

2^k Faktöriyel Tasarımlarda Sağa Çarpık Dağılımlar İçin Senkronize Permütasyon Testi

Hülya Bayrak , Selda Zengin 

Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, 06500, Ankara, Türkiye

Öne Çıkanlar

- F-testi normal dağılmayan dağılımlarda yetersiz kalmaktadır.
- “Senkronize Permütasyon Testi”nin hem normal hem de sağa çarpık dağılımlarda etkili ve güçlü olduğu gösterilmiştir.
- Senkronize Permütasyon Testi sağa çarpık dağılımlarda veriyi açıklamada, F-testine göre daha iyidir.

Makale Bilgileri

Geliş: 16/10/2024
Kabul: 02/06/2025

Anahtar Kelimeler

Senkronize Permütasyon Testi,
Permütasyon Testi,
Welch Testi,
White Testi,
F Testi

Öz

2^k faktöriyel tasarımında A, B, C etkileri ve AB, AC, BC, ABC etkileşim etkilerini test etmede F testi kullanılır. F testini kullanabilmek için normal dağılım varsayımının sağlanması gerekir. Eğer veri normal dağılımdan gelmiyorsa, F testi sonuçları anlamlı çıkmayabilir. Bu durumun önüne geçmek için 1935 yılında Fisher tarafından önerilen permütasyon testi kullanılabilir. Permütasyon testi tekrarlanan deney tasarımındaki işlemlerin rastgele atanması anlamına gelir. Bilinen bir hata dağılımına bağlı değildir. Permütasyon testi, örneklerin geldikleri dağılım hakkında herhangi bir bilgi vermez. Permütasyon testi kullanarak 2^k faktöriyel tasarımlarını yapmamız mümkündür. Bu çalışmada 2^k faktöriyel tasarımlarda senkronize permütasyon testini, hadamard matrisi ve kısıtlı permütasyon testi kullanılarak oluşturuldu. Gözönüne alınan permütasyon testi ; $S_{u,u+1}^* = \sum_{i=1}^n (y_{iu}^* - y_{i(u+1)}^*)$ dir. S* test istatistiği, F testi dahil birçok test istatistiklerine göre farklı dağılımlarda da uygun yeterli istatistiklere izin verdiği görülmüştür. Bu çalışmada 2³ faktöriyel tasarım göz önüne alınmıştır. Yapılan çalışmada S* test istatistiği sağa çarpık bazı dağılımlarda irdelenerek yorumlanmıştır.

Synchronized Permutation Test For Right-Skewed Distributions In 2^k Factorial Designs

Highlights

- The F-test is inadequate in distributions that are not normally distributed.
- It has been shown that the “Synchronized Permutation Test” is effective and powerful in both normal and right-skewed distributions.
- The Synchronized Permutation Test is better than the F-test in explaining the data in right-skewed distributions.

Article Info

Received: 16/10/2024
Accepted: 02/06/2025

Keywords

Synchronized
Permutation Test,
Permutation Test,
Welch Test,
White Test,
F Test

Abstract

The F-test is used to test the effects of factors A, B, C, as well as their interactions (AB, AC, BC, ABC) in the 2^k factorial design. However, the F-test relies on the assumption of normal distribution in the data. If the data does not follow a normal distribution, the results of the F-test may not be reliable. To address this issue, Fisher proposed the permutation test in 1935. The permutation test involves random reassignment of operations in a repeated experimental design. It does not depend on any known error distribution and does not provide any information about the distribution from which the samples are derived. Using the permutation test allows for the conduct of 2^k factorial designs, overcoming the limitations posed by non-normal data distribution. In this study, the synchronized permutation test, Hadamard matrix, and restricted permutation test were employed for the 2^k factorial designs. The particular permutation test considered here is denoted as $S_{u,u+1}^* = \sum_{i=1}^n (y_{iu}^* - y_{i(u+1)}^*)$. The S* test statistic derived from this method was found to permit appropriate statistics in various distributions, different from several other test statistics including the F-test. For this research, a 2³ factorial design was taken into consideration. The study focused on interpreting the S* test statistic when dealing with right-skewed distributions.

1. GİRİŞ

Fisher (1935) ve Yates (1937) tarafından önerilen faktöriyel tasarımlar birden fazla faktörün ana etkilerini ve etkileşim etkilerini birlikte araştırmak için kullanılan tasarımlardır [1].

Faktöriyel tasarımlarda herhangi bir faktörün seviyelerinin tamamı diğer faktör ya da faktörlerin her bir seviyesinde farklıdır. Bu aynı zamanda faktörler arasındaki etkileşimin temel sebebidir. Faktöriyel tasarımlarda ana etkiler ve etkileşim etkilerinin araştırılmasında genellikle iki yönlü varyans analizi (two-way ANOVA) yöntemi kullanılır. Parametrik bir analiz olan varyans analizi (ANOVA) hata bileşenleri aynı ve normal dağıldığı, varyansların homojen olduğu varsayımlarına dayanır. Varyans analizi için doğrusal modelde, hata terimleri normal dağılıma sahip olmadığı durumlarda parametrik analizler uygun olmayabilir. Parametrik F testi simetrik olmayan dağılımlarda ve çarpık dağılımlarda güçlü bir test değildir [2,3].

Davranış çalışmalarında elde edilen verilerin, dağılımlarının normal olmayışı sebebiyle geleneksel parametrik yöntemlerle analiz edilemeyecekleri bildirilmiştir. Bu durumlarda parametrik olmayan çözümler tercih edilebilir [4]. Parametrik olmayan yöntemlerden biri hata bileşenlerinin normal dağıldığı varsayımını dikkate almayan kesin testlerin elde edilebildiği permütasyon testleridir [5,6].

Permütasyonun anlamı deneydeki tekrarların deney tasarımıdaki işlemlerin rastgele atanması anlamına gelir. Permütasyon testleri, verilere randomizasyon ilkesinin uygulandığı bir teknik olarak bilinir. Literatürde randomizasyon testi ifadesi aynı anlamda kullanılır.

Permütasyon testi, doğrudan karşılaştırmalı bir deneydeki prosedürü takip eder ve bilinen bir hata dağılımına bağlı değildir. Permütasyon testi gerçek etkilere karşılık gelen parametrik testlerden daha duyarlıdır [7].

Parametrik testlerin ihtiyaç duyduğu varsayımlar sağlanmadığında testlerin gücü düştüğünden, bu durumlarda permütasyon testleri iyi bir yaklaşımdır.

Deney tasarımı için permütasyon yaklaşımı ilk kez Fisher (1935) tarafından randomizasyon testi adı altında sunulmuştur [8]. Deney tasarımı çatısında birden fazla faktör olduğu durumlarda permütasyon testi için farklı stratejiler geliştirilmiştir.

Gözlemlerin permütasyonunda dengeli faktöriyel tasarımlar için kısıtlı permütasyonu temel alan senkronize permütasyonu kullanan kesin testler önermişlerdir [9]. 2^k faktöriyel tasarımlarda sabit etkilerin testi için senkronize permütasyon testini incelemiştir [10].

Deney, kontrol altındaki bazı durumların deney birimlerinin bilinmeyen özellikleri üzerindeki etkisini test etmek için uygulanan işlemler bütünüdür. Deney tasarımı ise deney birimlerinin maruz kalacağı kontrol altındaki koşulların düzenlenmesiyle ilgilidir [11]. Faktöriyel tasarımlar iki veya daha fazla faktörün ana etkilerini ve etkileşim etkilerini araştırmak için kullanılan popüler tasarımlardır. Faktöriyel tasarımlar çoğunlukla istatistikte kullanılmasının yanında kimya, biyoloji gibi alanlarda da kullanımı yaygındır. Faktöriyel tasarımlar, geleneksel tasarımlarda olduğu gibi sadece bir tane faktörün etkisini araştırmak yerine faktörler arasındaki etkileşimleri araştırması bakımından geleneksel tasarıma göre daha etkindir [1].

A ve B gibi iki faktörün olduğu ve A faktörünün seviyelerinden I tanesinin ve B faktörünün seviyelerinden de J tanesinin özel olarak seçildiği düşünülerek, faktöriyel tasarımda düzenlenebilir.

Faktöriyel tasarımda, gözlemler Eş. 2.1’de verilen bir model yardımıyla tanımlanabilir,

$$\gamma_{ijk} = \mu + a_i + b_j + (ab)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad i=1,\dots,I \quad j=1,\dots,J \quad \text{ve} \quad k=1,\dots,n. \quad (1.1)$$

Böylece , a_i , b_j ve $(ab)_{ij}$ için kısıtlar;

$$\sum_{i=1}^I a_i = 0, \sum_{j=1}^J b_j = 0, \sum_{i=1}^I (ab)_{ij} = 0, \forall j \text{ için ve } \sum_{j=1}^J (ab)_{ij} = 0, \forall i \quad (1.2)$$

şeklindedir.

İki faktörlü faktöriyel düzenlerde, satır ve sütun etkisi eşit ilgi konusuna sahiptir. Bundan dolayı satır faktörünün seviyelerinin eşitliğini test eden hipotezler aşağıda verilmiştir,

$$\begin{aligned} H_0 : \{a_i = 0, \forall i \text{ için}\} \\ H_1 : \{a_i \neq 0, \exists i \text{ için}\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Sütun faktörünün seviyelerinin eşitliğini test eden hipotezler;

$$\begin{aligned} H_0 : \{b_j = 0, \forall j \text{ için}\} \\ H_1 : \{b_j \neq 0, \exists j \text{ için}\}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

aynı zamanda satır ve sütun faktörlerinin etkileşim etkisinin seviyelerinin eşitliğini test eden hipotezler;

$$\begin{aligned} H_0 : \{(ab)_{ij} = 0; \forall (i,j) \text{ için}\} \\ H_1 : \{(ab)_{ij} \neq 0; \exists (i,j) \text{ için}\} \end{aligned} \quad (1.5)$$

şeklinde ifade edilir.

