



Pseudospektral Chebyshev yöntemi ile fonksiyonel dereceli çubukların deformasyon analizi

Deformation analysis of functionally graded rods by pseudospectral Chebyshev method

Özlem Cerit¹, Durmuş Yarımpaç^{2*}

¹Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Matematik Bölümü, ozlemcrt.148@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0570-2063>

²Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Matematik Bölümü, durmusyarimpac@osmaniye.edu.tr
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8763-1125>

MAKALE BİLGİLERİ

Makale Geçmişi:

Geliş 25 Ekim 2024
Revizyon 19 Şubat 2025
Kabul 25 Şubat 2025
Online 26 Mart 2025

Anahtar Kelimeler:

Deformasyon analizi, fonksiyonel dereceli çubuklar, pseudospektral Chebyshev yöntemi, Laplace dönüşümü, modifiye Durbin yöntemi.

ÖZ

Eksenel yönde değişken kesit alanına sahip fonksiyonel olarak dereceli çubuğun deformasyon analizi ele alınmıştır. Elastik modül ve yoğunluk gibi malzeme özelliklerinin aksel yönde derecelendirildiği varsayılmıştır. Bu koşullar, geleneksel analitik yöntemlerle çözülmesi zor olan değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklemle sonuçlanır. Laplace dönüşümü altında, kısmi diferansiyel denklem aksel yönde zamandan bağımsız bir sınır değer problemine dönüştürülmüş ve pseudospektral Chebyshev yöntemi ile çözülmüştür. Modifiye edilmiş ters Durbin yöntemi kullanılarak fiziksel uzaydaki yer değiştirmeler elde edilmiştir. Birleştirilmiş sayısal yöntemle elde edilen sonuçlar literatürle doğrulanmıştır. Rastgele seçilen malzeme karışımının yer değiştirme dağılımları üzerindeki etkileri tartışılmıştır.

ARTICLE INFO

Article history:

Received 25 October 2024
Received in revised form 19 February 2025
Accepted 25 February 2025
Available online 26 March 2025

Keywords:

Deformation analysis, functionally graded rods, Laplace transforms, modified Durbin method.

ABSTRACT

Deformation analysis of functionally graded rods with variable cross-sectional area in axial direction are considered. Material properties such as elastic modulus and density are assumed to be graded in axial direction. These conditions result in partial differential equation with variable coefficients which are difficult to solve by conventional analytical methods. Under Laplace transform, partial differential equation is transformed into a time-independent boundary value problem in axial direction and solved by pseudospectral Chebyshev method. Displacements in physical space are obtained by using modified inverse Durbin method. The results obtained by combined numerical method are verified with literature. Effects of randomly selected material mixture on displacement distributions are discussed.

Doi: 10.24012/dumf.1573732

* Sorumlu Yazar

Giriş

Günümüz mühendislik tasarımlarında, gerekli yapısal performansı elde etmek için homojen olmayan malzemelerin kullanımı yaygınlaşmıştır. Homojen olmayan yapısal elemanların (çubuklar, kirişler, şaftlar, borular, tüpler, vb.) deformasyon analizi, özellikle mühendislik tasarımında oldukça önemlidir. Bu elemanların mühendislik uygulamalarındaki potansiyel kullanımları arasında havacılık araçları, motor parçaları, füzyon enerjisi cihazları ve diğer mühendislik yapıları yer alır. Homojen olmayan elemanların kullanımı, tasarımcının ağırlık ve gerilme yoğunluğu faktörlerini azaltmasına; kalıntı gerilme dağılımını, yüksek sıcaklığa dayanıklılık yeteneğini ve yapıların mukavemeti ile kararlılığını iyileştirmesine yardımcı olabilir. Malzeme özellikleri, oluşturdukları yapıların davranışını iyileştirecek şekilde tasarlanabilir. Farklı uygulamalardaki bu yapıların miktarı arttıkça, homojen olmayan elemanlardan yapılmış yapısal bileşenleri tasarlamak ve analiz etmek için karakterizasyon açısından farklı teknikler ile metodolojilerin kullanılması gerekir.

Bu çalışmada fonksiyonel dereceli ve değişken kesitli çubukların uzunlamasına deformasyon analizi ele alınmıştır. Çeşitli çubuk türlerinin uzunlamasına deformasyon ve titreşim analizi hakkında literatürde birçok makale yayınlanmıştır. Bunlardan bazıları kronolojik sıralamaya göre verilmeye çalışılmıştır.

Eisenberger [1], değişken kesitli bir çubuğun uzunlamasına titreşim analizi için analitik bir çözüm sunmuştur. Bu analitik yöntemin, kesit alanındaki ve eleman boyunca kütle dağılımındaki herhangi bir polinom varyasyonu için uygun olduğu gözlemlenmiştir. Abrate [2], değişken kesitli çubuk ve kirişlerin hareket denklemlerini, basit bir dönüşümle düzgün çubuk veya kiriş için hareket denklemine dönüştürmüştür. Keyfi kesit ve sınır koşullarına sahip değişken kesitli kirişlerin serbest titreşimini analiz etmek için tek terimli Rayleigh-Ritz yaklaşımını kullanmıştır. Çeşitli sınır koşullarına sahip değişken kesitli kirişlerin doğal frekansını tahmin etmek için basit formüller sunmuştur. Kumar ve Sujith [3], polinom ve sinüzoidal kesit alanına sahip uzunlamasına çubukların hareket denklemini, uygun dönüşümler altında analitik olarak çözülebilir diferansiyel denkleme indirgeyip analitik çözümü elde etmişlerdir. Çeşitli sınır koşullarına sahip değişken kesitli çubukların doğal frekanslarını elde etmek için Bessel, Neumann ve trigonometrik fonksiyonlardan yararlanmışlardır. Gürgöze [4], bir yay-kütle sisteminin açıklıkta tutturulduğu bir uç kütle taşıyan uzunlamasına titreşen bir çubuğun frekans denklemini ele almıştır. Frekans denklemi oluşturulduktan sonra Dunkerley prosedürüne dayalı olarak temel frekans için yaklaşık bir formül verilmiştir. Li [5], değişken kesitli çubukların uzunlamasına titreşimini modelleyen denklemleri, basit kuvvet ve üstel fonksiyon dönüşümleri ile Bessel denklemlerine dönüştürerek analitik olarak çözmüştür. Bu çubukların doğal frekans ve mod tahmini için basit formüller verilmiştir. Kademeli değişken kesitli serbest çubuklar [6] ile kütle ve yay destekli çubuklar [7] için benzer

