



Geomatik

<https://dergipark.org.tr/tr/pub/geomatik>

e-ISSN 2564-6761



Fibonacci kafesi ile harita projeksiyon deformasyonlarının değerlendirilmesi

Mevlüt Yetkin¹, Osman Sami Kırtıloğlu*¹, Mehmet Güven Koçak¹

¹İzmir Kâtip Çelebi Üniversitesi, Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi, Harita Mühendisliği Bölümü, İzmir, Türkiye, mevlut.yetkin@ikcu.edu.tr, osmansami.kirtiloglu@ikc.edu.tr, mehmetguven.kocak@ikcu.edu.tr

Kaynak Göster: Yetkin, M., Kırtıloğlu, O. S., & Koçak, M. G. (2025). Fibonacci kafesi ile harita projeksiyon deformasyonlarının değerlendirilmesi. *Geomatik*, 10 (1), 47-53

DOI: 10.29128/geomatik.1520825

Anahtar Kelimeler

Harita Projeksiyonları
Fibonacci kafesi
Deformasyon
Lambert Konform Konik
Projeksiyonu
Grid

Araştırma Makalesi

Geliş: 23.07.2024
Revize: 24.09.2024
Kabul: 27.09.2024
Çevrim İçi Yayınlanma:
02.11.2024



Öz

Bu çalışmada, projeksiyonlardan kaynaklanan deformasyonların değerlendirilmesinde kullanılan enlem-boylam gridi yerine geometrik ve izotropik özellikleri açısından daha uygun olan Fibonacci kafesinin kullanımı incelenmiştir. Fibonacci kafesi, küresel yüzeylerde daha homojen bir nokta dağılımı sağlayarak, ölçek deformasyon katsayılarının değerlendirilmesinde enlem-boylam gridine kıyasla daha yüksek performans sunmaktadır. Çalışma kapsamında her iki yöntemle oluşturulan modellemelerde, Lambert konform konik projeksiyonu ölçek deformasyon katsayıları değerlendirilmiştir. Yöntemler arasında karşılaştırma yapmak amacıyla farklı standart paralel seçimleriyle Türkiye için deformasyon ölçek katsayıları değerlendirilmiştir. Analizlerde, projeksiyon karakteristik deformasyon ölçütü Δk ile E_P ve E_G klasik deformasyon kestiricileri, $40^\circ 40' - 43^\circ 20'$, $35^\circ - 41^\circ$ ve $36^\circ 24' - 40^\circ 36'$ standart paralelleri için hesaplanmıştır. Karakteristik deformasyon ölçüt değerleri bu standart paraleller kullanılarak Fibonacci kafesi ile sırasıyla 2401.66, 1008.32, ve 544.14ppm olarak hesaplanmıştır. Benzer sonuçlar elde etmek için, coğrafi grid ile yaklaşık 10 kat fazla noktaya ihtiyaç duyulduğu belirlenmiştir. Fibonacci kafesinin daha düzenli nokta dağılımı sağladığı ve bu sayede deformasyon analizlerinde daha yüksek performansa sahip olduğu gözlemlenmiştir. Özellikle, daha az sayıda nokta ile daha yüksek doğrulukta modelleme yapılabilmesi, Fibonacci kafesinin öne çıkan avantajlarından biridir.

Evaluation of map projection deformations with Fibonacci lattice

Keywords

Map Projections
Fibonacci Lattice
Distortions
Lambert Conformal Conic
Projection
Grid

Research Article

Received: 23.07.2024
Revised: 24.09.2024
Accepted: 27.09.2024
Online Published:
02.01.2024

Abstract

In this study, the use of the Fibonacci lattice, which is more suitable in terms of geometric and isotropic properties, instead of the geographic grid used in the evaluation of deformations caused by projections, was examined. The Fibonacci lattice provides a more homogeneous point distribution on spherical surfaces, offering higher performance compared to the geographic grid in the evaluation of deformation coefficients. Deformation coefficients of the Lambert conformal conic projection were evaluated in models created using both methods. For comparison, deformation coefficients for Türkiye were evaluated with different standard parallel selections. In the analyses, the projection total deformation value Δk , E_P , and E_G deformation estimators were calculated for the standard parallels $40^\circ 40' - 43^\circ 20'$, $35^\circ - 41^\circ$, and $36^\circ 24' - 40^\circ 36'$. The total deformation values using these standard parallels were calculated as 2401.66, 1008.32, and 544.14 ppm with the Fibonacci lattice, respectively. It was determined that approximately 10 times more points were needed with the geographic grid to obtain similar results. It was observed that the Fibonacci lattice provides a more regular point distribution and thus has higher performance in deformation analyses. In particular, the ability to model with higher accuracy using fewer points is one of the prominent advantages of the Fibonacci lattice.

1. Giriş

3 boyutlu yeryüzünün harita düzlemine aktarılmasında kullanılan harita projeksiyonlarından kaynaklanan deformasyonların etkilerinin anlaşılması, çalışma alanı kapsamı ve harita üretim amacına uygun seçilmesi önemli bir konudur. Özellikle günümüzde yeşil enerji üretimi için uygun yer seçimi (Hasanzadeh vd., 2024), ormanların mekânsal-zamansal izlenmesi (Mahdavifard vd., 2023) ve yer kabuğunun sismik hareketlerinin izlenmesi (Sichugova ve Fazilova, 2024) gibi örneklerinin çok daha arttırılabileceği güncel ve kapsamlı çalışmalarda oluşturulan Coğrafi Bilgi Sistemleri (CBS) projelerinin tasarım aşamasında üstesinden gelinmesi gereken ilk adımlardan biridir. Deformasyonların çalışma alanına yayılımının incelenmesi ve buradan hareketle uygun projeksiyon seçiminde araç olarak kullanılması uzun yıllardır araştırılan bir konudur.

