GAZİOSMANPAŞA BİLİMSEL ARAŞTIRMA DERGİSİ (GBAD)
Gaziosmanpasa Journal of Scientific Research
ISSN: 2146-8168
http://dergipark.gov.tr/gbad
Araştırma Makalesi (Research Article)

Cilt/Volume : 13
Sayı/Number: 3
Yıl/Year: 2024
Sayfa/Pages: 112-122

Alınış tarihi (Received): 15.11.2024
Kabul tarihi (Accepted): 30.12.2024

(s, t) –Pell Fark Dizileri

Şükran UYGUN[1,*], Ozan HAKLIDIR[1], Uğur ASLAN[1]

[1] *Department of Mathematics, Science and Art Faculty, Gaziantep University, Gaziantep, TURKEY*
** Sorumlu yazar: suygun@gantep.edu.tr*

ÖZET: Bu çalışmada, fark bağıntısı kavramını (s,t)-Pell, (s,t)-Pell-Lucas ve modifiye (s,t)-Pell sayı dizilerine uygulayacağız. (s,t)-Pell, (s,t)-Pell-Lucas ve modifiye (s,t)-Pell dizilerinin i. fark dizilerinin herhangi bir elemanını (s,t)-Pell, (s,t)-Pell-Lucas ve modifiye (s,t)-Pell sayılarını kullanarak bulmak için formüller oluşturacağız. Ayrıca bu yeni fark dizilerinin elemanlarının toplam formülleri, üreteç fonksiyonları, Binet formülleri ve bazı cebirsel özelliklerini inceleyeceğiz.

Anahtar Kelimeler – *(s,t)-Pell dizisi, (s,t)-Pell-Lucas dizisi, Modifiye (s,t)-Pell dizisi, Fark dizisi*

Some (s, t) –Pell Difference Sequences

ABSTRACT: In this study, we apply the concept of difference relation to the sequences of the (s,t)-Pell, (s,t)-Pell-Lucas, and modified (s,t)-Pell numbers. We will obtain formulas to find any term of the i th element of the (s,t)-Pell, (s,t)-Pell-Lucas, and modified (s,t)-Pell difference sequence from the initial (s,t)-Pell, (s,t)-Pell-Lucas, and modified (s,t)-Pell numbers. We will also find formulas for the sum of the elements of these new sequences as well as their generating functions, Binet formulas and some algebraic properties.

Keywords – *(s,t)-Pell sequence, (s,t)-Pell-Lucas sequence, Modifiye (s,t)-Pell sequence, Difference sequence*

1. Giriş

Matematikte önemli bir sayı dizisi olan Pell sayıları ikinin kareköküne yakın rasyonel yaklaşımların paydalarını içeren, eski zamanlardan beri bilinen sonsuz terimli bir dizidir. Pell sayıları, Fibonacci sayılarına benzer bir yineleme bağıntısı aracılığıyla hesaplanabilir. Pell sayıları, ikinin karekökünü yaklaşık olarak bulmak için kullanılmasının yanı sıra, kare üçgen sayıları bulmak, ikizkenar üçgene tamsayı yaklaşımları oluşturmak ve numaralandırma problemlerini çözmek için kullanılabilir.

Pell dizileri için Koshy'nin yazdığı kitap bu konu hakkında yazılmış en ayrıntılı kaynaklardan biridir [10]. Ayrıca, Catarino, Pell, Pell-Lucas ve modifiye *k*-Pell sayılarının bir tür genelleştirilmesi olan *k*-Pell, *k*-Pell-Lucas ve modifiye *k*-Pell sayılarının temel özelliklerini incelemiştir [1-3]. Yine, Catarino, *k*-Pell ve *k*-Pell-Lucas dizilerinin elemanlarıyla oluşturulmuş özel matrisleri kullanarak yeni özellikler ortaya çıkarmıştır [4]. Ayrıca, *k*-Pell, *k*-Pell-Lucas ve modifiye k-Pell dizileri için çeşitli toplam ve çarpım formülleri bulmuştur [5]. Petroudi ve Pirouz iki değişkenli *(k,h)*-Pell ve *(k,h)*-Pell-Lucas dizilerinin çeşitli özelliklerini incelemiştir [6]. Gulec ve Taskara, (*s,t)*-Pell ve (*s,t)*-Pell-Lucas dizilerinin elemanlarını kullanarak matris dizileri oluşturmuştur [7]. Spelina ve Wloch genelleştirilmiş Pell ve Pell-Lucas sayılarını araştırmışlardır [8]. Uygun ve Açar, *(s,t)*-Pell ve (*s,t)*-Pell-Lucas matris dizilerine ait yeni bazı özellikler bulmuşlardır [9].

Falcon fark dizi kavramını literatüre k-Fibonacci sayı dizilerinin fark dizilerini tanımlayarak kazandırmıştır [11]. Catarino, Pell Pell-Lucas ve modifiye k-Pell sayı dizilerini fark dizilerine uyarlamıştır [12]. Catarino, ayrıca Jacobsthal fark dizilerini ve özelliklerini de incelemiştir [13].