araştırmaları yapmıştır. Turhan [8], kesit alanındaki süreksizliğin, uzunlamasına titreşen çubukların özdeğerleri üzerindeki etkisini incelemiştir. Özdeğerlerin ve özvektörlerin, kesit değişiminin konumu ve büyüklüğüne bağımlılığının belirli genel özellikleri belirlenmiş ve bu işlevsel bağımlılığı yaklaşık olarak tanımlayan kapalı form formüller önerilmiştir. Gürgöze ve Erol [9], farklı fiziksel parametrelere sahip birkaç parçadan oluşan ve dış viskoz sönümlemeye tabi tutulan, uç kütle taşıyan sürekli bir çubuğun özdeğerlerini değişkenlerine ayırma yöntemi ile analitik çözen iki yöntem sunmuşlardır. Raj ve Sujith [10], değişken kesitli çubukların uzunlamasına titreşim analizini analitik olarak çözmüşlerdir. Birleşik hipergeometrik fonksiyon açısından çözümler veren kesit alan değişimleri aranmış ve sistemi idare eden diferansiyel denklem, genel bir dönüşüm kullanılarak birleşik hipergeometrik diferansiyel denkleme uygun şekilde indirgenip çözüm elde edilmiştir. Genel sınır koşullarında belirli kesit alan değişimlerine sahip çubukların özdeğerleri analitik olarak elde edilmiştir. Cortes ve Elejabarrieta [11], özellikleri frekansa bağlı olan ve üstel bir modelle modellenip kompleks bir rijitlikle karakterize edilen bir sönümleyiciye sahip çubuğun mekanik davranışına ilişkin bir çalışma sunmuşlardır. Çalışmalarında, karmaşık özdeğerler ve mod şekillerini analiz edip çubuğun harmonik bir uyarılmaya maruz kaldığında zorlanmış tepkisini incelemişlerdir. Kesit alan denkleminde türetilen kompleks özdeğer problemi Nelder-Mead optimizasyon yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Al Kaisy vd. [12], serbest ve kenetlenmiş sınır koşulları altında değişken kesitli çubuğun boyutsuz doğal frekansı ve normalize edilmiş mod şekillerini diferansiyel kareleme yöntemi ile elde etmişlerdir. Değişken kesit alanının titreşim üzerindeki etkisini incelemişlerdir. Promyslova [13], değişken kesitli konik, üstel ve katenoidal tipteki elastik çubukların uzunlamasına titreşimlerini incelemiştir. Farklı sınır koşullarında konsantratörlerin kazanç faktörleri için analitik ifadeler elde etmiştir. Özdeğer sayısı arttıkça kazanç faktör eğrilerinin, limit eğrilerine doğru eğilim gösterdiğini gözlemlenmiştir. Provatidis [14], serbestçe titreşen elastik yapıların özdeğer analizi için yeni bir kollokasyon yöntemi sunmuştur. Kuvvet serisi, Lagrange, Bernstein veya Chebyshev polinomları biçiminde tek boyutlu baz fonksiyonları kullanılarak deplasman yaklaşık olarak hesaplanmıştır. Farklı sınır koşulları için iyi sonuçlar elde edilmiştir. Calio ve Elishakoff [15], belirli bir malzeme yoğunluk dağılımına sahip uzunlamasına homojen olmayan çubuklar için kapalı form çözüm geliştirmişlerdir. Eksenel rijitlik ve malzeme yoğunluğunun dağılımları, trigonometrik fonksiyonlar cinsinden temsil edilmiştir. Belirli malzeme yoğunluğu için, varsayılan mod şekliyle uyumlu eğilme rijitliğini, doğal frekansların önceden seçilen değere eşit olduğu şekilde yeniden yapılandırmışlardır.

Yarimoğlu [16], Kumar ve Sujith [3]'ün düzgün olmayan uzunlamasına çubuğun analitik çözümünde sinüzoidal kesit alanına sahip doğal frekans değerlerindeki hata için aynı dergide bir düzeltme yayınlamıştır. Bahrami [17], Kumar ve Sujith [3] in düzgün olmayan uzunlamasına çubuğun analitik

çözümünde hem parabolik hem de sinüzoidal kesit alanına sahip doğal frekans değerlerindeki hata ile Yarimoğlu [16]'nu yapmış olduğu düzeltmedeki hata için aynı dergide bir düzeltme yayınlamıştır. Guo ve Yang [18], kararlı durumda değişken kesitli çubukların zorlanmış uzunlamasına titreşim analizini seri çözümü ile elde etmişlerdir. Celebi vd. [19], eksenel yüklenmiş homojen olmayan bir çubuğun elastik davranış problemini analiz etmişlerdir. Problemin çözümü Laplace uzayında elde edilmiş ve zaman uzayına ters dönüşüm Revidü teoremi kullanılarak yapılmıştır. Askari vd. [20], kübik doğrusal olmayan bir terime ve çubuğun eksen boyunca etki eden bir Winkler elastik kuvvetine sahip doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemle tanımlanan çubuğun titreşimini incelemişlerdir. Diferansiyel denklemi çözmek ve sistemin doğal frekansını elde etmek için homotopi analiz, enerji dengesi yöntemleri ile Hamilton yaklaşımını kullanmışlardır. Roody vd. [21], gerinim-yer değiştirme denklemine basitleştirme yapılmadan, sonlu gerinim geçiren farklı sınır koşullarına sahip bir çubuğun titreşimini incelemişlerdir. Sistemin modeli Green-Lagrange gerinimi, yapısal sönümlenme ve Hamilton prensibi kullanılarak oluşturulmuş ve ardından doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklem Galerkin yöntemi ile adi diferansiyel denkleme dönüştürülerek çözüm elde edilmiştir.

