

Doğal Türetimin İzinde

Samet Büyükada¹

ORCID: 0000-0003-0725-3396

DOI: 10.55256/TEMASA.1567600

Öz

Doğal türetim, mantıksal çıkarımların sistematik ve adım adım yapılandırılmasını sağlayan, mantıksal bağlaçların kullanımını formalize eden temel bir yöntemdir. Bu yöntem, hem mantıksal düşünmenin gelişimi hem de çıkarım kurallarının doğru bir biçimde anlaşılması için önemli bir araçtır. Bu çalışmada, Türkiye’de lisans düzeyinde kullanılan modern mantık ders kitaplarında doğal türetim konusunun nasıl ele alındığı incelenmektedir. Öncelikle, doğal türetim ile çıkarım ve türetim kavramları arasındaki ilişkiler tartışılarak kavramsal bir netlik sağlanmıştır. Ayrıca, farklı doğal türetim yöntemleri karşılaştırmalı olarak değerlendirilmiş ve ülkemizde yayımlanan kitaplarda tercih edilen yöntemler tespit edilmiştir. Çalışma kapsamında 21 modern mantık kitabı incelenmiş; bu kitapların yarısının doğal türetim konusunu işlediği, diğer yarısının ise çıkarım konusuna odaklandığı görülmüştür. Elde edilen veriler, ülkemizdeki kitaplarda Copi, Kalish-Montague ve Fitch yöntemlerinin tercih edildiğini göstermektedir. Ancak, söz konusu kitaplarda tanıtılan çıkarım kurallarının sayısı ve isimleri farklılık göstermekte ve bazı kitaplarda verilen alıştırma sorularının çözümlerine yer verilmemektedir. Bu durumlar, öğrencilerin konuyu daha iyi anlaması adına kitaplarda eksiklikler olarak belirlenmiştir. Bu eksikliklerin giderilmesi için, doğal türetim konusunun modern mantık kitaplarında daha sistematik bir şekilde, çözümlü alıştırma sorularla ve farklı sistemler arasındaki sentaktik farkların öğretilmesi gerekmektedir. Sonuç olarak, bu çalışma, doğal türetim konusunun hem mantık tarihindeki hem de ülkemizde yayımlanan kitaplardaki yerini ayrıntılı bir şekilde inceleyerek, konunun daha iyi öğrenilmesi için yöntemle ilişkin öneriler sunmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Doğal Türetim, Çıkarım, Çıkarım Kuralları, Mantıksal Akıl Yürütme, Mantık Kitapları.

In Pursuit of Natural Deduction

Abstract

Natural deduction is a fundamental method that enables the systematic and step-by-step construction of logical inferences, formalizing the use of logical connectives. This method is an important tool for both the development of logical thinking and the correct understanding of inference rules. In this study, the treatment of the topic of natural deduction in modern logic textbooks used at the undergraduate level in Turkey is examined. First, the relationships between the concepts of natural deduction, inference, and derivation are discussed to provide conceptual clarity. Additionally, different natural deduction methods are comparatively evaluated, and the methods preferred in textbooks published in Turkey are identified. 21 modern logic textbooks are analyzed within the scope of the study; half of which addressed the topic of natural deduction, while the other half focused on inference. The findings indicate that the methods of Copi, Kalish-Montague, and Fitch are preferred in the textbooks. However, while the inference rules introduced in these textbooks are explained with examples, the number and names of the rules vary, and some textbooks do not provide solutions to the exercises given. These issues have been identified as shortcomings in the textbooks, hindering students' full comprehension of the topic. To address these deficiencies, natural deduction should be presented more systematically in modern logic textbooks, with solved exercises and instruction on the syntactic differences between various systems. In conclusion, this study provides a detailed examination of the place of natural deduction in both the history of logic and in textbooks published in Turkey, offering suggestions for improving the understanding of this method.

Keywords: Natural Deduction, Derivation, Rules of Inference, Reasoning, Logic Textbooks.

¹ Dr. Öğr. Üyesi, Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, İlahiyat Fakültesi. samet.buyukada@erdogan.edu.tr

Giriş

Mantık, düşüncenin geçerliliğini ve tutarlılığını güvence altına almayı amaçlayan temel bir disiplindir. Mantıksal akıl yürütme, doğru düşünme süreçlerinin anlaşılmasını sağlamakla birlikte, bu süreçlerin sistematik ve analitik bir şekilde incelenmesine de olanak tanır. Bu bağlamda, doğal türetim (*natural deduction*) yöntemi, mantık disiplininin en önemli araçlarından biri olarak öne çıkmaktadır. Doğal türetim, mantıksal çıkarımların adım adım nasıl gerçekleştirileceğini göstererek, mantıksal bağlaçların ve çıkarım kurallarının kullanımını formalize eder. Sadece önermeler ve niceleme mantığı içerisinde değil, modal mantık gibi farklı mantık sistemlerinde de bir denetleme yöntemi olarak kullanılmasına rağmen bu yönteminin Türkiye'deki lisans düzeyindeki mantık kaynaklarındaki yeri tartışmalıdır. Bunun için şu iki sayısal veriye hızlıca bakmak yeterlidir: 1) Modern mantık başlığı ya da içeriği taşıyan 30'a yakın kitaptan 21 tanesinde çıkarım konusuna değinilmektedir. 2) Doğal türetim konusunun işlendiği 10 kitabın ise 7 tanesi Türkçedir. Aşağıda ayrıntılarına yer vereceğimiz, böylesine derinliği bulunan bir konuda öğrencilerin faydalanabileceği Türkçe kaynak sayısı 7'dir. Doğal türetim yöntemine yönelik kaynak azlığı, öğrencilerin konuyu anlamasını olumsuz etkileyebilir ve mantık kurallarının derinlemesine anlaşılmasını zorlaştırabilir.

Bu çalışmanın amacı, Türkiye'de yayımlanan modern mantık ders kitaplarının doğal türetim yöntemine yaklaşımlarını ve bu yöntemin kitaplarda nasıl ele alındığını kapsamlı bir şekilde incelemektir. Öncelikle, doğal türetim ile çıkarım ve türetim kavramları arasındaki ilişkiler ayrıntılı bir şekilde ele alınarak kavramsal netlik sağlanmaya çalışılacaktır. İncelememiz, doğal türetim ve çıkarım kavramlarının bazı eserlerde birbirinin yerine kullanıldığını göstermektedir. Ancak, doğal türetim yalnızca bir çıkarım sistemi olup, her çıkarımın doğal türetim olmadığı göz ardı edilmemesi gerekir. Literatüre yönelik kavram incelemesinin ardından, doğal türetim yönteminin mantık tarihindeki gelişimi ve aralarındaki farklar, pedagojik bir bakış açısıyla mukayese edilerek ele alınacaktır. Sonraki bölümde, Türkiye'de yayımlanan mantık kitaplarının incelenmesine odaklanılacaktır. Doğal türetim konusunun ele alındığı 10 kitabın ayrıntılı incelemesi, bu kitaplarda tercih edilen türetim yöntemlerinin, konunun önermeler ve niceleme mantığında ele alınışının, çıkarım kurallarının uygulanışının ve konuya yönelik alıştırmaların değerlendirilmesini kapsamaktadır. Çalışmamız, doğal türetim konusunun Türkiye'deki mantık literatüründe nasıl daha fazla yer alabileceğine ve öğrencilerin bu konuyu nasıl daha etkili bir şekilde öğrenebileceğine dair önerilerle sonlandırılacaktır.

1. Mantıkta Doğal Türetim ve İlgili Kavramlar

Mantıkta, çıkarım süreçlerinin yapısal ve işlevsel boyutlarını belirleyen çeşitli kavramlar bu alanın temel taşlarını oluşturur. Doğal türetim, türetim, dedüksiyon ve çıkarım kavramları, mantıksal akıl yürütmenin en kritik unsurlarıdır ve her biri, argümanların geçerliliğini ve doğruluğunu ortaya koyma sürecinde önemli bir rol oynar. Bu kavramların doğru anlaşılması, mantıksal sistemlerin işleyişini derinlemesine kavrayabilmek için vazgeçilmezdir. Her bir kavram mantıksal süreçlerin farklı bir aşamasını temsil ederek, birbirini tamamlayan işlevler sunar. Bu terimler, her ne kadar birbirine yakın gibi görünse de birbirleri yerine kullanılmaları terminolojik belirsizliklere yol açmaktadır. Bunun temel sebebi Türkçe kavramsal tercümenin tam olarak yerleşmemiş olmasıdır. Zira İngilizce *natural deduction* teriminin Türkçedeki en uygun karşılığı “doğal sonuç çıkarma” ya da “doğal talil” olmalıdır. “Türetim” teriminin tam karşılığının *derivation* olduğu ve “doğal türetim” teriminin *natural derivation* değil, *natural deduction* için kullanıldığı göz önünde bulundurulduğunda, Türkçe mantık literatüründe bu terimlerin, her ne kadar yanlış olmasa da, tam anlamıyla açık bir şekilde kullanılmadığı görülecektir. Literatüre yerleşmiş “doğal türetim” ifadesini değiştirmemek adına, bu yazıda aynı terminoloji kullanılmaya devam edilecektir. Dolayısıyla öncelikle terimlerimizi netleştirmek faydalı olacaktır:

Tanım 1 Doğal Türetim (*Natural Deduction*): Doğal dedüksiyon, gerçek akıl yürütme kalıplarına göre modellenmiş bir tür mantık formel sistemidir. Genellikle, doğal dedüksiyon sistemlerinde aksiyom bulunmaz ve yalnızca

çıkarm kurallarından oluşur.²

Tanım 2 Türetim (Derivation): Bir çıkarımın sonucunun öncüllerden salt çıkarım kuralları yardımıyla sonlu sayıda adımda çıkarılması işlemi.³ “Bir türetme (veya tümdengelim), biçimsel bir sistem içerisinde yer alan ve dizideki her bir ifadenin ya bir aksiyom, ya bir varsayım ya da bir veya daha fazla önceki ifadeye bir çıkarım kuralının uygulanmasının sonucu olduğu sonlu bir ifadeler dizisidir. Son ifade türetilen argümanın sonucudur ve her varsayım türetilen argümanın bir öncülüdür.”⁴

Tanım 3 Dedüksiyon (Deduction): Geçerli bir çıkarımın sonucunu, öncüllerden çıkartma işlemi.⁵

Tanım 4 Çıkarım (Inference): Verilerden sonuç çıkartma işlemi.⁶ Çıkarım, akıl yürütücünün bir argümanın öncüllerine olan inançtan argümanın sonucuna olan inanca geçtiği bir eylemdir.⁷

Cook, doğal türetim (*natural deduction*) kavramını doğrudan tanımlayarak onu aksiyom kullanılmadan sadece çıkarım kurallarından oluşan formel bir mantık sistemi olduğunu belirtir. Grünberg’in ise bu kavrama doğrudan bir tanım getirmemesine rağmen, onun *Mantık Terimleri Sözlüğü*’nde “*system of logic with natural deduction*” maddesinin Türkçeye “doğal türetimle mantık dizgesi” olarak tercüme edildiğini görüyoruz. Bu durum, Grünberg’in *natural deduction* terimini “doğal türetim” olarak kullanma eğiliminde olduğunu göstermektedir.⁸ Türetim ve dedüksiyon kavramlarına baktığımızda, Cook bu iki kavramı eş anlamlı olarak kullanır. Esasen Grünberg’in de iki kavramı eş anlamlı kullanmasına ve tümdengelim (dedüksiyon) maddesinde eş anlamlı kavram olarak türetim yer almamasına karşın, türetim maddesinde bu terim için dedüksiyon eş anlamlı olarak verilmiştir. Türetim/dedüksiyon tanımında Cook aksiyomların kullanılabileceğini belirtirken, Grünberg türetim için sadece çıkarım kurallarının kullanılabileceğine işaret eder. Bu açıdan baktığımızda Grünberg’e göre türetim (*derivation*) doğal türetim (*natural deduction*) manasına gelebilir. Ancak Cook’un türetim ve doğal türetim tanımlarına tekrar bakacak olursak türetim (*derivation*) kavramının doğal türetimden (*natural deduction*) daha geniş bir kavram olduğunu görebiliriz. Son olarak, çıkarım kavramına baktığımızda Cook ve Grünberg’in tanımlarının türetim ve doğal türetim ile teknik olarak benzediğini ancak daha kapsamlı bir işlemi ifade ettiğini görüyoruz. Nitekim hem türetim hem de doğal türetim çıkarım kuralları kullanılarak yapıldığını göz önünde bulundurursak çıkarımın en genel anlamda öncüllerden sonuç elde etme yöntemi olduğunu söyleyebiliriz.

