot T \mid x \in H\}$ kümesi

her $x \cdot T, y \cdot T \in \frac{H}{T}$ için $(x \cdot T) \cdot (y \cdot T) = \{t \cdot T \mid t \in x \cdot y\}$ işlemine göre hipergrup olup bu hipergruba H nin T ye göre bölüm hiper grubu adı verilir. $(H, \cdot)$ ve $(H', \circ)$ birer hipergrup olsun. Her $a, b \in H$ için $f(a, b) \subseteq f(a) \circ f(b)$ olan $f : H \rightarrow H'$ fonksiyonuna homomorfizma denir. Burada $f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$ eşitliği sağlanıyorsa f ye güçlü homomorfizma adı verilir. Jantani vd. (2017) da p –Sylow althipergrup kavramını tanımlamışlardır. Yine Jantani vd. (2017) de hipergruplar için bir elemanın mertebesi tanımı şu şekilde sunulmuştur: $x_{l,p}(H)$ ile H hiper grubundaki sol

mertebeleri p asalının kuvveti olan tüm elemanlarının kümesi gösterilsin. Burada her $x \in H$ elemanının sol mertebesi

$$\begin{aligned} 0_l(x) &= \min\{0_l(x, x'') \mid e_l \in x'' \cdot x\} \\ &= \min\{\min\{s > 0 \mid \exists k, m \in \mathbb{N} : e_l \in x^s (x'^m \cdot x^m)^k \cap (x'^m \cdot x^m)^k \cdot x^s \mid e_p \in x'' \cdot x\} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. H nin $x_{l,p}(H)$ in alt kümesi olan her althiper grubuna sol genelleştirilmiş p –althiper grubu denir. Kısaca lgp – althipergrup olarak gösterilir. H nin tüm lgp –althiper gruplarının kümesi $M_{l,g,p}(H)$ ile gösterilir. $M_{l,g,p}(H)$ nin maksimal elemanlarına H nin sol genelleştirilmiş p –Sylow althiper grupları veya kısaca lgp –Sylow althiper grupları denir. H nin lgp – althiper gruplarının mertebesi p nin kuvveti olup H nin mertebesini bölerse bu althiper gruplara H nin sol p –althiper grubu veya lp –althiper grubu denir. H nin tüm lgp – Sylow althiper gruplarının kümesi $S_{l,g,p}(H)$ ile gösterilir. $M_{l,p}(H)$ ile H nin tüm lp – althiper gruplarının kümesi gösterilir. $M_{l,p}(H)$ nin maksimal elemanlarına H nin sol p –Sylow althiper grupları veya lp –Sylow althiper grupları denir. $S_{l,p}(H)$ ile H nin lp –Sylow althiper gruplarının kümesi gösterilir. Benzer şekilde sol yerine sağ skalar birim alınarak $x_{r,p}(H)$, $M_{r,g,p}(H)$, $S_{r,g,p}(H)$ ve $S_{r,p}(H)$ tanımlanabilir. Burada $x_{r,p}(H)$ H hiper grubunda sağ mertebeleri p asalının kuvveti olan tüm elemanların kümesi olup $x \in H$ elemanının sağ mertebesi

$$\begin{aligned} 0_r(x) &= \min\{0_r(x', x) \mid e_r \in x \cdot x'\} \\ &= \min\{\min\{s > 0 \mid \exists k, m \in \mathbb{N} : \end{aligned}$$

$$e_r \in x^s \cdot (x^m \cdot x'^m)^k \cap (x^m \cdot x'^m)^k \cdot x^s \mid e_r \in x \cdot x'\}$$

biçiminde tanımlanır. H nin lgp – Sylow ve rgp –Sylow olan althiper gruplarına gp –Sylow althiper grupları denir. H nin lp –althiper gruplarına ve rp – althiper gruplarına H nin p –althiper grupları denir. H nin lp –Sylow ve rp –Sylow althiper gruplarına ise p –Sylow althiper grubu denir. Vasil'ev ve Zieschang (2022) da çözülebilir hipergrup kavramı literatüre kazandırılmıştır. H nin boştan farklı F alt kümesi verildiğinde her $x, y \in F$ için $x \cdot y \subseteq F$ oluyorsa F ye H nin kapalı alt kümesi denir. $(H, \cdot)$ hiper grubunun D ve E , kapalı alt kümeleri verilsin. Her $d \in D$ için $E \cdot d \subseteq d \cdot E$ oluyorsa D , E yi normaller denir. Eğer H , H deki kapalı bir alt küme F yi normallerse F ye H de normaldir denir. H nin D ve E kapalı alt kümeleri verilsin. Eğer $x^{-1}Dx = E$ eşitliğini sağlayan $x \in H$ varsa D ve E ye H de eşleniktir denir. H nin D kapalı alt kümesi verilsin. $D \subseteq E$ olan her bir $x \in E$ için $x^{-1}Dx \subseteq D$ oluyorsa D ye E de güçlü normal alt küme denir. Eğer E bir hipergrup ve $D \leq E$ bir güçlü normal alt küme oluyorsa D ye E nin güçlü normal althiper grubu denir. H

hiper grubunun $H_0 = \{e\}$, $H_n = H$ kapalı alt kümeleri birer althipergrup ise $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ olan her i için H_{i-1} , H_i de güçlü normal oluyorsa ve $[H_i : H_{i-1}]$ indeksi asal oluyorsa H ye *çözülebilir hipergrup* denir Vasil'ev ve Zieschang (2022).

Okuyucu hiper gruplarla ilgili temel kavramlara Corsini (1993), Corsini ve Leoreanu (2003), Davvaz ve Leoreanu Fotea (2007) yayınlarından ulaşabilir.

2. Materyal ve Metot

Bu kısmın alt başlıklarında sonlu gruplarda SS-tümlemiş altgrup kavramı, cebirsel özellikleri ve SS-tümlemiş altgrupların karakterizasyonları Guo ve Lu (2012) den alınmıştır.

2.1 Sonlu Grupların SS –Tümlemiş Altgrupları ve Özellikleri

Bu bölümde öncelikle sonlu grupların SS-tümlemiş altgruplarının özellikleri tartışılarak birtakım önermeler verilecektir.

2.1.1. Tanım G grubunun $H \leq G$ verilsin. G nin $G = HK$, $H \cap K, K$ de S –quasinormal olan bir K altgrubu mevcutsa H ye G de SS –tümlemiş adı verilir. Bu durumda K ya H nin G deki SS –tümleyenini denir Guo ve Lu (2012).

G nin bir C –tümlemiş altgrubu G de SS –tümlemiştir: H, C –tümlemiş ise bir $K_1 \leq G$ için $G = HK_1$ ve $H \cap K_1 = H_G$ dir. G nin H_G özü G nin H tarafından içerilen en büyük normal altgrubu olduğundan $H_G \triangleleft G$ dir. Buradan

$$(H \cap K_1)P = (H_G)P = P(H_G) = P(H \cap K_1)$$

sağlanır. K_1, H altgrubunun SS –tümleyenidir.

H, G nin bir SS –quasinormal altgrubu ise $G = HK$ ve H, K de S –quasinormaldır. W, K nin Sylow altgrubu olsun. O zaman $HW = WH$ olduğundan modüler kuraldan $(H \cap K)W = W(H \cap K)$ olur. Bu ise $H \leq G$ de SS –tümlemiş demektir.

Her SS –quasinormal altgrup C –tümlemiş olmayabilir ve C –tümlemiş altgrup da SS –quasinormal olmayabilir.