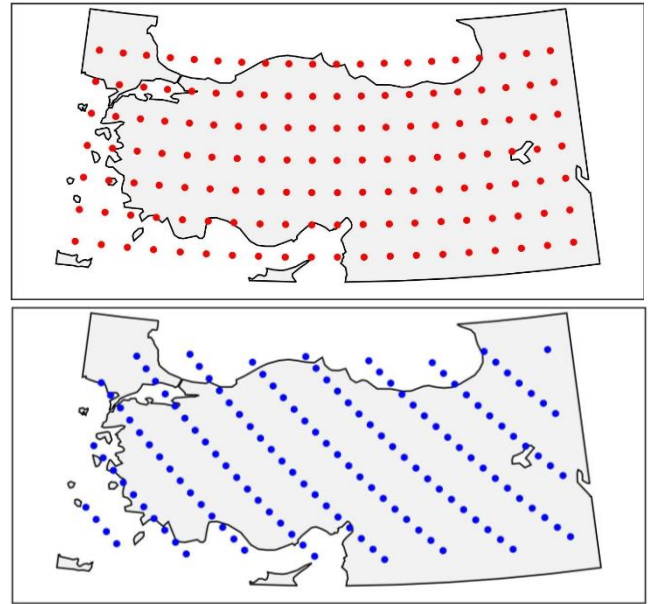
Çalışma alanına homojen olarak dağılmış ve yeteri sıklıkta belirlenmiş noktalarda projeksiyona ait deformasyon değerleri hesaplanarak dağılımları hakkında bilgi edinmek mümkündür. Bu noktaların belirlenmesindeki en klasik yöntem seçilen bir aralık değerinde ($1^{\circ} \times 1^{\circ}$ veya $5^{\circ} \times 5^{\circ}$ gibi) paralel ve meridyenlerin kesişim noktalarının oluşturduğu standart enlem-boylam gridini kullanmaktır. Her bir grid noktasının coğrafi koordinatları kullanılarak deformasyon değerleri hesaplanmakta ve bu sayede konum ve büyüklükleri ile değerlendirmeler yapılabilmektedir. Ancak, coğrafi koordinat sisteminin doğası gereği (meridyen yakınsamasından dolayı kutuplara gidildikçe noktaların birbirine yaklaşması) bazı durumlarda homojen ya da homojene yakın nokta dağılımının elde edilmesi mümkün olmamaktadır. Buradan hareketle, deformasyon analizlerinde çalışma alanına homojen dağılmış noktaların belirlenmesinde Fibonacci kafes noktalarının kullanılması gibi alternatif yöntemler geliştirilmiştir.

Hint-Arap rakamlarını Avrupa'da yaygınlaştıran ve daha önceden bilinen bir sayı dizisini batı dünyasına sunan İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci (1170-1250), Liber Abaci isimli eseriyle tanınmaktadır. Kendi adıyla bilinen Fibonacci dizisinde önceki iki sayının toplamı ile bu iki sayıdan sonra gelen sayı elde edilir. Söz konusu dizi ilerledikçe dizideki ardışık iki sayının oranı 1.618.... değerine ulaşmaktadır. Bu değer altın orandır ve geometride altın spiral olarak ifade edilebilen logaritmik bir spiral elde edilmesini sağlar. Doğada salyangoz kabuğu, kuş gagası veya pençesi, koç boynuzu ve fildişi gibi spiral örnekleriyle karşılaşmak mümkündür. Aynı şekilde ayçiçeğindeki tohumlarda, gül yapraklarında ve çam kozalağında görülen dizilişlerin matematiksel olarak ideal hali Fibonacci kafesidir. Fibonacci kafesi altın spiral ile üretilir. Fibonacci sayıları ile ilgili daha fazla bilgi Koshy (2001)'de bulunabilir.

Fibonacci kafesi standart enlem ve boylam değerleriyle temsil edilen noktaları üç boyutlu bir yüzey üzerine dengeli şekilde dağıtma problemini çözmek için kullanılacak görsel ve matematiksel açıdan uygun bir yöntemdir. Daha önce de ifade edildiği üzere, küresel sayısal modellemede yaygın olarak kullanılan yöntem standart enlem-boylam gridi oluşturmaktır. Bu

yöntemde birbirine en yakın komşuluktaki noktalar aynı enlem veya boylam değerlerine sahiptirler. Fibonacci kafesi ise küreyi spiral olarak sarar ve kafesi oluşturan noktaların en yakın komşuluğundaki diğer noktalar aynı enlem ya da boylam değerlerine sahip değildirler (Şekil 1).

Bu farklı yaklaşımların hangisinin örneklemede daha hızlı ve verimli olduğu üzerinde durulması gereken bir konudur. Fibonacci kafeslerinin alan belirleme problemindeki üstünlüğü González (2010) tarafından gösterilmiştir. Diğer taraftan harita projeksiyon deformasyonlarını değerlendirmek için Baselga (2018, 2019) Fibonacci kafeslerini araç olarak kullanmış ve standart enlem-boylam gridlerine göre daha az sayıda nokta ile hemen hemen aynı kalitede sonuç elde edildiğini göstermiştir. Ayrıca meridyen yakınsamasının standart enlem-boylam gridinin performansını düşürdüğünü ifade etmektedir.



Şekil 1. Standart enlem-boylam grid (üst) ve Fibonacci kafes noktalarının (alt) Lambert konform konik projeksiyon yüzeyindeki dağılımı.