İlerleyen bölümlerde göstereceğimiz üzere, bazı modern mantık kitaplarında doğal türetim ve çıkarım kavramlarının eş anlamlı olarak kullanıldığını görmekteyiz. Bu türden bir kullanımın ancak ve ancak doğal türetili konu edinen bir metinde ya da derste kullanımının hata olmayacağı kanaatindeyiz. Diğer türlü yukarıdaki tanımlarda da açıkça gösterildiği üzere çıkarım, bir sonuç çıkartma işlemi en genel anlamda ifade eder. Bu sistemin içerisine formel olduğu kadar formel olmayan sistemler de dâhil edilebilir. Benzer şekilde türetim de genel olarak bir formel sistemde sonuçların öncüllerden çıkarım kuralları yardımıyla elde edilmesi sürecini ifade eder ve mantıktaki tüm türetimleri kapsar (aksiyomatik türetim/*axiomatic derivation*, sıralı hesaplama/*sequent calculus* gibi). Doğal türetim ise türetim kavramının bir alt kümesi olarak özel bir türetim yöntemini temsil eder. Dolayısıyla, çıkarım kavramı türetimden, türetim de doğal türetimden daha geneldir. Doğal türetim, türetim sürecinin belirli bir yöntemle hiçbir aksiyom içermeyen gerçekleştirilmesidir. Özetle ifade etmek gerekirse, sadece çıkarım kuralları kullanılarak aksiyom içermeyen bir türetim işlemi gerçekleştirildiğinde, doğal türetim yöntemiyle bir akıl yürütme yapılmış olur. Bununla

² Roy T. Cook, *A Dictionary of Philosophical Logic* (Edinburgh: Edinburgh Univ Pr, 2009), 197.

³ Teo Grünberg vd., *Mantık Terimleri Sözlüğü* (Ankara: METU Press, 2003), 140.

⁴ Cook, *A Dictionary of Philosophical Logic*, 88.

⁵ Grünberg vd., *Mantık Terimleri Sözlüğü*, 133.

⁶ Grünberg vd., *Mantık Terimleri Sözlüğü*, 24.

⁷ Cook, *A Dictionary of Philosophical Logic*, 151.

⁸ Grünberg vd., *Mantık Terimleri Sözlüğü*, 40.

birlikte, her biri kendine özgü kuralları ve biçimsel yapıları bulunan birbirinden farklı doğal türetim sistemleri mevcuttur. Türkiye'deki mantık kitaplarının incelenmesine geçmeden bu sistemin yapısal tahlilini yapmamız faydalı olacaktır. Böylelikle söz konusu kitaplarda yer alan doğal türetim sisteminin hangi modeli temel aldığı ya da hangi kuralları açıkladığı gibi temel ve teknik bilgileri anlamak daha kolay olacaktır.

2. Doğal Türetime Giriş

2.1. Denetleme Yöntemleri ve Doğal Türetim

Semantik ve sentaktik olmak üzere iki temelde uygulanan mantıksal çıkarım yöntemleri, doğru ve tutarlı sonuçlara ulaşmak için kullanılır. Semantik çıkarım yöntemleri, önermelerin anlamlarını ve doğruluk değerlerini analiz ederek çıkarımların geçerliliğini belirlerken, sentaktik çıkarım yöntemleri ise çıkarımların biçimsel kurallar ve sembollerin dizilimine dayanır. Semantik çıkarım yöntemleri, bir önermenin tüm mümkün doğruluk değerlerini sistematik bir şekilde inceleyerek hangi durumlarda doğru veya yanlış olduğunu ortaya koyar. Bu yöntemler arasında doğruluk tabloları ve çözümleyici çizelgeleri sayabiliriz. Doğruluk tabloları, tüm mümkün durumları değerlendiren önermelerin doğruluk değerlerini belirler ve böylece çıkarımların geçerlilik, tutarlılık, eş değerlilik gibi denetlemesinin yapılmasına olanak sağlar. Benzer denetlemelerin yapılabildiği çözümleyici çizelgeler, önermelerin tutarlılığını ve geçerliliğini test etmek için dallanan bir ağaç yapısı kullanır. Kuralların uygulanışı açısından sentaktik bir yöntem gibi görünse de, işlem sonunda dallar üzerinde yapılan doğruluk değeri atamaları, bu yöntemin semantik yönünü ortaya koyar.

Buna karşılık, sentaktik çıkarım yöntemleri, mantıksal çıkarımların biçimsel kurallar çerçevesinde yapılmasını esas alır. Bu yöntemlerde, önermelerin yapısı ve sembollerin kullanımı kurallara uygun olmalıdır. Sentaktik yöntemlerde doğruluk, anlamdan ziyade kuralların doğru bir şekilde uygulanışına bağlıdır. Bu yaklaşım, mantıksal çıkarımların mekanik ve sistematik bir şekilde doğrulanabilmesini sağlar. Sentaktik çıkarım yöntemleri arasında çeşitli türetim sistemleri bulunmaktadır:

1. Aksiyomatik Sistemler: Bu sistemler, belirli aksiyomlar ve çıkarım kuralları üzerinden işlem yapar. Tüm teoremler, bu aksiyomlardan ve kurallardan türetilir. Aksiyomatik sistemler, mantığın formalizasyonunda önemli bir rol oynar ancak bazen karmaşık ve sezgisel olmayan bir yapı sergileyebilir. Bu sistem, özellikle David Hilbert ve Wilhelm Ackermann'ın çalışmalarında görülür.⁹
2. Sıralı hesaplama: Gerhard Gentzen tarafından geliştirilen bu yöntem, çıkarımların ağaç yapıları içinde düzenlenmesini sağlar. Sıralı hesaplama, her adımda öncüller ve sonuçlar arasında bir ilişki kurarak mantıksal argümanların daha sistematik ve yapısal bir şekilde analiz edilmesine olanak tanır. Bu yöntem, özellikle mantıksal sistemlerin tutarlılığını ve tamliğini incelemede etkilidir.¹⁰
3. Doğal Türetim: Mantıksal çıkarımların sezgisel ve anlaşılır bir şekilde yapılmasını sağlayan bu yöntem 1930'lar da geliştirilmiştir. Doğal türetim, mantıksal bağlaçlar için tanıtma ve eleme kuralları kullanarak, gerçek hayattaki akıl yürütme süreçlerini yansıtır. Bu yaklaşım, öğrencilerin mantıksal düşünme becerilerini geliştirmede etkili bir araçtır ve mantık eğitiminde önemli bir yer tutar.¹¹

Görüleceği üzere verili önermeler, önermeler arası ilişkiler ya da argümanlar için doğruluk, yanlışlık, tutarlılık veya geçerlilik denetlemeleri farklı yöntemlerle gerçekleştirilebilir. Bu yöntemler arasında doğal türetim Gentzen'in ifadesiyle matematiksel ispatlarda yer alan gerçek mantıksal muhakemeyi mümkün olduğunca doğru bir şekilde

⁹ David Hilbert ve Wilhelm Ackermann, *Grundzüge der Theoretischen Logik* (Berlin Heidelberg, 1972).

¹⁰ Gerhard Gentzen, *The Collected Papers of Gerhard Gentzen* (Amsterdam: North-Holland Pub. Co., 1969), 68-131.

¹¹ Richard Zach, *Sets, Logic, Computation: An Open Introduction to Metalogic* (Independently published, 2021), 150-152.

yansıtan bir biçimselleştirmedir.¹² Farklı mantıkçılar tarafından insan aklının düşünüş şekline en yakın yöntem olduğu belirtilen doğal türetim yöntemi, aksiyom içermemesi sebebiyle çözümlenmesi istenen meselenin kendi içinde taşıdığı öğelerle bir sonuca ulaşılması beklentisi taşır.¹³ Bu özelliği ile doğal türetim yönteminin öğrencilerin mantıksal düşünme becerilerini geliştireceği ve analitik çıkarım yeteneklerine katkı sağlayacağı yorumunu yapmak mümkündür. Nitekim öğrenciler sorun ile yüzleştiklerinde, çözüm verili önermedeki eklemlere ya da niceleyicilere uygulanacak çıkarım kurallarının tatbikinde gizlidir. Çıkarımların yapılandırılmasında tutarlılık ve doğruluğu ön plana çıkaran bu yöntem, öğrencilerin mantıksal argümanlar oluşturma süreçlerinde daha bilinçli ve isabetli kararlar almalarına yardımcı olacaktır.

Dummett'in doğal türetim hakkındaki görüşleri, bu yöntemin mantıksal çıkarımları hem anlamaya hem de gerekçelendirmeye yönelik ideal bir sistem olduğu düşüncesiyle örtüşür. Ona göre, doğal türetim, mantıksal yasaların nasıl çalıştığını yalnızca göstermeyip aynı zamanda bu yasaların doğru kabul edilme sebeplerini de açıklayan bir araçtır.¹⁴ Dummett, özellikle Gentzen'in giriş ve çıkış kurallarının uyum içinde çalıştığını ve böylece mantıksal bağlaçların anlamını pekiştirdiğini savunur. Bu sistem, önermeler arasındaki ilişkilerin çözümlenmesinde aksiyomatik bir yapıdan ziyade, çıkarımların yerel olarak türetildiği bir süreç sunar. Bu da öğrencilerin mantıksal düşünme süreçlerini daha derinlemesine kavramalarını sağlar ve onların muhakeme yeteneklerini geliştirir. Dummett, bu bağlamda, doğal türetim gerek öğretim gerekse mantıksal analiz açısından vazgeçilmez bir yöntem olduğunu vurgular.

Doğal türetim öğrencilere uygulamadaki faydası üzerine yazdıkları yazıda Viviane Durand-Guerrier ve Gilbert Arsac, bu yöntemin özellikle niceleyicilerin kullanımını tahlil ve kontrol etmek için güçlü bir mantıksal çerçeve sunduğunu vurgulamaktadır.¹⁵ Özellikle matematiksel çıkarımlarda, doğal türetim, niceleyicilerin doğru bir şekilde ele alınmasına olanak sağladığını ve öğrencilerin bu konudaki hatalarını anlamalarına yardımcı olduğunu belirtirler. Çalışmalarında, matematik öğretmenlerinin, niceliksel ifadelerle yapılan hataları önlemek için "bağımlılık kuralı"nın (*dependence rule*) önemine dikkat çektiğini ve doğal türetim yönteminin, niceleyicilerin doğru kullanımını kontrol altına alarak bu hataları tespit etmekte etkili bir araç olduğunu vurgularlar. Durand-Guerrier ve Arsac, mantıksal çıkarımların yapılandırılmasında hem sentaktik hem de anlamsal boyutların bir arada ele alındığını ve doğal türetim, çıkarımların geçerliliğini daha kapsamlı bir şekilde denetlemede etkili olduğunu belirtir. Öğrencilerin bu yöntemle matematiksel mantığı daha iyi kavrayacaklarını ve çıkarımlarını daha bilinçli bir şekilde yapılandıracaklarını savunurlar. Doğal türetim, hem öğretimde hem de matematiksel analizlerde önemli bir rol oynar, çünkü hem adım adım çıkarım süreçlerini hem de değişkenlerin mantıksal statüsündeki değişiklikleri kontrol eder.

Kısaca ifade edilirse, doğal türetim avantajı, mantıksal argümanların oluşturulmasında ve değerlendirilmesinde sezgisel bir yaklaşım sunmasıdır. Bu yöntem, öğrencilerin mantıksal bağlaçların ve çıkarım kurallarının kullanımını daha iyi anlamalarını sağlar. Böylece, öğrenciler sadece mantıksal doğrulama yapmayı değil, aynı zamanda kendi mantıksal argümanlarını oluşturmayı ve eleştirel bir bakış açısıyla değerlendirmeyi öğrenirler. Sonuç olarak, doğal türetim yöntemi, mantıksal sistemlerin öğreniminde ve uygulanmasında temel bir araçtır. Özellikle öğrencilerin analitik ve yapılandırılmış düşünme becerilerini geliştirmeleri açısından doğal türetim önemli katkılar sunmaktadır. Doğal türetim eğitimdeki bu faydaları göz önüne alındığında, mantık eğitiminde daha geniş bir yer alması gerektiği açıktır.