2.1.1. Örnek (1) $G = S_4$ ve $H = \langle (34) \rangle$ olsun. O zaman $G = HA_4$ ve $H \cap A_4 = \{e\}$ olduğundan G de C –tümlemiştir. Fakat A_4 ün $P = \langle (123) \rangle$ Sylow 3 –altgrubu için $HP \neq PH$ olduğundan SS –quasinormal değildir.

(2) $P = \langle x, y \mid x^{16} = y^4 = e, x^y = x^3 \rangle$ olsun. O zaman $\Phi(P) = \langle x^2, y^2 \rangle = \langle x^2 \rangle \times \langle y^2 \rangle$ ($\langle x, y^2 \rangle$ ve $\langle x^2, y \rangle$ maksimal altgrupları ve arakesitleri $\langle x^2, y^2 \rangle$ altgrubudur). $H = \langle y^2 \rangle$, P de S –quasinormaldır. P nin

bütün altgrupları ile permüte edilebilir ve dolayısıyla SS –quasinormaldır. Ancak H, P de C –tümlemiş değildir (P nin $H \cap K \not\leq H_P$ olacak şekilde bir altgrubu yoktur). Guo ve Lu (2012).

2.1.2. Örnek Örnek 2.1.1 de verilen P grubu için $G = S_4 \times P$ olsun. $H = C_2 \times P_1$, $C_2 = \langle (34) \rangle$ ve $P_1 = \langle y^2 \rangle$ ve $K = A_4 \times P$ olarak alalım. Buradan $G = S_4 \times P = HK$ ve $H \cap K \cong P_1$ izomorfizmasından $H \cap K, K$ da S –quasinormaldır. Böylece H, G de SS –tümlemiştir. Fakat H, C –tümlemiş ya da SS –quasinormal değildir Guo ve Lu (2012).

Şimdi SS-tümlemiş altgrupların bazı temel özelliklerini verelim.

2.1.1. Lemma G grubunun SS –tümlemiş H, N, M, L altgrupları için aşağıdakiler gerçekleşir.

(1) $H \leq M$ ise, H, M de SS –tümlemiştir.

(2) $N \triangleleft G$ ve $N \leq H$ ise o zaman $\frac{H}{N}, \frac{G}{N}$ de SS –tümlemiştir.

(3) π , asalların bir kümesi olsun. Şayet H, G grubunun bir π –altgrubu ve N, G nin bir π' – alt grubu ise o zaman $\frac{HN}{N}, \frac{G}{N}$ de SS –tümlemiştir.

(4) $H \leq \Phi(L)$ ise o zaman H, G de S –quasinormaldır Guo ve Lu (2012).

Kanıt. (1) Hipotezden $G = HK$ ve $H \cap K, K$ da S –quasinormal olan $K \leq G$ vardır. $K_1 = M \cap K$ olsun. O zaman $G = HK$ iken $M = G \cap M = (HK) \cap M = H(K \cap M) = HK_1$ olup $M = HK_1$ bulunur. Ayrıca $H \cap K_1 = H \cap M \cap K = H \cap K$ olduğundan K_1 de S –quasinormaldır. $M \cap K$ nin bir Q Sylow altgrubu için $Q(H \cap K_1) = Q(H \cap K) = (H \cap K)Q$ olduğunu göstereyim. $Q = P \cap (M \cap K)$ olacak şekilde K nin bir Sylow altgrubu P vardır ve hipotezden $(H \cap K)P = P(H \cap K)$ sağlanır. O halde;
 $Q(H \cap K_1) = QH \cap K_1 = (P \cap (M \cap K))H \cap K_1$
 $= (P \cap M)H \cap K_1 = PH \cap M \cap K$
 $= M \cap (PH \cap K) = M \cap (P(H \cap K))$
 $= M \cap (H \cap K)P = M \cap (HP \cap K)$
 $= (M \cap HP) \cap K = HP \cap M \cap K_1$
 $= H(P \cap M) \cap K_1 = H(P \cap (M \cap K)) \cap K_1$
 $= HQ \cap K_1 = (H \cap K_1)Q$

olup H, M de SS –tümlemiştir.

(2) $G = HK$ olduğundan $\frac{G}{N} = \frac{H}{N} \cdot \frac{KN}{N}$ sağlanır. Modüler kuraldan $\frac{H}{N} \cap \frac{KN}{N} = \frac{H \cap KN}{N} = \frac{(H \cap K)N}{N} = \frac{N(H \cap K)}{N}$ dir. Herhangi bir p asalı için K_p, K nin Sylow p –altgrubu olmak üzere $\frac{KN}{N}$ nin herhangi bir Sylow p – altgrubu $\frac{K_p N}{N}$ formundadır. Böylece $(H \cap K)K_p, G$ nin bir altgrubu olduğundan

$\left(\frac{H}{N} \cap \frac{KN}{N}\right) \left(\frac{K_P N}{N}\right) = \frac{(H \cap K) K_P N}{N}$, $\frac{G}{N}$ nin bir alt grubudur. Böylece (1) den $\frac{H}{N} \cap \frac{KN}{N}, \frac{KN}{N}$ de S -tümlemiştir. (Yani, $\left(\frac{H}{N} \cap \frac{KN}{N}\right) \frac{K_P N}{N} = \frac{K_P N}{N} \left(\frac{H}{N} \cap \frac{KN}{N}\right)$). Böylece $\frac{H}{N}, \frac{G}{N}$ de SS -tümlemiştir.

(3) H ve N sırasıyla π -altgrup ve π' -altgrup olsun. $(|N|, |H|) = 1$ ve $N \cap H = \{e\}$ ve $N \not\leq H$ olmadığından $N \leq K$ olmalıdır. Böylece Modüler kuraldan $NH \cap K = N(H \cap K)$ eşitliği elde edilir.

$$G = HK \Rightarrow G = NHK = (NH)K \dots (i)$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca K nin her Sylow alt grubu P için $(NH \cap K)P = (N(H \cap K))P = N(P(H \cap K))$ ve $N \triangleleft G$ olduğundan

$$N(P(H \cap K)) = P(N(H \cap K)) = P(NH \cap K) \dots (ii)$$

olur. O halde $NH \cap K, G$ de S -quasinormaldır. (i) ve (ii) den NH, G de SS -tümlemiştir. (2) gereğince $\frac{HN}{N}, \frac{G}{N}$ de SS -tümlemiştir.

(4) L nin maksimal alt gruplarının arakesiti olan $\Phi(L) \neq L$ nin Frattini alt grubu olup aynı zamanda L nin bütün üreteç olmayan elemanlarının kümesidir. Yani $L = \langle X, a \rangle$ iken $L = \langle X \rangle$ dir.

$$\begin{aligned} H \leq \Phi(L) \Rightarrow H \leq L \Rightarrow G = HK \Rightarrow L = L \cap G = L \cap HK \\ = H(L \cap K) = \langle H, L \cap K \rangle \\ = L \cap K \Rightarrow L \leq K \Rightarrow H \leq L \leq K \end{aligned}$$

olduğundan $H \leq K \Rightarrow G = HK = K$ olur. Böylece $H \cap K, K$ de S -quasinormal olduğundan $H \cap K = H$ ve $K = G$ olup H, G de S -quasinormaldır. $\square$

Aşağıdaki lemmalar verilen bir G grubunun S -quasinormal alt gruplarına dair bilinen sonuçlardır.