Sonlu yarıçapa sahip eğri bir yüzeyin, sonsuz yarıçaplı düzlem üzerine izdüşümü sonucunda deformasyonlar kaçınılmazdır. İki yüzeyden birinin eğri olması doğal olarak harita projeksiyonlarında deformasyonların sebebidir. Bilindiği gibi projeksiyonun türüne göre alan ve açı (diferansiyel anlamda) deformasyonlar önlenebilmektedir. Bunun dışında doğrusal deformasyon adı verilen bir deformasyon türü daha vardır (Snyder 1987; Baselga 2018). Bu bağlamda ölçek deformasyon faktörü hesaplanabilir (Burkholder, 2008). Ülkemizde yaygın şekilde kullanılan Lambert konform (ülkemizde açı koruyan olarak da ifade edilmektedir) konik projeksiyonunda da doğrusal deformasyon faktörleri dışında Gilbert (1974) ve Peters (1975) tarafından geliştirilen ölçütler kullanılarak izdüşüm sonucu meydana gelen deformasyonlar hakkında fikir elde edilebilmektedir.

Altın oran sayesinde bir Fibonacci spirali kurulduktan sonra bu spiral yardımıyla, ilgilenilen coğrafi bölgeyi homojen bir şekilde kapsayan bir Fibonacci kafesi

oluşturulabilir (Swinbank ve James Purser, 2006; Keinert vd., 2015). Bu çalışmada, altın orana yaklaşan Fibonacci sayı dizisine dayalı bir altın spiral düzenleyerek, Türkiye'yi homojen bir şekilde kapsayan bir kafes oluşturulması önerilmektedir. Elde edilen kafes enlem ve boylam değerleri bilinen noktalardan oluşmaktadır. Daha sonra Lambert konform konik projeksiyonunda, standart paralel seçimlerinin karakteristik deformasyon ölçütüne etkisini de araştırmak amacıyla 40°40'–43°20', 35°–41° ve 36°24'–40°36' gibi 3 farklı standart paralel tercihiyle ilerleyen bölümlerde detayları açıklanan Δk , E_P ve E_G klasik deformasyon kestiricileri her bir tercih için ayrı ayrı hesaplanarak küresel sayısal modellemede, Fibonacci kafesiyle standart enlem-boylam gridinin performansları karşılaştırılmıştır. Kuzey-güney uzanımlı alanlarda meridyen yakınsamasından dolayı standart enlem-boylam gridinin deformasyon araştırmalarında kullanılmasının bir dezavantaj olduğu, daha önce de açıklandığı üzere González (2010) tarafından ortaya konmuştur. Türkiye gibi doğu-batı uzanımına sahip alanların haritalarının üretimi için deformasyon araştırmalarında, standart enlem-boylam grid noktaları yerine fibonacci kafesi noktalarının deformasyon araştırmalarında kullanılmasının avantaj ve dezavantajları ortaya konmaya çalışılmıştır. Bu sayede gelecekte herhangi bir çalışma alanı için deformasyon araştırması yapacak araştırmacılara, örneklem noktası üretiminde kullanılacak alternatif yöntemler için rehber olması amaçlanmıştır.

2. Yöntem

2.1. Fibonacci kafesi

Enlem-boylam gridi oluşturulurken yüzey, enlem ve boylam doğrultusunda seçilen bir δ grid aralığında noktalara temsil edilir. Örnek olarak küre yüzeyi için ekvator boyunca elde edilen grid aralığının metrik değeri meridyen doğrultusundaki grid aralığı değerine eşittir. Bu istisna dışında diğer konumlarda, ekvatoran kutuplara doğru meridyenlerin yakınsaması nedeniyle meridyen doğrultusundaki grid aralığı değeri sabit kalırken buna dik boylam doğrultusundaki değer küçülür. Bunun sonucunda kutuplara doğru nokta sıklığı artar ve homojen olmayan bir nokta dağılımı ile karşılaşılır.

Yeryüzünde istenen metrik bir aralıkta grid üretilmek istendiğinde seçilen çalışma alanının kutba uzak konumu için grid aralığı belirlenmesi ve bu değer tüm çalışma alanına uygulanması gerekir. Bu yaklaşımla, olması gerekenden daha fazla sayıda nokta elde edilmiş olacaktır. Enlem-boylam gridinden farklı olarak Fibonacci kafesi ile homojen dağılımda ve seçilen bir nokta çevresindeki noktalara hemen hemen eşit uzaklıkta bir nokta ağı elde edilebilmektedir. Burada da Fibonacci sayı dizisinde geçerli olan ardışık sayılar arasındaki;

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F_{i+1}}{F_i} = C \quad (1)$$

altın oran değerinden yararlanılır. Bu sayıdan, sayının tersi çıkarıldığında 1 sayısı elde edilir. Buna göre altın oranın sayısal değeri

$$C = 1 + \frac{1}{C} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618034 \quad (2)$$