¹² Gentzen, *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, 74.

¹³ Francis Jeffry Pelletier ve Allen P. Hazen, "A History of Natural Deduction" in *Handbook of the History of Logic*, ed. Dov M. Gabbay, Francis Jeffry Pelletier ve John Woods, c. 11, Logic: A History of its Central Concepts (North-Holland, 2012), 341-414.; Patrick Suppes, *Introduction to Logic* (Princeton: Van Nostrand/Reinhold Press., 1957), viii.

¹⁴ Michael Dummett, *The Logical Basis of Metaphysics* (Cambridge: Harvard University Press, 1991), 250.

¹⁵ Viviane Durand-Guerrier ve Gilbert Arsac, "An Epistemological and Didactic Study of a Specific Calculus Reasoning Rule," *Educational Studies in Mathematics* 60, sayı: 2 (Ekim 2005): 149-72. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-5614-y>

2.2. Farklı Doğal Türetim Sistemleri

Bu yazıda ele alınan doğal türetim ile 1930'larda birbirlerinden bağımsız olarak yakın tarihlerde Stanisław Jaśkowski (ö. 1965) ve Gerhard Gentzen (ö.1945) tarafından geliştirilen sistemler ifade etmektedir. Her iki düşünür de mantıksal çıkarımların daha şeffaf ve izlenebilir bir şekilde yapılandırılmasını sağlayan, aksiyom içermeyen bir sistem tasarlamışlardır. Bu yöntem, o dönemde aksiyomatik sistemlerin sınırlamalarına bir seçenek olarak geliştirilmiş olsa da John Corcoran, Aristoteles'in kıyas sisteminin de modern anlamda bir doğal türetim sistemi olarak değerlendirilmesi gerektiğini savunmuştur.¹⁶ Corcoran'a göre, Aristoteles'in mantığı, aksiyomlara dayanmaksızın, yalnızca çıkarım kurallarıyla işlemekte ve bu özelliğiyle Jaśkowski ve Gentzen'in geliştirdiği doğal türetim yöntemleriyle benzerlik göstermektedir. Aristoteles, mantıksal çıkarımları tümdengelimli bir yapıda kurarken, çıkarımlarını belirli kurallar çerçevesinde, varsayımlar üzerinden adım adım yapılandırmıştır. Bu nedenle, Corcoran, Aristoteles'in kıyasının, aksiyomlara dayalı diğer mantık sistemlerinden farklı olduğunu ve modern doğal türetim sistemlerinin öncüsü olarak kabul edilmesi gerektiğini öne sürmüştür. Corcoran'ın bu yorumuna karşı çıkan bazı düşünürler de vardır. Jan Łukasiewicz (ö. 1956), Aristoteles'in kıyas sistemini aksiyomatik bir sistem olarak değerlendirmiş ve onu matematiksel bir model gibi görmüştür.¹⁷ Łukasiewicz'e göre, Aristoteles'in mantığı, aksiyomlar üzerinden işlemiş ve tam anlamıyla bir çıkarım sistemi olabilmesi için daha sonra geliştirilen önermeler mantığı gibi sistemlerin altyapısına ihtiyaç duymuştur. Buna karşın Corcoran, bu yoruma katılmayarak, Aristoteles'in sisteminin kendi başına yeterli olduğunu ve aksiyomatik bir sistem olmaktan ziyade doğal türetim ilkelerine dayandığını savunmuştur.¹⁸

1930'larda Jaśkowski ve Gentzen'in geliştirdikleri sistemler mantığın biçimsel bir kimlik kazanmasında önemli bir rol oynamıştır. Özellikle matematiksel türetimler açısından geniş kabul gören bu sistemler, çıkarım kurallarına dayanan sezgisel bir yaklaşımı benimser. Jaśkowski, 1926'da Łukasiewicz'in seminerlerinde matematikçilerin ispatlarını aksiyomatik bir teoriye dayandırmadıkları, aksine "keyfi varsayımlar" yaparak sonuçlara ulaştıkları yönündeki gözlemlerinden etkilenerek 1927'de Lvov'da düzenlenen Birinci Polonya Matematik Kongresi'nde, mevcut aksiyomatik sistemlerle aynı sonuçları veren bir çıkarım sistemi geliştirdiğini sunmuştur.¹⁹ Her ne kadar doğal türetim bu ilk nüshasına yönelik sahih bir kayıt olmasa da 1934'teki ilgili yazısında doğal türetim yönteminin ana hatlarını açıkça göstermiştir. Jaśkowski'nin sistemi, koşullu ispat ve saçmaya indirgeme yöntemlerini içermekteydi ve aksiyomlara ihtiyaç duymadan, dönemin aksiyomatik sistemlerine eşdeğer sonuçlar veriyordu.²⁰ Gentzen'in geliştirdiği doğal türetim sistemi ise klasik aksiyomatik sistemlerden farklı olarak, mantıksal çıkarımları daha sezgisel bir biçimde modellemiştir. Bu sistemde, çıkarımlar belirli kurallara göre yapılır ve bu kurallar, genellikle mantıksal operatörlerin tanıtım (giriş / *introduction*) ve eleme (çıkış / *elimination*) kuralları olarak tanımlanır.²¹ Gentzen'in yaklaşımı, çıkarımların adım adım izlenebilir olmasını sağlarken, doğal türetim sezgisel doğasını güçlendirir. Misal, "ve" ($\wedge$) bağlacı için tanıtım kuralı iki önermenin doğru olduğunu varsayarken, eleme kuralları bu önermelerin her birine ayrı ayrı ulaşılmasını sağlar. Gentzen ve Jaśkowski'nin doğal türetim sistemleri, aksiyomatik sistemlerin karmaşıklığını gidererek hem mantıksal çıkarımların teorik sağlamlığını artırmış hem de bu çıkarımların pratikte daha kolay ve anlaşılır bir şekilde uygulanmasını sağlamıştır.

Doğal türetim gelişimine katkıda bulunan birkaç isimden daha bahsetmek yerinde olacaktır. Bunlardan ilki Frederic B. Fitch (ö. 1987), doğal türetim sistemlerinin gelişiminde önemli bir yere sahiptir. 1952'de yayımladığı

¹⁶ John Corcoran, "Aristotle's Natural Deduction System" in *Ancient Logic and Its Modern Interpretations: Proceedings of the Buffalo Symposium on Modernist Interpretations of Ancient Logic*, 21 and 22 April, 1972, ed. John Corcoran (Dordrecht: Springer Netherlands, 1974), 85-131.

¹⁷ Jan Łukasiewicz, *Aristotle's Syllogistic From the Standpoint of Modern Formal Logic* (Oxford: Clarendon Press, 1951), 80.

¹⁸ Corcoran, "Aristotle's Natural Deduction System," 88-93.

¹⁹ Pelletier ve Hazen, "A History of Natural Deduction," 347-349.

²⁰ Andrzej Indrzejczak, *Natural Deduction, Hybrid Systems and Modal Logics*, 1st bs (Springer Publishing Company, Incorporated, 2010), 29-32.

²¹ Pelletier ve Hazen, "A History of Natural Deduction," 401.

Symbolic Logic kitabıyla, doğal türetim yöntemini görsel bir formda kullanarak öğretimsel bir yenilik getirmiştir. Bu yaklaşım, Jaśkowski'nin daha önce önerdiği kutu yöntemi üzerine kurulmuştur. Fitch, doğal türetim sistemini daha anlaşılır kılmak için, hipotezlerin altına çizgi çekerek ve grafiksel bir yapı oluşturarak sezgisel bir ispat yöntemi sunmuştur. Bu, özellikle öğretimde yaygın olarak kullanılmıştır ve günümüzde "Fitch yöntemi" olarak anılmaktadır.²² İkinci olarak, Dag Prawitz (d. 1936) 1965'te yayımlanan *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study* adlı eserinde, doğal türetimin metateorik analizini yapmış ve normalizasyon teoremini kanıtlamıştır. Bu teorem, her doğal türetim ispatının *normal biçime* indirgenebileceğini ve bu sürecin sezgisel mantık için temel olduğunu göstermiştir. Prawitz'in katkısı, özellikle türetim kurallarının belirli mantık operatörleri için nasıl uygulanacağını açıklamak olmuştur.²³ Patrick Suppes (ö. 2014), 1957'de yayımladığı *Introduction to Logic* kitabında, doğal türetim sistemlerinin daha yapısal bir yöntemle ele alınmasını sağlayarak Gentzen'in grafiksel yapısına alternatif olarak satır numaralarını kullanmış ve bir ispatın hangi varsayımlara dayandığını daha açık bir şekilde göstermeyi amaçlamıştır.²⁴ Bu metodoloji, E. John Lemmon'un (ö.1966) 1965'te yayımladığı *Beginning Logic* kitabında da benimsenmiş ve geniş kitlelerce benimsenen bir öğretim yöntemi haline gelmiştir.²⁵ Son olarak Stephen Kleene (ö. 1994), doğal türetim sistemlerini özellikle metamatematik bağlamında ele almış ve doğal türetimin formel sistemler üzerindeki etkisini araştırmıştır. Kleene 1952'de yayımladığı *Introduction to Metamathematics* kitabında, doğal türetim yönteminin sezgisel mantık üzerindeki etkilerini açıklayarak, doğal türetim ve aksiyomatik sistemler arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Kleene'nin bu teoremi, doğal türetim sistemlerinin meta-matematiksel temellerini güçlendirmiştir.²⁶ İzleyen bölümde bu sistemlerin örnekleri üzerinden incelememizi sürdürebiliriz.

2.3. Doğal Türetim Yöntemlerinin Biçimsel İncelemesi

Yukarıda işaret ettiğimiz doğal türetim yöntemlerinin işleyişini kısaca açıklamak istiyoruz. Bunun için öncelikle temel çıkarım kurallarını açıklamalıyız. Ardından sırayla Gentzen, Jaśkowski ve Fitch yöntemlerinin uygulanışını birer örnek üzerinden açılacaktır.

2.3.1 Çıkarım Kuralları

Çıkarım kuralları (*inference rules*), mantıksal bir sistemde, belirli öncüllerden geçerli bir şekilde sonuçlar çıkarmak için kullanılan kurallardır. Bir argümanın geçerli olup olmadığını belirlemek, bu kurallara dayanarak yapılır. Çıkarım kuralları, mantıksal eklemlerin (ve, veya, değil, ise, ancak ve ancak) nasıl kullanıldığını ve bir önermeden veya öncüller kümesinden hangi sonuçların çıkarılabileceğini belirler. Temelde çıkarım kuralları, bir akıl yürütme zincirinde adım adım nasıl ilerlenmesi gerektiğini gösteren mantıksal yönergelerdir. Çıkarım kuralları, bir mantıksal ispatın nasıl inşa edileceğini belirler. Bu kurallar, önermelerin birbirine nasıl bağlanacağı ve hangi sonuçların çıkarılabileceği konusunda rehberlik eder. Çıkarım kuralları sayesinde mantıksal argümanlar biçimsel bir yapıya bürünür ve geçerlilikleri objektif bir şekilde incelenebilir.

²² Frederic Brenton Fitch, *Symbolic Logic: An Introduction* (New York: Ronald Press Company, 1952).

²³ Dag Prawitz, *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study* (Upsala: Boktryckeri Aktiebolag, 1965).

²⁴ Suppes, *Introduction to Logic*, 101-120.

²⁵ E. John Lemmon, *Beginning Logic* (London: Nelson, 1965).

²⁶ Stephen Kleene, *Introduction to Metamathematics* (New York: Van Nostrand, 1952).