Burada faktör seviyelerinin özel seçimli olması nedeniyle sabit etki modeli göz önüne alınmıştır.

Permütasyon, deneydeki tekrarların deney tasarımındaki işlemlere rastgele atanması anlamına gelmektedir. Permütasyon testleri, verilere randomizasyon ilkesinin uygulandığı bir teknik olarak bilinir. Literatürde randomizasyon testi ifadesi aynı anlamda kullanılır. Permütasyon testi, örneklerin geldikleri dağılım hakkında herhangi bir varsayımı gerektirmez. Permütasyon testini elde etmek için tek gereksinim yokluk hipotezi altında değişebilirliktir. Değişebilirlik yokluk hipotez altında, gözlemlerin ortak dağılımının alt simgelerinin permütasyonları altında değişmezdir [10].

İkinci bölümde, senkronize permütasyon testinin teorik temelleri ve faktöriyel tasarımlardaki uygulama biçimleri detaylandırılmıştır. Üçüncü bölümde, farklı sağa çarpık dağılımlar altında yapılan karşılaştırmalı simülasyon çalışması sunulmuş ve test istatistiklerinin performansları analiz edilmiştir. Dördüncü bölümde elde edilen sonuçlar grafiklerle desteklenerek tartışılmış, beşinci bölümde ise genel sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

2. SENKONİZE PERMÜTASYON TESTİNDE 2^k FAKTÖRİYEL TASARIMLAR

Birkaç faktör içeren deneylerde yaygın olarak faktöriyel tasarımlar kullanılır. 2^k faktöriyel tasarım, her biri yalnız iki düzeyden oluşan k faktörlerin özel bir durumudur. Birçok faktör ile araştırma yaparken deneysel çalışmaların ilk aşamalarında 2^k tasarımlar özellikle faydalı olur. Bu çalışmada 2^2 faktöriyel tasarımında kesin permütasyon çözümlerinin 2^3 faktöriyel tasarımlarına genişletilmesi ile ilgileneceğiz. k' nin ana faktör sayısını gösterdiği bir 2^k tam faktöriyel tasarımının model matrisi $X = [1_N \ D \ P_D]$ 'dir.

- ✓ 1_N : μ genel ortalamadan oluşan $(N \times 1)$ boyutlu sütun vektörünün elemanlarını gösterir. +1'lerin vektörüdür.
- ✓ D : k ana faktörün iki farklı seviyesinin (± 1) tüm kombinasyonlarını içeren $(N \times k)$ matrisidir.
- ✓ P_D : $(N \times [N - k - 1])$ matrisidir. P_D sütunlarına karşılık gelen matris daha sonra kullanacağımız faktörünün etkileşimlerine karşılık gelir.
- ✓ t : t faktör etkileşimlerine karşılık gelen bu sütunlar, D satırlarında, $2 \leq t \leq k$ faktörlere karşılık gelen sütunlarının Hadamard çarpımı ile oluşturulur.

2.1. Senkronize Permütasyon Testleri

Faktöriyel tasarımlarda yanıtın öğeleri değişebilir olmadığında, diğer permütasyon testlerine kıyasla sınırlı bir tür permütasyona ihtiyaç vardır. İki yönlü ANOVA' da ana etkilerin test edilmesi için permütasyon testi çerçevesinde Gözlemlerin permütasyonuna yalnızca test edilmeyen faktör seviyeleri dahilinde izin verilen sınırlı permütasyon stratejisiyle olağan F-istatistiğinin kullanılmasını önermiştir [12,13]. Ancak bu yaklaşım sadece ana etkileri birbirinden bağımsız test ederken etkileşim etkisinin testi ana etkilerden bağımsız değildir. 2^k faktöriyel tasarımlarda sabit etkileri test etmek için senkronize permütasyonlar, ana etkiler ve etkileşim etkisini birbirlerinden bağımsız olarak test edilebilmesini sağlayan bir sınırlı permütasyon prosedürüdür [9,14].

Hipotezler;

$$H_0: \{(a=0) \cap (b=0) \cap (ab=0)\},$$

$$H_1: \{H_0 \text{ doğru değil}\}$$

(2.1)

şeklinde kurulur.

Genellikle deneycinin ilgisi, iki ana etki ve etkileşim için ayrı ayrı test etmektir. Dolayısıyla, üç kısmi sıfır hipotezi vardır: $H_{0A}: \{a = 0\}$, $H_{0B}: \{b = 0\}$ ve $H_{0AB}: \{ab = 0\}$ ve üç ayrı test bulmaktır. Bu nedenle, örneğin $H_{0A}: \{a = 0\}$ 'ı, $H_{1A}: \{a \neq 0\}$ 'a karşı test edilir. Bu amaca bir permütasyon çerçevesinde ulaşmak için, üç test alt probleminin tümü için uygun bir ortak yeterli istatistik seti bulunur.

$H_{0A} \cup H_{0B}$ bağımsız olarak H_{0AB} ve H_{0B} 'den bağımsız olarak $H_{0A} \cup H_{0AB}$, H_{0A} 'dan bağımsız olarak $H_{0B} \cup H_{0AB}$ alınır. Diğer bir deyişle, $\{H_{0A}, H_{0B}, H_{0AB}\}$ altında bir dizi yeterli istatistik bulunması gerekir. $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^t$ bu dört vektör mevcut veri bloğuna aittir. y 'nin verileri sürekli bir dağılımdan geldiğinde etkilerinin ayrı ayrı test edilmesi için sıfır hipotez altında ortak ve yeterli minimum istatistikler kümesi olmalıdır.

$y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^t$ veri bloğundaki t faktörü etkileşimlerine karşılık gelen bu sütunlar, D satırlarında, $2 \leq t \leq k'$ deki t faktörlerine karşılık gelen sütunlarının Hadamard çarpımı ile oluşturulmasıdır.

2^2 faktöriyel tasarımında, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^t$ 'nin $\{H_{0A}, H_{0B}, H_{0AB}\}$ ortak sıfır hipotezi altında yeterli istatistikler kümesi olduğundan, yalnızca her blok içindeki verileri değiştirmeye izin verir.

Bu nedenle, kesin bir permütasyon testi mümkün görünmemektedir. Yani bir tür özel kısıtlı permütasyon gereklidir. Önce faktör A'yı, faktör B' nin 1. ve 2. seviyelerinde ayrı ayrı karşılaştırmak için Eş. (1.2) ve Eş. (1.3) ile verilen iki kısmi istatistik ele alınsın [12]:

$$T_{A/1} = \sum_i y_{i1} - \sum_i y_{i3}, \quad (2.2)$$

$$T_{A/2} = \sum_i y_{i2} - \sum_i y_{i4}. \quad (2.3)$$

A_1B_1 bloğundan bir verinin rastgele seçildiğini ve A_2B_1 bloğundan rastgele seçilen diğer veri ile değiş tokuş edildiği varsayalım. A_1B_2 ve A_2B_2 bloklarından rastgele iki verinin değiş tokuşu yapılır.

2.2. 2^3 Tam Faktöriyel Tasarım İçin Tasarım Matrisinin Oluşturulması

2^3 faktöriyel tasarımını oluşturmak için Hadamard matrisi kullanılmıştır. Hadamard matris özellikle matematikte ve bilgisayar bilimlerinin kuantum hesaplama gibi alanlarında kullanılan bir matristir. Fransız matematikçi Jaques Hadamard tarafından tasarlanmış ve adıyla anılmıştır. Matrisin en belirgin özelliği, matrisin kare matris olması ve elemanlarının -1 veya +1 değerlerinde olmasıdır. Ayrıca matrisin satırları birbirinden bağımsız olarak diktir. Bunun anlamı, matrisin herhangi iki satırından oluşturulabilecek iki vektörün birbirine dik vektörler olmasıdır [15].

2^k tam faktöriyel tasarım matrisi; yeniden tasarım için prosedür aşağıdaki adımlardan oluşur;

1. Model matrisini normal biçimde yazın.
2. Tasarım matrisindeki satırları, ikinci satırda olacak şekilde değiştirin, k faktöre karşılık gelen sütunlar aynı değerlere sahiptir ve yeniden tasarlanan matrisin r-inci satırı olarak 1'lerden oluşur, $1 \leq r \leq N - 1$. Böyle bir satır yeniden tasarlanan matrisin r-inci satırını oluşturur. Tasarım matrisinin ikinci satırında bulunan +1 'ler kadar k - 1 tane faktör vardır.
3. Tasarım matrisindeki satırları, ikinci satırda bulunan ve +1 olan k - 1 faktörlerinin her birinin iki bitişik satırındaki j_1, j_2 eleman çiftlerinin her çifti aynı işarete sahip olacak, yani $j_1 = j_2 = +1$ veya $j_1 = j_2 = -1$ şekilde değiştirin (iki yana yasla).

Yeniden tasarlanan matriste, her seferinde farklı yeniden tasarlanmış bir satırı kullanılarak $2^k - 1$ kez tekrarlanabilir [14].