Celebi vd. [22], eksenel yönde keyfi olarak değişen malzeme özelliklerine ve kesit alanlarına sahip çubukların uzunlamasına titreşim analizini incelemişlerdir. Sistemi modelleyen değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklem, birleştirilmiş Laplace dönüşümü-tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ve modifiye edilmiş ters Durbin yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Bu birleşik yaklaşımla, doğal frekanslar ile mod şekillerinin belirlenmesine gerek kalmadan zorlanmış titreşim tepkisinin doğrudan elde edileceği belirtilmiştir. Kulterbaev vd. [23], sabit kesitli homojen çubukların serbest ve zorlanmış uzunlamasına salınımlarını ele almışlardır. Zorlanmış salınımlar için dağıtılmış ve yoğunlaştırılmış yükler dikkate alınmıştır. Aslan vd. [24], farklı sınır koşulları, uzunluk-yükseklik oranları ve malzeme değişim katsayılarının fonksiyon dereceli Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerinin sönümlü ve sönümsüz zorlanmış titreşimleri üzerindeki etkileri de parametrik olarak incelenmiştir. Demir [25], sabit-serbest uzunlamasına titreşen bir çubuk ile enine titreşen bir kirişin frekans denklemleri oluşturup Rayleigh oranı, Dunkerley formülü ve sürekli sistem modeli gibi çeşitli yöntemler kullanılarak doğal frekanslar elde edilmiştir. Babaei [26], yerel olmayan gerinim gradyanlı çubukların zorlanmış uzunlamasına titreşim analizini elde etmiş ve yerel olmayan, gerinim gradyanı ve klasik çubukların tepkisiyle karşılaştırmıştır. Sistemi yöneten denklemler boyuta bağlı kinematik ve genişletilmiş Hamilton ilkesi kullanılarak türetilmiştir. Bu çalışmada ilk defa harmonik dış yüklemeye maruz kalan, klasik ve klasik olmayan uzunlamasına çubukların zorlanmış titreşim davranışı sunulmuştur. Kondakçı vd. [27], değişken kesit alanlarına sahip homojen ve fonksiyonel olarak derecelendirilmiş çubukların serbest

eksenel titreşiminin analizi için analitik tabanlı sayısal bir yaklaşım önermişlerdir. Önerilen yaklaşım, Adomian ayrıştırma yöntemi, varyasyonel yineleme yöntemi ve homotopik bozulma yöntemi gibi analitik yaklaşım tekniklerine dayanmaktadır.

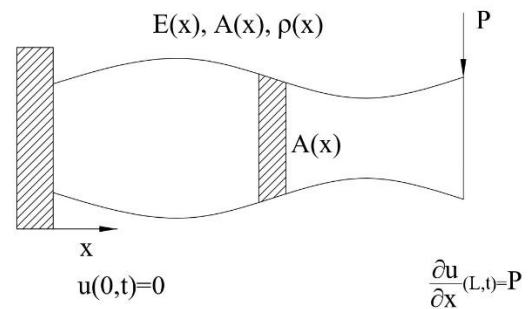
Sabit kesitli çubukların deformasyon analizi için literatürde analitik ve iyi bilinen bir takım çözümler mevcuttur. Ancak, kesit alanı çubuğun uzunluğuna göre değişiyorsa, sistemi modelleyen denklem, analitik çözümleri çok kısıtlı koşullar altında elde edilebilen değişken katsayılı diferansiyel denklem haline gelir. Değişken kesitli çubukların fonksiyonel dereceli bir yapı şeklinde oluşturulması, değişken katsayılı diferansiyel denklemi konvansiyonel yöntemlerle çözmeyi daha da zorlaştırır. Literatürden farklı olarak fonksiyonel dereceli ve değişken kesitli çubukların deformasyon analizi ilk defa bu çalışmada pseudospektral Chebyshev yöntemi ile incelenmiştir. Düşük hesaplama maliyetine, yüksek doğruluğa ve uygulama kolaylığına sahip bu yöntemle, diferansiyel denklem doğrusal bir denklem sistemine dönüştürülerek herhangi bir ayrıştırma yöntemiyle kolayca çözülebilir hale getirilir. Ayrıca farklı kesit alanları görselleştirilerek, deformasyonun kuvvet altındaki etkisi daha anlaşılır hale getirilmiştir. Elastik modülü ve yoğunluk gibi malzeme özelliklerinin yanında değişken kesit alanının çubuğun uzunlamasına yer değiştirmesi üzerine etkileri araştırılmıştır.

Materyal ve Yöntem

Dış eksenel yüklerin sadece uç yüklerden oluştuğu değişken kesitli fonksiyonel dereceli titreşen bir çubuğun eksenel dinamik davranışını yöneten kısmi diferansiyel denklem [22],

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[E(x)A(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] = \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

şekindedir. Burada $u(x, t)$ yer değiştirmeyi, $A(x)$ değişken kesiti, $E(x)$ elastic modülünü, $\rho(x)$ yoğunluğu, x eksenel yönü, t zamanı ve L çubuğun uzunluğunu göstermektedir. Değişken kesitli çubuğun temsili kesit alanı da Şekil 1'de verilmiştir.



Şekil 1. Değişken kesitli çubuğun temsili kesit alanı.

Genelliği bozmadan,

$$U(\eta, \tau) = \frac{u(x,t)}{L}, \quad \eta = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{ct}{L} \quad (2)$$

boyutsuz parametreleri kullanılarak değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklem (1) boyutsuz ve açık formda,

$$\frac{\partial U^2(\eta, \tau)}{\partial \eta^2} + \frac{1}{E(\eta)} \frac{\partial E(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial U(\eta, \tau)}{\partial \eta} + \frac{1}{A(\eta)} \frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial U(\eta, \tau)}{\partial \eta} = c^2 \frac{\rho(\eta)}{E(\eta)} \frac{\partial U^2(\eta, \tau)}{\partial \tau^2} \quad (3)$$

şeklinde elde edilir. Burada $c^2 = E_0/\rho_0$ uzunlamasına dalganın yayılımını ifade etmektedir.

Başlangıç anında herhangi bir etkinin olmadığı, sol ucu sabitlenmiş, serbest ucu ise dinamik aksenal kuvvet etkisi altında olduğu düşünülen çubuğun başlangıç

$$U(\eta, 0) = 0, \quad \frac{\partial U(\eta, 0)}{\partial \tau} = 0 \quad (4)$$

ve sınır koşulları [22],

$$U(0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial U(1, \tau)}{\partial \eta} = \frac{P(\tau)}{A(1)E(1)}. \quad (5)$$

şeklinde alınmıştır.