Tanıtım (Giriş) Kuralları	Eleme (Çıkış) Kuralları
Birleştirme Tanıtım Kuralı ($\wedge$ T): Eğer A ve B'yi ayrı ayrı çıkarabiliyorsanız, $A \wedge B$'yi sonuç olarak çıkarabilirsiniz. Bu kural, $A \wedge B$'yi kanıtlamak için hem A'yı hem de B'yi kanıtlamak gerektiğini ifade eder. $\frac{A, B}{A \wedge B}$	Birleştirme Eleme Kuralı ($\wedge$ E): Eğer $A \wedge B$'yi biliyorsanız A'yı veya B'yi çıkartabilirsiniz. Buna göre $A \wedge B$ doğru ise hem A hem de B ayrı ayrı doğrudur. $\frac{A \wedge B}{A} \quad \frac{A \wedge B}{B}$
Ayrıştırma Tanıtım Kuralı ($\vee$ T): Eğer A doğru ise $A \vee B$; B doğru ise yine $A \vee B$ doğrudur. Bu kural, önermenin doğruluğunu genişletmek için kullanılır. $\frac{A}{A \vee B}$	Ayrıştırma Eleme Kuralı ($\vee$ E): Bu kural, her iki önermenin de ayrı ayrı doğru olduğu durumda ortak bir sonuç türetebilmemizi sağlar. Eğer $A \vee B$ doğru ise ve hem A hem de B doğru olduğunda C çıkarsa, sonuç geçerlidir. $\frac{A \supset B \quad A \supset C \quad B \supset C}{C}$
Koşul Tanıtım Kuralı ($\supset$ T): Eğer A'yı varsayarak B'yi çıkarabiliyorsanız, $A \supset B$'yi sonuç olarak çıkarabilirsiniz. Bu, eğer A doğruysa ve $A \supset B$ doğruysa, o zaman B'nin de doğru olduğunu ifade eder. $\frac{[A] : B}{A \supset B}$	Koşul Eleme Kuralı ($\supset$ E): A ve $A \supset B$'yi biliyorsanız, B'yi çıkarabilirsiniz. Bu kural aynı zamanda modus ponens olarak bilinir. Eğer A doğruysa ve $A \supset B$ doğruysa, o zaman B de doğrudur. $\frac{A \supset B \quad A}{B}$
Değilleme Tanıtım Kuralı ($\sim$ T): Eğer A'yı varsayarak bir çelişkiye ($\perp$) ulaşıyorsanız, $\sim A$'yı çıkarabilirsiniz. Bu kural, A'nın yanlış olduğunu gösterir, çünkü o çelişkiye yol açmıştır. $\frac{[A] : \perp}{\sim A}$	Değilleme Eleme Kuralı ($\sim$ E): Eğer $\sim A$ ve A'yı biliyorsanız, bir çelişki ($\perp$) çıkarabilirsiniz. Bu kural, hem A'nın hem de $\sim A$'nın aynı anda doğru olamayacağını ifade eder. $\frac{\sim A \quad A}{\perp}$
Karşılıklı Koşul Tanıtım Kuralı ($\leftrightarrow$ T): Eğer hem $A \supset B$'yi hem de $B \supset A$'yı çıkarabiliyorsanız, $A \leftrightarrow B$'yi sonuç olarak çıkarabilirsiniz. $\frac{A \supset B \quad B \supset A}{A \leftrightarrow B}$	Karşılıklı Koşul Eleme Kuralı ($\leftrightarrow$ E): $A \leftrightarrow B$'den hem $A \supset B$ hem de $B \supset A$ çıkartılabilir. $\frac{A \leftrightarrow B}{A \supset B \quad B \supset A}$

Tümel Niceleyici Tanıtım Kuralı ($\forall$ T): Eğer $A(x)$ herhangi bir keyfi x için doğru ise $\forall x(Ax)$ çıkartılabilir. Bu kural x için A'nın doğru olduğunu kanıtlayarak tümel bir ifade sunar. $\frac{A(x)}{\forall x(Ax)}$	Tümel Niceleyici Eleme Kuralı ($\forall$ E): $\forall x(Ax)$'den herhangi bir t terimi için $A(t)$ çıkartılabilir. Bu kural tümel nicelenmiş bir ifadeyi somut bir örnekle açıklamayı sağlar. $\frac{\forall x(Ax)}{A(t)}$
Tikel Niceleyici Tanıtım Kuralı ($\exists$ T): Eğer $A(t)$ belirli bir terim t için doğru ise $\exists xA(x)$'i çıkartabiliriz. Bu kural tikel bir ifade tanıtmaya yarar. $\frac{A(t)}{\exists xA(x)}$	Tikel Niceleyici Tanıtım Kuralı ($\exists$ E): Eğer $\exists xA(x)$ doğru ise ve $A(x)$'ten B'yi çıkartabiliyorsak sonuç olarak B'yi çıkartabiliriz. $\frac{\exists xA(x) [A(x)] : B}{B}$
Tekrarlama Kuralı (T): Bir önermeyi, ispatın bir adımında tekrar etmek için kullanılır. $\frac{A}{A}$	

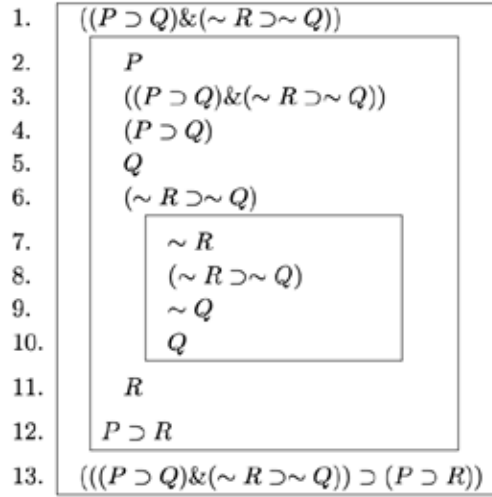
Bunlar çıkarım yapmak için uygulanan temel kurallardır. Verdiğimiz bu kurallara ek pek çok kural olabilir. Söz konusu bu ek kurallar genellikle bağlaçların denkliği, birleşimi ya da ayrıklığı üzerinden uygulanır. Misal $(A \supset B)$ 'nin mantıksal denkliği $(\sim A \vee B)$ önermesidir. Bunu bir kural olarak uygulamak istersek “koşul eklemi içeren bir önermeyi veya bağlacına dönüştürmek mümkündür” şeklinde ifade edebiliriz. Benzer şekilde $(A \supset B)$ ve $\sim B$ önermelerinden $\sim A$ önermesini çıkartmak mümkündür şeklinde ifade edilen *modus tollens* kuralı da yine bir çıkarım kuralıdır. Artık kurallarımızı açıkladığımız için bir sonraki bölümde yukarıda açıkladığımız çıkarım kurallarının uygulanışı üzerinden farklı doğal türetim yöntemlerini incelemeye geçebiliriz. ●

2.4. Stanisław Jaśkowski

Jaśkowski doğal türetim yönteminde sıralı ve iç içe geçmiş varsayımlar kullanır. Varsayımların yapılması ve kaldırılması işlemlerine odaklanır. Önerme eklemleri için tanımladığı giriş ve çıkış kuralları mevcut olmasına karşın ($\vee$) eklemi için varsayımların iç içe kullanımı ve ($\leftrightarrow$) eklemi için iki yönlü koşullu ifadelerin birleşimi olarak ele alır; özel tanıtım ve eleme kuralları tanımlamaz.²⁷ Niceleyiciler için tanıtım ve eleme kuralları vardır. Jaśkowski yöntem olarak öncelikle dikdörtgen-kutu kalıpları kullanmış ardından bu yöntemi bırakarak alt alta sıralı (çizelge) yöntemine geçmiştir.²⁸ Aşağıda Jaśkowski yöntemi ile doğal türetim örneklerini görebiliriz:

²⁷ Stanisław Jaśkowski, “On the Rules of Suppositions in Formal Logic” in *Polish Logic 1920–1939*, ed. S. McCall (Oxford: Oxford University Press, 1967), 232–58.

²⁸ Kalish-Montague yöntemi Jaśkowski'nin dikdörtgen-kutu yöntemine benzediği için bu ispatın açıklaması Kalish-Montague yönteminde yapılacaktır.



Jaśkowski'nin dikdörtgen-kutu yöntemi

1.1.	$S ((p \supset q) \wedge (\neg r \supset \neg q))$	I
2.1.	$(p \supset q)$	&E 1
3.1.	$(\neg r \supset \neg q)$	&E 1
4.1.1.	$S p$	I
5.1.1.	q	III 4,2
6.1.1.1.	$S \neg r$	I
7.1.1.1.	$\neg q$	III 6,3
8.1.1.	r	IV 5,7,6
9.1.	$(p \supset r)$	II 4,8
10.	$((p \supset q) \wedge (\neg r \supset \neg q)) \supset (p \supset r)$	II 1,9

Jaśkowski'nin alt alta sıralı (çizelge) yöntemi

Bu ispatın açıklamasını aşağıdaki gibi yapabilir:

1. S varsayımı (*supposition*) temsil eder. S ile $((p \supset q) \wedge (\neg r \supset \neg q))$ varsayılmıştır.
2. İlk adımda verilen $((p \supset q) \wedge (\neg r \supset \neg q))$ ifadesinden $\wedge E$ kuralı ile $p \supset q$ çıkarılır.
3. Aynı şekilde, 1. adımda verilen $((p \supset q) \wedge (\neg r \supset \neg q))$ ifadesinden $\wedge E$ kuralı ile $\neg r \supset \neg q$ çıkarılır.
4. Bu adımda p 'nin doğru olduğu varsayılır ($S p$)
5. Koşul eleme kullanılarak, p ve $p \supset q$ kullanılarak q 'ya ulaşılır. Bu, 2.1 ve 4.1.1'deki bilgilerin sonucudur.
6. Bu adımda $\neg r$ 'nin doğru olduğu varsayılır.
7. Koşul eleme ile $\neg r \supset \neg q$ ve $\neg r$ 'den $\neg q$ 'ya ulaşılır (6.1.1.1 ve 3.1'in kullanımı).
8. 5.1.1'de elde edilen q 'nun 7.1.1.1'deki $\neg q$ ile çeliştiği görülür. Bu çelişkiyi gidermek için saçmaya indirgeme (*reductio ad absurdum*) uygulanır ve r 'ye ulaşılır.
9. Koşul tanıtım kuralı ile 4.1.1'de varsayılan p 'den r 'ye ulaşılır. Bu, 4.1.1 ve 8.1.1 adımlarının sonucudur.

2.5. Gerhard Gentzen

Gentzen sisteminde, mantıksal eklemler için ayrı ayrı giriş ve çıkış kuralları tanımlar. İspatları ağaçlı bir yapı ile temsil eder. Bu yapı, her adımda hangi varsayımların kullanıldığını ve nasıl sonuçlara ulaşıldığını açıkça gösterir. Her temel eklem ve niceleyiciler için tanıtım ve eleme kuralı vardır.²⁹ Aşağıda Gentzen yöntemi ile bir doğal türetim örneğini görebiliriz:

²⁹ Gentzen, *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, 77.

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{\frac{\perp}{\neg r} \quad \frac{((p \supset q) \wedge (\neg r \supset \neg q))}{(\neg r \supset \neg q)} \wedge\text{-E} \quad \frac{((p \supset q) \wedge (\neg r \supset \neg q))}{(p \supset q)} \wedge\text{-E} \quad \frac{\perp}{p} \supset\text{-E}}{\neg q} \supset\text{-E} \quad q}{q} \perp\text{-I}}{\frac{\frac{\perp}{r} \perp\text{-E (3)}}{(p \supset r)} \supset\text{-I (2)}} \supset\text{-I (1)} \\
((p \supset q) \wedge (\neg r \supset \neg q)) \supset (p \supset r)
\end{array}$$

Gentzen'in ağaç yöntemi

Bu ispatın genel amacı, $((p \supset q) \wedge (\neg r \supset \neg q)) \supset (p \supset r)$ ifadesini türetmektir. Bu, şu anlama gelir: Eğer $p \supset q$ ve $\neg r \supset \neg q$ doğruysa, o zaman $p \supset r$ doğrudur. Bu çıkarımı kanıtlamak için aşağıdaki yol izlenmiştir:

1. Varsayım (1): $((p \supset q) \wedge (\neg r \supset \neg q))$ varsayımı yapılır. Bu, formülün başında verilen ifadeyi ifade eder. Bu varsayımın amacı, sonuç olarak ispatlamak istediğimiz $(p \supset r)$ 'ye ulaşmaktır.
2. $\wedge$ Eleme: $((p \supset q) \wedge (\neg r \supset \neg q))$ ifadesinden $p \supset q$ ve $\neg r \supset \neg q$ çıkarılır. Bu adım, “ve” bağlacının eleme kuralını kullanır. İlk olarak sol taraftaki $p \supset q$, ardından sağ taraftaki $\neg r \supset \neg q$ formülleri elde edilir.
3. $\supset$ Eleme: $\neg r$ ifadesi ve $\neg r \supset \neg q$ kuralı kullanılarak $\neg q$ sonucuna ulaşılır. Bu aynı zamanda *modus ponens* kuralıdır. Yani, eğer $\neg r \supset \neg q$ doğruysa ve $\neg r$ 'nin de doğru olduğu varsayılırsa, sonuç olarak $\neg q$ 'ye ulaşılır.
4. $\sim$ Eleme: q 'nın yanlış olduğu gösterilince, q 'nın doğruluğunu varsayarak çelişki elde edilir. Bu adımda, $p \supset r$ 'ye ulaşmak için r 'nin doğruluğu sağlanır. r 'yi varsaydıktan sonra $p \supset r$ 'ye ulaşılır.
5. $\supset$ Tanıtım: İkinci ve üçüncü adımda ulaşılan $p \supset r$ ifadesiyle, $((p \supset q) \wedge (\neg r \supset \neg q)) \supset (p \supset r)$ kanıtlanır. Bu, çıkarımın son adımıdır.