2.1.2. Lemma G grubunun $H \leq G$ alt grubu S -quasinormal iken H, G de altnormaldir. Guo ve Lu (2012).

Kanıt. Kabul edelim ki iddia doğru olmasın, yani bir G grubunda $H \leq G$ S -quasinormal iken H altnormal olmasın. Bu koşulu sağlayan grupların en küçük mertebeli olanı G grubu olsun. $N = N_G(H) = \{g^{-1}Hg \mid g \in G\}$ için $H \leq N$ ve $N \triangleleft G$ dir. N, G nin öz normal alt grubu iken H, N de quasinormal ve G nin minimalliğinden H, N de altnormaldir ve $N \triangleleft G$ olduğundan $H \triangleleft \dots \triangleleft G$ olur. O halde $N = G = N_G(H)$ olmalıdır. M, H yi içeren bir maksimal alt grup ise $N_G(H) = G$ eşitliğinden öyle bir $N_X(M)$ için $H, N_X(M)$ de kapsanmaz. Böylece $HN_X(M) = G$ ve $MN_X(M) = G$ çelişkisi elde edilir ve ispat tamamlanır. $\square$

2.1.3. Lemma Bir p asalı için H, G grubunun bir p -alt grubu olsun. O zaman H nin G de S -quasinormal

olması için gerek ve yeter koşul $O^p(G) \leq N_G(H)$ sağlanmasıdır Guo ve Lu (2012).

Kanıt. ($\Rightarrow$) $H \leq G, p$ -alt grubu quasinormal olsun. O zaman G nin her P Sylow p -alt grubu için $HP = PH$ dir ve H bir p -alt grup olduğundan $HP = PH = P$ dir. $O^p(G)$ ise G nin en küçük normal p -alt grubu olduğundan H nin p -alt grup olması kullanılarak $H \subseteq O^p(G)$ bulunur. Lemma 2.1.2 den G de altnormaldir. Bundan başka bir $q \neq p$ için Q Sylow p -alt grubu ise o zaman H, S -quasinormal olduğundan $QH = HQ$ sağlanır. p', p den farklı olan asal olmak üzere p' mertebeli bir eleman (ya da alt grup) bir Q Sylow p' -alt grubu tarafından kapsanır. Böylece $g \in O^p(G) \Rightarrow \langle g \rangle \leq Q$ ve Q, p' mertebeli devirli grupların çarpımı olduğundan $QH = HQ$ için $\langle g \rangle H = H \langle g \rangle$ olup $g \in N_G(H) = \{g \in G \mid gH = Hg\}$ bulunur.

($\Leftarrow$) $N_G(H) \supseteq O^p(G)$ ise o zaman $H \subseteq O^p(G)$ dir. Böylece H, G de altnormaldir ve $q \neq p$ için G nin her bir Sylow q -alt grubu tarafından normallenir. $\square$

2.2. Bir Grubun SS -Tümlemiş Alt gruplarının Karakterizasyonları

G sonlu grubunun her alt grubu SS -tümlemiş ise G ye SS -tümlemiştir denir. Bu bölümde SS -tümlemiş alt grupları kullanarak grupların çözülebilirliği incelenecek ve daha sonra SS -tümlemiş gruplar karakterize edilecektir.

2.2.1. Lemma (Schur, Zassenhaus) G sonlu grubunun $ebob(n, m) = 1$ olmak üzere $|H| = n, [G:H] = m$ koşullarını gerçekleyen H normal alt grubu için G , mertebesi m olan alt grupları kapsar ve bunlardan herhangi ikisi birbiriyle eşleniktir Gorenstein (1968).

2.2.1. Teorem G nin çözülebilir grup olması için gerek ve yeter koşul G nin her bir Sylow alt grubunun G de SS -tümlemiş olmasıdır Guo ve Lu (2012).

Kanıt. Eğer G çözülebilir ise G nin bütün Sylow alt grupları G de tamlanmıştır. Böylece G de SS -tümlemiştir.

Tersine G nin her P Sylow alt grubu G de SS -tümlemiş olsun. Tanımdan $G = PK$ ve $P \cap K, K$ de S -quasinormal olan bir $K \leq G$ mevcuttur. Lemma 2.1.2 den $P \cap K, K$ da altnormaldir. $P \cap K, K$ nin Sylow alt grubu olduğundan hem de altnormal olmasından

$$P \cap K \triangleleft K_1 \triangleleft K_2 \triangleleft \dots \triangleleft K$$

altnormal serisi vardır. $P \cap K, K$ nin Sylow alt grubu olduğundan her bir K_i nin de Sylow alt grubudur. Özel olarak $P \cap K, K_2$ nin de Sylow alt grubudur. $P \cap K$ nin K_2 de normal alt grup olduğunu ispatlamak yeterli olacaktır. $P \cap K \triangleleft K_1$ ve $P \cap K, K_1$ de Sylow olduğundan $P \cap K, K_1$ in tek Sylow alt grubudur. Şimdi $P \cap K$ nin K_2 nin de tek Sylow alt grubu olduğunu ispatlayalım. Q, K_2 nin başka bir

Sylow altgrubu olsa Sylow teoreminden $Q = x^{-1}(P \cap K)x$ olacak şekilde $x \in K_2$ vardır. $x \in K_1$ ise $P \cap K \triangleleft K_1$ olduğundan $Q = x^{-1}(P \cap K)x = P \cap K$ eşitliği sağlanır. Böylece $Q = P \cap K$ bulunur. $x \notin K_1$ ise $P \cap K \triangleleft K_1$ olduğundan $x^{-1}(P \cap K)x \triangleleft x^{-1}K_1x = K_1$ bulunur.

Q da K_1 in Sylow altgrubu olduğundan ve K_1 in de tek bir tane Sylow altgrubu olduğundan $P \cap K = Q$ dur. Yani K_2 nin de tek Sylow altgrubu $P \cap K$ olur. O halde $P \cap K \triangleleft K_2$ dir. Seri üzerinde bu şekilde devam edilirse $P \cap K \triangleleft K$ olur. Buradan Schur-Zassenhaus Teoremi uygulanırsa $P \cap K \triangleleft K$ ve $P \cap K$ Sylow q -altgrup olduğundan $(|P \cap K|, \left| \frac{K}{P \cap K} \right|) = 1$ olup $K = (P \cap K)K'_p$ olacak şekilde K nin bir K'_p Hall altgrubu vardır. Ayrıca K'_p nin tamlayan olması kullanılarak $(P \cap K) \cap K'_p = P \cap K \cap K'_p = P \cap K'_p = 1$ bulunur. Buradan $G = PK = P((P \cap K)K'_p) = P(P \cap K)K'_p = PK'_p$ elde edilir. Böylece G nin her P Sylow altgrubu G de tamlanmış olduğundan G çözülebilir gruptur. $\square$

Teorem 2.2.1 deki argümanlar ile aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Bir sonlu G grubunun H altgrubunun mertebesi $|H|$ ile $[G:H]$ aralarında asal ise H altgrubuna Hall altgrubu denir.

2.2.1. Sonuç G grubunun H Hall altgrubu verilsin. H nin tamlanmış olması ancak ve ancak H nin G de SS -tümlemiş olmasıyla sağlanır. Guo ve Lu (2012).

Kanıt. Schur-Zassenhaus teoremi gereğince her bir Hall altgrubunun G de tamlayanı vardır ve böylece H, G de SS -tümlemiştir.