Laplace dönüşümü

Zorlanmış çubuğun lineer kısmi diferansiyel denklemindeki zamana bağımlılığı ortadan kaldırmak için Laplace dönüşümü kullanılmıştır. Boyutsuz kısmi diferansiyel denklemin (3) başlangıç koşulları (4) kullanılarak Laplace dönüşümü alınır,

$$\bar{U}'' + \left[\frac{E'}{E} + \frac{A'}{A} \right] \bar{U}' - \frac{s^2 c^2 \rho}{E} \bar{U} = 0 \quad (6)$$

Laplace uzayında aksenal yönde türevli adi diferansiyel denklem elde edilir. Burada $\mathcal{L}[U(\eta, \tau)] = \bar{U}(\eta, s)$ iken, $(\cdot)'$, η yönündeki türevi, s ise Laplace parametresini göstermektedir. Laplace uzayında dönüştürülmüş sınır koşulları ise,

$$\bar{U}(0, s) = 0, \quad \frac{\partial \bar{U}(1, s)}{\partial \eta} = \frac{\mathcal{L}\{P_1(\tau)\}}{A(1)E(1)} \quad (7)$$

şeklinde. Analizlerde, çubuğun serbest ucunda dinamik yükleme,

$$P_1(\tau) = P_0[1 - d \cos(\gamma \tau)] \quad (8)$$

biçimi dikkate alınmıştır [22]. Burada P_0 yüklemenin genliğini, d cosinüs fonksiyonunun genliğini, γ ise dairesel frekansı ifade etmektedir. $d = 0$ alındığında yükün sabit olduğu kolayca görülebilir.

Fonksiyonel dereceli malzeme modelleri

Fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemeler hem iç mekân hem de çevre koşullarına dayanıklı olacak şekilde üretilebilen ve lamine kompozitlere alternatif olarak ortaya

çıkan yeni nesil malzemelerdir. Bu malzemelerin bileşimi homojen olmayıp tüm özellikleri makroskobik anlamda bir yüzeyden diğerine sürekli olarak değişmektedir. Fonksiyonel dereceli çubukların mühendislik uygulamalarındaki potansiyel kullanımları arasında havacılık araçları, motor parçaları, füzyon enerjisi cihazları ve diğer mühendislik yapıları yer alır. Homojen olmayan elemanların kullanımı, tasarımcının ağırlık ve gerilme yoğunluğu faktörlerini azaltmasına; kalıntı gerilme dağılımını, yüksek sıcaklığa dayanıklılık yeteneğini ve yapıların mukavemeti ile kararlılığını iyileştirmesine yardımcı olabilir. Özel bir kompozit sınıfı malzeme kategorisinde olan ve üretilmesi daha zor olan bu malzemelerin, üretilmeden önce tanımlanması ve analizlerinin yapılması gerekir.

Bu çalışmada, malzeme gradyan parametrelerinin çubuktaki yer değiştirmeler üzerindeki etkilerini tespit etmek için iki farklı durum ele alınmıştır. Ayrıca değişken kesitli çubuğun da yer değiştirme üzerindeki etkileri iki farklı çubuk kesiti için incelenmiştir. Sabit kesit alanı literatür ile karşılaştırma için seçilmiş, sinüzoidal kesit alanı ise, kesitin sağ ve sol ucunu daha rahat kontrol edebilmek için tercih edilmiştir. Bu durumlar aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

Durum-1 Sabit kesitli parabolik malzeme modeli,

$$E(\eta) = E_0(1 + a\eta)^2, \quad \rho(\eta) = \rho_0(1 + a\eta)^2, \quad A = A_0$$

için sistemi modelleyen adi diferansiyel denklem Laplace uzayında

$$\bar{U}'' + \left(\frac{2a}{1+a\eta} \right) \bar{U}' - s^2 \bar{U} = 0 \quad (9)$$

şeklini alır.

Durum-2 Sinüzoidal kesitli parabolik malzeme modeli,

$$E(\eta) = E_0(1 + a_1\eta)^2, \quad \rho(\eta) = \rho_0(1 + a_2\eta)^2,$$

$$A(\eta) = A_0 \sin^2(b_1\eta + b_2)$$

için sistemi modelleyen adi diferansiyel denklem Laplace uzayında

$$\bar{U}'' + \left(\frac{2a}{1+a_1\eta} + 2b_1 \cot[b_1\eta + b_2] \right) \bar{U}' - \left(\frac{1+a_2\eta}{1+a_1\eta} \right)^2 s^2 \bar{U} = 0 \quad (10)$$

şeklini alır. Burada b_1 ve b_2 sırasıyla kesitin sol ve sağ ucundaki genliği kontrol etmek için kullanılan parametreleri göstermektedir.

Pseudospektral Chebyshev yöntemi (PCY)

Pseudospektral yöntemler, sözde yerleşim noktalarında kesin enterpolasyona izin veren ayrık fonksiyon yaklaşımlarına dayanır. Bu yöntemlerin en belirginleri, trigonometrik baz fonksiyonlarına dayanan Fourier yöntemi ile Chebyshev polinomlarına dayanan Chebyshev

yöntemidir. Fourier yöntemi, dolaylı olarak periyodik davranışların modellenmesinde kullanılır. Dolayısı ile serbest yüzey veya emici davranış gibi sınır koşullarının uygulanması zordur. Bir tür trigonometrik pseudospektral yöntem olan pseudospektral Chebyshev yöntemi, birinci tür Chebyshev polinomlarına dayanır. Periyodik olmayan sınır koşullarına sahip problemler için tercih edilmektedir [28-31]. Lagrange interpolasyonunda, Gauss-Lobatto interpolasyon noktaları

$$\eta_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (11)$$

bu polinomun sıfırları olarak alınır, hata en aza indirilir. Chebyshev yerleşim noktalarının sınırlarında ızgara yoğunluğu nedeniyle, problemin çözümünde daha az nokta kullanarak yüksek hassasiyette çözümler elde edilir. Lagrange interpolasyonu ile Gauss-Lobatto noktaları kullanılarak elde edilen diferansiyel matris D , sol taraftan bir kere $\bar{U}(\eta, s)$ vektörü ile çarpıldığında bu vektörün birinci türevine $\bar{U}'(\eta, s) = D_N \bar{U}(\eta, s)$, iki kere çarpıldığında bu vektörün ikinci türevine $\bar{U}''(\eta, s) = D_N^2 \bar{U}(\eta, s)$ karşılık gelir. Bu şekilde türevli ifadeleri yüksek hassasiyetli bir yaklaşım sağlarken, adi diferansiyel denklemi lineer denklem sistemine indirger. Pseudospektral Chebyshev yönteminin son zamandaki uygulamaları ve detaylı çözüm açıklamaları için [28-31] çalışmaları incelenebilir.