2^3 tam faktöriyel tasarım için hadamard matrisi aşağıdaki gibidir:

$$X_8 = \{A, B, C, AB, AC, BC, ABC\},$$

$$= \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & - & + & - & - & - \\ + & - & + & - & + & - & - \\ + & - & - & - & - & + & + \\ - & + & + & - & - & + & - \\ - & + & - & - & + & - & + \\ - & - & + & + & - & - & + \\ - & - & - & + & + & + & - \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

+1 için “+”, -1 için “-” alınmıştır. Karşılık gelen yeniden üretilen matrisi (normal formda X_8' den türetilmiştir) aşağıda verilmiştir:

$$R_8 = \begin{bmatrix} + & + & - \\ + & - & + \\ + & - & - \\ - & + & + \\ - & + & - \\ - & - & + \\ - & - & - \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

R_8 'deki ilk satırı için gözlemler yeniden gösterilsin. Bu yeniden düzenlenen X_8 'de herhangi bir satırı değiştirmedikten $X_8^1 = X_8$ elde edilir.

2.3. Test İstatistiklerinin Oluşturulması

Her bir model matrisindeki farklı bitişik satır çiftlerine karşılık gelen, tekrarlanmış model matrisinin her farklı blok çiftine senkronize permütasyonlar uygulanabilir.

Hata terimlerinin, tekrarlanan 2^k tam faktöriyel tasarım için doğrusal modelde değiştirilebilir olduğu varsayıldığında, o zaman her bir bitişik blok çifti için aşağıdaki permütasyon istatistiğini dikkate alınır;

Test İstatistiği

$$S_{u,u+1}^* = \sum_{i=1}^n (y_{iu}^* - y_{i(u+1)}^*), \quad \varepsilon_{ij} \sim N(0,1) \text{ dir.} \quad (2.6)$$

Yukarıda verilen senkronize permütasyon test istatistiği için elde edilen verilerin farklı indeks çifti için tanımlanmış ($u, u+1$), burada u yeniden düzenlenmiş model matrisindeki tek satır indisidir, $u=1, 3, \dots, (2^k - 1)$ ve y_{iu}^*, y_{iu} 'nun permütasyon değeridir.

İlgili lineer yanıt modeli:

$$Y_{ij} = \mu X_{0ij} + aX_{1ij} + bX_{2ij} + cX_{3ij} + (ab)X_{1ij}X_{2ij} + (ac)X_{1ij}X_{3ij} + (bc)X_{2ij}X_{3ij} + (abc)X_{1ij}X_{2ij}X_{3ij} + \varepsilon_{ij} \quad (2.7)$$

olarak yazılır.

Yanıt modeli, c , (ac) , (bc) ve (abc) etkileri için permütasyon testine izin verir. Dört istatistik aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned} S_{1,2}^* &= 2n^*c + 2n^*(ac) + 2n^*(bc) + 2n^*(abc) + n\bar{\varepsilon}_{1,2}^* \\ S_{3,4}^* &= 2n^*c + 2n^*(ac) - 2n^*(bc) + 2n^*(abc) - n\bar{\varepsilon}_{1,2}^* \\ S_{5,6}^* &= 2n^*c - 2n^*(ac) + 2n^*(bc) + 2n^*(abc) - n\bar{\varepsilon}_{1,2}^* \\ S_{7,8}^* &= 2n^*c - 2n^*(ac) - 2n^*(bc) + 2n^*(abc) + n\bar{\varepsilon}_{1,2}^* . \end{aligned} \quad (2.8)$$

İspat

$$X_c = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ - & - & - & - \\ + & + & - & - \\ - & - & + & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & - & + \\ - & + & + & - \end{bmatrix}$$

yukarıda görülen C ana etki matrisi X_8 matrisinin bir alt matrisidir. Tüm C kombinasyonları bulunur.

Bu matriste C ana etkisinin seviyesi + olanlar, yani yüksek olanlar alınmıştır.

$\mu = 0$, $\varepsilon_{ij} \sim N(0,1)$, $n^* = (n - 2v^*)$ yazılır.

Buradaki,

n^* : Tekrar sayısı,

v^* : Senkronize permütasyonlarla her bir bitişik blok çifti içinde rastgele değiştirilen eleman sayısıdır.

$$Y_{ij} = \mu X_{0ij} + aX_{1ij} + bX_{2ij} + cX_{3ij} + (ab)X_{1ij}X_{2ij} + (ac)X_{1ij}X_{3ij} + (bc)X_{2ij}X_{3ij} + (abc)X_{1ij}X_{2ij}X_{3ij} + \varepsilon_{ij}$$

$$\begin{aligned} Y_{1,2} &= 2(n - 2v^*)c + 2(n - 2v^*)(ac) + 2(n - 2v^*)(abc) \\ &= 2n^*c + 2n^*(ac) + 2n^*(bc) + 2n^*(abc) \end{aligned}$$

eşitlikte + ve - ler katsayı önündeki işaretler olduğu görülmektedir. Yukarıda yapılan işlemler AC, BC, ABC etkileşim etkileri için hadamard matrisi yardımı ile oluşturulmuş test istatistikleridir. X_{AC} , X_{BC} , X_{ABC} , Hadamard matrisleri aşağıdaki gibidir;

a, (c), (ac) ve (abc) etkileri için permütasyon testine izin verir. Dört istatistik aşağıdaki gibidir:

$$X_{AC} = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & - & - & - \\ + & + & + & - \\ + & - & - & + \\ - & + & - & - \\ - & - & + & + \\ - & + & - & + \\ - & - & + & - \end{bmatrix}$$

$$S_{1,2}^* = 2n^*a + 2n^*c + 2n^*(ac) + 2n^*(abc) + n\bar{\varepsilon}_{1,2}^*$$

$$S_{3,4}^* = 2n^*a - 2n^*c - 2n^*(ac) - 2n^*(abc) + n\bar{\varepsilon}_{1,2}^*$$

$$S_{5,6}^* = 2n^*a + 2n^*c + 2n^*(ac) - 2n^*(abc) + n\bar{\varepsilon}_{1,2}^*$$

$$S_{7,8}^* = 2n^*a - 2n^*c - 2n^*(ac) + 2n^*(abc) + n\bar{\varepsilon}_{1,2}^* .$$

Toplam doğrusal kombinasyon;

$$S_{AC,1}^* = S_{1,2}^* + S_{3,4}^* + S_{5,6}^* + S_{7,8}^*$$

$\bar{\varepsilon}_{u,u+1}^*$, $u = 1, 3, 5, 7$, permütasyon hatalarının lineer bir kombinasyonudur;

$\bar{\varepsilon}_{u,u+1}^* = \bar{\varepsilon}_u^* - \bar{\varepsilon}_{u+1}^*$, $\bar{\varepsilon}_j^* = \sum_i \varepsilon_{ij} / n$ $j = 1, \dots, 2^3$, j-inci bloktaki permütasyon hatalarıdır.

Düzenlenmiş faktörlerin etkileri için elde dilmiş test istatistiği, $S_{u,u+1}^*$ istatistikleri, normal formda $2^k - 1$ mertebesinde bir Hadamard matrisinin sütunları tarafından verilen lineer kombinasyonlar kullanılarak birleştirilir. Dolayısıyla, dört istatistik $S_{1,2}^*, \dots, S_{7,8}^*$ dördüncü dereceden bir Hadamard matrisinin sütunlarıyla birleştirilir [10].

C ana etkisinin doğrusal kombinasyonu;

$$S_{C,1}^* = S_{1,2}^* + S_{3,4}^* + S_{5,6}^* + S_{7,8}^* \quad (2.9)$$

Her blok çiftinde aynı sayıda gözlemi değiş tokuş ettiğinden, her $S_{C,1}^*$ permütasyon testi kesindir, çünkü yokluk dağılımı denenmemiş etkilere göre değişmezdir ve yalnızca değiştirilebilir hatalara bağlıdır. Ayrıca, bu tür testler yansız, tutarlı ve yeterlidir. Son olarak $2^k - 1$ ayrı hipotezler için $2^k - 1$ ayrı testler mevcuttur [10].

Test istatistiklerinin permütasyon dağılımı, gözlemlenen verinin, tekrar sayısından ve tasarım boyutundan etkilenir. Tasarım boyutu ve/veya tekrarların, elde edilen minimum boyut üzerindeki etkilerinin artması durumunda, boyutların azaldığı görülmektedir. CSP_s (Constrained Permutation Synchronized)(Kısıtlanmış Permütasyon Testi) için permütasyon dağılımlarının simetrik olduğu bilinmektedir. Ayrıca, farklı düzenlemeler için test altında aynı etkiye sahip permütasyon dağılımları aynı tür simetriye sahiptir. CSP_s için permütasyon dağılımlarının simetrik olduğu bilinmektedir. Ayrıca, farklı düzenlemeler için test altında aynı etkiye sahip permütasyon dağılımları aynı tür simetriye sahiptir.

CSP_s için, her test istatistiğinin sadece $\binom{2^n}{n}$ tane farklı permütasyon değeri vardır. Bu permütasyon değeri, ne teste ne tasarım boyutuna ne de yapılandırılmış veriye bağlı değildir.