Tersine G nin bir Hall altgrubu H , G de SS -tümlemiş olsun. $G = HK$ ve $H \cap K, K$ de S -quasinormal olan $K \leq G$ mevcuttur. Lemma 2.1.2 den $H \cap K, K$ de altnormaldir. Ayrıca $H \cap K \leq K$ dir. Böylece $H \cap K, K$ de hem altnormal ve hem de Hall altgrup olduğundan $H \cap K, K$ de normaldir.

$H \cap K \triangleleft K_1 \triangleleft K_2 \triangleleft \dots \triangleleft K$, H nin altnormal serisi ise $H \cap K, K_1$ de normal Hall altgruptur ve böylece K_1 de karakteristiktir. O halde $H \cap K, K_1$ de karakteristiktir ve $K_1 \triangleleft K_2$ olduğu için $H \cap K \triangleleft K_2$ olur. Bu şekilde devam edilirse $H \cap K \triangleleft K$ bulunur. Burada Schur-Zassenhaus Teoremi uygulanırsa $H \cap K \triangleleft K$ ve $H \cap K$ Sylow q -altgrubu için $(|H \cap K|, \left| \frac{K}{H \cap K} \right|) = 1$ olup $K = (H \cap K)K'_p$ olacak şekilde K nin bir K'_p Hall altgrubu vardır. Ayrıca K'_p tamlayan olduğundan $(H \cap K) \cap K'_p = H \cap K \cap K'_p = H \cap K'_p = 1$ olur. O halde $G = HK = H((H \cap K)K'_p) = H(H \cap K)K'_p = HK'_p$ olup böylece G nin her H Hall-altgrubu G de tamlanmışır. $\square$

2.2.2. Teorem Bir G grubunun çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul G nin her maksimal altgrubunun G de

altnormal olan bir SS -tümleyeninin olmasıdır Guo ve Lu (2012).

Kanıt. G çözülebilir grubunun $H \leq G$ maksimal altgrubu verilsin. H nin G de altnormal bir SS -tümleyeni olduğunu gösterelim. $|G|$ üzerine tümevarım uygulayalım. $|G| = 1$ ise ispat açıktır. İddia mertebesi G nin mertebesinden küçük olan gruplar için doğru olsun. Şimdi $H_G \neq \{e\}$ olsun. $H_G \triangleleft G$ ve dolayısıyla $H_G \triangleleft H$ bulunur. $\left| \frac{G}{H_G} \right| < |G|$ olduğundan $\frac{H}{H_G}, \frac{G}{H_G}$ nin maksimal altgrubu olup hipotezden $\frac{H}{H_G}$ nin $\frac{G}{H_G}$ de bir $\frac{K}{H_G}$ SS -tümleyeni vardır ve $\frac{K}{H_G}, \frac{G}{H_G}$ de altnormaldir. Yani $\frac{K}{H_G} \triangleleft \frac{K_1}{H_G} \triangleleft \dots \triangleleft \frac{G}{H_G}$ altnormal serisi vardır. Bu serinin H_G ile genişlemesinden $K \triangleleft \dots \triangleleft G$ alt normal serisi bulunur. $H_G = \{e\}$ olsun. N, G nin minimal normal altgrubu ve $N \not\leq H$ olduğundan $G = HN$ ve $H \cap N \leq H_G = \{e\}$ olup N, H nin tamlayanı ve SS -tümleyenidir. Böylece $N \triangleleft G$ altnormaldir.

Tersine iddianın doğru olmadığını kabul edelim ve G bu iddiayı sağlamayan en küçük mertebeli grup olsun. H, G nin maksimal altgrubu olmak üzere $G = HK$ ve $H \cap K, K$ da S -quasinormal olacak şekilde K altnormal altgrubu bulunsun. G abel olmayan basit grup ise o zaman $H \neq G$ olduğundan $K = G$ dir. Lemma 2.1.2. gereğince H, G de altnormal altgruptur. Buradan $H = \{e\}$ olmalıdır. Bu ise G nin p asal mertebeli devirli sonlu grup olması demektir. O halde G çözülebilirdir. Bu ise çelişkidir. Eğer G basit grup değilse ve $N \leq G$ minimal normal altgrup ise hipotezden iddia $\frac{G}{N}$ için gerçekleşir. G nin minimallüğinden $\frac{G}{N}$ çözülebilirdir. Bundan başka N nin, G nin tek minimal normal altgrup olduğunu ve N nin $\Phi(G)$ tarafından içerilmediğini varsayabiliriz. O zaman, bu durumda G nin $M_G = \{e\}$ olan bir M maksimalini alabiliriz. Hipotezden $K \leq G$ altnormal olmak üzere $G = MK$ ve $M \cap K, K$ da S -quasinormaldir. K, G de altnormal olduğu için Lemma 2.1.2 den $M \cap K, G$ de altnormaldir. Eğer $M \cap K \neq \{e\}$ ise o zaman $M \cap K$ tarafından içerilen G nin bir minimal altnormal altgrubu olarak L yi alabiliriz. $L \cap N \trianglelefteq L$ olduğundan ve L minimal altnormal olduğundan $L \cap N = \{e\}$ ya da $L \cap N = L$ bulunur. Böylece $L \leq N$ olur. Guo ve Lu (2012, Lemma 2.7) den N, L yi normaller. Eğer $L \cap N = \{e\}$ ise o zaman $NL = N \times L$ ve $L \leq C_G(N) = \{e\}$ bulunur. Buradan $L = \{e\}$ olur. Eğer $L \cap N = L$ yani $L \leq N$ ise o zaman $M \cap K = \{e\}$ alabiliriz. Benzer bir yolla G nin bütün minimal altnormal altgruplarının N tarafından içerildiği gösterilebilir. Her bir N_i belirli bir abel olmayan basit gruba izomorf olmak üzere $N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_r$ olsun. O zaman kolayca $N_1, N_2, \dots, N_r$ nin, G nin bütün minimal altnormal altgrupları ile çakıştığı gösterilebilir. Genelliği bozmadan $N_1 \leq K$ kabul edebiliriz. O zaman öyle bir p asalı için $p, [G:M] = |K|$ sini böler. Böylece G nin bir çözülebilir normal altgrubu mevcut olup N tek minimal normal olarak bu normal altgrup tarafından

içerildiğinden N çözülebilirdir. $\frac{G}{N}$ ve N çözülebilir olduğundan G çözülebilir olur ki bu ise çelişkidir. O halde kabulümüz yanlış olup ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 2.2.2 yardımıyla doğrudan aşağıdaki sonuç elde edilir.

2.2.2. Sonuç Bir G grubunun çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul G grubunun herhangi bir M maksimal altgrubu için G nin $G = MK$ ve $M \cap K \leq M_G$ olan bir K altnormal altgrubunun bulunmasıdır Guo ve Lu (2012).

Uyarı: G grubu çözülebilir olmasın. Bu takdirde G de SS –tümlemiş olan çözülebilir maksimal bir altgrup bulunmayabilir. Örneğin $A_5 = \langle A_4, (1234) \rangle$ ve $A_4 \cap \langle (1234) \rangle = \{e\}$ olduğundan A_4, A_5 in SS –tümlemiş altgrubuna izomorftur. A_5 çözülebilir değildir fakat A_5 in A_4 e izomorf olan altgrubu maksimal çözülebilir olma koşulunu sağlar.

G grubunun çözülebilir olması durumunda grupta çözülebilir maksimal altgrubun varlığı aşağıdaki Teoremden ispatlanmıştır.

2.2.3. Teorem Bir G grubunun çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul G nin, G de normal olan bir K SS –tümleyenini bulunan bir H çözülebilir maksimal altgrubunun bulunmasıdır Guo ve Lu (2012).