Bu makalede *(s,t)*-Pell, *(s,t)*-Pell-Lucas ve modifiye *(s,t)*-Pell sayı dizileri için fark bağıntısı incelendi. Öncelikle Pell, Pell-Lucas ve modifiye Pell sayı dizileri ile bu sayı dizilerinin bir çeşit genelleştirmesi olan *(s,t)*-Pell, *(s,t)*-Pell-Lucas ve modifiye *(s,t)*-Pell sayı dizileri tanıtıldı. Sonra bu genelleştirilmiş sayı dizileri kullanılarak *(s,t)*-Pell, *(s,t)*-Pell-Lucas ve modifiye *(s,t)*-Pell fark dizileri tanımlandı. Bu fark dizilerine ait yineleme bağıntısı, üreteç fonksiyonu, Binet formülü ve çeşitli cebirsel özellikleri elde edildi. *(s,t)*-Pell, *(s,t)*-Pell-Lucas ve modifiye *(s,t)*-Pell sayı dizileri ile aralarındaki bağıntılar incelendi.

2. (s,t)-Pell, (s,t)-Pell-Lucas ve modifiye (s,t)-Pell sayı dizileri

$P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$ tekrarlama bağıntısı ile verilen $P_0 = 0$ ve $P_1 = 1$ olmak üzere; $\{P_n\}_{n\in N}$ şeklindeki tamsayı dizisine Pell dizisi denir. Pell dizisinin Binet formülü $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ve $\beta = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere $P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ şeklindedir [10].

$Q_0 = 2$ ve $Q_1 = 2$ olmak üzere; $Q_{n+1} = 2Q_n + Q_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile ifade edilen $\{Q_n\}_{n\in N}$ şeklindeki tam sayı dizisine Pell Lucas dizisi denir. Pell Lucas dizisinin Binet formülü $Q_n = \alpha^n + \beta^n$ şeklindedir [10].

$q_0 = 1$ ve $q_1 = 1$ olmak üzere; $q_{n+1} = 2q_n + q_{n-1}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{q_n\}_{n\in N}$ sembolüyle gösterilen sayı dizisine modifiye Pell tamsayı dizisi denir. Modifiye Pell dizisinin Binet formülü $q_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}$ şeklindedir [10].

Tanım 2.1 $P_0(s,t) = 0$ ve $P_1(s,t) = 1$ için $P_{n+1}(s,t) = 2sP_n(s,t) + tP_{n-1}(s,t)$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{P_n(s,t)\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine (s,t)-Pell sayı dizisi denir.

Yineleme bağıntısının karakteristik denklemi $x^2 = 2sx + t$ biçiminde elde edilir buradan kökleri $r_1 = s + \sqrt{s^2 + t}$ ve $r_2 = s - \sqrt{s^2 + t}$ dir ve $r_1 + r_2 = 2s$, $r_1 - r_2 = 2\sqrt{s^2 + t}$ ve $r_1 r_2 = -t$ sağlanır. Bu dizinin Binet formülü $r_1 = s + \sqrt{s^2 + t}$ ve $r_2 = s - \sqrt{s^2 + t}$ olmak üzere $P_n(s,t) = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}$ şeklindedir [7, 8].

Tanım 2.2 $Q_0(s,t) = 2$ ve $Q_1(s,t) = 2s$ için $Q_{n+1}(s,t) = 2sQ_n(s,t) + tQ_{n-1}(s,t)$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{Q_n(s,t)\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine (s,t)-Pell Lucas dizisi denir.

(s,t)-Pell-Lucas dizisinin Binet formülü $Q_n(s,t) = r_1^n + r_2^n$ şeklindedir [7, 8].

Tanım 2.3 $q_0(s,t) = 1$ ve $q_1(s,t) = s$ için $q_{n+1}(s,t) = 2sq_n(s,t) + tq_{n-1}(s,t)$ yineleme bağıntısıyla ifade edilen $\{q_n(s,t)\}_{n=1}^{\infty}$ sayı dizisi modifiye *(s,t)*-Pell dizisi olarak adlandırılır. Modifiye *(s,t)*-Pell dizisinin Binet formülü $q_n(s,t) = \frac{r_1^n + r_2^n}{2}$ şeklindedir [7, 8].

3. (s,t)-Pell, (s,t)-Pell-Lucas ve modifiye (s,t)-Pell fark dizileri

Bu çalışma, fark bağıntısı kavramının *(s,t)*-Pell, *(s,t)*-Pell-Lucas ve modifiye *(s,t)*-Pell sayı dizilerine uygulanmasını temsil etmektedir. Bu uygulamadan yola çıkarak, *(s,t)*-Pell, *(s,t)*-Pell-Lucas ve modifiye (*s,t*)-Pell fark dizilerini tanımlayıp bu dizilerin yineleme bağıntılarını ve üreteç fonksiyonları incelenecektir. Ayrıca bu yeni dizilerin bazı cebirsel özellikleri ve Binet formülleri oluşturulacaktır.

$(a_0, \ a_1, \dots, a_n, \dots)$ sıralı bir dizi olsun. $\Delta(a_n)$ ile gösterilen (a_n) dizisinin birinci farkı $\Delta(a_n) = a_{n+1} - a_n$, $n \geq 0$ olarak tanımlanır[14]. (a_n) dizisinin i. farkı [6] $\Delta^i(a_n) = \Delta^{i-1}(a_{n+1}) - \Delta^{i-1}(a_n) = \sum_{t=0}^{j}\binom{j}{t}(-1)^t a_{n+j-t}$ ile ifade edilir [14].