Sabit kesitli parabolik malzeme modeli için ikinci dereceden sınır değer problem (9) PCY kullanılarak,

$$M\bar{U} = 0 \quad (12)$$

$$M = D^2 + \left(\frac{2a}{1+a\eta}\right)D - s^2$$

doğrusal bir sisteme dönüştürülür. Sinüzoidal kesitli parabolik malzeme modeli için ikinci dereceden sınır değer problem (10) PCY kullanılarak,

$$M\bar{U} = 0 \quad (13)$$

$$M = D^2 + \left(\frac{2a}{1+a\eta} + 2b_1 \cot[b_1\eta + b_2]\right)D - \left(\frac{1+a_2\eta}{1+a_1\eta}\right)^2 s^2$$

doğrusal bir sisteme dönüştürülür. Homojen lineer denklem sistemlerinin (13-14) aşikâr olmayan çözümü, sınır koşullarının (7), lineer sistemin ilk ve son satırına entegre edilmesi ile bulunur.

Modifiye Edilmiş Durbin Yöntemi

Laplace uzayında elde edilen yer değiştirme değerlerinin fiziksel uzaydaki sayısal değerlerinin ters dönüşüm formülleri ile bulunması zor ve pratik değildir. Bunun yerine sayısal değerlerin fiziksel uzaydaki değerlerini hesaplamak için modifiye edilmiş Durbin yöntemi kullanılmıştır [32]. Fourier cosinüs seri yaklaşımına dayanan ve Dubner ve

Abate'nin geliştirdiği ters dönüşüm yönteminden esinlenen bu yöntemde Fourier cosinüs ve sinüs seri yaklaşımları birlikte kullanılmıştır. Bu yöntemdeki sonuçların iyileştirilmesi için Narayanan [33] tarafından önerilen Lanczos faktörü her bir terimle ayrı ayrı çarpılmıştır. Yöntemin son zamandaki uygulamaları ve detaylı çözüm açıklamaları için [34-38] çalışmaları incelenebilir.

Bulgular ve Tartışma

Bu çalışmada, zorlanmış fonksiyonel dereceli bir çubuğun yer değiştirme analizi birleştirilmiş Laplace-Pseudospektral Chebyshev ve modifiye edilmiş ters Durbin yöntemi ile ele alınmıştır. Sinüzoidal ve sabit olmak üzere iki farklı eksene uç kuvveti dikkate alınmıştır.

Birleştirilmiş yöntemin doğruluğunu test etmek için analitik çözümün de mevcut olduğu sabit kesitli birinci durum literatürde mevcut olan analitik çalışma [19] ile farklı parametre değerleri için karşılaştırılmış, sonuçlar Tablo 1-2 de listelenmiştir. Tablo 1-2'deki sonuçlar incelendiğinde, uzunluk boyunca sadece 10 noktada yapılan hesaplamalar ile birleştirilmiş Laplace-Chebyshev-Durbin yöntemi ile yaklaşık sonuçların elde edildiği görülmüştür. Tablo 1-2'deki sonuçların sonsuzluk normuna göre hatası 0.002 civarındadır.

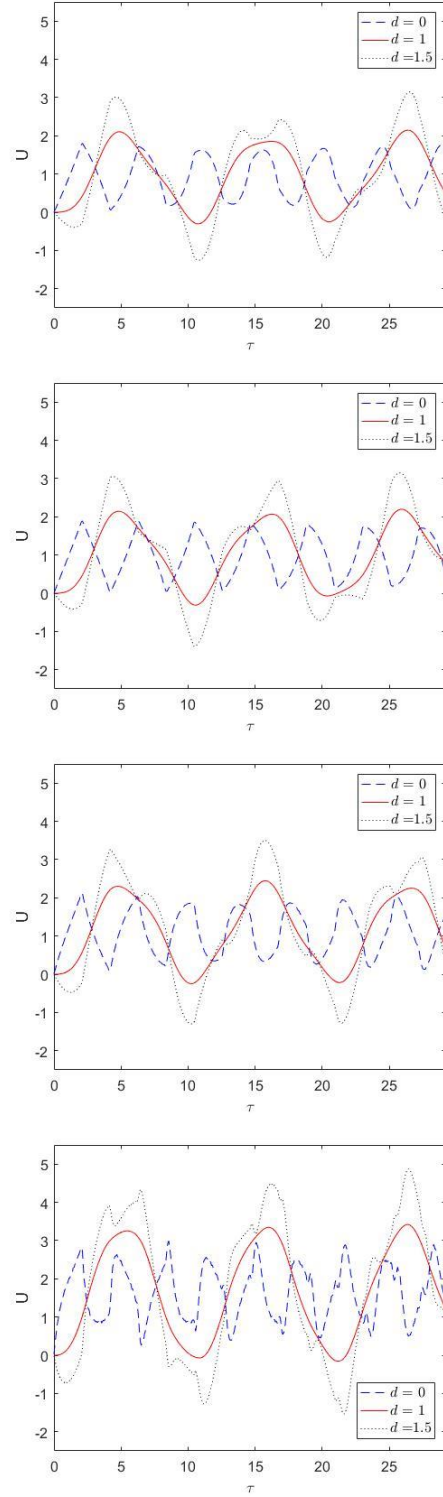
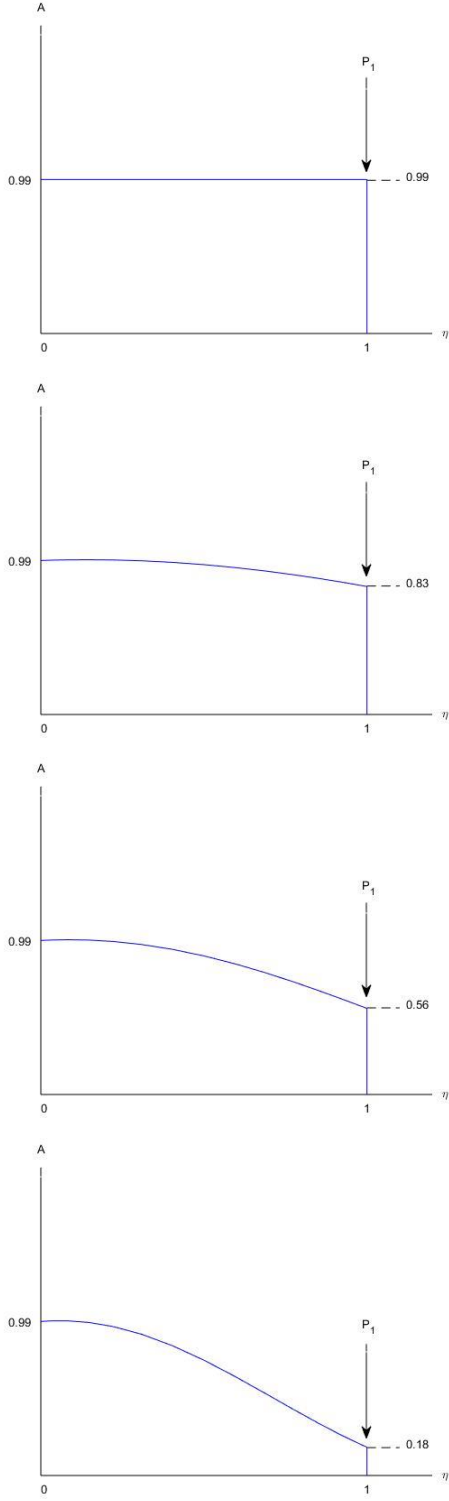
Tablo 1. Çubuğun yüklü ucundaki yer değiştirmenin, birinci durumda PCY ile analitik çözümün $P_1(\tau)$ yükü için karşılaştırılması ($a = 1, \gamma = 0.6$ ve $d = 1$).