Kanıt. G çözülebilir grup ise G grubunun bir H maksimal normal altgrubu vardır. Bu durumda $K = G$ için G, H nin normal SS –tümleyenidir.

Tersine iddianın doğru olmadığını kabul edelim. O zaman G bu iddiayı sağlamayan en küçük mertebeli grup olsun. Eğer $H_G \neq \{e\}$ ise o zaman $\frac{H}{H_G}, \frac{G}{H_G}$ nin bir çözülebilir maksimal altgrubudur ve $\frac{KH_G}{H_G}, \frac{H}{H_G}$ nin $\frac{G}{H_G}$ deki bir normal SS –tümleyenidir. G nin seçiminden $\frac{G}{H_G}$ çözülebilirdir ve böylece G çözülebilir gruptur, bu ise çelişkidir. O zaman $H_G = \{e\}$ olmalıdır. N, G de bir minimal normal altgrup ve $C = C_G(N) = \{g \in G \mid \forall n \in N, gn = ng\}$ olsun. Doerk ve Hawkes (1992) den dolayı N, G nin tek minimal normal altgrubudur ve $C \leq N$ dir ya da $N \cong R$ abel olmayan ve $R = C_G(N) = C, R \cap H = N \cap H = \{e\}$ olan G nin N ve R olmak üzere iki minimal normal altgrubu vardır. Hipotezden $H \cap K, K$ de S –quasinormal olduğundan Lemma 2.1.2. gereği $H \cap K, K$ da ve dolayısıyla G de altnormaldir. Şimdi $H \cap K \neq \{e\}$ ve L, G nin $H \cap K$ tarafından içerilen minimal altnormal altgrubu olsun. Eğer $L \leq N$ ise o zaman $L^G = L^{NH} = L^H \leq H_G = \{e\}$ olup çelişki elde edilir. O halde $L \not\leq N$ dir ve benzer şekilde $L \not\leq R$ dir. Böylece $N \cap L = \{e\} = R \cap L$ olmalıdır. Diğer taraftan Guo ve Lu (2012, Lemma 2.7) gereği $NL = N \times L$ bulunur. Bu ise $L \leq C$ ve $C \leq N$ olduğundan $L \leq N$ ya da $C = R$ ile çelişir. Böylece $H \cap K = \{e\}$ olmalıdır. O halde $\frac{G}{K} \cong H$ ve K, G nin minimal normal altgrubudur.

Şimdi kabul edelim ki T, H maksimal normal altgrubunun bir minimal normal altgrubu olsun. O zaman $p \in \pi(H)$ olmak üzere T elementer abel p –gruptur. $C_K(T)$ hem H hem de K tarafından normallendiğinden $C_K(T), H$ tarafından normallenir. Yani $H \leq N_G(C_K(T))$ dir. Gerçekten de $C_K(T) = \{k \in K \mid tk = kt, \forall t \in T\}$ ve $N_G(C_K(T)) = \{g \in G \mid gC_K(T) = C_K(T)g\}$ dir. $T \triangleleft H, K \triangleleft G$ olan $h \in H$ ve $t \in T$ keyfi elemanlarını alalım. $T \triangleleft H$ olduğu için $hth^{-1} \in T$ dir. O halde $\forall k \in C_K(T)$ için

$$k(hth^{-1}) = (hth^{-1})k \Rightarrow h^{-1}kht h^{-1} = th^{-1}k \\ \Rightarrow h^{-1}kht h^{-1} = th^{-1}k \Rightarrow h^{-1}kht = th^{-1}kh$$

eşitliği elde edilir. Böylece $\forall t \in T$ için $h^{-1}kh, t$ ile değişmelidir. Bu takdirde $h^{-1}kh \in C_K(T) \Rightarrow hC_K(T) = C_K(T)h \Rightarrow H \leq N_G(C_K(T))$ bulunur. $C_K(T)$ hem H hem de K tarafından normallendiğinden ve $G = [K]H$ olduğundan $C_K(T), G$ tarafından normallenir yani $C_K(T) \triangleleft G$ dir. Üstelik $C_K(T) \leq K$ iken $C_K(T) \triangleleft K$ dir. K, G nin minimal normal altgrubu olduğundan $C_K(T) = K$ yada $C_K(T) = 1$ olmalıdır. Eğer $C_K(T) = K \Rightarrow \forall t \in T$ ve $\forall k \in K$ için $kt = tk \Rightarrow k \in N_G(T) \Rightarrow K \leq N_G(T) \Rightarrow T \triangleleft K$ ve $T \triangleleft H \Rightarrow T \triangleleft G$

$T \leq H$ için T, G de normal olduğundan T, G nin H tarafından içerilen normal altgrubudur. En geniş H_G olduğuna göre $T \leq H_G$. Bu ise $H_G = \{e\}$ olmasıyla çelişir. O halde $C_K(T) = \{e\}$ olmalıdır. Gorenstein (1968) deki Teorem 2.2 ve Teorem 2.3 gereğince K bir p' –grup olup K , her $q \in \pi(K)$ asalı için bir tek Q, T –invariant Sylow q –altgrubu içerir. Herhangi bir $h \in H$ için $(Q^h)^T = (Q^T)^h = Q^h$ olup Q, T –invariant olduğundan Sylow q –altgrubudur ve böylece $Q = Q^h$ dir. Sonuç olarak $[Q]H = G = [K]H$ ve $K = Q$ bir p –gruptur. O halde G çözülebilir grup olur bu ise çelişkidir. İspat tamamlanır. $\square$

Şimdi SS –tümlemiş grupları karakterize edelim.

2.2.4. Teorem G bir grup olsun. O zaman aşağıdakiler denktir.

- (1) G bir SS –tümlemiş gruptur.
- (2) G süper çözülebilirdir, $\frac{G}{\Phi(G)}$ nin her Sylow altgrubu elementer abeldir ve $\Phi(G)$ nin her altgrubu G de S –quasinormaldır.
- (3) $\frac{G}{\Phi(G)}$ nin her altgrubu tamlanmıştır ve $\Phi(G)$ nin her altgrubu G de S –quasinormaldır. Guo ve Lu (2012).

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) Öncelikle, G grubunun süper çözülebilir olduğunu gösterelim. Hipotezden ve Teorem 2.2.1 den G çözülebilirdir. N, G de bir minimal normal altgrup iken p asal olmak üzere N , elementer abel p –gruptur. Lemma 2.1.1(2) den $\frac{G}{N}$, SS –tümlemiştir ve böylece mertebesi G nin mertebesinden küçük olanlar için doğru

olması kullanılarak tümevarımla $\frac{G}{N}$ nin süper çözülebilir olduğu görülür. Buradan G nin süper çözülebilir olduğunu göstermek için $N = \langle x \rangle$ devirli olduğunu göstermek yeterlidir. P, G nin bir Sylow p –altgrubu ve $x \in N \cap Z(P)$ için $|x| = p$ ise $\langle x \rangle K = G$ ve $\langle x \rangle \cap K, K$ da S –quasinormal olacak şekilde $K \leq G$ vardır. Burada K elementer abel olduğu için $\langle x \rangle \cap K, K$ nin tüm Sylow altgrupları ile değişmelidir. $\langle x \rangle \cap K, K$ nin bütün p' elemanları tarafından normallendiğinden $\langle x \rangle \cap K, K$ nin p' –Sylow altgrupları ile de değişmeli olduğundan P tarafından merkezlenir ve böylece $\langle x \rangle \leq Z(P)$ olup $\langle x \rangle \cap K, G$ nin normal altgrubu olur. N minimal olduğundan $\langle x \rangle \cap K = \{e\}$ ya da $(\langle x \rangle \cap K = N) \Rightarrow N \leq K$ olmalıdır. $\langle x \rangle \cap K = \{e\}$ ise $N = \langle x \rangle$ elde edilir. $N \leq K$ ise $\langle x \rangle = \langle x \rangle \cap K \leq N$ iken $N = \langle x \rangle$ bulunur. N elementer abel p –grup yani her karakteristik altgrubu $\{e\}$ ya da N ye eşit olduğundan ve $\langle x \rangle$ karakteristik altgrubu basit olduğundan $N = \langle x \rangle$ bulunur.