şeklinde bulunur. Homojen nokta dağılımına sahip Fibonacci kafesi elde edebilmek için enlem-boylam gridinden farklı olarak kafesi oluşturan ardışık noktaların aynı enlem veya boylam doğrultusunda olmaması gerekir. Bunu sağlamak üzere spiralden yararlanılır. Örnek olarak spiralin ilk noktasının boylamı ile bir sonraki noktanın boylamı arasında $360 \cdot C^{-1} \approx 222.5^\circ$ sabit farkı korunur. Elde edilmek istenen toplam grid nokta sayısı N 'e bağlı olarak Fibonacci kafes konumları:

$$\varphi_i = \arcsin\left(\frac{2i}{2N+1}\right) \times \frac{180^\circ}{\pi} \quad (3)$$

ve,

$$\lambda_i = 360^\circ \times \frac{\text{mod}(i, C)}{C} \quad (4)$$

eşitlikleriyle bulunur. Burada tamsayı olmak üzere $i = -N, -N+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N$ şeklindedir. $\text{mod}(i, C)$ fonksiyonu i sayısının C ile bölümünden kalan değeri verir ve böylece spiraldaki gereksiz tekrarları (yani her spiral dönüşü için 360° 'lik ilave değerleri) ortadan kaldırmaktadır (Baselga, 2018). Örnek olarak $i = 10$ tamsayı değeri olması durumunda bu sayının C 'ye bölümü 6.1803398 reel sayısını verir. Elde edilen bu sayı alta doğru yuvarlanarak kalan değer $0.1803398 \times C$ bulunmuş olur. Yine bu değer (4) Eşitliğinde verildiği gibi 360° ile çarpılmasıyla boylam değeri hesaplanmaktadır.

Enlem-boylam gridi ve Fibonacci kafesleri görsel ve sayısal olarak Türkiye örneğinde karşılaştırılabilir. Bu amaçla Baselga'nın (2018) çalışmasında kullandığı N sayısı yardımıyla $35.76^\circ - 42.16^\circ$ kuzey enlemleri ve $25.62^\circ - 44.87^\circ$ doğu boylamları arasındaki çalışma alanındaki toplam Fibonacci kafes nokta sayısı 1267 olarak bulunmuştur. Aynı alan için grid aralığı $\delta=0.32^\circ$ olarak seçildiğinde standart enlem-boylam kafesi nokta sayısı 1281 elde edilir. Bu değer Fibonacci kafesi nokta sayısına yaklaşan en uygun değer olarak belirlenmiştir.

Enlem-boylam gridi ile Fibonacci gridinin geometrik özelliklerini karşılaştırmak üzere her bir grid için Delaunay üçgenlemesi oluşturulmuştur. Enlem-boylam gridi için elde edilen küresel üçgen kenarlarının medyan değeri $\delta=0.32^\circ$ 'ye karşılık gelen meridyen yayına eşit olarak bulunmaktadır ($R=6374$ km). Öte yandan Fibonacci kafesi için kenar medyan değeri enlem-boylam gridi ile bulunan değerden daha küçük olarak elde edilmektedir. Üçgen alanları karşılaştırıldığında da Fibonacci nokta kümesiyle oluşturulan üçgenler medyan olarak daha küçük elde edilmekte ve homojen izotropik bir yayılım göstermektedirler. Enlem-boylam gridinde Fibonacci kafesine göre daha fazla nokta bulunmasına

rağmen, kısa ve homojen dağılımda kenarlar aynı spiral üzerinde boylam değişimini altın oranla modelleyerek elde edilebilmektedir (Tablo 1).

Tablo 1. Delaunay üçgenleri sonucu oluşan parametreler.

Grid / Kafes	Nokta sayısı	Medyan Kenar [km]	Medyan Alan [km ²]
Enlem-Boylam	1281	35.6	492.7
Fibonacci	1267	32.7	465.4

2.2. Deformasyon hesaplamaları

Harita projeksiyonları eğriliği sıfırdan farklı bir yüzeyi düzlem üzerine iz düşürerek temsil ettikleri için çeşitli deformasyonlar yaratırlar. Bu deformasyonlar şekil, alan, uzunluk ve diferansiyel anlamda açıları içerebilir. Belirli bir coğrafi koordinata (enlem ve boylam) denk gelen deformasyonları hesaplamak için kullanılan genel bir yöntem, projeksiyonun matematiksel formüllerini ve türevlerini kullanarak Jacobi matrisini oluşturmak ve bu matrisin özelliklerini analiz etmektir (Snyder, 1987; Bildirici, 2017, 2019, 2023a). Matris elemanları, projeksiyon koordinatlarının enlem ve boylam açısından türevlerinin hesaplanmasıyla oluşturulmaktadır. Lambert konform konik projeksiyonu, normal konumlu konik bir projeksiyon olduğu için, deformasyonlar enleme bağlıdır ve Jacobi matrisi ile kısmi türevlerin çözümüne gerek yoktur. Başka bir deyişle Jacobi matrisi ve kısmi türevler deformasyonun hem enleme hem boylama bağlı olduğu projeksiyonlarda önemlidir ve bu çalışmada detayları verilmemiştir. Lambert konform konik projeksiyon için sadeleştirilmiş projeksiyon formülleri Bildirici (2023b) kaynağında detaylı olarak ele alınmaktadır. Aşağıda bu sadeleştirilmiş formüllere yer verilmiş olup, detaylı açıklamalarına ilgili kaynaktan ulaşılabilir.

Projeksiyon deformasyonlarını hesaplayabilmek için ilk olarak;

$$n = \frac{\sigma}{2\pi} \quad (5)$$

formülü ile küçültme faktörü hesaplanmalıdır. Burada σ koninin tepe açısıdır. Küredeki karşılığı 2π olup oranları boylamdaki küçülmeyi ifade eder. Konik ve azimutal projeksiyonlarda, coğrafi koordinatlar ve düzlem kutupsal koordinatlar $(m, \bar{\alpha})$ ilişkilendirilir. İşlem kolaylığı açısından enlem (φ) yerine kutup uzaklığı (δ) da ($\delta = \pi/2 - \varphi$) kullanılmaktadır.

$$\bar{\alpha} = n\lambda \quad (6)$$

$$m = f(\varphi) = f(\delta) \quad (7)$$

Coğrafi koordinatları (φ, λ) projeksiyon koordinatlarına (x, y) dönüştüren eşitlikler,

$$m_{or} = m(\varphi_{or}) \quad (8)$$

$$\bar{\alpha} = n(\lambda - \lambda_{or}) \quad (9)$$

$$x = m \sin \bar{\alpha} \quad (10)$$

$$y = m_{or} - m \cos \bar{\alpha} \quad (11)$$

şeklinde. Konik projeksiyonlarda düzlem kutupsal koordinatların orijini koni tepe noktasının izdüşümü, açısal başlangıç ise seçilen bir orta meridyen ya da başlangıç meridyenidir. φ_{or} ve λ_{or} , orijin olarak seçilen noktanın coğrafi koordinatlarını temsil etmektedir.