τ	$U(1, \tau)$	
	PCY	Celebi vd. [19]
5	1.302633	1.304106
10	-0.037243	-0.037100
20	-0.100100	-0.099140
30	-0.086524	-0.084870
40	0.076120	0.078120
50	0.372020	0.374067

Tablo 2. Çubuğun yüklü ucundaki yer değiştirmenin, birinci durumda PCY ile analitik çözümün $P_1(\tau)$ yükü için karşılaştırılması ($a = 2, \gamma = 0.6$ ve $d = 1$).

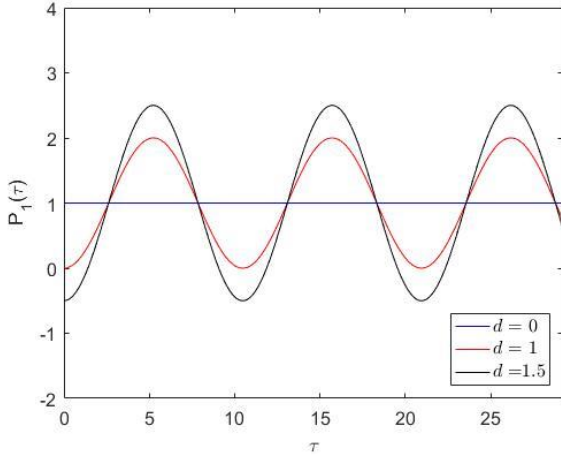
τ	$U(1, \tau)$	
	PCY	Celebi vd. [19]
5	0.880537	0.881667
10	-0.362467	-0.362710
20	0.058422	0.059314
30	-0.158132	-0.157670
40	0.215168	0.216752
50	0.189630	0.190822

Sinüzoidal kesitli parabolik malzeme modeli için malzemenin sertliğinin ve yoğunluğunun çubuğun uç kısmında doğru arttığı varsayılmış, bunun için $a_1 = 0.1$ ve $a_2 = 0.2$ alınmıştır. Ayrıca sayısal analizde işlem kolaylığı için $P_0 = 1$ ve $A_0 = 1$ alınmıştır. Şekillerin daha düzgün görünmesi için analizde 12 örgü noktası kullanılmıştır.

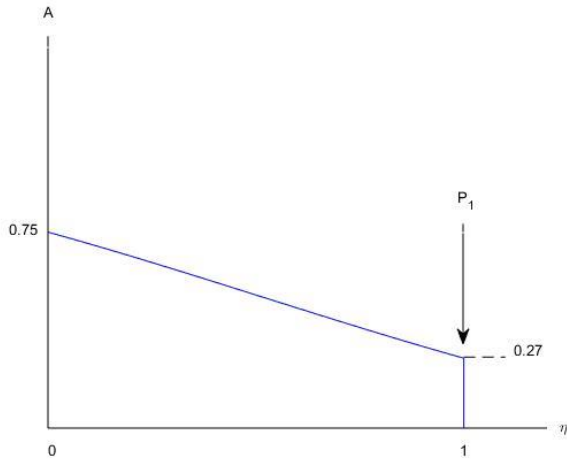
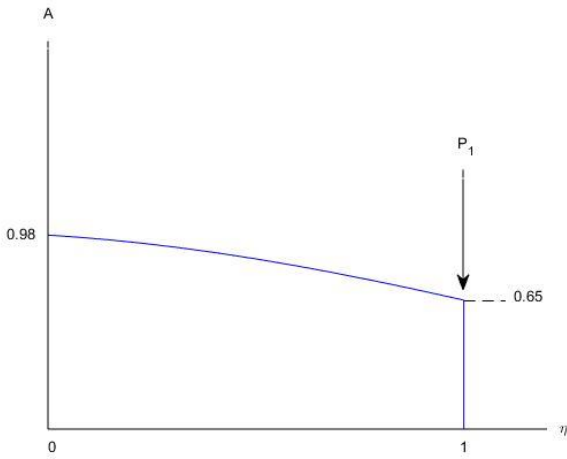


Şekil 2. Dinamik yük altında ($P_1(\tau)$), Durum 2 için farklı kesit alan profilleri. Yukarıdan aşağıya doğru $b_1 = 0, 0.5, 0.8, 1.2$. ($b_2 = 1.5, \gamma = 0.6$).