Şimdi P, G nin Sylow p –altgrubu ve $H, \Phi(P)$ nin bir altgrubuken, Lemma 2.1.1(4) gereğince H, G de S –quasinormaldır. Lemma 2.1.3 den $\Phi(P), G$ de normaldir. Lemma 2.1.1(4) deki H yerine $\Phi(P)$ alınırsa $O^P(G) \leq N_G(\Phi(P))$ olup p' mertebeli elemanlarının birleşiminin ürettiği grup $\Phi(P)$ yi normaller. $\Phi(P), P$ de normal olduğundan p mertebeli elemanları tarafından normallenir. Böylece $\Phi(P) \leq \Phi(G)$ ve buradan $\frac{G}{\Phi(G)}$ nin her Sylow altgrubu elementer abeldir. Son iddia ise Lemma 2.1.1 (4) den elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (3) G süper çözülebilir olduğundan çözülebilir serinin esas bölüntüleri devirli olup Hall (1937) deki Teorem 2 gereğince tamlanmıştır.

(3) $\Rightarrow$ (1) Kabul edelim ki $\frac{G}{\Phi(G)}$ nin her altgrubu tamlanmış ve $\Phi(G)$ nin her altgrubu G de S –quasinormal olsun. H, G nin altgrubu ise o zaman $\left(\frac{H\Phi(G)}{\Phi(G)}\right) \left(\frac{K}{\Phi(G)}\right) = \frac{G}{\Phi(G)}$ ve $\left(\frac{H\Phi(G)}{\Phi(G)}\right) \cap \left(\frac{K}{\Phi(G)}\right) = \frac{(H \cap K)\Phi(G)}{\Phi(G)} = \{e\}$ olacak şekilde $\frac{G}{\Phi(G)}$ nin $\frac{K}{\Phi(G)}$ altgrubu mevcuttur. Bu eşitliklerde $HK = G$ ve $H \cap K \leq \Phi(G)$ olur. Böylece $H \cap K, G$ de S –quasinormaldır. Tanımdan H, G de SS –tümlemiş ve G bir SS –tümlemiş gruptur. $\square$

3. Bulgular

Bu kısımda sonlu gruplarda çalışılan SS – tümlemiş altgrup kavramı sonlu kanonik hipergruplara taşınarak, hiper cebirsel yapı özelliklerini çözülebilir hipergruplar yardımıyla incelenecektir. Çalışmada hipergruplar sonlu kanonik hipergrup olacak şekilde ele alınacaktır.

3.1. Tanım H hiper grubunun K althiper grubu verilsin. $H = KT$ ve $K \cap T, T$ nin tüm W Sylow althiper grupları tarafından permüte edilebiliyorsa, yani $W(K \cap T) = (K \cap T)W$ oluyorsa T ye K nin H da

SS –tümleyeni ve K ya H nin SS –tümlemiş althiper grubu denir.

3.2. Örnek Z_6 çözülebilir hiper grubunun $H = \langle \bar{2} \rangle$ althiper grubunu ele alalım. $K = \langle \bar{3} \rangle$ althiper grubu $Z_6 = \langle \bar{2} \rangle + \langle \bar{3} \rangle$ eşitliğini sağlar. Z_6 nin 2 –Sylow ve 3 – Sylow althiper grupları sırasıyla $K, \langle \bar{5} \rangle$ ve H dir.

$H \cap K = \langle \bar{0} \rangle$ olup $K + \langle \bar{0} \rangle = \langle \bar{0} \rangle + K$ ve $\langle \bar{5} \rangle + \langle \bar{0} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{0} \rangle + \langle \bar{5} \rangle$ ve $H + \langle \bar{0} \rangle = \langle \bar{0} \rangle + H$ dir. Böylece Z_6 nin H althiper grubu SS – tümlemiş tir.

3.3. Önerme H hiper grubunun SS – tümlemiş olan K althiper grubu verilsin. L, H nin $K \leq L$ olan althiper grubu ise K, L de SS – tümlemiş tir.

Kanıt. Hipotez gereğince $H = KT$ ve H nin tüm W Sylow althiper grupları için $W(K \cap T) = (K \cap T)W$ eşitliği sağlanır. $K \leq L$ olduğundan $L = L \cap H = L \cap (KT) = K(L \cap T)$ eşitliği sağlanır. $L \cap T = T'$ diyelim. Böylece $L = KT'$ bulunur. $K \cap T' = K \cap (L \cap T) = K \cap T$ olduğundan K, L nin SS –tümlemiş althiper grubudur. $\square$

3.4. Lemma H hiper grubunun SS –tümlemiş olan K althiper grubu verilsin. N, H nin $N \leq K$ olan güçlü normal althiper grubu ise $K/N, H/N$ nin SS –tümlemiş althiper grubudur.

Kanıt. K, H nin SS –tümlemiş althiper grubu olsun. Bu takdirde $H = KT$ ve H nin tüm W Sylow althiper grupları için $W(K \cap T) = (K \cap T)W$ dir. $H = KT$ ve $N \leq K$ iken $\frac{H}{N} = \frac{K}{N} \cdot \frac{TN}{N}$ eşitliği sağlanır. Ayrıca $\frac{K}{N} \cap \frac{TN}{N} = \frac{(K \cap T)N}{N}$ dir. H nin keyfi bir p asal sayısına karşılık gelen p –Sylow althiper grubu L_p ise ; her $l \in L$ için $\pi(l) = lu$ kuralı ile verilen $\pi: L \rightarrow \frac{LN}{N}$ güçlü kanonik homomorfizması yardımıyla $\frac{H}{N}$ nin p –Sylow althiper grubunun $\frac{L_p N}{N}$ formunda olduğu açıktır. Üstelik $\frac{L_p N}{N} \cdot \frac{(K \cap T)N}{N} = \frac{L_p(K \cap T)N}{N} = \frac{(K \cap T)N}{N} \cdot \frac{L_p N}{N}$ eşitliği sağlanır. Böylece $\frac{K}{N}, \frac{H}{N}$ nin SS –tümlemiş althiper grubudur. $\square$

3.5. Teorem H hiper grup ve K, H nin SS –tümlemiş althiper grubu ve K , tüm elemanlarının mertebesi π asalına bölünebilen H nin π –althiper grubu olsun. N , tüm elemanlarının mertebesi π' asalına bölünebilen H nin π' –althiper grubu ise $KN/N, H/N$ nin SS –tümlemiş althiper grubudur.