2.6. Frederic B. Fitch

Fitch, doğal türetim sistemini özellikle eğitim amaçlı olarak daha anlaşılır hale getirmiştir. Bu sistemde girinti notasyonu kullanarak her bir varsayım için alt-ispatlar (*subproof*) yapılır. Böylelikle öğrenciler ispatların yapısını daha kolay takip edebilir. Her temel eklemler ve niceleyiciler için tanıtım ve eleme kuralı vardır. Aşağıda Fitch yöntemi ile bir doğal türetim örneği gösterilmiştir:

$$\begin{array}{l|l}
1 & A \supset B \\
2 & \sim (\sim A \vee B) \\
3 & \quad A \\
4 & \quad B \\
5 & \quad \sim A \vee B \\
6 & \quad \sim (\sim A \vee B) \\
7 & \quad \sim A \\
8 & \quad \sim A \vee B \\
9 & \quad \sim (\sim A \vee B) \\
10 & \sim A \vee B
\end{array}$$

Fitch'in girinti (alt-ispat) yöntemi

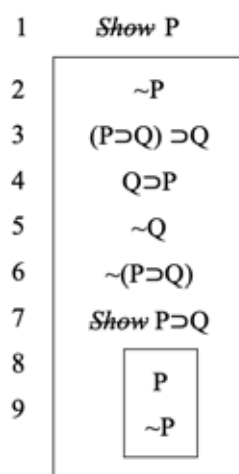
Fitch tarzı bu ispatta 1. satırdaki $A \supset B$ varsayımından hareketle 10. satırdaki $\sim A \vee B$ önermesinin elde edilmesi amaçlanmıştır. Bu çıkarımı kanıtlamak için aşağıdaki yol izlenmiştir:

1. $A \supset B$ varsayım
2. $\sim(\sim A \vee B)$ adımımda olumsuzlamanın varsayıldığı bir ek varsayım (alt-ispat) yapılır. Amaç, bunun bir çelişkiye yol açtığını göstermek.
3. Bu adımda A 'nın doğru olduğunu varsayıyoruz. Bu da bir ara varsayımdır.
4. $\supset$ Eleme kuralı ile 1. adımda verilen $A \supset B$ ve 3. adımda varsayılan A 'dan B 'ye ulaşılır.
5. $\vee$ Tanıtım kuralı ile $\sim A \vee B$ elde edilir.
6. 2. satırdaki $\sim(\sim A \vee B)$ varsayımı tekrar edilir ve $\sim A \vee B$ ile bir çelişki elde edilir.
7. 3-6 satırlar arasındaki çelişki A varsayımının doğru olamayacağını gösterir ve $\sim A$ önermesine ulaşılır.
8. 7. satırdaki $\sim A$ için $\vee$ Tanıtım kuralı uygulanır ve $\sim A \vee B$ elde edilir.
9. 2. satırdaki $\sim(\sim A \vee B)$ varsayımı tekrar edilir ve $\sim A \vee B$ ile bir çelişki daha elde edilir.
10. 2-9 satırları arasındaki çelişki $\sim A \vee B$ önermesinin türetilmesini sağlar ve işlem biter.

2.7. Diğer Sistemler

Örneklerini verdiğimiz bu isimlerin dışında doğal türetim yöntemi geliştirmiş isimlerden Suppes'ın yöntemini Jaśkowski ve Fitch'in yöntemlerinin birleşimine; Lemmon'un yöntemini ise Jaśkowski'nin alt alta sıralı yönteminin sadeleştirilmiş haline; Prawitz'in yöntemini ağaç kullandığı için Genztzen'in yöntemine ve son olarak Kleene'nin yöntemini Lemmon'un alt alta sıralı yöntemine benzetebiliriz. Bunların haricinde Türkiye'de yayımlanan kitapların kaynaklarında Irving Copi'nin Lemmon-Suppes tarzı sade anlatımlı alt alta sıralı yöntemi ve Kalish-Montague yönteminin de Jaśkowski'nin yöntemini temel alan dikdörtgen-kutu yapılı kutu sistemi benimsediğini söyleyebiliriz. Bunlardan Copi'nin kendine has bir doğal türetim yöntemi olmadığını belirtmek gerekir. Onun kullandığı yöntem Lemmon-Suppes yönteminin sadeleştirilmiş bir halidir ve Lemmon-Suppes yöntemi de temelde Jaskowski'nin çizelge yöntemini esas alır. Şimdi sırayla Kalish-Montague ve Copi'nin yöntemlerinin biçimsel gösterimini aşağıda sunuyoruz.

İlk olarak $(P \supset Q) \supset Q$ ve $(Q \supset P)$ öncüllerinden P sonucunun nasıl çıkartılacağını Kalish-Montague yöntemi ile inceleyelim:



Kalish-Montague kutu yöntemi

Kalish-Montague tarzı dolaylı türetimde P 'yi ispatlamak için $\sim P$ 'yi varsayınız. *Show* terimi ispat edilecek iddiayı (*assertion*) göstermek anlamına gelir. Diğer bir deyişle, *Show P* " P ispat edilecek/ P 'nin ispatı gösterilecek" anlamına gelir. Daha sonra 2. ve 4. satır arasında *modus tollens* uygulanarak 5. Satırdaki $\sim Q$ elde edilir. 3. ve 5. satıra da *modus tollens* kuralı uygulanarak 6. satırdaki $\sim(P \supset Q)$ önermesi elde edilir. 7. satırda bir çelişki yakalamak için yeniden dolaylı türetim iddiası gösterilir. 8. ve 9. satıra sırasıyla 1. İddiamız P 'yi ve 2. satırdaki varsayımımız $\sim P$ 'yi tekrarlama kuralı ile yazılır. Çelişkiden 7. satırdaki ispat kapanır. Böylelikle 6. ve 7. satır da çeliştiği için 1. satırdaki gösterim elde edilmiş olur.

Son olarak, Copi'nin yöntemine baktığımızda, onun bizzat bir yöntem geliştirmemiş ancak mevcut doğal türetim sistemlerini görece anlaşılması daha kolay bir biçimde yeniden düzenlediğini görmekteyiz. Aşağıda $(A \supset B)$, $(B \supset C)$, $(C \supset D)$, $\sim D$ ve $(A \vee E)$ öncüllerinden E sonuç önermesinin nasıl türetildiği görebiliriz.

1.	$A \supset B$
2.	$B \supset C$
3.	$C \supset D$
4.	$\sim D$
5.	$A \vee E$
	$\therefore E$
6.	$A \supset C$
7.	$A \supset D$
8.	$\sim A$
9.	E

Copi'nin doğal türetim yöntemi

1. ve 2. satır arasında hipotetik kıyas kuralını uygulayarak 6. satırdaki $(A \supset C)$ elde edilir. Aynı kural 3. ve 6. satıra uygulandığında $(A \supset D)$ elde edilir. 4. ve 7. satırda *modus tollens* kuralı uygulanarak 8. satırdaki $\sim A$ elde edilir. 5. ve 8. satırda *modus ponendo tollens* kuralı uygulanarak 9. satırdaki E önermesi elde edilir ve çıkarım sonlandırılır.

2.8. Doğal Türetim Yöntemlerinin Karşılaştırmalı İncelemesi

Genel mantık literatüründe kabul gören üç temel doğal çıkarım yöntemi bulunmaktadır: Jaśkowski'nin dikdörtgen-kutu yöntemi, Gentzen'in ağaç yöntemi ve Fitch'in girintili yöntemi. Bu yöntemler, mantıksal ispatların yapısını ve akışını temsil etmek için farklı notasyonlar ve yaklaşımlar kullanırlar. Aşağıda, bu yöntemlerin özelliklerini, avantajlarını ve zorluklarını karşılaştırarak, öğrenciler için hangilerinin daha anlaşılır olduğunu tartışacağız.

Doğal türetimin mucidi olarak anabileceğimiz Jaskowski'nin dikdörtgen-kutu yönteminin Kalish-Montague'e'de; çizelge yönteminin ise Lemmon-Suppes ve Copi'de uygulandığını açık bir şekilde görmekteyiz. Bu bağlamda Türkiye'deki mantık kitaplarında kullanılan yöntemlerden birisi olan Kalish-Montague yöntemi, iç içe geçmiş kutuların karmaşık argümanlarda ve özellikle niceleme mantığında uygulanmasını sağlar. Bu yöntem, kutuların dikkatli bir şekilde yönetilmesini ve varsayımların izlenmesini gerektirir. Karmaşık ispatlarda veya niceleyici içeren ifadelerin kullanıldığı durumlarda, bu kutu sistemi teknik olarak zorlu olabilir. Öğrencilerin, iç içe geçmiş kutuları doğru bir şekilde takip etmeleri ve varsayımların kapsamını anlamaları ciddi dikkat gerektirir. Bu nedenle, Kalish-Montague yöntemi başlangıç düzeyindeki öğrenciler için zorlayıcı olabilir. Türkiye'de doğal türetim konusunun

işlendiği mantık kitaplarının büyük bir çoğunluğunda yer alan Copi'nin (Lemmon-Suppes tarzı) doğal türetim yöntemi, sade ve erişilebilir bir yaklaşım sunar. Bu tarz çıkarımda ispatlar çizgisel bir biçimde sunulur ve satır numaraları kullanır. Her adımda uygulanan mantıksal kurallar belirtilir, ancak varsayımların nasıl yapıldığından ziyade niçin yapıldığının yapısal bir gösterimi eksiktir. Bu özellik, Copi'nin yöntemini, başlangıç düzeyindeki öğrenciler için basit ve anlaşılır kılarken, karmaşık ve niceleyici içeren önermeler dâhil edildiğinde doğal çıkarımın akışını anlamada zorluk yaratabilir.

Türkiye'de örneğini pek göremediğimiz Gentzen'in ağaçlı yöntemi anlaşılması ve uygulaması zor olmasına rağmen yurt dışındaki bazı mantık kitaplarında kullanılmaktadır.³⁰ Gentzen'in ağaç yöntemi, ispat teorisi ve mantığın ayrıntılı incelenmesi için değerli olsa da doğal çıkarım sistemleri içinde uygulama açısından diğer yöntemlere göre daha karmaşık görülmektedir. Ülkemizdeki kitaplarda tercih edilen son yöntem olarak Frederic B. Fitch'in girintili yöntemi, her bir varsayımın ispatının açıkça gösterilmesini ve temel kurallara yapılacak eklem dönüşümleriyle ispatların oluşturulmasını sağlar. Bu yöntem alt ispatlar kullanarak ispatların yapısını ve akışını net bir şekilde ortaya koyar. Fitch notasyonu, varsayımların kapsamını ve ispatın ilerleyişini görsel olarak takip etmeyi kolaylaştırır. Bu görsel netlik, öğrencilerin mantıksal ilişkileri anlamalarını ve ispatları adım adım takip etmelerini sağlar. Fitch'in yöntemi, en kolay öğrenilebilecek ve uygulanabilecek yöntem olarak kabul edilir ve özellikle yurt dışındaki mantık kitaplarında sıkça tercih edilmektedir.³¹

Yukarıdaki incelemeler ışığında, literatürde temel olarak üç farklı doğal çıkarım yönteminin kabul gördüğünü söyleyebiliriz: Jaśkowski'nin dikdörtgen-kutu yöntemi, Gentzen'in ağaç yöntemi ve Fitch'in girintili yöntemi. Ülkemizde tercih edilen yöntemler ise Jaśkowski'nin dikdörtgen-kutu yönteminin devamı sayabileceğimiz Kalish-Montague yöntemi, Lemmon-Suppes yönteminin bir uzantısı olan ve temeli Jaśkowski'nin alt alta sıralı yöntemi-ne dayanan Copi'nin yöntemi ve son olarak da Fitch'in girinti yöntemidir.