Tanım 3.1 (*s,t*)-Pell, (*s,t*)-Pell-Lucas ve modifiye (*s,t)*-Pell sayı dizilerinden oluşan fark dizileri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$\Delta(P_n(\mathrm{s,t})) = P_{n+1}(\mathrm{s,t}) - P_n(\mathrm{s,t})$, $n \geq 0$

$\Delta(Q_n(\mathrm{s,t})) = Q_{n+1}(\mathrm{s,t}) - Q_n(\mathrm{s,t})$, $n \geq 0$

$\Delta(q_n(\mathrm{s,t})) = q_{n+1}(\mathrm{s,t}) - q_n(\mathrm{s,t})$, $n \geq 0$.

Lemma 3.2 *(s,t)*-Pell, *(s,t)*-Pell-Lucas ve modifiye *(s,t)*-Pell sayı dizileri aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$P_{n+1}(\mathrm{s,t}) = r_1 P_n(\mathrm{s,t}) + r_2^n$

$Q_{n+1}(\mathrm{s,t}) = r_1 Q_n(\mathrm{s,t}) - (r_1 - r_2) r_2^n$

$q_{n+1}(\mathrm{s,t}) = r_1 q_{,n}(\mathrm{s,t}) - (r_1 - r_2) r_2^n$.

İspat: (s,t)-Pell dizisi için Binet formülünden

$$r_1 P_n(\mathrm{s,t}) + r_2^n = r_1 \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} + r_2^n = P_{n+1}(\mathrm{s,t})$$

istenen elde edilir. Diğer özdeşlikler de benzer olarak ispatlanabilir.

Lemma 3.3 *(s,t)*-Pell, *(s,t)*-Pell-Lucas ve modifiye *(s,t)*-Pell sayı dizilerinden oluşan fark dizileri aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. $\Delta(P_n(\mathrm{s,t})) = (r_1 - 1)P_n(\mathrm{s,t}) - r_2^n$
2. $\Delta(Q_n(\mathrm{s,t})) = (r_1 - 1)Q_n(\mathrm{s,t}) - (r_1 - r_2)r_2^n$
3. $\Delta(q_n(\mathrm{s,t})) = (r_1 - 1)q_n(\mathrm{s,t}) - (r_1 - r_2)r_2^n$

İspat: Lemma 3.3 kullanılarak aşağıdaki gibi ispatlar elde edilir:

1: $\Delta(P_n(\mathrm{s,t})) = P_{n+1}(\mathrm{s,t}) - P_n(\mathrm{s,t}) = r_1 P_n(\mathrm{s,t}) + r_2^n - P_n(\mathrm{s,t}) = (r_1 - 1)P_n(\mathrm{s,t}) + r_2^n$
2: $\Delta(Q_n(\mathrm{s,t})) = Q_{n+1}(\mathrm{s,t}) - Q_n(\mathrm{s,t}) = r_1 Q_n(\mathrm{s,t}) - (r_1 - r_2)r_2^n - Q_n(\mathrm{s,t}) = (r_1 - 1)Q_n(\mathrm{s,t}) - (r_1 - r_2)r_2^n$

3: $Q_n(\mathrm{s,t}) = 2q_n(\mathrm{s,t})$ eşitliğinden ve $\Delta(q_n(\mathrm{s,t})) = q_{n+1}(\mathrm{s,t}) - q_n(\mathrm{s,t})$ tanımından istenen görülür.

Tanım 3.4 (*s,t)*-Pell, *(s,t)*-Pell-Lucas ve modifiye *(s,t)*-Pell sayı dizilerinden oluşan ikinci mertebeden fark dizileri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$\Delta^2(P_n(\mathrm{s,t})) = \Delta(P_{n+1}(\mathrm{s,t})) - \Delta(P_n(\mathrm{s,t})) = P_{n+2}(\mathrm{s,t}) - 2P_{n+1}(\mathrm{s,t}) + P_n(\mathrm{s,t})$, $n \geq 1$
$\Delta^2(Q_n(\mathrm{s,t})) = \Delta(Q_{n+1}(\mathrm{s,t})) - \Delta(Q_n(\mathrm{s,t})) = Q_{n+2}(\mathrm{s,t}) - 2\,Q_{n+1}(\mathrm{s,t}) + Q_n(\mathrm{s,t})$, $n \geq 1$
$\Delta^2(q_n(\mathrm{s,t})) = \Delta(q_{n+1}(\mathrm{s,t})) - \Delta(q_n(\mathrm{s,t})) = q_{n+2}(\mathrm{s,t}) - 2\,q_{n+1}(\mathrm{s,t}) + q_n(\mathrm{s,t})$, $n \geq 1$.

Lemma 3.5 *(s,t)*-Pell, *(s,t)*-Pell-Lucas ve modifiye (*s,t*)-Pell sayı dizilerinden oluşan ikinci fark dizileri aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. $\Delta^2(P_n(s,t)) = (2s-2)P_{n+1}(s,t) + (t+1)P_n(s,t)$,
2. $\Delta^2(Q_n(s,t)) = (2s-2)Q_{n+1}(s,t) + (t+1)Q_n(s,t)$,
3. $\Delta^2(q_n(s,t)) = (2s-2)q_{n+1}(s,t) + (t+1)q_n(s,t)$.