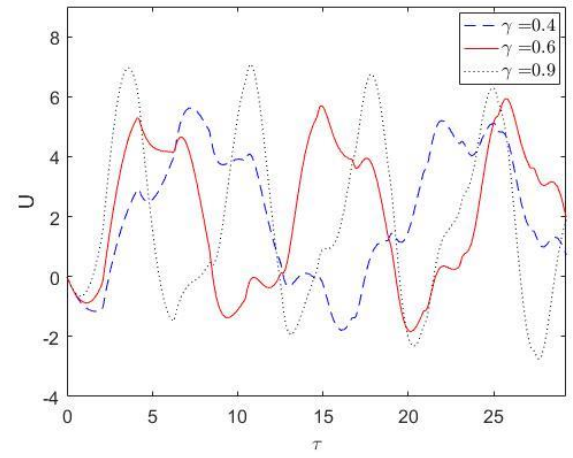
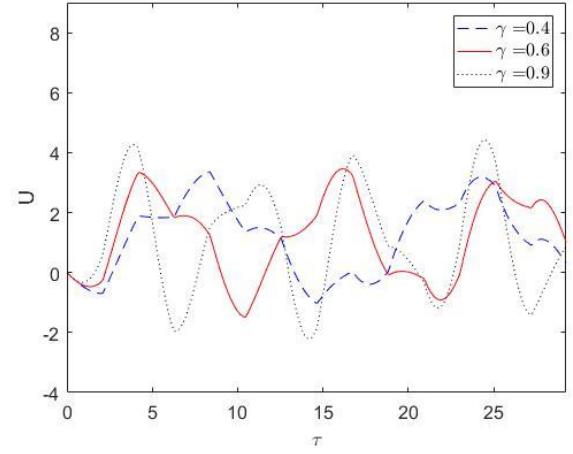
Şekil3. Dinamik yük altında ($P_1(\tau)$), Durum 2 için boyutsuz uç yer değiştirmenin farklı genliklerde zaman boyunca solda karşılık gelen kesitler (Şekil 2) için davranışı ($b_1 = 0, 0.5, 0.8, 1.2, b_2 = 1.5, \gamma = 0.6$).



Şekil 4. Çubuğun ucuna uygulanan $P_1(\tau)$ yükünün farklı genlikler için davranışı ($\gamma = 0.6$).



Şekil 5. Dinamik yük altında ($P_1(\tau)$), Durum 2 için farklı kesit alan profilleri. Yukarıdan aşağıya doğru $b_2 = 1.7, 2.1$ ($b_1 = 0.5, d = 1.5$).



Şekil 6. Dinamik yük altında ($P_1(\tau)$), Durum 2 için boyutsuz uç yer değiştirmenin farklı dairesel frekanslarda zaman boyunca Şekil 5'e karşılık gelen kesitler için davranışı ($b_1 = 0.5, b_2 = 1.7, 2.1, d = 1.5$).

Farklı kesit alanları (Şekil 2) ve farklı genlikli yükleme tipleri (Şekil 4) için çubuğun serbest ucundaki yer değiştirme grafikleri Şekil 3'de verilmiştir. Şekil 3'te $d = 0$ değeri sabit yüklemeye karşılık gelmektedir. Analizlerde $P_1(\tau)$ yükü için dairesel frekans sabit olmasına rağmen ($\gamma = 0.6$), yüklemenin genliği arttıkça ($d = 1, 1.5$) zamana bağlı yüklemenin periyod değeri ile deplasmanın genliği artmaktadır. Sabit yükleme durumunda ($d = 0$), titreşimin periyod değeri ile genliğinin zamana bağlı yüklemelere ($d = 1, 1.5$) göre daha düşük olduğu görülmüştür. Çubuğun uç noktasında kesitin daralmasıyla yer değiştirmenin genliğinde artış görülürken, hareketin de düzensizleştiği görülmüştür.

Şekil 6'te yüklemenin genliği sabit tutulurken ($d = 1.5$), daralan kesit alanlı çubuklar (Şekil 5) için farklı dairesel frekanslarda çubuğun serbest ucundaki yer değiştirme grafikleri verilmiştir. Dairesel frekans değeri arttıkça, hareketin periyod değeri azalırken, genlikte artış gözlemlenmiştir. Çubuğun uç noktasında kesitin daralmasıyla ($b_1 = 0.5, b_2 = 2.1$), hareketin periyodunda bir değişiklik gözlemlenmezken yer değiştirme genliğinde artış görülmüştür.

Sonuç

Bu çalışmada, fonksiyonel dereceli ve değişken kesitli çubukların deformasyon analizi ele alınmıştır. Elastik modülü ve yoğunluk gibi malzeme özelliklerinin yanında değişken kesit alanı, yer değiştirme için değişken katsayılı diferansiyel denklem oluşturur. Analitik çözümleri çok kısıtlı koşullar altında elde edilebilen değişken katsayılı diferansiyel denklem, pseudospektral Chebyshev yöntemi ile çözülmüştür. Yöntemin doğruluğu için literatür ile karşılaştırma yapılmış, sınırlı örgü noktalarında yöntemin iyi sonuçlar verdiği görülmüştür. Farklı kesit alanları ve yükleme tipleri için çubuğun ucundaki yer değiştirme davranışı incelenmiş, çubuğun serbest ucu daraldığında titreşimin genliğinin arttığı gözlemlenmiştir. Analizde, dairesel frekans sabit alındığında, yüklemenin genliği arttıkça yüklemenin periyod değerinin de arttığı görülmüştür. Çubuğun kesitinin tamamındaki daralmanın ise daha yüksek genlikli titreşimlere sebep olduğu görülmüştür.

Etik kurul onayı ve çıkar çatışması beyanı

Hazırlanan makalede etik kurul izni alınmasına gerek yoktur. Hazırlanan makalede herhangi bir kişi/kurum ile çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Teşekkür

Bu çalışma Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi (BAP) destekli OKÜ BAP-2023-PT2-021 numaralı projenin ürünüdür.