Konform özelliğe sahip projeksiyonlarda uzunluk deformasyonu her yönde sabittir. Meridyen ve paraleller yönündeki deformasyonlar eşitlenerek bir standart paralelli projeksiyonlar için,

$$n = \cos \delta_0 \quad (12)$$

$$m = R \frac{\tan \delta_0}{\tan^n \frac{\delta_0}{2}} \tan^n \frac{\delta}{2} \quad (13)$$

şeklinde, iki standart paralelli projeksiyonlar için;

$$n = \frac{\ln \sin \delta_2 - \ln \sin \delta_1}{\ln \tan \frac{\delta_2}{2} - \ln \tan \frac{\delta_1}{2}} \quad (14)$$

$$m = R \frac{\sin \delta_1}{n} \frac{\tan^n \frac{\delta_1}{2}}{\tan^n \frac{\delta_1}{2}} = R \frac{\sin \delta_2}{n} \frac{\tan^n \frac{\delta_2}{2}}{\tan^n \frac{\delta_2}{2}} \quad (15)$$

eşitlikleri kullanılır. Düzlem dik koordinatlara (10) ve (11) Eşitlikleri ile geçilmektedir. Uzunluk ve alan deformasyonları da;

$$h = k = \frac{mn}{R \sin \delta} \quad (16)$$

$$p = hk = k^2 \quad (17)$$

eşitlikleri ile hesaplanabilmektedir. Bu eşitliklerde h ve k , meridyen ve paraleller yönündeki deformasyonları p ise alan deformasyonunu temsil etmektedir. Yukarıda verilen projeksiyon eşitliklerinin detaylı açıklamalarına Bildirici (2023) kaynağından erişilebilmektedir.

Geçmişte aşırı doğrusal deformasyonların en aza indirilmesi (Rajaković ve Lapaine, 2010) ve Gilbert (1974) ve Peters (1975) tarafından önerilen çeşitli deformasyon ölçütlerinin en aza indirilmesi de dahil olmak üzere farklı optimizasyon kriterleri mevcuttur. Gilbert (1974) deformasyon ölçütünün hesabında,

$$E_G = \frac{(1-k)^2}{k} \quad (18)$$

eşitliğinin, Peters (1975) ise;

$$E_P = \frac{|1-k|}{|1+k|} \quad (19)$$

eşitliğinin kullanılmasını önermektedir. Diğer klasik deformasyon ölçütleri arasında [Airy \(1861\)](#) ve [Jordan \(1896\)](#) deformasyon hesaplamalarının, aşağıda sırasıyla eşitlikleri verilen ve konform projeksiyonlar için sadeleştirilmiş integral sonuçları bulunmaktadır.

$$e_{A2} = e_j = (k_i - 1)^2 \quad (20)$$

burada, e_{A2} Airy'nin, e_j ise Jordan'ın eşitliklerini ifade etmektedir. Konform projeksiyon özelliklerinden dolayı iki eşitlik de aynı sonucu vermektedir.

Pratikte, ortalama deformasyon değeri, bölgeyi n adet daha küçük alana bölerek, her birinin orta noktası için belirlenen doğrusal deformasyon faktörlerinin ortalamalarının hesaplanmasıyla bulunabilir ([Canters, 2002](#)). Buradan hareketle, bir projeksiyonun genel doğrusal deformasyonu, belirli bir n örnek noktası kümesi için doğrusal deformasyon faktörü k 'nin 1'e göre karesel farklarının hesaplanmasıyla elde edilen karakteristik deformasyon ölçütü Δk ile ifade edilebilir. Bu ölçüt konform özellikteki projeksiyonlar için Airy ve Jordan'ın eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilmektedir;

$$\Delta k = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i - 1)^2} \quad (21)$$

Yukarıda verilen [\(18-21\) Eşitliklerinin](#) detaylı açıklamalarına [Baselga \(2018\)](#) çalışmasında ulaşılabilir.

2.3. Türkiye örneği üzerinde uygulama

Türkiye gibi orta enlemlerde bulunan ve doğu-batı uzanımında genişleyen alanların haritalarının üretiminde konik projeksiyonların kullanımı uygundur. Lambert konform konik projeksiyonu bu anlamda Avrupa ve Türkiye'de parametreleri (standart paraleller ve orta meridyen) değiştirilerek yaygın olarak kullanılan konik projeksiyondur ve bu çalışmada enlem-boylam gridi ile Fibonacci kafesi değerlendirilmelerinde örnek olarak seçilmiştir. Parametre seçimi, deformasyonların haritası üretilecek alan üzerindeki dağılımını ve bu deformasyonların boyutlarının en aza indirgenmesi süreçlerinde etkin bir role sahiptir. Bu etkiler dikkate alınarak geçmişte, konik projeksiyonlar için standart paralellerin seçilmesine ilişkin birkaç temel kural önerilmiştir. Ekvatorial (veya alt) ve kutupsal (veya üst) standart paralellerin belirlenmesinde genel olarak aşağıdaki basit formüller kullanılabilir:

$$\varphi_1 = \varphi_{\min} + \frac{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}}{K} \quad (22)$$

$$\varphi_2 = \varphi_{\max} - \frac{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}}{K} \quad (23)$$