Kanıt. Hipotez gereğince $(|N|, |K|) = 1$ dir. Buradan $N \cap K = \{e\}$ olup $N \not\leq K$, ayrıca $H = KT$ ve H nin tüm W Sylow althiper grupları için $W(K \cap T) = (K \cap T)W$ dir. $H = KT$ iken $H = NKT = (NK)T$ dir. Ayrıca her $W < T$ için

$$(NK \cap T)W = (N(K \cap T))W = N(W(K \cap T))$$

ve N, H nin güçlü normal althiper grubu olduğundan

$$N(W(K \cap T)) = W(N(H \cap T)) = W(NK \cap T)$$

bulunur. Böylece NK, H nin SS –tümlemiş althipergrubudur. Lemma 3.4 gereğince $\frac{NK}{N}, \frac{G}{N}$ de SS –tümlemiştir. $\square$

3.6. Sonuç H hipergrup ve K, H da SS – tümlemiş althipergrup olsun. $\Phi(L), H$ nin tüm maksimal althipergruplarının arakesiti olsun. $K \leq \Phi(L)$ ise K nin tüm W Sylow althipergrupları için $KW = WK$ dir.

Kanıt. $\Phi(L) \neq L$ ve $K \leq \Phi(L)$ iken $K \leq L$ sağlanır. Hipotez gereğince $H = KT$ ve T nin tüm W Sylow althipergrupları için $(K \cap T)W = W(K \cap T)$ dir. Buradan $L = L \cap H = L \cap KT = K(L \cap T) = \langle H, L \cap T \rangle = L \cap T$ bulunur. Böylece $L \leq K$ olup $K \leq L \leq T$ zinciri elde edilir. $K \leq T$ iken $H = KT = T$ dir. $K \cap T = K, T = KT = H$ daki her W Sylow althipergrubu için $KW = WK$ eşitliği sağlanır. $\square$

3.7. Tanım H hipergrup ve $K \leq H$ althipergrup olsun. K den H ye uzanan güçlü normal althipergrupların sonlu bir zinciri mevcut ise K althipergrubuna H nin güçlü altnormal althipergrubu adı verilir.

3.8. Lemma H hipergrup ve $K \leq H$ olsun. Eğer H nin tüm W Sylow althipergrupları için $KW = WK$ ise K, H nin güçlü altnormal althipergrubudur.

Kanıt. Kabul edelim ki iddia doğru olmasın. Bu takdirde $K \leq H$ ve H nin tüm W Sylow althipergrupları için $KW = WK$ iken K güçlü altnormal olmasın. Bu koşulu sağlayan hipergrupların en küçük mertebeli olanı H hipergrubu olsun. $N = N_H(K) = \{h^{-1}Kh \mid h \in H\}$ için $K \leq N$ ve N, H nin güçlü normal althipergrubudur. Eğer N, H nin öz güçlü normal althipergrubu ise K, N daki her althipergrupla çarpımsal olarak değişmelidir. H nin minimalliği gereğince K, N de güçlü altnormal althipergrup olur. N, H nin güçlü normal althipergrubu olduğundan $K \leq \dots \leq H$ güçlü normal althipergruplarının zinciri için $N = N_H(K) = H$ olmalıdır. Bu ise K nin H da güçlü altnormal olması ile çelişir. Kabulümüz yanlış olup istenen elde edilir. $\square$

3.9. Lemma K, H nin güçlü altnormal althipergrubu ve T, H nin bir minimal güçlü normal althipergrubu ise $T \leq N_H(K)$ dir.

Kanıt. $K = K_r \leq \dots \leq K_1 \leq H$ ve T, H nin minimal güçlü normal althipergrubu olsun. r üzerine tümevarım uygulayalım. $r = 1$ için K, G nin güçlü normal althipergrubu ise $N_H(K) = H$ olup $T \leq H = N_H(K)$ eşitliği sağlanır. İddia serinin uzunluğunun r den küçük olması durumunda sağlansın. T minimal güçlü normal olduğundan $T \cap K_1 = \{e\}$ ya da $T \cap K_1 = T$ dir. Şayet $T \cap K_1 = \{e\}$ ise her $t \in T$ ve her $k_1 \in K_1$ için $tk_1 = k_1t$ olup $t \in C_H(K_1)$ bulunur. Böylece $T \leq C_H(K_1)$ ve $K \leq K_1$ olduğundan $T \leq C_H(K) \leq N_H(K)$ dir. $T \cap K_1 = T$ ise $T \leq K_1$ dir. Her minimal güçlü normal

althipergrup kendisini kapsayan hipergruplarda birtakım minimal güçlü normal althipergruplarının çarpımı biçiminde yazılabildiğinden $N \leq M \leq H$ koşulunu sağlayan H nin bir N minimal güçlü normal althipergrubu ve H nin bir M güçlü normal althipergrubu için N, M nin minimal normal althipergruplarının çarpımı biçiminde yazılabilir. Tümevarım kabulünden $N_i \leq N_H(K)$ olup $T = N \leq N_H(K)$ bulunur. $\square$

3.10. Teorem H hipergrubunun çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul H hipergrubunun her maksimal althipergrubunun H de güçlü altnormal olan bir SS –tümleyeninin olmasıdır.

Kanıt. H çözülebilir hipergrup ve K, H nin maksimal althipergrubu olsun. K nin H de güçlü altnormal bir SS –tümleyeni olduğunu göstermeliyiz. $|H|$ üzerine tümevarım uygulayalım. $|H| = 1$ ise iddianın doğruluğu açıktır. Mertebesi $|H|$ den küçük olan hipergruplar için iddia doğru olsun. $K_H \neq \{e\}$ olsun. K_H, G nin güçlü normal althipergrubu olup K_H, K da güçlü normaldir. Ayrıca $\left| \frac{H}{K_H} \right| < |H|$ için $\frac{K}{K_H}, \frac{H}{K_H}$ nin maksimal althipergrubu ve hipotezden $\frac{K}{K_H}$ nin $\frac{H}{K_H}$ nin maksimal althipergrubu ve hipotezden $\frac{K}{K_H}$ nin $\frac{H}{K_H}$ de bir $\frac{T}{K_H}$ SS –tümleyeni vardır ve $\frac{T}{K_H}, \frac{H}{K_H}$ de güçlü altnormaldir.

Böylece $\frac{T}{K_H} \leq \frac{T_1}{K_H} \leq \dots \leq \frac{H}{K_H}$ güçlü altnormal serisi vardır. Bu serinin K_H ile genişlemesinden $T \leq \dots \leq H$ güçlü altnormal serisi bulunur. $K_H = \{e\}$ olsun. N, H nin minimal normal althipergrubu için $N \not\leq H$ iken $H = KN, K \cap N \leq K_H = \{e\}$ olup N, K nin tamlayanı ve SS –tümleyenidir. Böylece $N \leq H$ güçlü altnormaldir.