3. KARŞILAŞTIRMALI SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Bu çalışmada farklı özelliklere sahip sürekli olasılık dağılımlarından Normal, Cauchy, Weibull ve Ters Gauss dağılımı kullanılarak bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Normal dağılım; verilerin çoğunun ortalamaya yakın ve uç değerlerin daha az sıklıkta olduğu, çan şekline benzeyen bir istatistiksel dağılım modelidir. Cauchy dağılımı; ortalaması ve varyansı tanımsız olan, geniş kuyruklara sahip ve uç değerlerin daha sık rastlandığı bir olasılık dağılımıdır.

Weibull dağılımı; şekil ve ölçek parametrelerine bağlı olarak farklı şekiller alabilen, özellikle yaşam verileri ve güvenilirlik analizlerinde kullanılan bir sürekli olasılık dağılımıdır. Ters Gauss dağılımı; Brownian hareketi ile ilişkili bir süreçte ilk geçiş zamanının dağılımını modelleyen, asimetrik ve sağa çarpık bir olasılık dağılımıdır.”

2^3 tekrarlı faktöriyel tasarım için S^* testi, F testi, Welch Testi ve White testini sağa çarpık dağılımlarda, deneysel tip 1 hata ve güç değerleri bakımından, farklı dağılımlarda gösterdiği davranışları karşılaştırmalı simülasyon yoluyla sonuçları aşağıdaki gibi gözlemlenmiştir.

Tüm simülasyon çalışmasında $\alpha = 0,05$ kullanılmıştır. Hata terimlerinin dağılımlarından tüm rastgele değişkenlerinin beklenen değeri sıfır olarak standartlaştırılmıştır. Yapılan simülasyon çalışmasında R 4.3.1 versiyonlu RStudio programı kullanıldı. R programı ücretsiz ve herkesin kullanımına açık bir programdır. R programlama dilinde Normal dağılımdan veri çekmek için “*library(dplyr)*” paketi kullanılarak, deney tasarımını “*expand.grid()*” fonksiyonu, dağılım ise “*rnorm()*” fonksiyonu ile oluşturuldu.

Normal dağılım için istenilen sonuçları $n_{sim} = 5000$ de elde edildi. F testi için “*aov()*” fonksiyonu, Welch testi için “*calculate_welch_test()*” fonksiyonu, White testi için “*lm()*” fonksiyonu kullanılmıştır. Cauchy dağılımı için veriyi “*library(dplyr)*” paketi kullanılarak, deney tasarımı “*expand.grid()*” fonksiyonu, dağılım ise “*rcauchy()*” fonksiyonu ile oluşturuldu.

Cauchy dağılımı için istenilen sonuçlar $n_{sim} = 5000$ de elde edildi. Weibull dağılımı için “*library(dplyr)*” paketi kullanılarak, deney tasarımı “*expand.grid()*” fonksiyonu, dağılım ise “*rweibull()*” fonksiyonu ile oluşturuldu.

Ters Gauss dağılımı için “*library(MASS)*” paketi kullanılarak, deney tasarımı “*expand.grid()*” fonksiyonu, “*rinvgauss()*” dağılım fonksiyonu ile oluşturuldu. Weibull dağılımı ve Ters Gauss dağılımı için istenilen sonuçlar $n_{sim} = 3000$ elde edildi. Son olarak S^* test istatistiği için $S_{u,u+1}^* = \sum_{i=1}^n (y_{iu}^* - y_{i(u+1)}^*)$ formülü kullanılmıştır.

Tüm dağılımlarda S^* test istatistiği için $n_{sim} = 1000$ ve $n = 5$ tekrarlı yapıldı. Normal dağılım, Cauchy dağılımı, Weibull dağılımı ve Ters Gauss dağılımında $n = 7$ tekrarlı olacak şekilde yapıldı.

Simülasyon çalışmasında F Testini, W^* (Welch Tetini), Wh^* (White Testi) ve S^* (Üzerinde çalıştığımız test istatistiği) ifade etmektedir. Normal dağılım $N(0,1)$ parametrelili, Cauchy dağılımı $(0,1)$ parametrelili, Weibull dağılımı için $(\lambda=1, k=0,25)$ ve $(\lambda=1, k=0,50)$ olmak üzere iki farklı parametre kullanılmıştır. Ters Gauss dağılımı için $(\mu=1, \lambda=0,05)$ ve $(\mu=1, \lambda=0,01)$ olmak üzere iki farklı parametre kullanılmıştır.

Normal dağılım, Cauchy dağılımı, Weibull dağılımı ve Ters Gauss dağılımı çizelgeleri aşağıdaki gibidir. Bu çizelgelerde sarı renkli işaretli olan p- değerleri $\alpha = 0,05$ değerine göre red edilen yani anlamlı olan değerler işaretlenmiştir. Bu çizelgelerde “I” ana etkilerin ve etkileşim etkilerinin anlamlılıklarını ve testin gücünü göstermektedir. Çizelgede A,B ve C ana etkileri, AB, AC, BC ve ABC etkileşim etkilerinin p- değerleri ve güç değerleri gösterilmektedir.

Normal dağılım ve cauchy dağılımı üzerinde çalışılmıştır. Normal dağılım ve cauchy dağılımı, üzerinde çalışılan makalede de bulunduğu için tekrar edilmiş, sonuçları karşılaştırılıp ortaya atılan test istatistiği denenmiştir. Çizelgelerin ve grafiklerin sayıları çok olduğundan bu makale çalışmasına konulmamıştır. Temel konu olan Weibull dağılımı ve Ters Gauss dağılımı çizelgeleri ve grafikleri makale içine konulmuştur [16].

Yapılan simülasyon çalışmasında Çizelge 1’ den Çizelge 8’ e kadar olan tüm çizelgelerde anlamlı olan değerler alınmıştır. Çizelge de boş bulunan hücreler anlamlı sonuçlar çıkmadığı için boş bırakılmıştır

Çizelge 1. Weibull Dağılımda ($k=0,25$ ve $\lambda=1$) farklı testlerin p – değerleri

		$\alpha = 0,05, k = 0,25$ ve $\lambda = 1$						
		I.(A)	I.(B)	I.(C)	I.(AB)	I.(AC)	I.(BC)	I.(ABC)
		,04	,02	,02	,0	,04	,02	,01
	$n = 7$	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
F	1	,097	,022	,000	,064	,085	,034	,008
	2	,195	,064	,002	,150	,077	,080	,104
	3	,029	,280	,130	,218	,295	,213	,015
	4	,308	,322	,343	,382	,368	,328	,329
	5	,434	,044	,618	,406	,410	,441	,051
	6	,210	,659	,770	,635	,697	,524	,162
	7	,577	,452	,729	,503	,414	,604	,554
W*	1	-	-	-	-	-	-	-
	2	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-	-	-	-	-
	6	,085	,049	,104	,041	,051	,079	,028
	7	,016	,027	,094	,111	,098	,026	,095
Wh*	1	,071	,293	,023	,035	,026	,042	,065
	2	,126	,101	,134	,082	,001	,176	,003
	3	,001	,154	,171	,242	,125	,115	,048
	4	,003	,288	,275	,044	,291	,164	,252
	5	,280	,218	,257	,345	,399	,181	,169
	6	,193	,165	,111	,292	,236	,368	,390
	7	,130	,360	,310	,328	,323	,287	,299
S*	1	,001	,010	,052	,011	,004	,039	,035
	2	,016	,006	,102	,025	,062	,054	,007
	3	,022	,056	,001	,036	,108	,088	,026
	4	,082	,066	,050	,046	,130	,091	,012
	5	,048	,040	,037	,134	,048	,063	,039
	6	,063	,129	,043	,094	,036	,023	,064
	7	,111	,045	,080	,120	,091	,076	,075

 S^* = Senkronize Permütasyon Testi W^* = Weibull Testi Wh^* = White Testi

F = F Testi

Çizelge 2. Weibull Dağılım' da ($k=0,25$ ve $\lambda=1$) farklı testlerin güç değerleri

		$\alpha = 0,05, k=0,25$ ve $\lambda=1$						
		I.(A)	I.(B)	I.(C)	I.(AB)	I.(AC)	I.(BC)	I.(ABC)
		,6	,5	,5	,4	,6	,4	,4
	$n=7$	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
F	1	,580	,871	,927	,871	,733	,893	,646
	2	,553	,758	,945	,758	,762	,749	,450
	3	,779	,580	,882	,608	,680	,532	,636
	4	,273	,676	,607	,525	,609	,415	,146
	5	,199	,770	,353	,461	,591	,385	,533
	6	,438	,199	,425	,337	,353	,268	,080
	7	,097	,337	,465	,362	,568	,117	,028
W*	1	-	-	-	-	-	-	-
	2	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-	-	-	-	-
	6	,675	,771	,482	,780	,326	,708	,708
	7	,830	,817	,635	,293	,463	,898	,596
Wh*	1	,718	,548	,797	,793	,748	,734	,633
	2	,683	,676	,594	,679	,896	,551	,829
	3	,896	,652	,528	,602	,686	,701	,753
	4	,829	,594	,627	,743	,159	,627	,676
	5	,602	,607	,633	,098	,007	,566	,607
	6	,633	,627	,705	,151	,156	,024	,011
	7	,677	,036	,058	,165	,045	,587	,292
S*	1	,919	,888	,693	,873	,895	,716	,789
	2	,858	,898	,558	,841	,602	,676	,890
	3	,846	,668	,919	,775	,509	,642	,813
	4	,652	,656	,716	,692	,501	,621	,871
	5	,699	,795	,736	,495	,732	,672	,741
	6	,686	,548	,732	,621	,791	,842	,686
	7	,553	,786	,668	,615	,652	,548	,656