İspat: *(s,t)*-Pell, *(s,t)*-Pell-Lucas ve modifiye *(s,t)*-Pell sayı dizilerinin yineleme bağıntılarından

$$\begin{aligned}\Delta(P_n(s,t)) &= \Delta(P_{n+1}(s,t)) - \Delta(P_n(s,t)) \\ &= P_{n+2}(s,t) - 2P_{n+1}(s,t) + P_n(s,t \\ &= 2sP_{n+1}(s,t) + tP_n(s,t) - 2P_{n+1}(s,t) + P_n(s,t) \\ &= (2s-2)P_{n+1}(s,t) + (t+1)P_n(s,t)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\Delta(Q_n(s,t)) &= \Delta(Q_{n+1}(s,t)) - \Delta(Q_n(s,t)) \\ &= Q_{n+2}(s,t) - 2Q_{n+1}(s,t) + Q_n(s,t) \\ &= 2sQ_{n+1}(s,t) + tQ_n(s,t) - 2Q_{n+1}(s,t) + Q_n(s,t \\ &= (2s-2)Q_{n+1}(s,t) + (t+1)Q_n(s,t)\end{aligned}$$

ile $2q_n = Q_n$ olduğu gerçeğinden hareketle gerekli özdeşlik kolayca elde edilir.

Tanım 3.6 *n* ve *i* negatif olmayan tam sayılar olsun. *(s,t)*-Pell, *(s,t)*-Pell-Lucas ve modifiye *(s,t)*-Pell fark dizileri sırasıyla şu şekilde gösterilip $\left\{P_n^{(i)}\right\}_{n=0}^{\infty}$, $\left\{Q_n^{(i)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\left\{q_n^{(i)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\left\{P_n^{(i)}\right\}=\left\{\Delta^i(P_n)\right\},$$
$$\left\{Q_n^{(i)}\right\}=\left\{\Delta^i(Q_n)\right\},$$
$$\{q_n^{(i)}\}=\left\{\Delta^i(q_n)\right\}.$$

Lemma 3.7 n≥ 0 tamsayısı için *(s,t)*-Pell, *(s,t)*-Pell-Lucas ve modifiye *(s,t)*-Pell sayı dizilerinden oluşan herhangi bir mertebeden fark dizileri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Delta^j(P_n(\mathrm{s,t})) = \sum_{t=0}^{j}\binom{j}{t}(-1)^t P_{n+j-t}(\mathrm{s,t}),$$
$$\Delta^j(Q_n(\mathrm{s,t})) = \sum_{t=0}^{j}\binom{j}{t}(-1)^t Q_{n+j-t}(\mathrm{s,t}),$$
$$\Delta^j(q_n(\mathrm{s,t})) = \sum_{t=0}^{j}\binom{j}{t}(-1)^t q_{n+j-t}(\mathrm{s,t}).$$

Örneğin *n=0 ve n=1* için aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$\Delta^0(P_n(\mathrm{s,t})) = P_n(\mathrm{s,t})$, $\Delta^1(P_n(\mathrm{s,t}))= \Delta(P_n(\mathrm{s,t}))$,
$\Delta^0(Q_n(\mathrm{s,t})) =Q_n(\mathrm{s,t})$, $\Delta^1(Q_n(\mathrm{s,t})) = \Delta(Q_n(\mathrm{s,t}))$,
$\Delta^0(q_n(\mathrm{s,t})) = q_n(\mathrm{s,t})$, $\Delta^1(q_n(\mathrm{s,t}))= \Delta\big(q_n(\mathrm{s,t})\big)$.

İspat: Tanım 3.1 ve binom açılımının özelliklerinden

$$\Delta^{i+1}(P_n(s,t))= \Delta^i(P_{n+1}(s,t))\text{-}\ \Delta^i(P_n(s,t))$$
$$=\sum_{t=0}^{i}\binom{i}{t}(-1)^t P_{n+1+i-t}(\mathrm{s,t})-\sum_{t=0}^{i}\binom{i}{t}(-1)^t P_{n+i-t}(\mathrm{s,t})$$
$$=\sum_{t=0}^{i+1}\binom{i}{t}(-1)^t P_{n+1+i-t}(\mathrm{s,t})-\sum_{t=1}^{i+1}\binom{i}{t-1}(-1)^{t-1} P_{n+i-t+1}(\mathrm{s,t})$$
$$=\sum_{t=0}^{i+1}(-1)^t\left[\binom{i}{t}+\binom{i}{t-1}\right]P_{n+1+i-t}(\mathrm{s,t})$$
$$=\sum_{t=0}^{i+1}(-1)^t\binom{i+1}{t}P_{n+1+i-t}(\mathrm{s,t})$$

istenen eşitlik elde edilir.