3. Mantık Kitaplarında Doğal Türetim

Bu bölümde, Türkiye'de modern mantık kitaplarında doğal türetim yönteminin ele alınış biçimi üzerinde durulacaktır. Son yarım yüzyılda modern mantık üzerine yayımlanan eserlerin sınırlı sayıda olduğu dikkate alındığında, doğal türetim konusunun mantık eğitiminde ne ölçüde yer bulduğunu incelemek önemlidir. Bu açıdan öncelikle incelemeye dâhil edilmeyen kitaplar hakkında bilgi verilecek, ardından çıkarım konusunun işlendiği kitaplar tanıtılacak, son olarak da doğal türetim konusu işlenen kitaplar değerlendirilecektir. Belirlediğimiz bazı ölçütler doğrultusunda doğal türetim yönteminin ele alındığı kitaplar arasındaki karşılaştırmayı daha sistematik hale getirmeyi amaçlıyoruz.

3.1. Modern Mantık Kitapları Üzerine

Ülkemizde modern mantığa yönelik eserlerin 1970'lerin başında yazılmaya başlandığı dikkate alındığında, aradan geçen yarım yüzyıl içinde yalnızca 30 civarında kitap yayımlanmış olmasını değerlendirmek, ayrı bir çalışmanın konusu olarak ele alınmalıdır.³² Bu sebeple, bu bölümde incelememize konu olan kitaplar kadar dâhil edilmeyenler hakkında da bilgilendirme yapacağız. Hedef kitaplarımız modern mantık konusunu tümüyle ya da kısmen ele alan kitaplardır. Değerlendirmemize dâhil ettiğimiz kitaplar, modern mantık bağlamında özellikle doğal

³⁰ Bkz: David Bostock, *Intermediate Logic* (Oxford: Oxford University Press, 1999).; Neil Tennant, *Natural Logic* (Edinburgh: Edinburgh University Press, 1978).

³¹ Bkz: Merrie Bergmann, James Moor ve Jack Nelson, *The Logic Book* (McGraw-Hill Education, 2013).

³² Burada modern mantığa yönelik ders kitap sayısı kastedilmektedir. Türkiye'de yayımlanmış mantık kitaplarına yönelik katalog çalışmaları için bkz: Yücel Yüksel, *Tanzimat'tan Günümüze Türkiye'de Mantık Çalışmaları* (Kitaplar-Makaleler) (İstanbul: Atı Yayınları, 2013) ve Samet Büyükkada, "1923-2023 Arası Yayımlanmış Mantık Kitapları", *Cumhuriyet'in 100. Yılında Türkiye'de Felsefenin Farklı Alanları* içinde, ed. Şafak Ural ve Serdar Saygılı, 3. Cilt. (Ankara: Nobel Akademik, 2023), 349-380.

türetim ve çıkarım sistemleri üzerine odaklanan eserlerdir. Buna karşın, geleneksel mantık konusunun hâkim olduğu ya da modern mantık muhtevası taşısa da doğrudan bir ders kitabı olma niteliği taşımayan kitapları tasnif dışı bıraktık. “Bir ders kitabı” niteliği ile lisans modern mantık, sembolik mantık ya da temel mantık derslerinde önermeler ve/veya niceleme mantığını önermeler, sembolleştirme ve denetleme yöntemleri gibi temel konular işlenirken yararlanılabilecek kitaplar kastedilmektedir. Bu açıdan incelememize dâhil etmediğimiz bazı kitaplara değinmek gerekirse:

1. Sami Gürtürk’ün 1969 yılında yazdığı *Modern Mantık ve Dil* başlıklı kitapçığı: Yalnızca 34 sayfa olan bu kitapçık, başlıkta “Modern Mantık” ifadesini taşımasına rağmen, içeriğinde kavramsal bir analizle sınırlı kalmıştır. Dolayısıyla, bu kitap kapsam dışında bırakılmıştır.
2. Yücel Yüksel’in 2017 yılında Akademi Titiz Yayınları’ndan çıkan *Mantıkta Önermeler ve Doğruluk Değeri* kitabı: Bu eser, tamamen önerme yapısını incelemeye odaklandığından, doğal türetim ya da çıkarım sistemleriyle ilişkili değildir. Bu yüzden değerlendirmemizde yer almamıştır.
3. Arnold Raymond’ın Hilmi Ziya Ülken çevirisi olan *Lojik Prensipleri ve Muhasır Tenkit* kitabında (1942) kısmen modern mantık konusuna değinilmiş olsa da, türetim sistemleri özellikle Fitch’in 1952’de yazdığı eserle yaygınlaşmaya başlamıştır. Bu nedenle bu eser de incelemeye dâhil edilmemiştir.
4. Aydın Anay’ın 1970 basımlı 48 sayfalık *Modern Mantık* kitapçığı yükseköğretim düzeyine yönelik olup olmadığının dair net bilgi içermemektedir. Ders kitabı olmaktan ziyade yardımcı bir materyal olarak düşünülebilir. Doğal türetim konusu yoktur.
5. Teo Grünberg’in *Sembolik Mantık El Kitabı*’nın ikinci ve üçüncü cildi sırasıyla özel mantık sistemleri ile sembolik mantığın uygulamaları temalarını işlediği için değerlendirme dışındadır.
6. Ahmet Çevik’in 2019 yılında yazdığı *Matematik Felsefesi ve Matematiksel Mantık* kitabı modern mantık temasını içerse de matematik felsefesi odaklı bir kitap olduğu için dâhil edilmemiştir.
7. Fikret Osman’ın 2015 yılında yazmış olduğu *Modern Mantık Açısından Teolojik Çıkarımlar* kitabı, belirli çıkarım yöntemleri içerse de kitabın muhtevası incelememiz kapsamında değildir.
8. D. J. Velleman’ın yazdığı, Mehmet Terziler ve Tahsin Özer’in çevirisini yapmış olduğu 2008 yılında yayımlanan *Kanıt Nasıl Yapılır: Bir Yapısal Yaklaşım* kitabında önermeler ve niceleme mantığı başlıkları olmasına rağmen v bazı çıkarım kuralları temel seviyede açıklamıştır. Kitap doğrudan bir modern mantık kitabı niteliği taşımamaktadır.
9. P. Suppes’in yazdığı, Mehmet Terziler’in çevirisini yaptığı *Aksiyomatik Kümeler Kuramı* kitabı hem aksiyomatik çıkarım içermesi hem de modern mantığın özel bir alanını içermesi sebebiyle dâhil edilmemiştir.
10. Ali Nesin’in 2008’de yazmış olduğu *Sezgisel Kümeler Kuramı ve Aksiyomatik Kümeler Kuramı* kitapları modern mantığın özel bir alanını içermesi sebebiyle dâhil edilmemiştir.
11. Mantık ya da mantıkçılar üzerine yazılmış çeviri kitapların çoğu mantık ders kitabı hüviyeti taşımamaktadır. Bu sebeple tercüme edilmiş kitaplar incelememize dâhil edilmemiştir.³³

Bu kitaplara ek olarak ortaöğretim düzeyindeki mantık kitapları da çalışma kapsamımıza alınmamıştır. Bu kitaplar genellikle daha temel kavramları ele aldıkları için, doğal türetim gibi ileri düzey mantık konularını içermekte ya da yüzeysel işlemektedir.

Geldiğimiz nokta itibarıyla lisans öğrencilerine hitap eden ve modern mantık ders içeriğine uygun kitap sayısı 21’dir.³⁴ Bu kitaplardan aşağıdaki on bir tanesinde doğal türetim konusuna yer verilmemiş; buna karşın çıkarım

³³ Örnek olarak Frege’nin Türkçeye çevrilen *Kavram Yazısı* kitabı modern mantık hüviyetini ve temel çıkarım kurallarının açıklamasını içermesine rağmen aksiyomatik bir sistemi aktardığı için dâhil edilmemiştir. Graham Priest’in 2017’e Türkçeye çevrilen *Mantık* kitabı da temel konuları ele alan bir kitaptır ve modern mantık için temel bir ders kitabı niteliği taşımamaktadır.

³⁴ Yalçın Koç’un *Introduction to Logic* kitabı iki cilt olmasına rağmen, bu çalışmada tek kitap olarak ele alınmıştır.

konusu özellikle semantik bağlamda doğruluk tabloları ve çözümleyici çizelge yöntemleri çerçevesinde incelenmiştir. Kitaplar hakkında kısaca aşağıdaki bilgileri sunuyoruz:

1. Şafak Ural - *Temel Mantık* (Çantay Yayınları, 2011)
Kitap kavramlar, önermeler ve çıkarımlar olmak üzere üç bölümden ve ekler başlığında yaklaşık 100 sayfalık bir son bölümden oluşmaktadır. Çıkarım bölümünde konu ayrıntıları ile ele alınmış; ekler bölümünde ise doğruluk tablosu ve tümevarım yöntemiyle çıkarım gibi konular işlenmiştir.
2. Doğan Özlem - *Mantık* (Notos Kitap, 2011)
Türkçe mantık literatüründeki önemli eserlerinden birisi olan bu eser dokuz bölümden oluşmaktadır. Kitabın Çıkarım Mantığı (dedüktif mantık) başlıklı bir bölümü bulunmaktadır. Bu bölüm önermeler ve kıyas sistemleri arasındaki çıkarım ilişkilerini içermektedir. Kitapta ayrıca doğruluk tabloları ile önermeler ve niceleme mantığında çözümleyici çizelge konuları işlenmiştir.
3. İskender Taşdelen - *Sembolik Mantık* (Anadolu Üniversitesi, 2013)
Modern mantık dersi için hazırlanmış bu kitapta doğruluk tabloları ve çözümleyici çizelge konuları ayrıntılı bir şekilde işlenmiştir.
4. Zekai Şen - *Modern Mantık* (Bilge Kültür Sanat, 2003)
Kitabın *Sembolik Mantık* başlığını taşıyan bölümünde doğruluk tabloları ve çözümleyici çizelge konularına yer verilmiştir.
5. Ed. İsmail Köz & Ali Çetin - *Mantık El Kitabı* (Grafiker Yayınları, 2016)
Bir derleme kitabı olan bu eserde Aytekin Özel “Klasik Sembolik Mantık” bölümünü yazmıştır. Özel bu bölümde doğruluk tabloları ile önermeler ve niceleme mantığında çözümleyici çizelge konularını ele almıştır.
6. Mehmet Sait Eroğlu & Kemal Ilgar Eroğlu - *Matematiksel Mantık* (Papatya Bilim Yayıncılık, 2016)
İncelememize konu olan modern mantık kitapları arasında doğrudan matematikçiler tarafından yazılmış üç kitaptan biri olan bu eser, *Mantıksal Çıkarımlar* başlığında bir bölüm içermektedir ve bu bölümde çıkarım kuralları incelenmektedir. Kitap genel itibarıyla matematiksel çıkarımlar üzerinde durmakta ve çıkarım kurallarının matematiksel ispatı verilmektedir. Bu ispatlar incelediğimiz hiçbir kitapta burada olduğu kadar ayrıntılı bir tahlile tâbi tutulmamıştır.
7. Fikret Osman - *Modern Mantığa Giriş I* (Sentez Yayıncılık, 2014)
68 sayfalık kitapta doğruluk tabloları ile önermeler ve niceleme mantığında çözümleyici çizelge konularına yer verilmiştir.
8. Caner Çiçekdağı - *Önerme Mantığı* (Paradigma Akademi Yayınları, 2021)
Kitapta doğruluk tabloları ile önermeler ve niceleme mantığında çözümleyici çizelge konularına yer verilmiştir.
9. Zekiye Kutlusoy - *Temel Sembolik Mantık* (Art Basın Yayın, 2003)
Kitapta doğruluk tabloları ile önermeler ve niceleme mantığında çözümleyici çizelge konularına yer verilmiştir.
10. Hüseyin Batuhan & Teo Grünberg - *Modern Mantık* (Metu Press, 1977)
Doğruluk tablolarına ek olarak kitabın son bölümünde çıkarım kuralları tanıtılarak çıkarım konusu genel çerçevede ele alınmıştır.
11. Ali Nesin - *Önermeler Mantığı* (Nesin Yayınevi, 2012)
İncelememizde yer alan matematikçilerin yazdığı bir diğer kitaptır. Kitabın üst başlığında yer alan “Matematiği Giriş-I” ibaresi ve giriş bölümünde yazılanlar bu kitabın matematik bakış açısı ile önermelerin mantığını

işlediğini göstermektedir. Kitap doğrudan bir modern mantık kitabı olamayacağı izlenimi uyandırsa da doğruluk tabloları ve *modus ponens* gibi çıkarım kuralları ile örnekleri içermektedir.