[\(22, 23\) Formüllerinde](#) φ_1 ekvatorial paralel, φ_2 kutupsal paralel, φ_{\max} haritası üretilecek alanın maksimum enlemi, φ_{\min} ise minimum enlemini ve K sabit bir sayıyı temsil etmektedir ([Maling 1992; Burgayevskiy ve Snyder 1995](#)). K katsayısının seçiminde haritası üretilecek

bölgeye göre farklı yaklaşımlar mevcuttur. Örneğin, [Hinks \(1912\)](#) K sabitini 7 olarak, [Deetz ve Adams \(1938\)](#) ise 6 olarak önermektedir. [Burgayevskiy ve Snyder \(1995\)](#) ile [Maling'de \(1960,1992\)](#) de yer aldığı üzere, [Kavrayskiy \(1934\)](#), farklı kapsamlara sahip bölgelerin haritalarının üretiminde dört farklı K değeri kullanımının optimum sonuçlar verdiğini önermiştir. Kuzey-güney yönünde genişleyen alanlar için K değerinin 5, doğu-batı uzanımlı alanlar için 7, dairesel veya eliptik hatlara sahip alanlar için 4 ve kare hatlara sahip alanlar için 3 olması gerektiğini savunmaktadır. [Kavrayskiy'in \(1934\)](#) önerisi dikkate alındığında, Türkiye için K değeri 7 olarak sınıflandırılabilir. Buna göre Türkiye'yi kuzey ve güney yönünde sınırlayan paralel dairelerin maksimum ve minimum enlem değerlerinin sırasıyla 42° ve 36° alınması durumunda $\varphi_1 = 36^\circ 51'$ ve $\varphi_2 = 41^\circ 8'$ değerleri elde edilmektedir. Kavrayskiy sabitleri, haritası üretilecek alanın orta meridyen boyunca simetrik olduğunu varsaymaktadır. Türkiye için bu değer 35° doğu boylamı olarak seçilmiştir. Bu ilk standart paraleller ve orta meridyen parametreleri yanı sıra, bu parametrelerin değişimiyle sonuçların nasıl etkileneceğini analiz etmek üzere sırasıyla $40^\circ 40' - 43^\circ 20'$ ve $35^\circ - 41^\circ$ standart paralelleri de hesaplamalarda kullanılmıştır. Burada orta meridyen parametresi sadece bilgi amaçlı verilmiştir. İncelenen Lambert Konform Konik projeksiyonunda, projeksiyonun gerçek anlamı ve normal konumlu olması nedeniyle, projeksiyondan kaynaklanan deformasyonlar yalnızca enleme bağlıdır.

Belirtilen son iki standart paralel çiftlerinden ilki Harita Genel Müdürlüğü tarafından üretilen Türkiye ve komşu ülkeler haritaları baz alınarak seçilmiştir. Bu haritalarda Türkiye'yi sınırlayan paralel ve meridyenler yerine daha büyük alanların haritasının üretiminde kullanılan standart paraleller kullanıldığı için deformasyonların görece daha büyük çıkacağı öngörülerek tercih edilmiştir. Bu sayede yapılacak karşılaştırmaların daha anlamlı olacağı düşünülmüştür. İkinci standart paralel çifti ise yine Harita Genel Müdürlüğü tarafından üretilen güncel Türkiye haritalarında kullanılan parametrelerden esinlenilerek seçilmiştir. Bu parametreler üretilen haritaların kenar bilgilerinde de sunulmaktadır ([Harita Genel Müdürlüğü, 2024](#)).

Deformasyon değerlerinin hesaplanacağı örnek noktalar için coğrafi grid ve Fibonacci kafesi noktalarının kullanılacağı daha önce ifade edilmiştir. Çalışmada ülkemiz için standart enlem-boylam grid aralığı (δ) 0.1° , 0.25° ve 0.32° olmak üzere 3 farklı şekilde oluşturulmuş ve bu durumda kafes noktalarının sayısı sırasıyla 12545, 2028 ve 1281 olarak elde edilmiştir. Diğer bir ifadeyle grid aralığı arttıkça örnek nokta sayısı azalmaktadır. Fibonacci kafesi kullanılması durumunda sözü edilen alan için örnek nokta sayısı 1267 adet olmaktadır. Kafesler oluşturulduktan sonra deformasyon değerleri (Δk) ppm olarak hesaplanmıştır. Fibonacci kafesi kullanılarak elde edilen deformasyon değeri üç standart paralel kümesinin her üç durumu için sırasıyla 2401.66, 1008.32 ve 497.62ppm'dir. Enlem-boylam gridi tercih edilmesi durumunda, $\delta=0.1^\circ$ aralığı seçildiğinde 12545 adet kafes noktası ile ilk iki kurulumda 2393.34 ve 504.77ppm gibi daha küçük Δk değerlerine ulaşılabilirken üçüncü kurulumda 558.59ppm elde

edilmiştir. δ değerinin 0.25° seçilmesi durumunda Δk değerleri sırasıyla 2467.50, 996 ve 506.16ppm ve 0.32° seçilmesi durumunda 2461.31, 1005.99 ve 523.81ppm olarak hesaplanmıştır. Daha düşük Δk değerlerine ulaşmak için standart enlem-boylam gridinde nokta sayısını 10 katına çıkarmak gerekirken Fibonacci kafesi

kullanarak 0.32° aralıklı enlem-boylam grid örnek noktalarıyla benzer nokta sayısında yaklaşık değerlerin elde edildiği görülmüştür. Uygulama sonuçları **Tablo 2'**de gösterilmektedir. E_G ve E_P klasik deformasyon kestiricilerinin de her üç kurulumda Δk değerine paralel sonuçlar verdiği görülmektedir.