Lemma 3.8 *(s,t)*-Pell, *(s,t)*-Pell-Lucas ve modifiye *(s,t)*-Pell sayı dizilerinden oluşan herhangi bir mertebeden fark dizileri aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$\Delta^j(P_n) = \frac{1}{2s}\ \Delta^j(P_{n+1}(\mathrm{s,t}))\text{-}\frac{t}{2s}\ \Delta^j(P_{n-1}(\mathrm{s,t})),$$

$$\Delta^j(Q_n) = \frac{1}{2s}\ \Delta^j(Q_{n+1}(\mathrm{s,t})) - \frac{t}{2s}\ \Delta^j(Q_{n-1}(\mathrm{s,t})),$$

$$\Delta^j(q_n) = \frac{1}{2s}\ \Delta^j(q_{n+1}(\mathrm{s,t}))\text{-}\frac{t}{2s}\ \Delta^j(q_{n-1}(\mathrm{s,t})).$$

İspat: *(s,t)*-Pell, *(s,t)*-Pell-Lucas ve modifiye (*s*,*t*)-Pell sayı dizilerinin yineleme bağıntılarından ve fark dizisi tanımından

$$\Delta^j(P(\mathrm{s,t})_n)=\sum_{t=0}^{j}\binom{j}{t}(-1)^t P_{n+j-t}(\mathrm{s,t})$$
$$=\frac{1}{2s}\sum_{t=0}^{j}\binom{j}{t}(-1)^t(P_{n+1+j-t}(\mathrm{s,t})\text{-}tP_{n+j-1-t}(\mathrm{s,t}))$$
$$=\frac{1}{2s}\sum_{t=0}^{j}\binom{j}{t}(-1)^t(P_{n+1+j-t}(\mathrm{s,t})\text{-}\frac{t}{2s}\sum_{t=0}^{j}\binom{j}{t}(-1)^t P_{n+j-1-t}(\mathrm{s,t})$$
$$=\frac{1}{2s}\Delta^j(P_{n+1}(\mathrm{s,t}))\text{-}\frac{t}{2s}\Delta^j(P_{n-1(\mathrm{s,t})})$$

ve

$$\Delta^j(Q_n)=\sum_{t=0}^{j}\binom{j}{t}(-1)^t Q_{n+j-t(\mathrm{s,t})}$$
$$=\frac{1}{2s}\sum_{t=0}^{j}\binom{j}{t}(-1)^t(Q_{n+1+j-t}(\mathrm{s,t})\text{-}tQ_{n+j-1-t}(\mathrm{s,t}))$$
$$=\frac{1}{2s}\sum_{t=0}^{j}\binom{j}{t}(-1)^t(Q_{n+1+j-t}(\mathrm{s,t})\text{-}\frac{t}{2s}\sum_{t=0}^{j}\binom{j}{t}(-1)^t Q_{n+j-1-t}(\mathrm{s,t})$$
$$=\frac{1}{2s}\Delta^j(Q_{n+1}(\mathrm{s,t}))\text{-}\frac{t}{2s}\Delta^j(Q_{n-1}(\mathrm{s,t}))$$

eşitlikleri elde edilir. Modifiye (*s*,*t)*-Pell sayı dizisi için de benzer bir yöntem izlenir.

Teorem 3.9 *(s,t)*-Pell, *(s,t)*-Pell-Lucas ve modifiye *(s,t)*-Pell fark dizileri yineleme bağıntıları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$P_{n+1}^{(i)}(s,t)=2sP_n^{(i)}(s,t)+\mathrm{t}P_{n-1}^{(i)}(s,t)$$

$$Q_{n+1}^{(i)}(s,t)=2sQ_n^{(i)}(s,t)+\mathrm{t}Q_{n-1}^{(i)}(s,t)$$

$$q_{n+1}^{(i)}(s,t)=2sq_n^{(i)}(s,t)+\mathrm{t}q_{n-1}^{(i)}(s,t)$$

İspat: İspat için tümevarım kullanalım. *i=1* değeri için

$$P_{n+1}^{(1)}(s,t)=\Delta(P_{n+1}(s,t))=P_{n+2}(s,t)-P_{n+1}(s,t)$$
$$=(2sP_{n+1}(s,t)+tP_n(s,t))-(2sP_n(s,t)+tP_{n-1}(s,t))$$
$$=2s(P_{n+1}(s,t)-P_n(s,t))+t(P_n(s,t)-P_{n-1}(s,t))$$
$$=2s\Delta(P_n(s,t))+t\Delta(P_{n-1}(s,t))$$

sağlanır. Bu formülün *k=i* için doğru olduğunu varsayalım:

$$P_{n+1}^{(i)}(s,t)=2sP_n^{(i)}(s,t)+tP_{n-1}^{(i)}(s,t).$$

Bu formülün *k=i+1* için doğruluğunu gösterelim:

$$P_{n+2}^{(i+1)}(s,t)=P_{n+2}^{(i)}(s,t)-P_n^{(i)}(s,t)$$
$$=\left(2sP_{n+1}^{(i)}(s,t)+tP_n^{(i)}(s,t)\right)-\left(2sP_n^{(i)}(s,t)+tP_{n-1}^{(i)}(s,t)\right)$$
$$=2s\left(P_{n+1}^{(i)}(s,t)-P_n^{(i)}(s,t)\right)+t\left(P_n^{(i)}(s,t)-P_{n-1}^{(i)}(s,t)\right)$$
$$=2sP_n^{(i)}(s,t)+tP_{n-1}^{(i)}(s,t).$$

Diğer ispatlar da benzer şekilde yapılır.