Kaynaklar

- [1] M. Eisenberger, "Exact longitudinal vibration frequencies of a variable cross-section rod," *Appl. Acoust.*, vol. 34, pp. 123-130, 1991.
- [2] S. Abrate, "Vibration of non-uniform rods and beams," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 185, pp. 703-716, 1995.
- [3] B. M. Kumar, R. I. Sujith, "Exact solutions for the longitudinal vibration of non-uniform rods," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 207, pp. 721-729, 1997.
- [4] Gürgöze M., "On the eigenfrequencies of longitudinally vibrating rods carrying a tip mass and spring-mass in-span," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 216, no 2, pp. 295-308, 1998.
- [5] Q. S. Li., "Exact solutions for free longitudinal vibrations of non-uniform rods," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 234, pp. 1-19, 2000.
- [6] Q. S. Li., "Exact solutions for free longitudinal vibration of stepped non-uniform rods," *Appl. Acoust.*, vol. 60, pp. 13-28, 2000.
- [7] Li, Q.S, Wu, J. R., and Xu, J., "Longitudinal vibration of multi-step non-uniform structures with lumped masses and spring supports," *Appl. Acoust.*, vol. 63, pp. 333-350, 2002.
- [8] Ö. Turhan, "On the eigencharacteristics of longitudinally vibrating rods with a cross-section discontinuity," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 248, no 1, pp. 167-177, 2001.
- [9] M. Gürgöze, H. Erol, "On the eigencharacteristics of multi-step rods carrying a tip mass subjected to non-homogeneous external viscous damping," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 267, pp. 355-365, 2003.
- [10] A. Raj ve R.I. Sujith, "Closed-form solutions for the free longitudinal vibration of inhomogeneous rods", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 283, pp. 1015-1030, 2005.
- [11] F. Cortes, M.J. Elejabarrieta, "Longitudinal vibration of a damped rod Part I: Complex natural frequencies and mode shapes," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 48, no. 9, pp. 969-75, 2006.
- [12] A.M.A. Al. Kaisy, R.A. Esmaeel; M.M. Nassar, "Application of the differential quadrature method in the longitudinal vibration of non-uniform rods," *Eng. Mech.*, vol. 14, pp. 303-310, 2007.
- [13] A.S. Promyslova, "Longitudinal vibrations of elastic rods of variable cross-section (concentrators)," *Mechanics of Solids*, vol. 43, pp. 939-47, 2008.
- [14] C.G. Provatidis, "Free vibration analysis of elastic rods using global collocation.," *Arch. Appl. Mech.*, vol. 78, pp. 241-250, 2008.
- [15] I. Calio, ve I. Elishakoff, "Vibration tailoring of inhomogeneous rod that possesses a trigonometric fundamental mode shape," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 309, pp. 838-842, 2008.
- [16] B. Yardimoglu, Discussion on "Exact solutions for the longitudinal vibration of non-uniform rods," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, pp. 4107, 2010.
- [17] Bahrami, A. Comments on "Exact solutions for the longitudinal vibration of non-uniform rods" *Journal of Sound and Vibration*, vol. 442, pp. 843-844, 2019.
- [18] S. Guo, S. Yang, "Longitudinal vibrations of arbitrary non-uniform rods." *Acta Mech. Solida Sin.*, vol. 28, pp. 187-199, 2015.
- [19] K. Çelebi, İ. Keleş, N. Tütüncü, "Exact solutions for forced vibration of non-uniform rods by Laplace transformation," *Gazi University Journal of Science*, vol. 24, no 2, pp. 343-353, 2011.
- [20] H. Askari, E. Esmailzadeh, ve D. Younesian, "Nonlinear Longitudinal Vibration Solutions of an Elastic Rod," *Proceedings of the ASME 2013 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. Volume 4B: Dynamics, Vibration and Control*. San Diego, California, USA. November pp.15-21, 2013.
- [21] B.S. Roody, A.R. Fotuhi, M.M. Jalili, "Nonlinear longitudinal forced vibration of a rod undergoing finite strain," *Proceedings of the Institution of Mechanical*

- Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* vol. 232, no. 12, pp. 2229-2243, 2018.
- [22] K. Celebi, D. Yarimpabuç, T. Baran, "Forced vibration analysis of inhomogeneous rods with non-uniform cross-section" *J. Eng. Res.*, vol. 6, pp. 189-202, 2018.
- [23] K. Kulterbaev, L. Baragunova, M. Shogenova, "Free Transverse Oscillations of a Continuum-Discrete Vertical Rod," *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, vol. 459, p. 062096, 2020.
- [24] T. A. Aslan, A. R. Noori, B. Temel, "Fonksiyonel Derecelenmiş Malzemeli Kirişlerin Sönümlü ve Sönümsüz Zorlanmış Titreşim Analizi", *Çukurova Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi*, vol. 35(2), 497-510, 2020.
- [25] A. Demir, "The fundamental frequencies of longitudinally vibrating rods carrying tip mass and transversally vibrating beams carrying tip mass by using several methods," *Cumhuriyet Science Journal*, vol. 42, no. 1, 209-217, 2021.
- [26] A. Babaei, "Forced vibration analysis of non-local strain gradient rod subjected to harmonic excitations," *Microsyst Technol*, vol. 27, pp. 821-831, 2021.
- [27] K. Kondakci ve S.B. Coşkun, "Analysis of the Axial Vibration of Non-Uniform and Functionally Graded Rods via an Analytical-Based Numerical Approach," *Vibration*, vol.6, no.4, pp.876-894, 2023.
- [28] A. Yıldırım, D. Yarimpabuç, K. Çelebi, "Transient thermal stress analysis of functionally graded annular fin with free base", *Journal of Thermal Stresses*, 43(9), 1138-1149, 2020.
- [29] M. Eker, D. Yarimpabuç, K. Çelebi, "Thermal stress analysis of functionally graded solid and hollow thick-walled structures with heat generation", *Engineering Computations*, Vol. 38(1), 371-391, 2021.
- [30] M. Eker, D. Yarimpabuç, "Thermomechanical responses of functionally graded cylinders", *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, vol. 20(4):19-28, 2021.
- [31] A. Yıldırım, D. Yarimpabuç, V. Arikan, M. Eker, K. Celebi, "Nonlinear thermal stress analysis of functionally graded spherical pressure vessels", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 200, 104830, 2022.
- [32] F. Durbin, "Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method," *The Computer Journal*, vol. 17, pp. 371- 376, 1974.
- [33] G.V. Narayanan, "Numerical operational methods in structural Dynamics," Minneapolis, University of Minnesota, 1979.
- [34] F.F. Calim, "Free and forced vibration of non-uniform composite beams," *Composite Structures*, vol. 88, pp. 413-423, 2009.
- [35] F.F. Calim, "Free and forced vibration of non-uniform composite beams," *Composite Structures*, vol. 88, pp. 413-423, 2009.
- [36] N. Eratlı, H. Argeso, F.F. Calim, B. Temel, M.H. Omurtag, "Dynamic analysis of linear viscoelastic cylindrical and conical helicoidal rods using the mixed FEM," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 333, no. 16, pp. 3671-3690, 2014.
- [37] A.R. Noori, T.A. Aslan, B. Temel, "Damped transient response of in-plane and out-of-plane loaded stepped curved rods," *Journal of The Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol.40, no.1, 2018.
- [38] T.A. Aslan, A.R. Noori, B. Temel, "Dynamic response of viscoelastic tapered cycloidal rods," *Mechanics Research Communications*, vol. 92, pp. 8-14, 2018.