Özetle, çıkarım konusunun işlendiği kitaplar arasında sadece Şafak Ural, Doğal Özlem ve M. S. Eroğlu & K. I. Eroğlu'nun eserlerinde "çıkartım" başlığı taşıyan bölüm bulunmaktadır. Diğer kitaplar semantik denetleme yöntemi olarak doğruluk tabloları ile semantik ve sentaktik denetleme yönteminin kesişimi olarak yorumlayabileceğimiz çözümleyici çizelge konusuna, önermeler ve niceleme mantığı kapsamında yer vermiştir.

3.2. Doğal Türetim Konusunun İşlendiği Kitaplar

Doğal türetim konusunun işlendiği kitaplara geldiğimizde ise önceki bölümlerde işaret ettiğimiz üzere bu konuyu ele alan kitap sayısı 10'dur. Söz konusu kitaplarda sırasıyla Copi, Kalish-Montague ve Fitch yöntemleri ile doğal türetim yöntemi işlenmiştir. Kitaplarda tercih edilen doğal türetim yöntemi belirlendikten sonra onları belirlemiş olduğumuz altı değerlendirme ölçütü çerçevesinde inceliyoruz:

- i. Önermeler mantığında doğal türetim (Ö.D.T.) için açıklanan çıkarım kuralları ve açıklayıcı örnek verilmesi.
- ii. Ö.D.T. konusunu pekiştirmek amacıyla bölüm sonunda alıştırmalar olması.
- iii. Ö.D.T. için verilen alıştırmaların çözümlerinin olması.
- iv. Niceleme mantığında doğal türetim (N.D.T.) için açıklanan çıkarım kuralları ve açıklayıcı örnek verilmesi.
- v. N.D.T. konusunu pekiştirmek amacıyla bölüm sonunda alıştırmalar olması.
- vi. N.D.T. için verilen alıştırmaların çözümlerinin olması

Bu maddeler doğrultusunda, bir kitapta çıkarım kurallarının her biri için örnek verilmişse, bu konunun kitap bağlamında *eksiksiz işlendiği* kabul edilecektir. Öğrencilerin uygulama yapabilmesi için alıştırmalar sunulmuşsa bu ilgili konunun *eksiksiz işlendiği* anlamına gelecektir. Alıştırmalar ve çözümleri ile ilgili olarak, bazı kitaplarda konu anlatımı içerisinde örnek çözümü yer almakla birlikte, bölüm sonunda öğrencinin çözmesi için yalnızca çözümsüz alıştırmalar verilmiştir. Bazı kitaplarda ise çıkarım kurallarını açıklarken verilen örnekler dışında herhangi bir ek örnek bulunmamakta; yalnızca bölüm sonlarında alıştırmalara yer verilmektedir. İncelememizde esas alınan kısım, *bölüm sonlarındaki alıştırmalar* olacaktır. Buna göre konu anlatımı bittikten sonra alıştırmalar verilmişse, ilgili konunun *eksiksiz işlendiği* kabul edilecektir. Eğer her bir alıştırmacının çözümü mevcutsa, bu konunun *eksiksiz işlendiği* kabul edilecektir. Aynı süreç niceleme mantığı için de uygulanacaktır. Tüm bu ölçütleri *eksiksiz* karşılayan kitaplar, konuyu yeterli (y) düzeyde ele almış olarak değerlendirilecektir. Diğer kitaplar ise eksik oldukları ölçüt sayısına göre sınıflandırılacaktır: (y1: 1 ölçütü taşımayan; y2: 2 ölçütü taşımayan; ...; y5: 5 ölçütü taşımayan). Bu bilgiler doğrultusunda hazırladığımız aşağıdaki tablo, Türkiye'de yayımlanmış modern mantık kitaplarında doğal türetim konusunun nasıl işlendiğini göstermektedir.

		A. Kadir Çüçen	C. İ. Özkan	K. Gödelek	T. N. Ilgıncıoğlu	(ed.) I. B. Bravo & M. Yıldız	Y. Aksoy	Y. Koç (İng.)	A. Özercan (İng.)	T. Grünberg (a)	T. Grünberg (b) (İng.)
Doğal Türetim Yöntemi	Copi	✓	✓	✓		✓	✓				
	Kalish-Montague								✓	✓	✓
	Fitch				✓			✓			
Önermeler Mantığında Doğal Türetim	Çıkarım kuralı	40	19	8	12	20	13	12	14	14	12
	Örnek Sayısı	40	14	6	12	13	2	12	14	14	12
	Alıştırma	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Çözüm	x	x	x	✓	x	x	x	✓	x	x
Niceleme Mantığında Doğal Türetim	Çıkarım kuralı	4	x	4	4	5	10	6	3	5	4
	Örnek Sayısı	4	x	4	4	5	2	6	3	5	4
	Alıştırma	✓	x	✓	✓	✓	x	x	✓	✓	✓
	Çözüm	✓	x	x	✓	✓	x	x	✓	x	x
Değerlendirme		y2	y5	y3	y	y2	y5	y3	y	y2	y2

Mantık kitaplarında doğal türetim

Tablo hakkında bazı sayısal bilgileri aşağıdaki gibi sıralayabiliriz:

- Doğal türetim konusunun yer aldığı 10 kitabın 7'si Türkçedir.
- 10 kitaptan 2'si değerlendirme ölçütlerimize göre eksiksizdir.
- 5 kitapta yöntem olarak Copi'nin, 3 kitapta Kalish-Montague'nin, 2 kitapta Fitch'in yöntemini tercih edilmiştir.
- 10 kitabın 6'sında çıkarım kuralı-örnekleme tam yapılmıştır.
- Önermeler mantığında doğal türetim için 9 kitapta alıştırma sunulurken, bu kitapların sadece 2'si soruların çözümlerini içermektedir.
- Niceleme mantığında doğal türetim için 7 kitapta alıştırma sunulurken, bu kitapların sadece 4'ü soruların çözümlerini içermektedir.

Kitaplar hakkında kısa bilgiler aşağıdaki bilgileri sunulmuştur:

1. Kadir Çüçen - *Mantık* (Sentez Yayınları, 2015)

Bu kitap, doğal türetim konusuna en kapsamlı şekilde yer veren eserlerden biridir. Kitaptaki “Doğal Türetim (Çıkarım)” başlığının kullanımının doğal türetim ile çıkarım arasında yaptığımız ayırmadan dolayı doğru buluyoruz. Bu bölümde sırasıyla önermeler ve niceleme mantığında doğal türetim konusu işlenmiştir. Önermeler mantığında doğal türetim için en fazla çıkarım kuralı ve kuralların açıklaması için örnek içeren kitaptır. Muhtemelen bu sebepten dolayı kitapta önermeler mantığı için ayrıca bir alıştırmaya ve çözümleri yer almamaktadır. Nitekim niceleme mantığı için alıştırmaya ve çözümler mevcuttur. Sıraladığımız 2 ölçütü karşılamasa da konu anlatımı ve örnek çözümü açısından öğrencilerin faydalanabileceğinin en iyi kitaplardan birisidir.

2. Cengiz İskender Özkan - *Mantığa Giriş* (Say Yayınları, 2022)

“Doğal Dedüksiyon” başlığını taşıyan bölümde doğal türetim konusu işlenmiştir. Önermeler mantığı için konu çıkarım kuralları etrafında ele alınsa da niceleme mantığında doğal türetime yer verilmemesi kitabın en büyük eksikliğidir. Ancak kitapta niceleme mantığının hiç işlenmediği düşünüldüğünde, bu durum kitabın tutarlılığı açısından bir sorun teşkil etmemektedir.

3. Kamuran Gödelek - *Akıl Yürütmeye Dair (Mantık)* (Su Kitap Dünyası, 2003)

Kitapta “Doğal Türetim” başlığında bir bölüm bulunmaktadır. Önermeler mantığı için 8 çıkarım kuralından sadece birisi için örnek bulunmamaktadır. Örnek sayısı az ve alıştırmaların çözümü yoktur. Niceleme mantığı için tanımladığı 4 çıkarım kuralı için örnekleri mevcuttur. Ancak yine alıştırmaların çözümleri mevcut değildir.

4. Tarık Necati Ilgıcioğlu - *Sembolik Mantık* (Anadolu Üniversitesi, 2013)

Açık öğretim Fakültesi öğrencileri için yazılmış bu kitap, ölçütlerimize göre *eksiksiz* çıkan iki kitaptan birisi olmasına rağmen kitaba hâkim dil ve biçimsel dizgilerdeki matematiksel ifadelerin çokluğu konunun anlaşılmasını zorlaştıracak düzeydedir. Doğal türetim konusu “PF Biçimsel Sistemi” ve “PF^Q Biçimsel Sistemi” başlıkları altında incelenmiştir.

5. Aliyar Özercan - *Symbolic Logic Manual* (Metu Press, 2014)

Bu kitap, listemizdeki üç İngilizce kitaptan biridir. Önsözde, Kalish-Montague tarafından geliştirilen ispat yöntemini temel alarak sembolik mantık derslerine katkı sağlamak amacıyla hazırlandığı belirtilmektedir. Ayrıca, yazarın bu eserin, David Grünberg’in derslerinin genişletilmiş bir versiyonu olduğunu vurgulaması da dikkat çekicidir. Kitap, her ne kadar Kalish-Montague’nin *Logic: Techniques of Formal Reasoning* adlı eserindeki teoremlerin çözümlerini içeren bir alıştırmaya kitabı gibi görünse de Kalish-Montague yönteminin Copi ve Fitch yöntemlerine kıyasla daha karmaşık olması ve bu yönetime dair çok sayıda çözümlü alıştırmaya sunması bakımından önemli bir eserdir.

6. Yavuz Aksoy - *Modern Mantık (Sembolik Mantık)* (Yıldız Teknik Üniversitesi, 1995)

Listemizde yer alan bu eser, yine bir matematikçinin katkısıyla felsefecilerin eksik bıraktıkları modern mantığın matematiksel altyapısını sağlam bir zeminde temellendirmesi açısından son derece kıymetlidir. Kitapta, “Çıkarım Mantığı Usavurma (Akıl Yürütme)” başlıklı bir bölüm bulunmaktadır ve bu bölümde doğal türetim konusu ele alınmaktadır. Her ne kadar “doğal türetim” kavramsal olarak “çıkarım” ile karşılaşılsa da 46 sayfa uzunluğundaki bu bölümün ilk 20 sayfasında çıkarım kavramına dair teorik bilgiler sunulmakta ve çıkarımın semantik yönü açıklanmaktadır. Kalan sayfalarda ise “temel kalıplar” kavramı çerçevesinde toplamda çıkarım kuralları detaylı bir şekilde incelenmiştir.

7. Işık Bayar Bravo & Mustafa - *Modern Mantık* (Lisans Yayıncılık, 2017)

Kitabın önermeler mantığında doğal türetim bölümünü Cengiz İskender Özkan, niceleme mantığında ise doğal türetim konusunu Mustafa Yıldız kaleme almıştır. Önermeler mantığı bölümünde toplamda 20 çıkarım

kuralı sunulurken, bölüm sonunda yer alan alıştırmaların çözümleri bulunmamaktadır. Niceleme mantığı bölümünde ise çıkarım kurallarının ardından örneklerin çözümleri verilmiş, ancak bölüm sonunda yer alan son örneklerin çözümleri verilmemiştir. Bununla birlikte, kitabın önermeler mantığında ele alınan çıkarım kurallarının niceleme mantığında aynı sembol veya kısaltmalarla tekrarlanmaması, öğrenciler için anlatımı karmaşık hale getirebilir. Mesela, önermeler mantığında “hipotetik tasım” kuralı HT olarak kısaltılırken, niceleme mantığında bu kural TK olarak gösterilmiştir. Benzer şekilde, “basitleştirme” kuralı önermeler mantığında ΔT ile ifade edilirken, niceleme mantığı bölümünde $\Delta \mathcal{C}$ olarak sembolize edilmiştir.