Teorem 3.10 *(s,t)*-Pell, *(s,t)*-Pell-Lucas ve modifiye *(s,t)*-Pell fark dizileri için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$P_n^{(i)}(s,t) = (2s-1)P_{n-1}^{(i-1)}(s,t) + tP_{n-2}^{(i-1)}(s,t),$$

$$Q_n^{(i)}(s,t) = (2s-1)Q_{n-1}^{(i-1)}(s,t) + tQ_{n-2}^{(i-1)}(s,t),$$

$$q_n^{(i)}(s,t) = (2s-1)q_{n-1}^{(i-1)}(s,t) + tq_{n-2}^{(i-1)}(s,t)\ .$$

İspat: Lemma 4.5.7 ve toplam sembolünün bazı özellikleri kullanılarak

$$P_n^{(i)}(s,t) = \sum_{t=0}^{i}\binom{i}{t}(-1)^t P_{n+i-t}(s,t) = P_{n+i}(s,t) + \sum_{t=1}^{i}\binom{i}{t}(-1)^t P_{n+i-t}(s,t)$$

$$= P_{n+i}(s,t) + \sum_{t=1}^{i-1}\binom{i}{t}(-1)^t P_{n+i-t}(s,t) + (-1)^i P_n(s,t)$$

$$= P_{n+i}(s,t) + \sum_{t=1}^{i-1}\left[\binom{i-1}{t} + \binom{i-1}{t-1}\right](-1)^t P_{n+i-t}(s,t) - (-1)^{i-1} P_n(s,t)$$

$$= P_{n+i}(s,t) + \sum_{t=1}^{i-1}\binom{i-1}{t}(-1)^t P_{n+i-t} - \sum_{t=0}^{i-1}\binom{i-1}{t}(-1)^t P_{n+i-t-1}(s,t)$$

$$= \sum_{t=0}^{i-1}\binom{i-1}{t}(-1)^t P_{n+i-t}(s,t) - \sum_{t=0}^{i-1}\binom{i-1}{t}(-1)^t P_{n+i-t-1}(s,t)$$

$$= \sum_{t=0}^{i-1}\binom{i-1}{t}(-1)^t (2sP_{n+i-t-1}(s,t) + tP_{n+i-t-2}(s,t)) - \sum_{t=0}^{i-1}\binom{i-1}{t}(-1)^t P_{n+i-t-1}(s,t)$$

$$= (2s-1)\sum_{t=0}^{i-1}\binom{i-1}{t}(-1)^t P_{n+i-t-1}(s,t) + t\sum_{t=0}^{i-1}\binom{i-1}{t}(-1)^t P_{n+i-t-2}(s,t)$$

$$= (2s-1)P_{n-1}^{(i-1)}(s,t) + tP_{n-2}^{(i-1)}(s,t)$$

elde edilir.

Teorem 3.11 (**Binet formülü**) *(s,t)*-Pell, (s,t)-Pell-Lucas ve modifiye *(s,t)*-Pell fark dizileri için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$P_n^{(i)}(s,t) = P_1^{(i)}(s,t)P_n(s,t) + P_0^{(i)}(s,t)P_{n-1}(s,t)$$

$$Q_n^{(i)}(s,t) = Q_1^{(i)}(s,t)P_n(s,t) + tQ_0^{(i)}(s,t)P_{n-1}(s,t)$$

$$Q_n^{(i)}(s,t) = \frac{Q_1^{(i)}(s,t)[Q_n(s,t) - 2r_2^n] + tQ_0^{(i)}(s,t)[Q_{n-1}(s,t) - 2r_2^{n-1}]}{r_1 - r_2}$$

$$q_n^{(i)}(s,t) = q_1^{(i)}(s,t)P_n(s,t) + tq_0^{(i)}(s,t)P_{n-1}(s,t)$$

$$q_n^{(i)}(s,t) = \frac{q_1^{(i)}(s,t)[q_n(s,t) - 2r_2^n] + tq_0^{(i)}(s,t)[q_{n-1}(s,t) - 2r_2^{n-1}]}{r_1 - r_2}$$

İspat: $P_n^{(i)}(s,t) = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ olarak yazılsın. Amacımız buradaki c_1, c_2 eğerlerini bulmaktır. Bu denklemde *n=0 ve n=1* yazarsak,

$$P_0^{(i)}(s,t) = c_1 + c_2$$

$$P_1^{(i)}(s,t) = c_1 r_1 + c_2 r_2$$

şeklinde yazabiliriz. $c_2 = P_0^{(i)}(s,t) - c_1$ eşitliğinden

$$c_1 r_1 + r_2\left(P_0^{(i)}(s,t) - c_1\right) = P_1^{(i)}(s,t)$$
$$c_1(r_1 - r_2) = P_1^{(i)}(s,t) - r_2 P_0^{(i)}(s,t)$$
$$c_1 = \frac{P_1^{(i)}(s,t) - r_2 P_0^{(i)}(s,t)}{r_1 - r_2}$$

elde edilir. Bu sonuçtan da

$$c_2 = \frac{-P_1^{(i)}(s,t) + r_1 P_0^{(i)}(s,t)}{r_1 - r_2}$$

elde edilmiş olur. Böylece

$$P_n^{(i)} = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n = \left(\frac{P_1^{(i)}(s,t) - r_2 P_0^{(i)}(s,t)}{r_1 - r_2}\right) r_1^n + \left(\frac{-P_1^{(i)}(s,t) + r_1 P_0^{(i)}(s,t)}{r_1 - r_2}\right) r_2^n$$
$$= \frac{P_1^{(i)}(s,t)(r_1^n - r_2^n) + P_0^{(i)}(s,t)((r_1 r_2^n - r_2 r_1^n)}{r_1 - r_2}$$
$$= \frac{P_1^{(i)}(s,t)(r_1^n - r_2^n) - r_1 r_2 P_0^{(i)}(s,t)(r_1^{n-1} - r_2^{n-1})}{r_1 - r_2}$$
$$= P_1^{(i)}(s,t)\left(\frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}\right) + P_0^{(i)}(s,t)\left(\frac{r_1^{n-1} - r_2^{n-1}}{r_1 - r_2}\right)$$
$$= P_1^{(i)}(s,t) P_n(s,t) + P_{,0}^{(i)}(s,t) P_{n-1}(s,t)$$

istenen elde edilir.