Tablo 2. Farklı grid aralığına sahip enlem-boylam gridi ve Fibonacci kafesi için 3 farklı standart paralel çifti kullanılarak elde edilen deformasyonlar.

	Grid Aralığı	Nokta	SP(40°40', 43°20')			SP(35°, 41°)			SP(36°51', 41°8')		
			Δk	E_G	E_P	Δk	E_G	E_P	Δk	E_G	E_P
Enlem-Boylam Gridi	$\delta=0.10^\circ$	12545	2393.34	2.65	814.36	1004.56	0.48	344.91	504.77	0.026	81.18
	$\delta=0.25^\circ$	2028	2467.50	2.88	848.12	996.00	0.51	355.88	506.16	0.026	80.79
	$\delta=0.32^\circ$	1281	2461.31	2.76	831.48	1005.99	0.43	326.83	523.81	0.016	63.36
Fibonacci Kafesi		1267	2401.66	2.75	829.20	1008.32	0.52	359.77	497.62	0.031	88.49

*SP: standart paraleller

3. Sonuçlar

Özellikle orta enlemlerde kuzey-güney doğrultusundan ziyade doğu-batı doğrultusu boyunca uzak mesafelere uzanan orta veya büyük ölçekli bölgelerin haritalarının üretilmesinde, haritanın kullanım amacı da dikkate alınarak (konform özellik tercih edildiğinde) Lambert konform konik projeksiyonun seçimi, harita boyunca oluşacak deformasyonların yönetiminde optimum sonuçlar vermektedir. Bununla birlikte, haritası üretilecek alandaki deformasyonu en aza indirmek için iki standart paralel kullanmak gibi ek seçenekler de mevcuttur. Analiz sonuçları incelendiğinde, paralellerin doğru seçimiyle, karakteristik deformasyon ölçütü değerinin 4 kattan daha fazla düşük değerlerle elde edilebildiği açıkça ortaya çıkmaktadır. Harita projeksiyonlarında kaçınılmaz bir şekilde meydana gelen deformasyonlar doğrusal, alansal ve açısal olmak üzere üçe ayrılır. Lambert konform konik projeksiyon kullanılarak açısal deformasyonlar önlenemez. Ancak, doğrusal deformasyonlar üzerinde durulmalıdır. Birbirlerinden sonsuz küçük uzaklıkta olan bir nokta çifti için düzlem üzerindeki diferansiyel mesafenin referans yüzey üzerindeki orijinal mesafeye oranı ölçek deformasyon faktörü olarak adlandırılmaktadır.

Projeksiyon yapılan bölgeyi her birinin bir orta noktayla temsil edildiği daha küçük alanlara bölerek ortalama bir deformasyon ölçütü hesaplamak mümkündür. Nokta sayısı ve dağılımına dayanan bu kesikli yaklaşım yerine genel bir doğrusal deformasyon ölçütü hesaplanabilir. Bu bağlamda, çok sayıda nokta için doğrusal deformasyon faktörlerinin 1'e göre olan farklarının kareleri kullanılabilir. Bunun sonucu olarak hesaplanan deformasyon ölçütüne karakteristik deformasyon denilebilir. Doğrusal deformasyon faktörlerinin hesaplanacağı noktalar kümesinin elde edilmesinde standart enlem-boylam gridi veya Fibonacci kafesi kullanılabilir. Bu kafesler enlem-boylam değerleri bilinen noktalardan oluşmaktadır.

Bu makale çalışmasında Fibonacci kafeslerinin standart enlem-boylam gridine göre avantajları bir uygulama ile gösterilmeye çalışılmıştır. Türkiye'nin

Lambert konform konik projeksiyon ile haritasının üretilebilmesi için farklı aralıklarda standart enlem-boylam gridleri ve Fibonacci kafesi noktaları oluşturulmuş ve standart paralelleri farklı üç durum üzerinde deformasyonlar hesaplanmıştır. 1267 adet noktadan oluşan Fibonacci kafesi ile hesaplanan karakteristik deformasyon ölçütü üç farklı durum için sırasıyla 2401.66, 1008.32 ve 497.62ppm'dir. Öte yandan grid aralığı 0.1° seçilerek standart enlem-boylam gridinde 12545 adet nokta elde edilmiş ve sırasıyla üç farklı durum için 2393.34, 1004.56 ve 504.77ppm karakteristik deformasyon ölçütü değerleri hesaplanmıştır. Bu sonuçlardan hareketle, haritası üretilecek alanlarda deformasyon analizleri yapılırken, modellemede Fibonacci kafesinin kullanımının, analiz edilmesi gereken nokta sayısına bağlı olarak enlem-boylam gridi kullanımına göre daha fazla performans gösterdiği açıkça ortaya çıkmaktadır. Bu bulgular, Fibonacci kafesinin güncel harita üretim çalışmalarında özellikle de coğrafi bilgi sistemlerinde, uygun harita projeksiyonu, projeksiyon parametreleri seçimleri ve harita projeksiyonlarında deformasyon analizleri gibi uygulamalarda, mevcut yöntemlere alternatif olarak kullanılabileceğini göstermektedir. Çalışma, Fibonacci kafesiyle modellemelerin etkinliğini ve doğruluğunu vurgulamakta ve gelecekteki araştırmalar için yeni perspektifler sunmaktadır.