8. Teo Grünberg - *Modern Logic* (Metu Press, 2002)

Bu kitapta, Kalish-Montague yöntemi takip edilerek türetim kuralları verilmiştir. Yazım dili İngilizcedir. Kitapta sadece önermeler ve niceleme mantığı değil aynı zamanda özdeşlik mantığında da doğal türetim konusu işlenmiştir.

9. Teo Grünberg - *Sembolik Mantık Cilt I* (Metu Yayıncılık, 2017)

Doğal türetim konusunda oldukça ayrıntılı bir içerik sunarak bu konunun derinlemesine incelendiği nadir eserlerden biridir. Kalish-Montague yöntemi ayrıntıları ile anlatılmaktadır. Kitapta önermeler mantığı ve niceleme mantığı kısımlarında “Türetim Yöntemi” başlıklı bölümler mevcuttur.

10. Yalçın Koç - *Introduction to Logic (Volume 1 - 2)*

Yalçın Koç’un İngilizce kaleme aldığı iki ciltlik mantık kitabında, Fitch tarzı doğal türetim yöntemi ele alınmıştır. Birinci ciltte yer alan önermeler mantığında doğal türetim konusu, “The Formal System PF (Fitch-style Natural Deduction)” başlığı altında işlenmiş; ikinci ciltte yer alan niceleme mantığında ise doğal türetim konusu, “The Formal System PFQ” başlığını taşımaktadır. Ayrıca, özdeşlik mantığında doğal türetim konusunun da ele alındığı bu eserde, çıkarım kuralları açıklanırken yeterli sayıda örnek verilmiş olmasına rağmen, bölüm sonunda alıştırmalar yer almamaktadır.

Özetleyecek olursak, Türkiye’de yayınlanmış mantık kitapları arasında doğal türetim konusuna verilen önem oldukça değişkendir. Çüçen, Ilgıcıoğlu, Grünberg (a) ve Koç’un kitapları, konuyu ele alış bakımından gerekli derinliği sunmaktadır. Ancak, Ilgıcıoğlu’nun kullanmış olduğu biçimsel dilin konuyu yeni öğrenenler için zorlayıcı olması, Grünberg’in yönteminin diğerlerine kıyasla daha karmaşık bir yapıya sahip olması ve Koç’un kitabının İngilizce yazılmış olması gibi nedenlerle, doğal türetim konusunu yeni öğrenmeye başlayanlar için Çüçen’in kitabı başlangıç seviyesinde temel bir kaynak olarak değerlendirilebilir. İncelediğimiz kitapların hiçbiri, doğal türetim yönteminin tarihi veya farklı türetim sistemlerinin kıyaslanması gibi konulara yer vermemektedir. Ancak, bu kitapların yazılış amacı böylesi bilgileri içermek olmadığından, bu durumu bir eksiklik olarak görmek haksızlık olacaktır. Yine de, Çüçen ve Özkan’ın doğal türetim yönteminin doğruluk tablosu veya çözümleyici çizelgeden farkını açıklayan bilgileri sunmaları, önemli bir katkı olarak değerlendirilebilir.

Sonuç

Bu çalışmada doğal türetim yönteminin tarihsel gelişimi, farklı doğal türetim sistemlerinin tanıtımı ve Türkiye’deki mantık kitaplarının bu konuya yaklaşımları incelenmiştir. 1930’larda literatürde biçimsel bir yapı kazanan ve 1950’lerin ortalarına doğru yaygınlaşan doğal türetim yöntemi, 1970’lerde Grünberg öncülüğünde Türkiye’de tanıtılmıştır. Ancak, aradan geçen yarım yüzyıldan fazla bir sürede doğal türetimin mantık literatürümüzde yeterince yer bulamamasının başlıca nedeni yöntemin karmaşıklığı veya gereksizliği değil, Türkiye’de modern mantık üzerine yazılmış eserlerin sayısının az olmasıdır. Ülkemizdeki mantık kitaplarının içerik bakımından büyük ölçüde birbirine benzediği göz önüne alındığında, mantık tarihi, yeni mantık sistemleri ve mantıktaki güncel gelişmeler gibi konularda önemli eksikliklerin bulunduğu görülmektedir.

Bu çalışmanın örtük bir amacı, ülkemizdeki doğal türetim yöntemlerine ilişkin eksiklikleri vurgulamaktır. İlk iki bölümde bu amacı genel hatlarıyla gerçekleştirmeye çalıştık. Ülkemizde modern mantık kitaplarında doğal türetim yöntemini incelediğimiz son bölümde, incelemeye dâhil etmediğimiz kitapların gerekçelerini açıkladık ve incelemeye dâhil ettiğimiz kitapları belirli ölçütlere göre karşılaştırdık. Bu ölçütler, doğal türetim yönteminin en iyi nasıl öğretilbileceği sorusu etrafında şekillendirilmiştir. Dolayısıyla, bu ölçütlerin tümünü karşılamayan kitapları eksik olarak nitelemediğimizi özellikle vurgulamak isteriz.

Son olarak, doğal türetim yönteminin yalnızca klasik iki-değerli mantıkta değil, modal mantık gibi daha karmaşık sistemlerde de bir ispat aracı olarak kullanıldığını belirtmek gerekir. Türkiye'deki mantık kitaplarının modal mantık konusunu yüzeysel olarak ele aldığı ve bu konuda kapsamlı bir ders kitabının bulunmadığı dikkate alındığında, doğal türetim yöntemi üzerine yazılacak daha pek çok mesele olduğu görülecektir. Doğal türetim yönteminin önemi dikkate alındığında, bu yöntemin Türkiye'deki mantık literatüründe daha fazla yer bulması gerektiği açıktır. Bu eksikliğin giderilmesi, yalnızca doğal türetim yönteminin değil, aynı zamanda bu yöntemin uygulandığı daha karmaşık mantık sistemlerinin de daha iyi anlaşılmasını sağlayacaktır.

Kaynakça

- Aksoy, Yavuz. *Modern Mantık (Sembolik Mantık)*. İstanbul: Y.T.Ü. Yayınları, 1995.
- Batuhan, Hüseyin ve Teo Grünberg. *Modern Mantık*. Ankara: METU Press, 1977.
- Bergmann, Merrie, James Moor ve Jack Nelson. *The Logic Book*. McGraw-Hill Education, 2013.
- Bostock, David. *Intermediate Logic*. Oxford: Oxford University Press, 1999.
- Bravo, Işıl Bayar ve Mehmet Yıldız. ed. *Modern Mantık*. İstanbul: Lisans Yayınları, 2017.
- Büyükkada, Samet. “1923-2023 Arası Yayınlanmış Mantık Kitapları” *Cumhuriyet’in 100. Yılında Türkiye’de Felsefenin Farklı Alanları* içinde, Editörler: Şafak Ural ve Serdar Saygılı. Ankara: Nobel Akademik, 2023.
- Cook, Roy T. *A Dictionary of Philosophical Logic*. Edinburgh: Edinburgh Univ Pr, 2009.
- Corcoran, John. “Aristotle’s Natural Deduction System” in *Ancient Logic and Its Modern Interpretations: Proceedings of the Buffalo Symposium on Modernist Interpretations of Ancient Logic, 21 and 22 April, 1972*, Editör: John Corcoran, 85-131. Dordrecht: Springer Netherlands, 1974.
- Çiçekdağı, Caner. *Formel Mantık*. Ankara: Elis Yayınları, 2019.
- Çüçen, Abdulkadir. *Mantık*. Bursa: Sentez Yayıncılık, 2015.
- Dummett, Michael. *The Logical Basis of Metaphysics*. Cambridge: Harvard University Press, 1991.
- Durand-Guerrier, Viviane ve Gilbert Arsac. “An Epistemological and Didactic Study of a Specific Calculus Reasoning Rule,” *Educational Studies in Mathematics* 60, sayı: 2 (Ekim 2005): 149-72. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-5614-y>
- Eroğlu, Mehmet Sait ve Kemal Ilgar Eroğlu. *Matematiksel Mantık*. İstanbul: Papatya Yayıncılık, 2016.
- Fitch, Frederic Brenton. *Symbolic Logic: An Introduction*. New York: Ronald Press Company, 1952.
- Gentzen, Gerhard. *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. Amsterdam: North-Holland Pub. Co., 1969.
- Gödelek, Kamuran. *Akıl Yürütmeye Dair (Mantık)*. İstanbul: Su Yayınları, 2003.
- Grünberg, Teo, David Grünberg, Adnan Onart ve Halil Turan. *Mantık Terimleri Sözlüğü*. Ankara: METU Press, 2003.
- Grünberg, T. *Sembolik Mantık El Kitabı, 1. Cilt: Temel Mantık*. Ankara: METU Press, 2000.
- . *Modern Logic*. Ankara: METU Press, 2002.
- Hilbert, David ve Wilhelm Ackermann. *Grundzüge der Theoretischen Logik*. Berlin Heidelberg, 1972.
- Ilgicioğlu, Tarık. *Sembolik Mantık*. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Yayınları, 2013.
- Indrzejczak, Andrzej. *Natural Deduction, Hybrid Systems and Modal Logics*. 1st bs. Springer Publishing Company, Incorporated, 2010.
- Jaśkowski, Stanisław. “On the Rules of Suppositions in Formal Logic” in *Polish Logic 1920–1939*, Editör: S. McCall, 232-58. Oxford: Oxford University Press, 1967.
- Kleene, Stephen. *Introduction to Metamathematics*. New York: Van Nostrand, 1952.
- Koç, Yalçın. *Introduction to Logic Vol. 1*. İstanbul: Boğaziçi Üniversitesi Yayınları, 1980.
- . *Introduction to Logic Vol. 2*. İstanbul: Boğaziçi Üniversitesi Yayınları, 1982.
- Köz, İsmail ve A. Çetin. ed. *Mantık*. Ankara: Grafiker Yayınları, 2016.
- Kutlusoy, Z. *Temel Sembolik Mantık*. Ankara: Art Basın Yayın, 2003.
- Lemmon, E. John. *Beginning Logic*. London: Nelson, t.y.
- Lukasiewicz, Jan. *Aristotle’s Syllogistic From the Standpoint of Modern Formal Logic*. Oxford: Clarendon Press, 1951.

Nesin, Ali. *Önermeler Mantığı*. İstanbul: Nesin Yayınevi, 2012.

Pelletier, Francis Jeffry ve Allen P. Hazen. "A History of Natural Deduction" in *Handbook of the History of Logic*, Editörler: Dov M. Gabbay, Francis Jeffry Pelletier ve John Woods, 11:341-414. *Logic: A History of its Central Concepts*. North-Holland, 2012.

Osman, Fikretliyar. *Modern Mantığa Giriş-I*. Bursa: Sentez Yayınları, 2014.

Özercan, A. *Symbolic Logic Manual*. Ankara: METU Press, 2014.

Özkan, Cengiz İskender. *Mantığa Giriş: Klasik ve Modern Mantık*. İstanbul: Say Yayınları, 2022.

Özlem, Doğan. *Mantık*. İstanbul: Notos Yayınları, 2011.

Prawitz, Dag. *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*. Upsala: Boktryckeri Aktiebolag, 1965.

Suppes, Patrick. *Introduction to Logic*. Princeton: Van Nostrand/Reinhold Press., 1957.

Şen, Zekai. *Modern Mantık*. İstanbul: Bilge Kültür Sanat, 2003.

Taşdelen, İskender. *Sembolik Mantık*. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Yayınları, 2016.

Tennant, Neil. *Natural Logic*. Edinburgh: Edinburgh University Press, 1978.

Ural, Şafak. *Temel Mantık*. İstanbul: Çantay Yayınları, 2011.

Yüksel, Yücel. *Tanzimat'tan Günümüze Türkiye'de Mantık Çalışmaları (Kitaplar-Makaleler)*. İstanbul: Atı Yayınları, 2013.

Zach, Richard. *Sets, Logic, Computation: An Open Introduction to Metalogic*. Independently Published, 2021.