(s,t)-Pell-Lucas fark dizileri için Binet formülü için $Q_n^i(s,t) = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ dekleminde *n=0 ve n=1* yazılırsa

$$Q_0^{(i)}(s,t) = c_1 + c_2$$
$$Q_1^{(i)}(s,t) = c_1 r_1 + c_2 r_2$$

olur. Bu denklemlerden $c_2 = Q_0^{(i)}(s,t) - c_1$ sağlanır. Buradan da

$$c_1 r_1 + r_2\left(Q_0^{(i)}(s,t) - c_1\right) = Q_1^{(i)}(s,t)$$
$$c_1(r_1 - r_2) = Q_1^{(i)}(s,t) - r_2 Q_0^{(i)}(s,t)$$
$$c_1 = \frac{Q_1^{(i)}(s,t) - r_2 Q_0^{(i)}(s,t)}{r_1 - r_2}$$

ve

$$c_2 = \frac{-Q_1^i(s,t) + r_1 Q_0^i(s,t)}{r_1 - r_2}$$

elde edilir. Böylece

$$Q_n^{(i)}(s,t) = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n = (\frac{Q_1^{(i)}(s,t) - r_2 Q_0^{(i)}(s,t)}{r_1 - r_2})\, r_1^n + (\frac{-Q_1^{(i)}(s,t) + r_1 Q_0^{(i)}(s,t)}{r_1 - r_2}) r_2^n$$
$$= \frac{Q_1^{(i)}(s,t)(r_1^n - r_2^n) + Q_0^{(i)}(s,t)(r_1 r_2^n - r_2 r_1^n)}{r_1 - r_2}$$
$$= \frac{Q_1^{(i)}(s,t)(r_1^n - r_2^n) - r_1 r_2 Q_0^{(i)}(s,t)(r_1^{n-1} - r_2^{n-1})}{r_1 - r_2}$$
$$= Q_1^{(i)}(s,t)\left(\frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}\right) + tQ_0^{(i)}(s,t)\left(\frac{r_1^{n-1} - r_2^{n-1}}{r_1 - r_2}\right)$$
$$= Q_1^{(i)}(s,t)P_n(s,t) + tQ_0^{(i)}(s,t)P_{n-1}(s,t)$$

veya

$$Q_n^{(i)}(s,t) = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$
$$= \left(\frac{Q_1^{(i)}(s,t) - r_2 Q_0^{(i)}(s,t)}{r_1 - r_2}\right) r_1^n + \left(\frac{-Q_1^{(i)}(s,t) + r_1 Q_0^{(i)}(s,t)}{r_1 - r_2}\right) r_2^n$$
$$= \frac{Q_1^{(i)}(s,t)(r_1^n - r_2^n) + Q_0^{(i)}(s,t)(r_1 r_2^n - r_2 r_1^n)}{r_1 - r_2}$$
$$= \frac{Q_1^{(i)}(s,t)(r_1^n + r_2^n) - 2Q_1^{(i)}(s,t) r_2^n + tQ_0^{(i)}(s,t)(r_1^{n-1} + r_2^{n-1}) - 2tQ_0^{(i)}(s,t) r_2^{n-1}}{r_1 - r_2}$$
$$= \frac{Q_1^{(i)}(s,t)[Q_n(s,t) - 2r_2^n] + tQ_0^{(i)}(s,t)[Q_{n-1}(s,t) - 2r_2^{n-1}]}{r_1 - r_2}$$

istenen bulunur. Modifiye *(s,t)*-Pell fark dizileri için Binet formülü benzer şekilde bulunur.

Teorem 3.12 *(s,t)*-Pell, *(s,t)*-Pell-Lucas ve modifiye *(s,t)*-Pell fark dizileri için üreteç fonksiyonları şu şekilde verilmektedir:

$$f_p^{(i)}(x) = \frac{(1-2sx)P_0^{(i)}(s,t) + xP_1^{(i)}(s,t)}{1 - 2sx - tx^2},$$

$$f_Q^{(i)}(x) = \frac{(1-2sx)Q_0^{(i)}(s,t) + xQ_1^{(i)}(s,t)}{1 - 2sx - tx^2}$$

$$f_q^{(i)}(x) = \frac{(1-2sx)q_0^{(i)}(s,t) + xq_1^{(i)}(s,t)}{1 - 2sx - tx^2}$$