 S^* = Senkronize Permütasyon Testi W^* = Weibull Testi Wh^* = White Testi

F = F Testi

Çizelge 3. Weibull Dağılım’da ($k=0,5$ ve $\lambda=1$) farklı testlerin p – değerleri

		$\alpha = 0,05, k = 0,5$ ve $\lambda = 1$						
		I.(A)	I.(B)	I.(C)	I.(AB)	I.(AC)	I.(BC)	I.(ABC)
		,04	,0	,04	,01	,02	,05	,05
	$n = 7$	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
F	1	,057	,062	,053	,008	,053	,013	,004
	2	,038	,178	,045	,147	,230	,066	,158
	3	,298	,225	,179	,144	,132	,188	,232
	4	,192	,177	,089	,067	,036	,058	,275
	5	,294	,075	,221	,163	,257	,242	,027
	6	,028	,011	,042	,008	,045	,019	,136
	7	,260	,077	,015	,025	,171	,111	,215
W*	1	-	-	-	-	-	-	-
	2	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-	-	-	-	-
	6	,051	,047	,073	,035	,010	,145	,066
	7	,052	,020	,112	,034	,134	,078	,082
Wh*	1	,032	,032	,037	,032	,037	,037	,037
	2	,110	,099	,090	,109	,100	,090	,100
	3	,169	,192	,168	,161	,189	,181	,160
	4	,210	,209	,207	,213	,211	,211	,215
	5	,348	,365	,413	,325	,371	,388	,347
	6	,427	,430	,427	,412	,407	,413	,393
	7	,559	,554	,494	,576	,514	,509	,530
S*	1	,043	,035	,083	,076	,001	,018	,077
	2	,005	,037	,045	,068	,047	,047	,085
	3	,001	,100	,033	,085	,050	,046	,089
	4	,042	,039	,052	,050	,036	,036	,120
	5	,050	,104	,028	,087	,024	,001	,065
	6	,031	,013	,123	,059	,015	,023	,053
	7	,090	,067	,117	,051	,006	,008	,051

 S^* = Senkronize Permütasyon Testi W^* = Weibull Testi Wh^* = White Testi

F = F Testi

Çizelge 4. Weibull Dağılım' da ($k=0,50$ ve $\lambda=1$) farklı testlerin güç değerleri

		$\alpha = 0,05, k=0,5$ ve $\lambda=1$						
		I.(A)	I.(B)	I.(C)	I.(AB)	I.(AC)	I.(BC)	I.(ABC)
		,73	,68	,63	,66	,48	,68	,73
	$n=7$	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
F	1	,543	,775	,736	,939	,816	,908	,904
	2	,911	,602	,856	,748	,689	,727	,536
	3	,370	,521	,621	,727	,736	,657	,436
	4	,404	,636	,713	,775	,871	,745	,416
	5	,354	,727	,554	,709	,656	,541	,896
	6	,895	,895	,871	,939	,840	,877	,694
	7	,333	,705	,932	,938	,713	,697	,505
W*	1	-	-	-	-	-	-	-
	2	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-	-	-	-	-
	6	,652	,916	,692	,810	,922	,518	,776
	7	,648	,917	,469	,813	,501	,706	,745
Wh*	1	,815	,814	,803	,815	,819	,814	,819
	2	,467	,605	,462	,601	,606	,468	,449
	3	,382	,529	,428	,571	,585	,444	,404
	4	,268	,415	,266	,413	,413	,266	,270
	5	,212	,352	,242	,387	,377	,234	,211
	6	,152	,277	,142	,263	,246	,130	,142
	7	,054	,127	,061	,139	,139	,061	,061
S*	1	,866	,784	,705	,613	,919	,911	,479
	2	,901	,781	,894	,705	,844	,842	,421
	3	,938	,609	,857	,609	,816	,844	,412
	4	,889	,765	,771	,850	,850	,871	,394
	5	,850	,589	,919	,589	,886	,933	,561
	6	,899	,939	,595	,708	,893	,890	,617
	7	,781	,613	,696	,729	,894	,919	,672

S* = Senkronize Permütasyon Testi

W* = Weibull Testi

Wh* = White Testi

F = F Testi

Çizelge 5. Ters Gauss Dağılım 'da ($\mu = 1$ ve $\lambda = 0,05$) farklı testlerin p – değerleri

		$\alpha = 0,05$, $\mu = 1$ ve $\lambda = 0,05$						
		I.(A)	I.(B)	I.(C)	I.(AB)	I.(AC)	I.(BC)	I.(ABC)
		,03	,04	,01	,03	,05	,05	,07
	$n = 7$	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
F	1	,034	,098	,046	,100	,097	,055	,037
	2	,074	,006	,072	,081	,053	,175	,126
	3	,095	,086	,062	,029	,136	,125	,177
	4	,012	,064	,076	,043	,054	,043	,107
	5	,075	,016	,071	,063	,114	,122	,065
	6	,017	,092	,083	,069	,048	,068	,056
	7	,147	,053	,034	,115	,059	,050	,104
W*	1	-	-	-	-	-	-	-
	2	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-	-	-	-	-
	6	,046	,033	,019	,066	,089	,055	,014
	7	,022	,045	,029	,074	,090	,096	,166
Wh*	1	,148	,031	,132	,137	,001	,054	,073
	2	,072	,087	,054	,002	,067	,000	,036
	3	,139	,188	,085	,063	,060	,118	,173
	4	,056	,104	,198	,076	,000	,139	,064
	5	,064	,046	,139	,010	,101	,138	,118
	6	,006	,196	,094	,153	,103	,130	,153
	7	,081	,139	,127	,061	,165	,004	,063
S*	1	,000	,037	,002	,070	,029	,058	,055
	2	,005	,056	,017	,057	,064	,069	,081
	3	,010	,076	,103	,043	,043	,104	,069
	4	,049	,041	,075	,069	,036	,025	,092
	5	,060	,114	,054	,049	,111	,034	,103
	6	,104	,194	,050	,034	,128	,049	,038
	7	,145	,175	,040	,050	,173	,050	,100

 S^* = Senkronize Permütasyon Testi W^* = Weibull Testi Wh^* = White Testi

F = F Testi

Çizelge 6. Ters Gauss Dağılım' da ($\mu = 1$ ve $\lambda = 0,05$) farklı testlerin güç değerleri

		$\alpha = 0,05$, $\mu = 1$ ve $\lambda = 0,05$						
		I.(A)	I.(B)	I.(C)	I.(AB)	I.(AC)	I.(BC)	I.(ABC)
		,0	,6	,6	,8	,8	,6	,6
	$n = 7$	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
F	1	,822	,427	,799	,443	,662	,750	,829
	2	,624	,905	,662	,556	,799	,297	,535
	3	,490	,664	,792	,835	,349	,490	,465
	4	,895	,774	,633	,799	,729	,750	,646
	5	,739	,881	,694	,683	,468	,569	,722
	6	,873	,556	,509	,624	,729	,719	,743
	7	,208	,752	,822	,403	,713	,719	,660
W*	1	-	-	-	-	-	-	-
	2	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-	-	-	-	-
	6	,619	,762	,789	,584	,423	,631	,851
	7	,887	,745	,787	,564	,421	,532	,072
Wh*	1	,392	,889	,644	,464	,886	,698	,669
	2	,696	,734	,760	,934	,582	,924	,760
	3	,354	,277	,748	,716	,729	,669	,362
	4	,765	,469	,448	,529	,913	,475	,716
	5	,739	,765	,582	,913	,566	,495	,582
	6	,934	,282	,732	,352	,547	,529	,475
	7	,589	,392	,640	,739	,546	,858	,738
S*	1	,916	,754	,905	,516	,835	,705	,792
	2	,882	,724	,874	,574	,657	,702	,774
	3	,881	,683	,247	,754	,738	,602	,752
	4	,850	,752	,461	,538	,816	,881	,719
	5	,683	,648	,683	,724	,558	,865	,638
	6	,572	,378	,741	,810	,427	,850	,943
	7	,490	,452	,792	,705	,362	,848	,644

 S^* = Senkronize Permütasyon Testi W^* = Weibull Testi Wh^* = White Testi

F = F Testi

Çizelge 7. Ters Gauss Dağılım 'da ($\mu = 1$ ve $\lambda = 0,01$) farklı testlerin p – değerleri

		$\alpha = 0,05$, $\mu = 1$ ve $\lambda = 0,01$						
		I.(A)	I.(B)	I.(C)	I.(AB)	I.(AC)	I.(BC)	I.(ABC)
		,03	,05	,04	,01	,06	,03	,02
	$n = 7$	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
F	1	,017	,000	,051	,296	,001	,321	,000
	2	,094	,170	,059	,040	,072	,003	,079
	3	,157	,057	,136	,061	,188	,186	,017
	4	,039	,051	,108	,123	,088	,109	,009
	5	,072	,223	,083	,021	,064	,058	,071
	6	,063	,152	,008	,146	,002	,087	,026
	7	,081	,181	,049	,051	,177	,025	,015
W*	1	-	-	-	-	-	-	-
	2	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-	-	-	-	-
	6	,022	,016	,083	,053	,051	,064	,073
	7	,025	,015	,031	,086	,190	,040	,004
Wh*	1	,213	,077	,219	,037	,003	,154	,146
	2	,192	,032	,144	,155	,004	,042	,117
	3	,080	,080	,260	,079	,273	,089	,258
	4	,075	,025	,194	,221	,118	,067	,022
	5	,208	,059	,156	,024	,208	,052	,188
	6	,033	,113	,028	,246	,007	,284	,001
	7	,039	,271	,056	,295	,071	,012	,007
S*	1	,000	,106	,027	,116	,009	,007	,172
	2	,007	,146	,208	,015	,012	,014	,025
	3	,015	,043	,197	,020	,023	,151	,020
	4	,025	,045	,157	,035	,025	,023	,032
	5	,032	,026	,053	,039	,033	031	,107
	6	,036	,124	,030	,040	,048	,131	,156
	7	,040	,096	,008	,100	,051	,048	,040