Bilgilendirme/Teşekkür

Yazarlar İzmir Kâtip Çelebi Üniversitesine çalışmadaki verilerin analiz edilmesi için gerekli bilgisayar donanım ve yazılımlarını sunduğu için teşekkür eder.

Araştırmacıların katkı oranı

Mevlüt Yetkin: Araştırma konusu fikri, literatür tarama, yöntem, hesaplama, makale yazımı ve gözden geçirme.

Osman Sami Kırtuloğlu: Literatür tarama, yöntem, hesaplama, makale yazımı ve gözden geçirme.

Mehmet Güven Koçak: Yöntem, hesaplama, makale yazımı ve gözden geçirme

Çatışma Beyanı

Herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Kaynakça

- Airy, G. , B. (1861). Explanation of a projection by balance of errors for maps applying to a very large extent of 615 the Earth's surface, and comparison of this projection with other projections. London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine, 4(22), 209-421.
- Baselga, S. (2018). Fibonacci lattices for the evaluation and optimization of map projections. *Computers & Geosciences*, 117, 1-8. <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2018.04.012>
- Baselga, S. (2019). TestGrids: Evaluating and Optimizing Map Projections. *Journal of Surveying Engineering*, 145(3). [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)SU.1943-5428.0000279](https://doi.org/10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000279)
- Bildirici, İ. Ö. (2017). Elipsoit Yüzeyinde Temel Ödev Çözümleri Üzerine Bir İnceleme. *Geomatik Dergisi Journal of Geomatics*, 2(1), 52-57.
- Bildirici, İ. Ö. (2019). Harita Projeksiyonları ve Nümerik Analiz. *Geomatik*, 4(2), 160-169. <https://doi.org/10.29128/geomatik.521988>
- Bildirici, İ. Ö. (2023a). Alan koruyan projeksiyonlar her zaman alan korur mu? *Geomatik*, 8(3), 306-311. <https://doi.org/10.29128/geomatik.1233816>
- Bildirici, İ. Ö. (2023b). Kartografya, Harita Tasarımı İçin Gerekli Bilim, Sanat ve Teknik (N. N. Uluğtekin, Ed.; 3. bs). Atlas Akademi.
- Burgayevskiy, L. M., ve Snyder, J. (1995). *Map Projections: A Reference Manual*. Taylor & Francis Ltd.
- Burkholder, E. F. (2008). *The 3-D Global Spatial Data Model*. CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9781420063035>
- Canters, F. . (2002). *Small-scale Map Projection Design*. Taylor & Francis.
- Deetz, C. H., ve Adams, O. S. (1938). *Elements of map projection with applications to map and chart construction (Sayı 68)*. US Government Printing Office.
- Gilbert, E. N. (1974). Distortion in maps. *Siam review*, 16(1), 47-62.
- González, Á. (2010). Measurement of Areas on a Sphere Using Fibonacci and Latitude-Longitude Lattices. *Mathematical Geosciences*, 42(1), 49-64. <https://doi.org/10.1007/s11004-009-9257-x>
- Harita Genel Müdürlüğü. (2024, Temmuz 10). Harita Genel Müdürlüğü. İndirilebilir Ürünler. <https://www.harita.gov.tr/>
- Hasanzadeh, M., Kamran, K. V., Feizizadeh, B., ve Mollabashi, S. H. (2024). GIS based spatial decision-making approach for solar energy site selection, Ardabil, Iran. *International Journal of Engineering and Geosciences*, 9(1), 115-130. <https://doi.org/10.26833/ijeg.1341451>
- Hinks, A. R. (1912). *Map Projections*, 2nd ed. Cambridge University Press.
- Jordan, W. . (1896). Der mittlere Verzerrungsfehler. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 22, 249-252.
- Kavrayskiy, V. V. (1934). *Matematicheskaya kartografiya [Mathematical Cartography]*. Moscow-Leningrad, Redbaza Goskartot resta.
- Keinert, B., Innmann, M., Sängler, M., ve Stamminger, M. (2015). Spherical fibonacci mapping. *ACM Transactions on Graphics*, 34(6), 1-7. <https://doi.org/10.1145/2816795.2818131>
- Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. John Wiley & Sons. <https://doi.org/10.1002/9781118033067>
- Mahdavifard, M., Ahangar, S. K., Feizizadeh, B., Kamran, K. V., ve Karimzadeh, S. (2023). Spatio-Temporal monitoring of Qeshm mangrove forests through machine learning classification of SAR and optical images on Google Earth Engine. *International Journal of Engineering and Geosciences*, 8(3), 239-250. <https://doi.org/10.26833/ijeg.1118542>
- Maling, D. H. (1960). A review of some Russian map projections. *Empire Survey Review*, 15(116), 255-266.
- Maling, D. H. (1992). *Coordinate systems and map projections*. Pergamon Press.
- Peters, A. B. (1975). Wie man unsere Weltkarten der Erde ähnlicher machen kann. *Kartographische Nachrichten*, 25(5), 173-183.
- Rajaković, M., ve Lapaine, M. (2010). The Best Conic Conformal Map Projection for the Territory of Croatia. *Kartografija i geoinformacije*, 9(14), 25-44.
- Sichugova, L., ve Fazilova, D. (2024). Study of the seismic activity of the Almalyk-Angren industrial zone based on lineament analysis. *International Journal of Engineering and Geosciences*, 9(1), 1-11. <https://doi.org/10.26833/ijeg.1192118>
- Snyder, J. P. (1987). *Map Projections: A Working Manual*. <https://doi.org/10.3133/pp1395>
- Swinbank, R., ve James Purser, R. (2006). Fibonacci grids: A novel approach to global modelling. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 132(619), 1769-1793. <https://doi.org/10.1256/qj.05.227>