İspat: *(s,t)*-Pell fark dizisi için üreteç fonksiyonu için yineleme bağıntısını da kullanarak

$$f_p^{(i)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(i)}(s,t)x^n$$

$$= P_0^{(i)}(s,t) + P_1^{(i)}(s,t)x + \sum_{n=2}^{\infty}\left(2sP_{n-1}^{(i)}(s,t)x^n + tP_{n-2}^{(i)}(s,t)x^n\right)$$

$$= P_0^{(i)}(s,t) + P_1^{(i)}(s,t)x + 2s\sum_{n=2}^{\infty} P_{n-1}^{(i)}(s,t)x^n + t\sum_{n=2}^{\infty} P_{n-2}^{(i)}(s,t)x^n$$

yazılır. *n-1=m*, *n-2=p* için

$$= P_0^{(i)}(s,t) + P_1^{(i)}(s,t)x + 2sx\sum_{m=1}^{\infty} P_m^{(i)}(s,t)x^m + tx^2\sum_{p=0}^{\infty} P_p^{(i)}(s,t)x^p$$
$$= P_0^{(i)}(s,t) + P_1^{(i)}(s,t)x - 2sxP_0^{(i)}(s,t) + 2sxf_p^{(i)}(x) + tx^2 f_p^{(i)}(x)$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse

$$f_p^{(i)}(x) = \frac{(1-2sx)P_0^{(i)}(s,t) + xP_1^{(i)}(s,t)}{1-2sx-tx^2}$$

bulunur.*(s,t)*-Pell-Lucas fark dizisi için üreteç fonksiyonu için yineleme bağıntısını da kullanarak

$$g_p^{(i)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{(i)}(s,t)x^n$$

$$= Q_0^{(i)}(s,t) + Q_1^{(i)}(s,t)x + \sum_{n=2}^{\infty}\left(2sQ_{n-1}^{(i)}(s,t) + tQ_{n-2}^{(i)}(s,t)\right)x^n$$

$$= Q_0^{(i)}(s,t) + Q_1^{(i)}(s,t)x + 2s\sum_{n=2}^{\infty} Q_{n-1}^{(i)}(s,t)x^n + t\sum_{n=2}^{\infty} Q_{n-2}^{(i)}(s,t)x^n$$

yazılır. *n-1=m*, *n-2=p* için

$$= Q_0^{(i)}(s,t) + Q_1^{(i)}(s,t)x + 2sx\sum_{m=1}^{\infty} Q_m^{(i)}(s,t)x^m + tx^2\sum_{p=0}^{\infty} Q_p^{i(i)}(s,t)x^p$$
$$= Q_0^{(i)}(s,t) + Q_1^{(i)}(s,t)x - 2sxQ_0^{(i)}(s,t) + 2sxg_p^{(i)}(x) + tx^2 g_p^{(i)}(x)$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse

$$g_p^{(i)}(x) = \frac{(1-2sx)Q_0^{(i)}(s,t) + xQ_1^{(i)}(s,t)}{1-2sx-tx^2}$$

bulunur. Modifiye (s,t)-Pell fark dizisinim üreteç fonksiyonu için yine yineleme bağıntısını kullanılarak benzer işlemler yapılarak sonuç bulunur.

4. Kaynaklar

[1] Catarino, P., 2013. On some identities and generating functions for k-Pell numbers, Int. J. Math. Anal. (Ruse), 7(38), 1877-1884.
[2] Catarino, P., 2013. A note involving two-by-two matrices of the k-Pell and k-Pell-Lucas sequences, Int. Math. Forum, 8(32), 1561-1568.
[3] Catarino, P., Vasco, P., 2013. On Some Identities and Generating Functions for k-Pell-Lucas Sequence, Appl. Math. Sci., 7(98), 4867-4873.
[4] Catarino, P., Vasco, P., 2013. Modified k-Pell Sequence: Some Identities and Ordinary Generating Function, Appl. Math. Sci., 7(121), 6031-6037.
[5] Vasco, P ., Catarino, P., 2014. Sums and products involving terms of k-Pell, k-Pell-Lucas and Modified k-Pell sequences", JP J. Algebra, Number Theory Appl., 32(2), 87-98.
[6] Petroudi SHJ, Pirouz B. 2015. On some properties of (k, h)-Pell sequence and (k, h)-Pell-Lucas sequence, International Journal of Advances in Applied Mathmatics and Mechanics. 3(1), 98-101.
[7] Gulec, H. H., Taskara, N., 2012. On the (s, t)-Pell and (s, t)-Pell.Lucas sequences and their matrix representations, Applied Mathematics Letters, 25(10), 1554-1559.

[8] Uygun, Ş., Açar, Z. S., 2023. Notes on (s, t)-Pell and (s, t)-Pell Lucas matrix sequences, Asian Journal of Mathematics and Physics, 7 Article ID 1
[9] Spelina, LT Wloch. I. On Generalized Pell and Pell-Lucas Numbers, Iran J. Sci. Technol Sci. Available: https://doi.org/10.1007/s40995-019-00757-7
[10] Koshy, T., 2014. Pell and Pell-Lucas numbers with applications. Springer, Berlin.
[11] Falcon, S., 2016. The k-Fibonacci difference sequences, Chaos, Solitons Fractals, 87, 153-157.
[12] Catarino, P., 2017. On some Pell difference sequences, MAYFEB Journal of Mathematics , 4, 73-84.
[13] Catarino, P., 2018. On Jacobsthal Dıfference Sequences, Acta Math. Univ. Comenianae, LXXXVII, 267-276.
[14] https://en.wikipedia.org/wiki/Recurrence relation.