 S^* = Senkronize Permütasyon Testi W^* = Weibull Testi Wh^* = White Testi

F = F Testi

Çizelge 8. Ters Gauss Dağılım’da ($\mu =1$ ve $\lambda =0,01$) farklı testlerin güç değerleri

		$\alpha = 0,05$, $\mu =1$ ve $\lambda =0,01$						
		I.(A)	I.(B)	I.(C)	I.(AB)	I.(AC)	I.(BC)	I.(ABC)
	$n =7$	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
F	1	,883	,927	,881	,484	,902	,346	,971
	2	,707	,519	,874	,827	,753	,953	,727
	3	,550	,830	,575	,827	,558	,541	,880
	4	,852	,831	,659	,676	,741	,654	,901
	5	,734	,478	,742	,870	,758	,784	,702
	6	,755	,576	,874	,672	,886	,700	,815
	7	,708	,502	,786	,831	,561	,945	,895
W*	1	-	-	-	-	-	-	-
	2	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-
	4	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-	-	-	-	-
	6	,900	,941	,708	,783	,755	,741	,760
	7	,856	,962	,852	,713	,577	,874	,947
Wh*	1	,501	,771	,661	,859	,924	,566	,474
	2	,596	,893	,825	,612	,919	,824	,667
	3	,660	,660	,598	,718	,475	,670	,241
	4	,781	,899	,756	,465	,849	,787	,707
	5	,532	,800	,771	,909	,732	,838	,421
	6	,893	,636	,892	,451	,883	,486	,761
	7	,830	,424	,702	,399	,732	,858	,753
S*	1	,941	,672	,852	,668	,939	,903	,775
	2	,925	,638	,495	,917	,917	,890	,879
	3	,917	,749	,589	,912	,895	,589	,895
	4	,879	,714	,643	,825	,890	,851	,871
	5	,827	,857	,766	,813	,838	,846	,737
	6	,823	,665	,846	,803	,812	,766	,749
	7	,803	,568	,957	,652	,775	,856	,860

S^* = Senkronize Permütasyon Testi

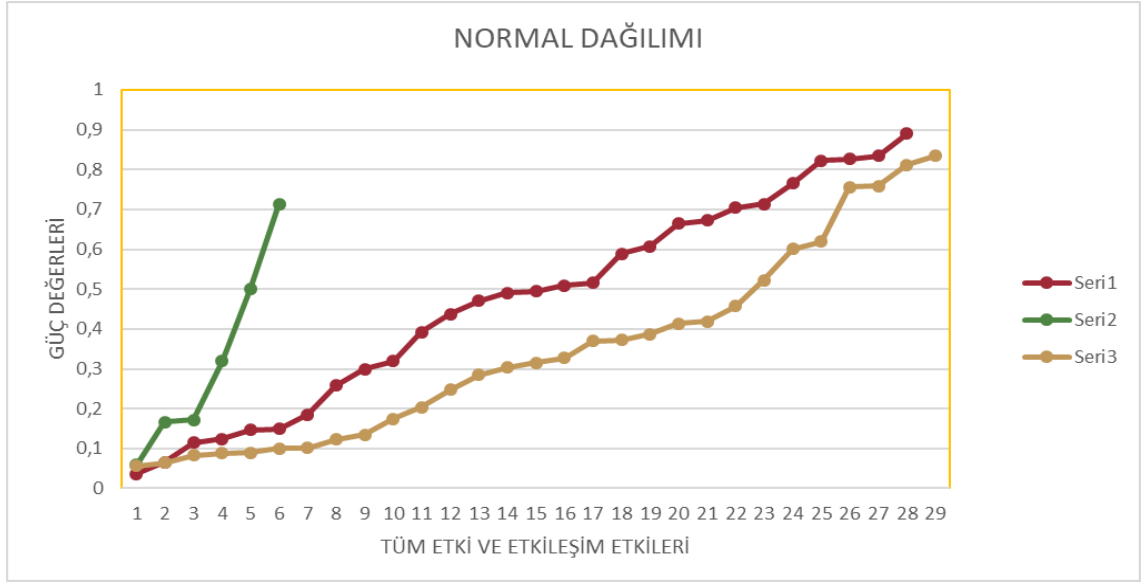
W^* = Weibull Testi

Wh^* = White Testi

F = F Testi

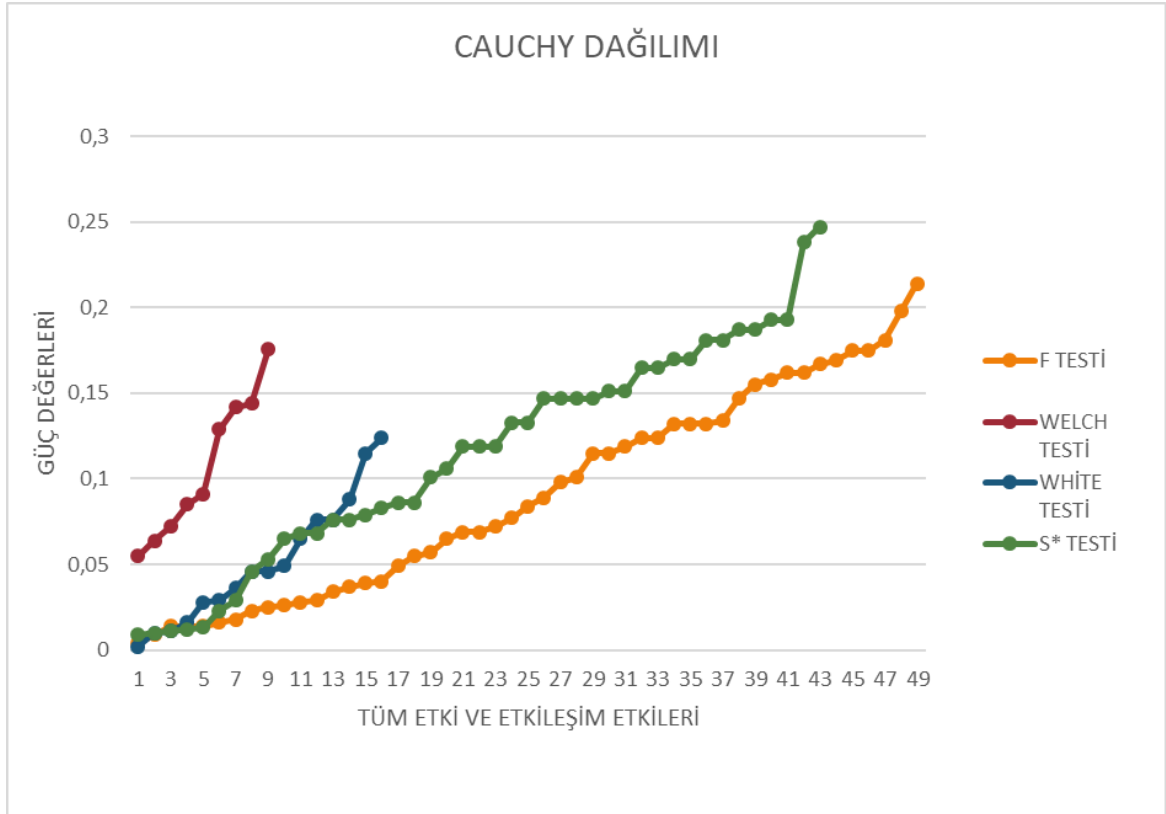
4. TARTIŞMA

R Studio programında rastgele üretilen simülasyon verisinde Normal Dağılım, Cauhy Dağılımı ve araştırmaya konu olan Weibull Dağılımı ve Ters Gauss Dağılımı’nın test güçlerinin oluşturduğu grafikler (Şekil 1 – Şekil 6) aşağıdaki gibidir.