Tersine iddianın doğru olmadığını kabul edelim ve H bu iddiayı sağlamayan en küçük mertebeli althipergrup olsun. K, H nin maksimal althipergrubu olmak üzere $H = KT$ ve T nin her W Sylow althipergrubu için $W(K \cap T) = (K \cap T)W$ olan H nin T güçlü altnormal althipergrubu bulunsun. Şayet H abel olmayan basit hipergrup ise $K \neq H$ olduğundan $T = H$ dir. Lemma 3.8 den K, H da güçlü altnormal althipergruptur. Böylece $K = \{e\}$ olmalıdır. Bu ise H nin p asal mertebeli devirli sonlu hipergrup olduğundan H çözülebilir hipergruptur. Bu ise bir çelişkidir. Şimdi H basit olmasın ve N, H nin bir minimal güçlü normal althipergrubu olsun. Hipotez gereğince iddia $\frac{H}{N}$ için doğrudur. H nin minimalliğinden $\frac{H}{N}$ çözülebilirdir. N nin H nin tek minimal güçlü normal althipergrubu olması ve N nin $\phi(H)$ da kapsamadığından H nin $M_H = \{e\}$ olan bir M maksimal althipergrubu mevcuttur. Hipotez gereğince H nin bir T güçlü altnormal althipergrubu için $H = MT$ ve T nin her W' Sylow althipergrubu için $W'(M \cap T) = (M \cap T)W'$

dür. T , H da güçlü altnormal althipergrup olduğundan Lemma 3.8 den $M \cap T$, H de güçlü altnormaldır. Eğer $M \cap T \neq \{e\}$ ise L yi $M \cap T$ tarafından içerilen H nin bir minimal güçlü altnormal althipergrubu olarak alınabilir. $L \cap N$, L nin güçlü normal althipergrubu ve L minimal güçlü altnormal althipergrup olduğu için $L \cap N = \{e\}$ veya $L \cap N = L$ dir. Böylece $L \leq N$ bulunur. Lemma 3.9 dan N , L yi normaller. Şayet $L \cap N = \{e\}$ ise $NL = N \times L$ olup $L \leq C_H(N) = \{e\}$ bulunur. Buradan $L = \{e\}$ elde edilir. Eğer $L \leq N$ ise $M \cap T = \{e\}$ olup benzer ispat yöntemi kullanılarak H nin tüm minimal güçlü altnormal althipergruplarının N tarafından içerildiği gösterilebilir. Her biri değişmeli olmayan basit hipergruplara izomorf olan N_i ler için $N = N_1 N_2 \dots N_r$ olsun. Bu takdirde N_i lerin H nin tüm minimal güçlü altnormal althipergrupları ile çakıştığı görülür. Genelliği bozmadan $N_1 \leq K$ alalım. Buradan öyle bir p asalı için $p \mid [H:M] = |T|$ dir. Bu yüzden H nin çözülebilir güçlü normal althipergrubu vardır. N , tek minimal güçlü normal althipergrup olarak bu güçlü normal althipergrup tarafından içerildiğinden çözülebilir. $\frac{H}{N}$ ve N çözülebilir olduğundan Vasil'ev ve Zieschang (2022) deki Lemma 7.3 den H çözülebilir olur ki bu ise çelişkidir. O halde kabulümüz yanlış olup istenen görülür.

3.11. Sonuç Bir H hipergrubunun çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul H nin herhangi bir M maksimal althipergrubu için H nin $H = MT$ ve $M \cap T \leq M_H$ olan bir T güçlü altnormal althipergrubunun olmasıdır. $\square$

4. Sonuçlar ve Tartışma

Bu çalışmada, sonlu gruplarda SS –tümlemiş altgrup kavramından yola çıkılarak bu kavramın Grup Teorideki önemli özelliklerine yer verilmiştir. Guo ve Lu (2012) makalesinde kanıtlanan bulgular yardımıyla SS –tümlemiş altgrupların grubun çözülebilirlik kavramıyla sınıflandırılmasında kullanıldığı gösterilmiştir. Önemli grup karakterizasyonlarını içermesi sebebiyle bulguların hipergruplara genelleştirilmesine yer verilmiştir. Sonlu Kanonik hipergrupların SS-tümlemiş althipergruplarını tanımlanarak cebirsel özelliklerini Sylow althipergruplar yardımıyla çalışılmıştır. Ayrıca hipergrup sınıfının çözülebilir hipergruplar ile bağıntısı verilmiştir.

Etik Standartlar Bildirgesi

Yazarlar tim etik standartlara uyduklarını beyan ederler.

Bu makale 9-12 Eylül 2024 tarihleri arasında Amasya/Türkiye’de düzenlenen 36. Ulusal Matematik Sempozyumu adlı etkinlikte sözlü bildiri olarak sunulmuş ve özeti sempozyum bildiri özet kitabında basılmış “Sonlu Kanonik Hipergrupların SS-Tümlemiş Althipergrupları” başlıklı bildirinin tamamlanmış halidir.

Bu çalışma Prof. Dr. Burcu Nişancı Türkmen danışmanlığında ve Dr. Öğr. Üyesi Yıldız Aydın ikinci danışmanlığında 10.01.2025 tarihinde sunduğumuz “Sonlu Kanonik Hipergrupların SS-Tümlemiş Althipergrupları” başlıklı yüksek lisans tezi esas alınarak hazırlanmıştır.

Yazarlık Katkı Beyanı

Yazar 1: Kaynaklar, Araştırma, Deney, Yazma–orijinal taslak Görselleştirme

Yazar 2: Kaynaklar, Fikir Sahibi, Doğrulama, Metodoloji, Görselleştirme.

Yazar 3: Yazma-orijinal taslak, Görselleştirme, Biçimsel analiz

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarlar, bu makalede rapor edilen çalışmayı etkileyebilecek, birbiriyle rekabet halinde olan herhangi bir finansal çıkarlarının veya kişisel ilişkilerinin olmadığını beyan ederler.

Verilerin Kullanılabilirliği

Bu çalışma sırasında oluşturulan veya analiz edilen tüm veriler, yayınlanan bu makaleye dahil edilmiştir.

Teşekkür

Yazarlar faydalı önerileri için hakemlere teşekkürlerini sunmaktadır.

5. Kaynaklar

- Ballester Bolinches, A., Wang, Y., Xiuyun, G., 2000. C-supplemented subgroups of finite groups, *Glasgow Mathematical Journal*, **42(3)**, 383-389.
- Corsini, P., 1993. Prolegomena of Hypergroup Theory. Tricesimo: Aviani Editore.
- Corsini, P., Leoreanu, V., 2003. Applications of Hyperstructure Theory. *Dordrecht*: Kluwer Academic Publications.
- Davvaz, B., Leoreanu Fotea, V., 2007. Hyperring Theory and Applications, International Academic Press.
- Doerk, K., Hawkes, T., 1992. Finite Soluble Groups. Walter de Gruyter, Berlin.
- Gorenstein, D., 1968. Finite groups. *Harper & Row, New York*.
- Guo, X., Lu, J., 2012. On SS-supplemented subgroups of finite groups and their properties, *Glasgow Mathematical Journal*, **54(3)**, 481-491.
- Hall, P., 1937. A characteristic property of soluble groups, *Journal of the London Mathematical Society*, **12**, 198-200.
- Hall, P., 1937. *Complemented groups*, *Journal of the London Math. Soc.*, **12**, 201-204.
- Jantani, F., Jafarpour, M., Mousavi, S. Sh., Leoreanu, V., 2017. On order of elements in hypergroups and p-Sylow subhypergroups, *Communications in Algebra*, **45(12)**, 5092-5102.
- Kegel, O., 1962. Sylow-gruppen und subnormalteiler endlicher gruppen, *Mathematische Zeitschrift*, **78(1)**, 205-221.
- Li, S., Shen, Z., Liu, J., Liu, X., 2008. The influence of SS-quasinormality of some subgroups on the

structure of finite groups, *Journal of Algebra*, **319**, 4275-4287.

Marty, F., 1934. Sur une Generalization de la Nation de Groupe. 8 th Congress Mathematics Scandenaves, Stockholm, Sweden, 45-49.

Vasil'ev, A., Zieschang, P.H., 2022. Solvable hypergroups and a generalization of Hall's theorems on solvable groups to assoriation schemes, *Journal of Algebra*, **594**, 733-750.

Vougiouklis, T., 1994. Hyperstructures and Their Representations. Palm Harbor, FL: Hadronic Press.