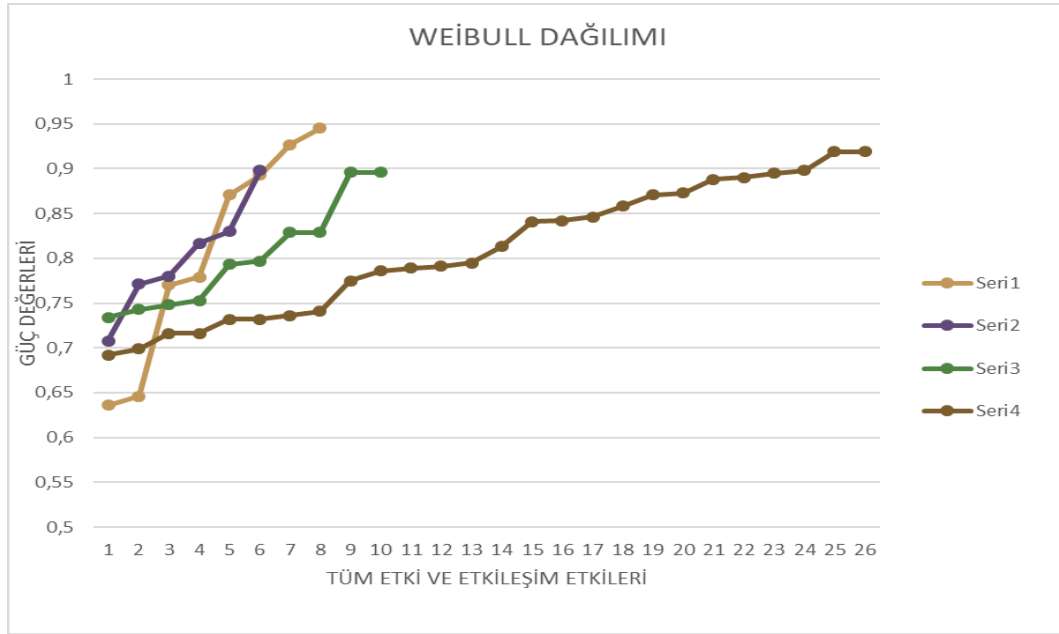
Şekil 1. Tüm etki ve etkileşim etkilerinin bulunduğu Normal Dağılım (0,1) grafiği

Normal dağılım grafiği incelendiğinde bilindiği üzere F testi anlamlı ve değerleri güçlü çıkmıştır. White testi (Wh) için anlamlı hiçbir p-değeri çıkmamıştır. Welch testinin sonuçları ise anlamlı çıkan yani red edilen p-değerleri sayısı az, gücü düşüktür. Üzerinde çalıştığımız S^* testi ise F testi benzeri davranış gösterdiği grafikte görülmektedir.



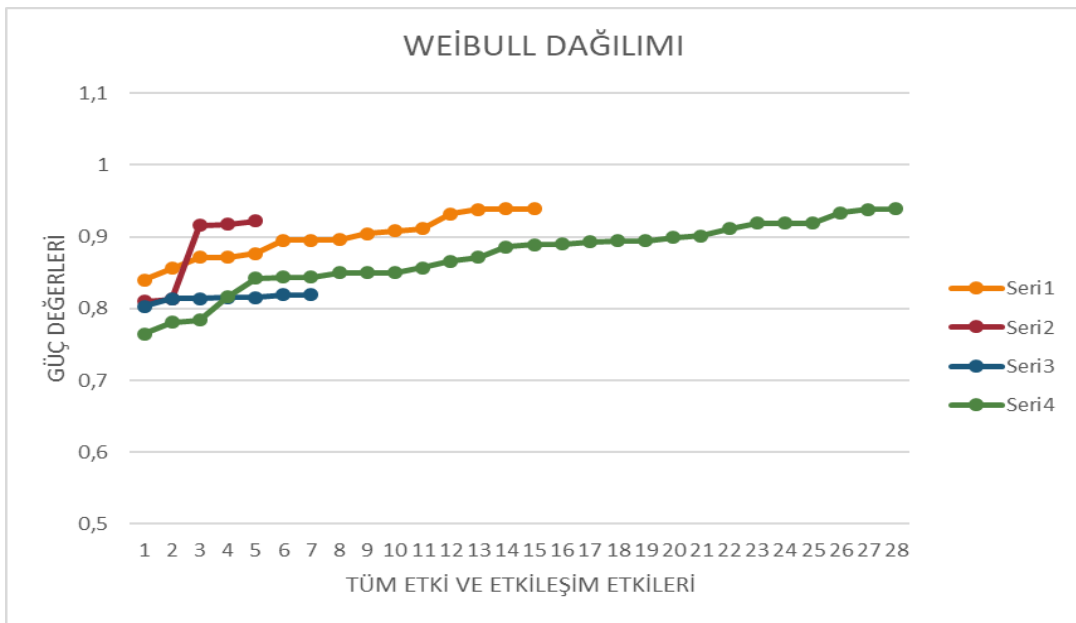
Şekil 2. Tüm etki ve etkileşim etkilerinin bulunduğu Cauchy Dağılım (0,1) grafiği

Cauchy dağılımı grafiği incelendiğinde ise F testi ve S^* testi yine benzer karakter göstermektedir. Red edilen p-değerlerinin sayısı fazla (yani anlamlı çıkan p-değerleri) ve elde edilen güç değerleri yüksektir. Welch testi ve White testi veriyi açıklamada S^* testi ve F testine göre daha geride kalmaktadır.



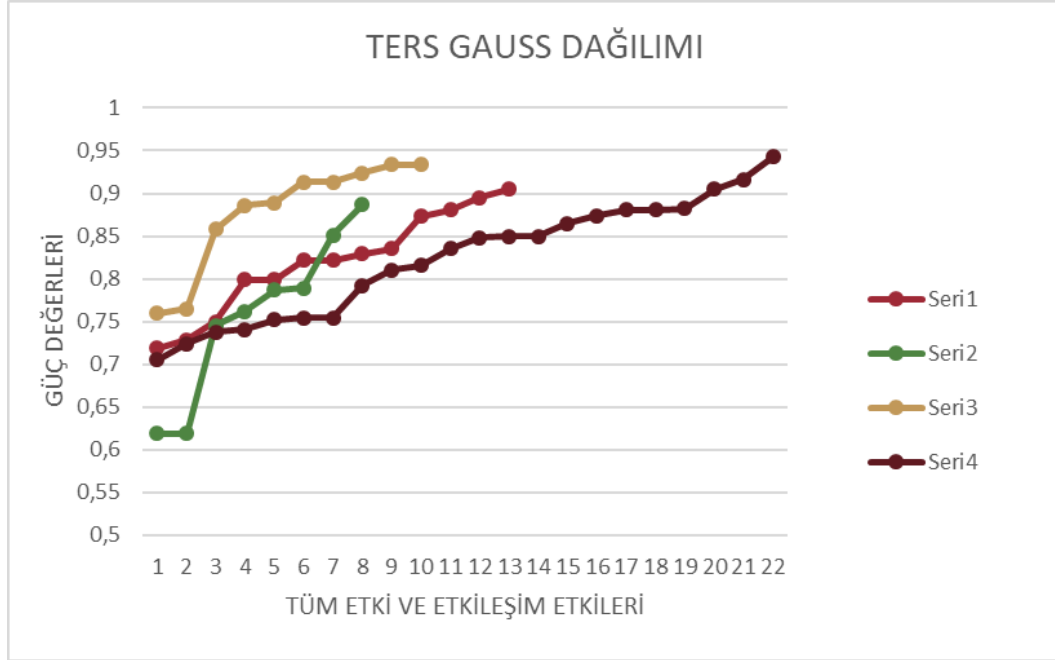
Şekil 3. Tüm etki ve etkileşim etkilerinin bulunduğu Weibull Dağılım ($k=0,25$ ve $\lambda=1$) grafiği

Weibull dağılımı sağa çarpık bir dağılımdır. Weibull dağılımı $k=0,25$ ve $\lambda=1$ parametrelerine sahip iken çizilen grafiği incelediğimizde F testinin normal dağılım dışında anlamlı sonuçlar ve güçlü değerler veremeyeceğini bilinmektedir. Grafikte görüldüğü gibi veri açıklamada F testi üzerinde çalıştığımız S^* testine göre geride kalmaktadır. F testi için grafiğe bakıldığında bazı güç değerleri yüksek red oranı bakımından veri açıklamada geri kalmaktadır. S^* testine bakıldığında $\alpha=0,05$ e göre red oranı ve güç değerleri yüksektir. Veriyi açıklamada yeterlidir. White ve Welch testi ise hem red oranı hemde güç değerleri bakımından, S^* testine göre geri kalmaktadır.



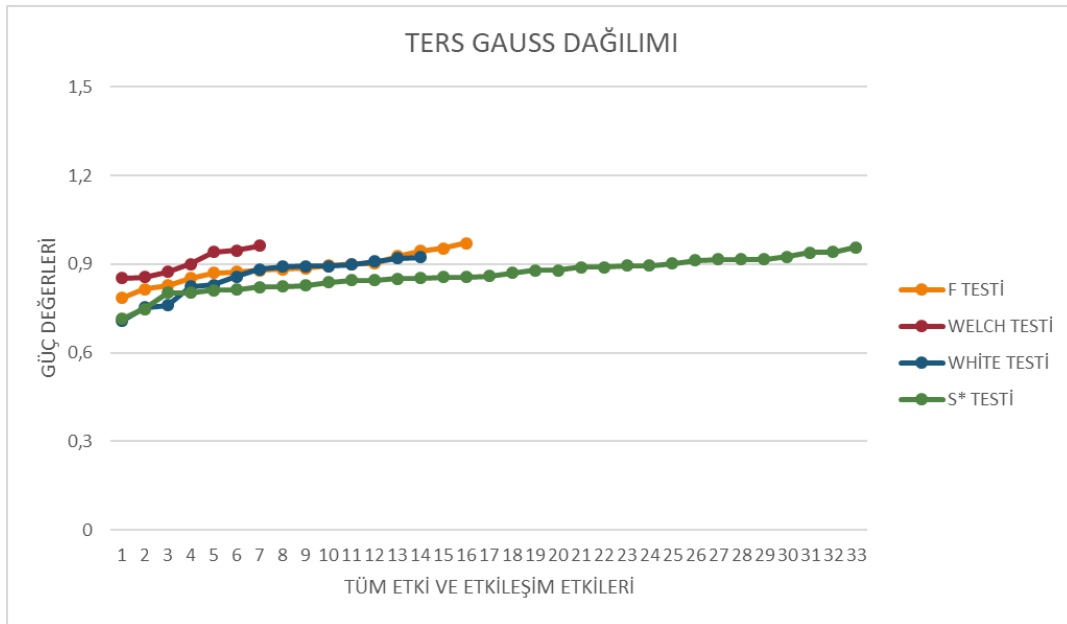
Şekil 4. Tüm etki ve etkileşim etkilerinin bulunduğu Weibull Dağılım ($k=0,5$ ve $\lambda=1$) grafiği

Weibull dağılımı $k=0,5$ ve $\lambda=1$ parametrelerine sahip iken çizilen grafiği incelediğimizde F testi S^* testi benzeri bir karakter göstermektedir. Fakat p-değeri red sayısı bakımından F testi S^* testine göre geride kalmaktadır. S^* testi karakterine bakıldığında ise güç değerleri yüksektir. Veriyi açıklamada etkin olan test istatistiği S^* testidir. White ve Welch testi ise hem red oranı hemde güç değerleri bakımından grafiğe bakıldığında geri kalmaktadır.



Şekil 5. Tüm etki ve etkileşim etkilerinin bulunduğu Ters Gauss Dağılım ($\mu=1$ ve $\lambda=0,05$) grafiği

Ters Gauss dağılımı $\mu=1$ ve $\lambda=0,05$ parametresine sahip iken çizilen grafiği incelediğimizde F testi ve S^* testi karakter olarak benzer özellikler göstermektedir. Fakat yine grafikte görüldüğü üzere etkin olan test istatistiği S^* testidir. Welch ve White testinin veriyi açıklamada etkin olmadığı görülmektedir.



Şekil 6. Tüm etki ve etkileşim etkilerinin bulunduğu Ters Gauss Dağılım ($\mu=1$ ve $\lambda=0,01$) grafiği

Ters Gauss dağılımı $\mu=1$ ve $\lambda=0,01$ parametresine sahip iken çizilen grafiği incelediğimizde karakteristik olarak benzer özellikler gösteriyor gibi görünebilir. Fakat p-değeri red oranı sayısı ve testin gücü bakımından S^* test istatistiği diğer tüm test istatistiklerine göre veri açıklamada etkin ve güçlüdür.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Senkronize permütasyon test istatistiği, S^* ile gösterilmiştir. S^* test istatistiği oluşturulurken, hadamard matrisinin elemanları kullanılmıştır. Hadamard matrisinin satır ve sütunları ortogonal olduğu için 2^3 faktöriyel tasarımlarına uygundur.

Bu çalışmada sürekli yanıtlarla tekrar edilen 2^3 faktöriyel tasarımda sabit etkileri test etmek için kesin permütasyon çözümleri verilmiştir. Tekrarlanan 2^3 tam faktöriyel tasarımda temel etkiler ve etkileşim etkileri için testlerin sonuçları yorumlanmıştır.

Koşullu kurallar çerçevesinde permütasyon testlerini yorumlayarak sıfır hipotez altında yeterli istatistikle, ana etkiler ve 2^3 faktöriyel tasarımlardaki etkileşimler için testler elde ettik. Mevcut çözümün özelliği, testlerin ilişkisiz olması ve eğer hata terimleri normal dağılmışsa, bu tür testlerin bağımsız olmasıdır. Standart parametrik F testlerinin bağımsız olmadığı iyi bilinmektedir. Bu şekilde, permütasyon testi doğal bir gereksinimi karşılar; ayrıca parametrik olmadıkları için dağılım varsayımlarından etkilenmezler.

S^* testi, Welch testi, White testi ve F testleri parametrik karşılıklarına göre asimptotik olarak eşdeğerdirler. Bu durum permütasyon çözümlerini parametrik varsayımlar içinde bile rekabetçi olarak düşünmemizi sağlar.

Yeterli istatistikler altında elde edilen S^* test istatistiği, F testi gibi normal dağılımda da etkin olan testlere göre yeterli, tutarlı ve etkindir. Normal dağılım dışında diğer dağılımlarda etkileri ve etkileşim etkilerini açıklamada testin gücü yüksektir ve yansız olduğu için sonuçları kesindir.

F testi; normal dağılım (0,1) ve cauchy dağılımında (0,1) anlamlı sonuçlar vermiştir. Cauchy dağılımı ağır kuyruklu bir yapıya sahiptir. Buna rağmen p-değerleri red sayısı ve testin gücü yüksek çıkmıştır. Ama S^* testi weibull ve ters gauss dağılımı gibi sağa çarpık dağılımlarda bile p-değeri red sayısı ve testin güç değerleri bakımından F testine göre daha iyi sonuçlar verilmiştir.

Weibull ve Ters Gauss dağılımında F testi sonuçları, etkileri ve etkileşim etkilerini açıklamada testin gücü yer yer yüksek olsa bile p-değeri red oranına bakıldığında S^* testine göre geride kalmaktadır.

Tüm bunlar göz önüne alındığında S^* testi, F testine göre daha güçlü bir testtir. F testi her dağılımda kullanılamayacağı için S^* testi, F testine alternatif olarak sunulabilir ve sonuçları F testi kadar güçlüdür.

Bu çalışmada geliştirilen senkronize permütasyon testi, sağa çarpık dağılımlar altında tekrar eden faktöriyel tasarımlar için incelenmiştir. Ancak araştırma yalnızca belirli dağılımlar (Weibull ve Ters Gauss) ve sınırlı faktör sayısı (2^3 tasarım) ile sınırlıdır. Gelecekteki çalışmalar, daha yüksek faktör sayıları içeren tasarımlara, farklı dağılım türlerine ve daha karmaşık etkileşim yapılarına genişletilebilir. Ayrıca, bu test istatistiğinin gerçek yaşam verileri üzerinde uygulanarak performansının gözlemlenmesi ve parametrik olmayan diğer modern testlerle karşılaştırılması, yöntemin uygulama kapsamını daha da genişletecektir. Yazılım ortamlarında otomatikleştirilmiş modüllerin geliştirilmesi de araştırmacılar için önemli bir katkı sağlayabilir.

YAZARLARIN KATKI ORANLARI

Selda Zengin: Metodoloji, Araştırma, Kavramlaştırma, Simülasyon Uygulamaları, Veri Analizi ve Sonuçların Yorumlanması, Makalenin Yazımı. **Hülya Bayrak:** Danışmanlık, Kontrolörlük, Akademik Yönlendirme, İçerik İnceleme ve Düzenleme.

ÇIKAR ÇATIŞMASI/ÇAKIŞMASI BİLDİRİMİ

Yazarlar arasında çıkar çatışması/çakışması bulunmamaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] Şenoğlu, B., & Acıtaş, Ş. (t.y.). *Faktöriyel tasarımlar – İstatistiksel deney tasarımı*. Cipeç. <https://acikders.ankara.edu.tr/mod/resource/view.php?id=6392>
- [2] Arnold, H. J. (1964). Permutation support for multivariate techniques. *Biometrika*, 51(1–2), 65–70.
- [3] Mansouri, H., & Chang, G. H. (1995). A comparative study of some rank tests for interaction. *Computational Statistics & Data Analysis*, 19(1), 85–96.
- [4] Adams, D. C., & Anthony, C. D. (1996). Using randomization techniques to analyse behavioural data. *Animal Behaviour*, 51(4), 733–738.
- [5] Pitman, E. J. G. (1937). Significance tests which may be applied to samples from any populations. III. The analysis of variance test. *Biometrika*, 29, 322–335.
- [6] Fisher, R. A. (1935). *The design of experiments*. London, England: Oliver and Boyd.
- [7] Fisher, R. A. (1966). *The design of experiments* (1st ed., pp. 1–248). Edinburgh, Scotland: Oliver and Boyd.
- [8] Mewhort, D. J. K., Johns, B. T., & Kelly, M. (2010). Applying the permutation test to factorial designs. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, 42(2), 366–372.
- [9] Pesarin, F. (2001). *Multivariate permutation tests: With applications in biostatistics* (Vol. 240). Chichester, England: Wiley.
- [10] Salmaso, L. (2003). Synchronized permutation tests in 2^k factorial designs. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 32(7), 1419–1437.
- [11] Lee, W. (1975). *Experimental design and analysis*. San Francisco, CA: W. H. Freeman.
- [12] Yıldız Kaçar, D., Gökpınar, F., & Bayrak, H. (2020). Comparative study on synchronized permutation tests in balanced $I \times J$ designs in case of non-normally distributed error terms. *Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 5(2), 125–137.
- [13] Şeker, Ş. E. (2010, 14 Ekim). *Hadamard matrisi*. Ankara: Bilgisayar Kavramları Yayınevi.
- [14] Anderson, M., & ter Braak, C. J. F. (2003). Permutation tests for multi-factorial analysis of variance. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 73(2), 85–113.
- [15] Song, Y. H. (2002). *Examples and constructions of Hadamard matrices* [Master's thesis, [1] Yonsei University]. Department of Electrical and Electronics Engineering, Seoul, Korea.
- [16] Zengin, S., & Bayrak, H. (2023). *Faktöriyel tasarımlarda sağa çarpık dağılımlar için senkronize permütasyon testi* [Yüksek lisans tezi, Gazi Üniversitesi]. Ankara, Türkiye.